

ELETTROTECNICA

PARTE I

TEORIA DEI CIRCUITI (CAP. I-XI)

CAPITOLO I, BIPOLI	1
I) DEFINIZIONI GENERALI E POTENZE	1
II) I BIPOLI ATTIVI	2
III) I BIPOLI PASSIVI	3
IV) EQUIVALENZA FRA BIPOLI. CASO GENERALE	4
V) EQUIVALENZA FRA BIPOLI. APPLICAZIONI	6
VI) EQUIVALENZA FRA BIPOLI. TRASFORMAZIONI TRIANGOLO-STELLA E STELLA-TRIANGOLO	8
VI) GENERATORI NORMALI	11
CAPITOLO II, RETI ELETTRICHE	13
I) DEFINIZIONI GENERALI	13
II) LE LEGGI DI KIRCHHOFF	14
III) SOLUZIONE DI UNA RETE ELETTRICA	14
IV) METODO GENERALE DI ANALISI DI UNA RETE ELETTRICA	15
CAPITOLO III, RETI LINEARI	20
I) SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI	20
II) GENERATORI EQUIVALENTI	22
III) TEOREMA DI SOSTITUZIONE E FORMULA DI MILLMANN	24
IV) RENDIMENTO E ADATTAMENTO DEL CARICO	30
CAPITOLO IV, METODO RISOLUTIVO DELLE MAGLIE PER RETI LINEARI	33
CAPITOLO V, METODO RISOLUTIVO DEI NODI PER RETI LINEARI	41

CAPITOLO VI, FUNZIONI SINUSOIDALI E FASORI	48
CAPITOLO VII, BIPOLI IN REGIME SINUSOIDALE	56
I) POTENZE	56
II) GENERATORI IDEALI IN REGIME SINUSOIDALE	61
III) RESISTORE IN REGIME SINUSOIDALE	61
IV) INDUTTORE IN REGIME SINUSOIDALE	63
V) CONDENSATORE IN REGIME SINUSOIDALE	65
VI) IMPEDENZA	67
VII) SUSCETTANZE E AMMETTENZE	68
VIII) IMPEDENZE EQUIVALENTI	70
CAPITOLO VIII, RETI IN REGIME SINUSOIDALE	72
I) LEGGI DI KIRCHHOFF	72
II) RIFASAMENTO DEL CARICO	72
III) EFFETTO PELLE	75
CAPITOLO IX, RETI NOTEVOLI IN REGIME SINUSOIDALE	78
I) SERIE DI UN RESISTORE, UN INDUTTORE ED UN CONDENSATORE	78
II) PARALLELO DI UN RESISTORE, DI UN INDUTTORE E DI UN CONDENSATORE	81
CAPITOLO X, RETI TRIFASI	86
I) SISTEMI POLIFASI	86
II) RETI TRIFASE	87
III) GENERATORI TRIFASE	89
IV) CARICHI TRIFASE	90
V) POTENZA TRIFASE	93

VI) INSERZIONE ARON	96
VII) CAMPO MAGNETICO ROTANTE	98
CAPITOLO XI, RETI TRIFASI NOTEVOLI	102
I) COLLEGAMENTO A STELLA CON NEUTRO DI GENERATORE E CARICO	102
II) COLLEGAMENTO DI STELLA DI GENERATORI E DI STELLA DI IMPEDENZE SENZA NEUTRO	103
III) COLLEGAMENTO DI TRIANGOLO DI GENERATORI E DI TRIANGOLO DI IMPEDENZE	105
IV) COLLEGAMENTO A TRIANGOLO DEL GENERATORE E A STELLA DELL'UTILIZZATORE	107
V) COLLEGAMENTO A STELLA DEL GENERATORE E A TRIANGOLO DEL CARICO	109

PARTE II

MACCHINE ELETTRICHE (CAP. XII-XVI)

CAPITOLO XII, TRASFORMATORI	116
I) CIRCUITI ACCOPPIATI	116
II) TRASFORMATORE IDEALE	118
II) VERSO IL TRASFORMATORE REALE, TRASFORMATORE IDEALE CON RILUTTANZA	121
III) VERSO IL TRASFORMATORE REALE, TRASFORMATORE IDEALE CON RILUTTANZA E DISPERSIONE DEL FLUSSO	126
IV) VERSO IL TRASFORMATORE REALE, TRASFORMATORE IDEALE CON RILUTTANZA, DISPERSIONE DEL FLUSSO E RESISTENZA NEGLI AVVOLGIMENTI	130
V) TRASFORMATORE REALE	131
VI) FUNZIONAMENTO A VUOTO DEL TRASFORMATORE REALE	134
VI) FUNZIONAMENTO IN CORTOCIRCUITO DEL TRASFORMATORE REALE	135
VII) MISURA DEI PARAMETRI DEGLI SCHEMI EQUIVALENTI	137
VII) FUNZIONAMENTO A CARICO	139
VIII) RENDIMENTO DEL TRASFORMATORE	141
IX) VALORI NOMINALI, DATI DI TARGA	142
X) COLLEGAMENTO DI TRASFORMATORI MONOFASE	144
XI) CENNI COSTRUTTIVI	147
CAPITOLO XIII, TRASFORMATORE TRIFASE E TRASFORMATORI SPECIALI	150
I) CENNI COSTRUTTIVI	150
II) SCHEMA EQUIVALENTE E PARAMETRI DEL TRASFORMATORE TRIFASE	153

III) TRASFORMATORI SPECIALI	155
CAPITOLO XIV, MACCHINE ELETTRICHE ROTANTI	159
I) PRINCIPI DI FUNZIONAMENTO	159
II) STRUTTURA DELLE MACCHINE ROTANTI	163
III) POTENZE E PERDITE NELLE MACCHINE ROTANTI	165
CAPITOLO XV, MACCHINE SINCRONE	167
I) GENERALITA'	167
II) VALORI NOMINALI	168
II) F.E.M. DELLA MACCHINA SINCRONA TRIFASE	168
III) FUNZIONAMENTO A VUOTO	176
III) FUNZIONAMENTO A CARICO	176
IV) FUNZIONAMENTO IN CORTOCIRCUITO	181
V) COMPORTAMENTO ELETTRICO	182
VI) COMPORTAMENTO ELETTROMECCANICO	183
VII) COMPORTAMENTO DINAMICO	186
VIII) AVVIAMENTO DELLA MACCHINA SINCRONA	189
CAPITOLO XVI, MACCHINE ASINCRONE	190
I) GENERALITA'	190
II) VALORI NOMINALI	191
II) INDUZIONE AL TRAFERRO	191
III) ROTORE FERMO	193
IV) ROTORE LIBERO	195
V) POTENZA, COPPIA E RENDIMENTO	198
VI) SCHEMA EQUIVALENTE SEMPLIFICATO E DETERMINAZIONE DEI PARAMETRI	199

VII) DIAGRAMMA CIRCOLARE	201
VIII) STABILITA' E AVVIAMENTO	206
IX) REGOLAZIONE DELLA VELOCITA'	208
X) GENERATORE ASINCRONO	209
XI) MOTORE ASINCRONO MONOFASE	209

CAPITOLO I, BIPOLI

I) DEFINIZIONI GENERALI E POTENZE

DEFINIZIONE,

BIPOLO. Un bipolo è la schematizzazione di un componente elettrico a due morsetti del quale si intende definire semplicemente

- 1) la corrente ai morsetti
- 2) la tensione ai morsetti

Affinchè un componente possa essere schematizzato con un bipolo esso deve soddisfare le due seguenti proprietà:

- 1) la corrente che entra ad un morsetto deve essere pari a quella che esce dall'altro, cioè la corrente che lo attraversa deve essere solenoidale;
- 2) la tensione fra i due morsetti deve coincidere con una differenza di potenziale, cioè il bipolo deve essere sede di un campo elettrico conservativo.

DEFINIZIONE,

CONVENZIONE DA UTILIZZATORE.

Un bipolo si dice convenzionato da utilizzatore se il verso positivo della corrente è fissato entrante nel morsetto positivo.

DEFINIZIONE,

CONVENZIONE DA GENERATORE.

Un bipolo si dice convenzionato da generatore se il verso positivo della corrente è fissato uscente dal morsetto positivo.

DEFINIZIONE,

CARATTERISTICA ESTERNA DEL BIPOLO. Si definisce caratteristica esterna del bipolo la legge che lega la tensione alla corrente. Tale legge sarà del tipo $u = f(i)$. E' evidente che essa dipende anche dalla convenzione adottata per il bipolo.

DEFINIZIONE,

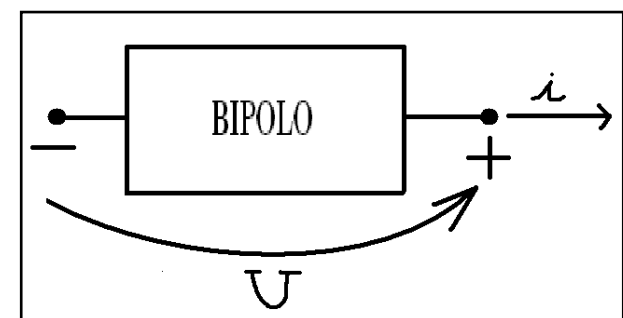
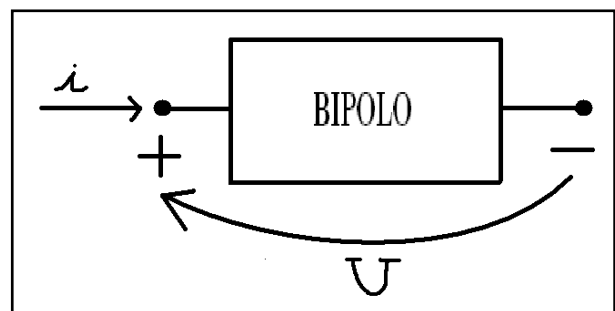
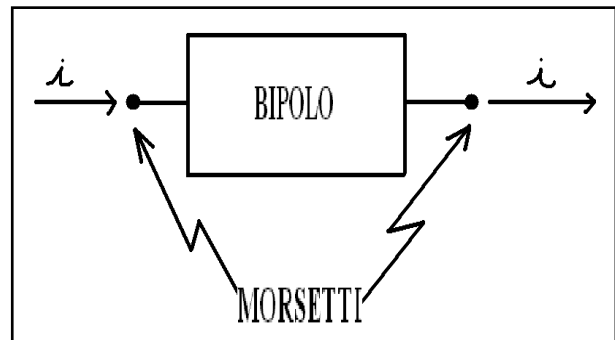
POTENZA DI UN BIPOLO.

Dato un bipolo comunque convenzionato definiamo sua potenza il prodotto

$$P = u(t)i(t)$$

essendo $u(t)$ la tensione ai suoi capi e $i(t)$ la corrente che lo attraversa.

A questo punto si ha che



- 1) la potenza si dice uscente se il bipolo è convenzionato da generatore ed essa si dice
 - a) erogata se è positiva,
 - b) assorbita se è negativa;
- 2) la potenza si dice entrante se il bipolo è convenzionato da utilizzatore ed essa si dice
 - a) erogata se è negativa,
 - b) assorbita se è positiva.

II) I BIPOLI ATTIVI

DEFINIZIONE,

BIPOLO GENERATORE IDEALE DI TENSIONE. Il bipolo generatore ideale di tensione è un componente realizzato in modo che la sua caratteristica esterna sia

$$u(t) = e(t), \forall i(t)$$

Ove $e(t)$ è una funzione assegnata del tempo. Questa caratteristica vale con i riferimenti di corrente e tensione che riportiamo sul simbolo del bipolo.

DEDUZIONE,

POTENZA USCENTE DAL BIPOLO GENERATORE IDEALE DI TENSIONE. La potenza uscente dal bipolo generatore ideale di tensione è, in base alla definizione di potenza uscente, data da

$$p(t) = i(t)u(t) = i(t)e(t)$$

DEFINIZIONE,

BIPOLO GENERATORE IDEALE DI CORRENTE. Il bipolo generatore ideale di corrente è un componente realizzato in modo che la sua caratteristica esterna sia

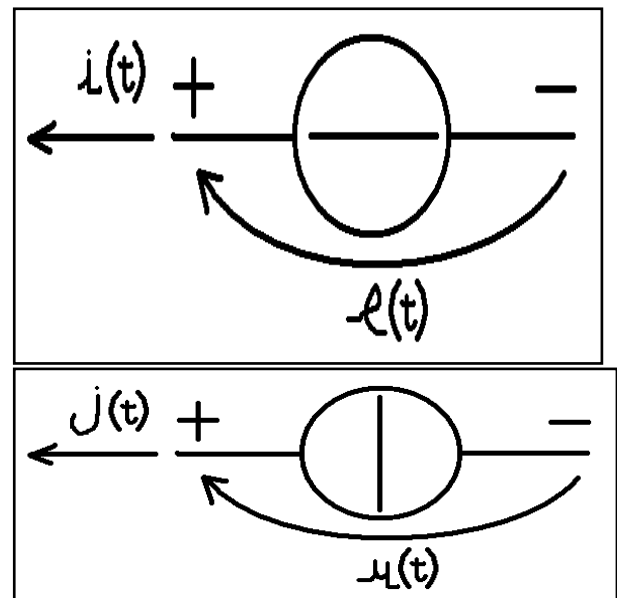
$$i(t) = j(t), \forall u(t)$$

ove $j(t)$ è una funzione assegnata del tempo.

DEDUZIONE,

POTENZA USCENTE DAL BIPOLO GENERATORE IDEALE DI CORRENTE. La potenza uscente dal bipolo generatore ideale di corrente è, in base alla definizione di potenza uscente, data da

$$p(t) = i(t)u(t) = j(t)u(t)$$

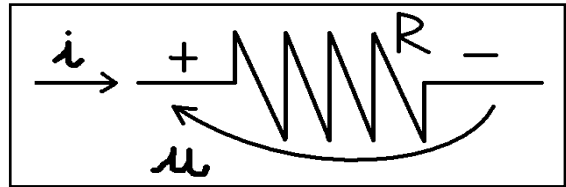


III) I BIPOLI PASSIVI

DEFINIZIONE,

BIPOLO RESISTORE. Il bipolo resistore è un componente realizzato in modo che la sua caratteristica esterna sia

$$u(t) = i(t)R$$



quando il bipolo è convenzionato da utilizzatore.

DEDUZIONE,

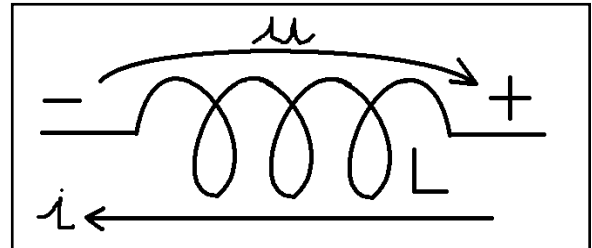
POTENZA ENTRANTE NEL BIPOLO RESISTORE. In base alla definizione di potenza entrante, la potenza entrante in un bipolo resistore è

$$p(t) = i(t)u(t) = i^2(t)R$$

DEFINIZIONE,

BIPOLO INDUTTORE. Il bipolo induttore è un componente realizzato in modo che la sua caratteristica esterna sia

$$u(t) = L \frac{d[i(t)]}{dt} \Leftrightarrow i(t) = i(t=0) + \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau$$



quando il bipolo è convenzionato da utilizzatore.

DEDUZIONE,

BIPOLO INDUTTORE IN CONDIZIONI STAZIONARIE. In condizioni stazionarie si ha

$$u(t) = L \frac{d[i(t)]}{dt} = 0$$

dunque il bipolo induttore è, in condizioni stazionarie, equivalente ad un cortocircuito.

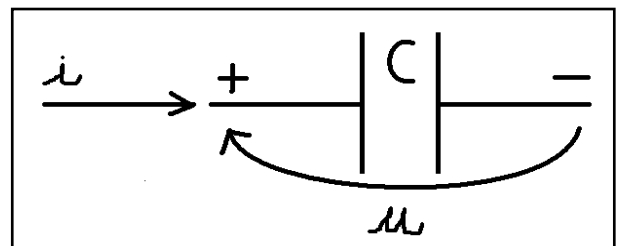
DEDUZIONE,

POTENZA ENTRANTE NEL BIPOLO INDUTTORE. In base alla definizione di potenza entrante, la potenza entrante in un bipolo induttore è

$$p(t) = i(t)u(t) = i(t)L \frac{d[i(t)]}{dt} = \frac{1}{2} L \frac{d[i(t)]^2}{dt}$$

DEFINIZIONE,

BIPOLO CONDENSATORE. Il bipolo condensatore è un componente realizzato in modo che la sua caratteristica esterna sia



$$i(t) = C \frac{d[u(t)]}{dt} \Leftrightarrow u(t) = u(t=0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

quando il bipolo è convenzionato da utilizzatore.

DEDUZIONE,

BIPOLO CONDENSATORE IN CONDIZIONI STAZIONARIE. In condizioni stazionarie si ha

$$i(t) = C \frac{d[u(t)]}{dt} = 0$$

dunque il bipolo condensatore è, in condizioni stazionarie, equivalente ad un circuito aperto.

DEDUZIONE,

POTENZA ENTRANTE NEL BIPOLO CONDENSATORE. In base alla definizione di potenza entrante, la potenza entrante in un bipolo condensatore è

$$p(t) = i(t)u(t) = C \frac{d[u(t)]}{dt} u(t) = \frac{1}{2} C \frac{d[u(t)]^2}{dt}$$

DEFINIZIONE,

BIPOLO CORTOCIRCUITO. Il bipolo cortocircuito è un bipolo resistore a resistenza nulla. La sua caratteristica esterna è infatti

$$u(t) = 0, \forall i(t)$$

Si tratta di un bipolo a potenza nulla.

DEFINIZIONE,

BIPOLO CIRCUITO APERTO. Il bipolo circuito aperto si può pensare come un bipolo resistore a conduttanza nulla. La sua caratteristica esterna è infatti

$$i(t) = 0, \forall u(t)$$

Si tratta di un bipolo a potenza nulla.

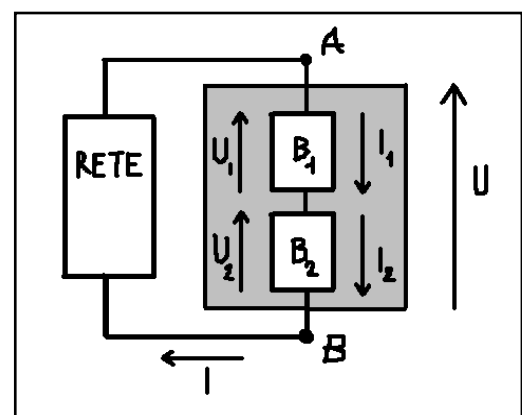
IV) EQUIVALENZA FRA BIPOLI. CASO GENERALE

DEFINIZIONE,

EQUIVALENZA FRA BIPOLI. Due bipoli si dicono equivalenti se, adottando per essi la stessa convenzione, essi presentano la stessa caratteristica esterna, cioè la stessa relazione fra tensione e corrente ai morsetti.

DEFINIZIONE,

SERIE DI DUE BIPOLI E BIPOLO SERIE. Due bipoli B_1 e B_2 sono detti in serie quando entrambi hanno un morsetto connesso allo stesso nodo, nodo a cui non



sia collegato alcun altro bipolo. Il bipolo serie è l'insieme dei due bipoli (indicato in grigio in figura). Le sue grandezze esterne sono la corrente e la tensione ai nodi A e B che indichiamo, rispettivamente, corrente I e tensione U .

Applicando la *LKC* al nodo intermedio fra i due bipoli si trova

$$i_1(t) = i_2(t)$$

Applicandola poi al nodo B si ha

$$i(t) = i_2(t)$$

Per cui in definitiva

$$i = i_1(t) = i_2(t)$$

Applicando la *LKT* alla maglia rappresentata dalla rete più il bipolo serie si ha

$$u = u_1(t) + u_2(t)$$

La corrente e la tensione del bipolo serie devono soddisfare dunque alle relazioni

$$\begin{aligned} i &= i_1(t) = i_2(t) \\ u &= u_1(t) + u_2(t) \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE,

SERIE IMPOSSIBILI.

1) Non può essere realizzata la serie tra un generatore ideale di corrente con corrente non nulla ed un circuito aperto.

2) Non può essere realizzata la serie fra due generatori ideali di corrente con corrente diversa.

DEFINIZIONE,

PARALLELO DI DUE BIPOLI GENERICI E BIPOLO PARALLELO. Due bipoli B_1 e B_2 sono detti in parallelo quando hanno i morsetti connessi a due a due nei nodi A e B . Il bipolo parallelo è l'insieme dei due bipoli (indicato in grigio in figura). Le sue grandezze esterne sono la corrente e la tensione ai nodi A e B che indichiamo, rispettivamente, corrente I e tensione U .

Applicando la *LKC* a uno dei due nodi di giunzione dei due bipoli si ha

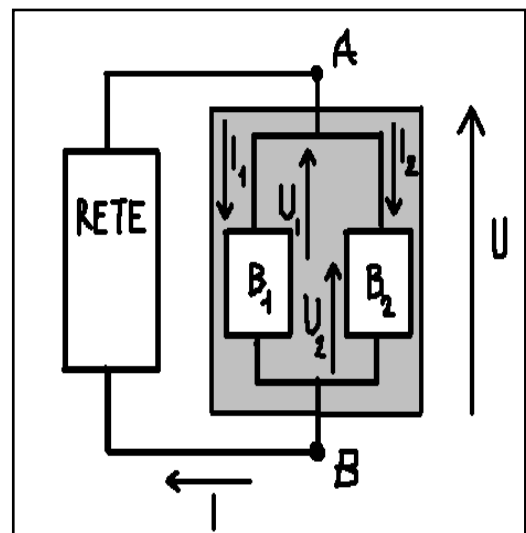
$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

Risulta inoltre

$$u(t) = u(t)_1 = u(t)_2$$

La corrente e la tensione del bipolo serie devono soddisfare dunque alle relazioni

$$i(t) = i(t)_1 + i(t)_2$$



$$u(t) = u(t)_1 = u(t)_2$$

OSSERVAZIONE,

PARALLELI IMPOSSIBILI.

1) Non può essere realizzato il parallelo tra un generatore ideale di tensione con tensione non nulla ed un circuito chiuso.

2) Non può essere realizzato il parallelo fra due generatori ideali di tensione con tensione diversa.

V) EQUIVALENZA FRA BIPOLI. APPLICAZIONI

DEDUZIONE,

SERIE DI RESISTORI. Consideriamo un bipolo serie costituito da n resistori di resistenza R_i per i che va da 1 ad n .

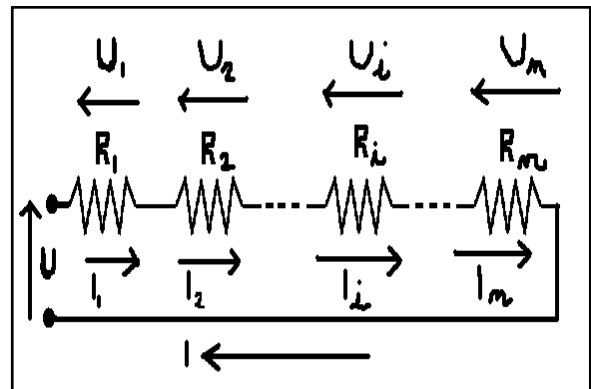
Convenzionandolo da utilizzatore, per quanto detto sul bipolo serie, si ha

$$i(t) = i_1(t) = i_2(t) = \dots = i_n(t)$$

$$u(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) = \sum_{i=1}^n R_i i_i(t) = i(t) \sum_{i=1}^n R_i$$

Dunque la resistenza equivalente è

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i$$



DEDUZIONE,

FORMULA DEL PARTITORE DI TENSIONE RESISTIVO. E' quella formula che fornisce l'espressione della tensione al generico bipolo resistivo della serie di resistori in funzione della tensione e della resistenza del bipolo serie. Si ha

$$u_i(t) = R_i i_i(t) = R_i i(t) = u(t) \frac{R_i}{\sum_{i=1}^n R_i}$$

DEDUZIONE,

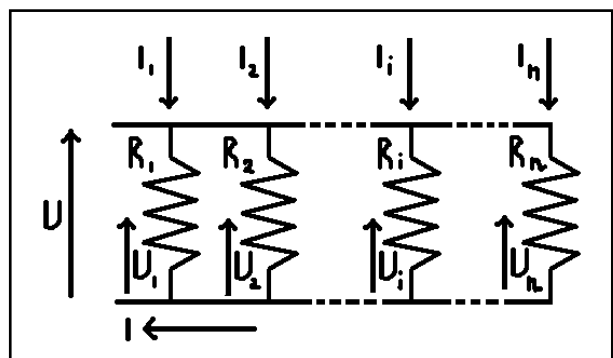
PARALLELO DI RESISTORI. Consideriamo un bipolo parallelo costituito da n resistori R_i per i che va da 1 ad n . Convenzionandolo da utilizzatore, per quanto detto sul bipolo parallelo, si ha

$$i(t) = \sum_{i=1}^n i_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{u_i(t)}{R_i} = u(t) \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

$$u(t) = u_1(t) = u_2(t) = \dots = u_n(t)$$

Dunque la resistenza equivalente è

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$



DEDUZIONE,

FORMULA DEL PARTITORE DI CORRENTE RESISTIVO. E' quella formula che fornisce l'espressione della corrente al generico bipolo resistivo del parallelo di resistori in funzione della tensione e della resistenza del bipolo parallelo. Si ha

$$i_i(t) = \frac{u_i(t)}{R_i} = \frac{u(t)}{R_i} = \frac{i(t)}{R_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}}$$

DEDUZIONE,

SERIE DI BIPOLI INDUTTORI. Consideriamo un bipolo serie costituito da n bipoli induttori di induttanza L_i per i che va da 1 ad n. Convenzionandolo da utilizzatore, per quanto detto sul bipolo serie, si ha

$$i(t) = i_1(t) = i_2(t) = \dots = i_n(t)$$
$$u(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) = \sum_{i=1}^n \left(L_i \frac{d[i_i(t)]}{dt} \right) = \frac{d[i(t)]}{dt} \sum_{i=1}^n L_i$$

Dunque l'induttanza equivalente è

$$L_{eq} = \sum_{i=1}^n L_i$$

DEDUZIONE,

PARALLELO DI BIPOLI INDUTTIVI. Consideriamo un bipolo parallelo costituito da n bipoli induttori di induttanza L_i per i che va da 1 a n. Convenzionandolo da utilizzatore, per quando detto sul bipolo parallelo, si ha

$$i(t) = \sum_{i=1}^n \left(i_i(t=0) + \frac{1}{L_i} \int_0^t u_i(\tau) d\tau \right) = \sum_{i=1}^n (i_i(t=0)) + \int_0^t u(\tau) d\tau \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{L_i} \right)$$
$$u(t) = u_1(t) = u_2(t) = \dots = u_n(t)$$

Dunque l'induttanza equivalente è

$$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i}$$

se questa è attraversata nell'istante iniziale dalla corrente

$$i(t=0) = \sum_{i=1}^n (i_i(t=0))$$

DEDUZIONE,

SERIE DI BIPOLI CONDENSATORI. Consideriamo un bipolo serie costituito da n bipoli condensatori di conduttanza C_i per i che va da 1 ad n. Convenzionandolo da utilizzatore, per quanto detto sul bipolo serie, si ha

$$i(t) = i_1(t) = i_2(t) = \dots = i_n(t)$$

$$u(t) = \sum_{i=1}^n \left(u_i(t=0) + \frac{1}{C_i} \int_0^t i_i(\tau) d\tau \right) = \sum_{i=1}^n (u_i(t=0)) + \int_0^t i(\tau) d\tau \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{C_i} \right)$$

Dunque la capacità equivalente è

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

se la sua tensione all'istante iniziale è

$$u(t=0) = \sum_{i=1}^n (u_i(t=0))$$

DEDUZIONE,

PARALLELO DI BIPOLI CAPACITIVI. Consideriamo un bipolo parallelo costituito da n bipoli condensatori di induttanza C_i per i che va da 1 ad n. Convenzionandolo da utilizzatore, per quando detto sul bipolo parallelo, si ha

$$i(t) = \sum_{i=1}^n i_i(t) = \sum_{i=1}^n \left(C_i \frac{d[u_i(t)]}{dt} \right) = \frac{d[u(t)]}{dt} \sum_{i=1}^n C_i$$

$$u(t) = u_1(t) = u_2(t) = \dots = u_n(t)$$

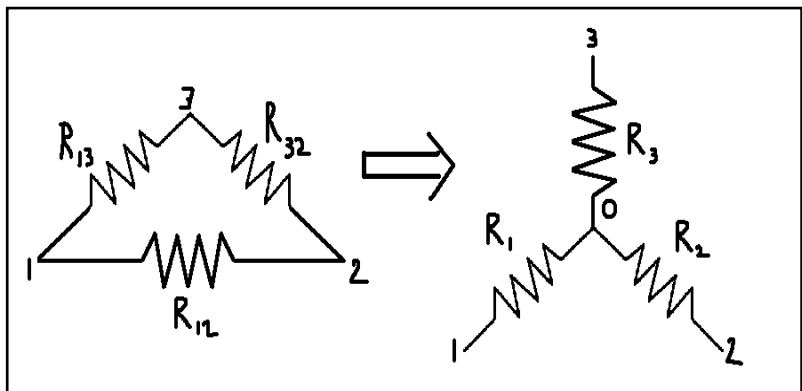
Dunque la capacità equivalente è

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$$

VI) EQUIVALENZA FRA BIPOLI. TRASFORMAZIONI TRIANGOLO-STELLA E STELLA-TRIANGOLO

DEDUZIONE,

TRASFORMAZIONI TRIANGOLO-STELLA PER BIPOLI RESISTIVI. Consideriamo un triangolo di bipoli resistivi come quello rappresentato a sinistra nella figura. Consideriamo poi una stella di resistori, a destra nella figura. Vogliamo trovare la stella equivalente ad un triangolo assegnato, cioè una stella che vista da ciascuna porta abbia la stessa resistenza del triangolo visto dalla medesima porta. Si trova per tali formule l'espressione seguente



$$\begin{cases} R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \\ R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \\ R_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} G_1 = \frac{G_{12}G_{13} + G_{12}G_{23} + G_{13}G_{23}}{G_{23}} \\ G_2 = \frac{G_{12}G_{13} + G_{12}G_{23} + G_{13}G_{23}}{G_{13}} \\ G_3 = \frac{G_{12}G_{13} + G_{12}G_{23} + G_{13}G_{23}}{G_{12}} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo i nodi 1 e 2 del triangolo. Inseriamo fra essi un generatore ideale di tensione, come in figura. La LKC al nodo 2 ci fornisce

$$1) \quad i(t) = -i_{12}(t) + i_{123}(t)$$

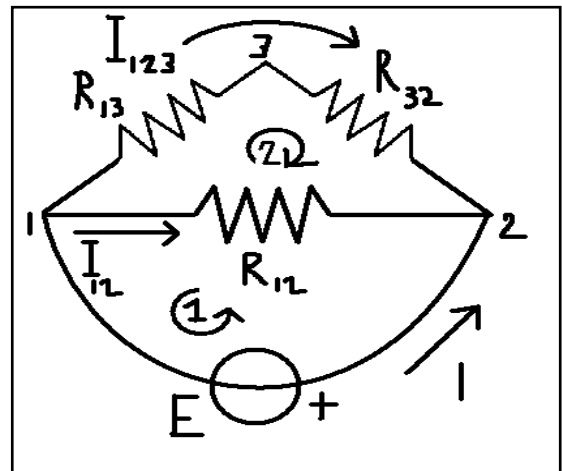
La LKT alla maglia 1 e alla maglia 2 ci fornisce rispettivamente

$$2) \quad i_{12}(t) = -\frac{e(t)}{R_{12}}$$

$$3) \quad i_{123}(t) = -\frac{i_{12}(t)R_{12}}{R_{23} + R_{13}}$$

Sostituendo la 2 nella 3 e questa nella 1 abbiamo dunque

$$4) \quad i(t) = e(t) \frac{R_{12} + R_{23} + R_{13}}{R_{12}(R_{23} + R_{13})}$$



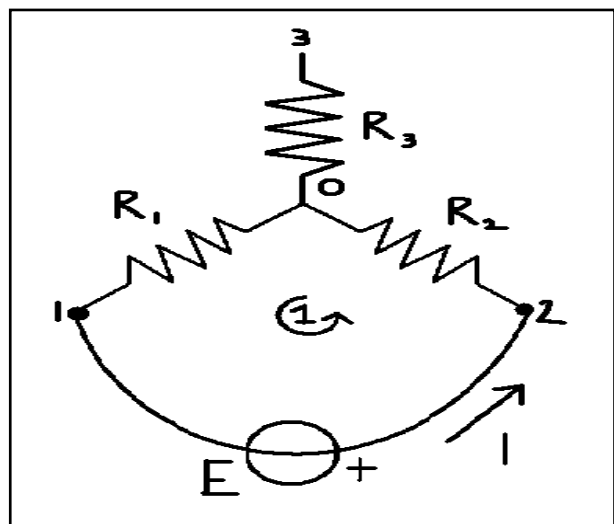
Mettendo lo stesso generatore ideale di tensione fra i nodi 1 e 2 del triangolo otteniamo per la corrente del generatore stesso l'espressione

$$5) \quad i(t) = e(t) \frac{1}{R_1 + R_2}$$

Per l'equivalenza delle due configurazioni di resistori fra i morsetti 1 e 2 basta ora imporre che, data la stessa tensione fra essi, si abbia la stessa corrente. Basta cioè imporre l'uguaglianza fra i secondi membri della 4 e della 5. Facendo ciò si trova

$$6) \quad R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{13})}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

Operando allo stesso modo fra i morsetti 1 e 3 si trova



$$7) R_1 + R_3 = \frac{R_{13}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

Operando allo stesso modo fra i morsetti 2 e 3 si trova

$$8) R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{12} + R_{13})}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

Con semplici passaggi algebrici la 6, la 7 e la 8 forniscono le formule di trasformazione cercate.

DEDUZIONE,

TRASFORMAZIONI STELLA-TRIANGOLO PER BIPOLI RESISTIVI. Le trasformazioni inverse a quelle viste, cioè quelle che permettono di avere il triangolo equivalente a una stella data sono le seguenti

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_3} \\ R_{13} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2} \\ R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \\ G_{13} = \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \\ G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \end{array} \right.$$

DEDUZIONE,

TRASFORMAZIONE TRIANGOLO-STELLA PER BIPOLI INDUTTIVI. Valgono le seguenti trasformazioni, formalmente analoghe a quelle viste per i bipoli resistivi.

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = \frac{L_{12} L_{13}}{L_{12} + L_{23} + L_{13}} \\ L_2 = \frac{L_{12} L_{23}}{L_{12} + L_{23} + L_{13}} \\ L_3 = \frac{L_{13} L_{23}}{L_{12} + L_{23} + L_{13}} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 = \frac{\Gamma_{12} \Gamma_{13} + \Gamma_{12} \Gamma_{23} + \Gamma_{13} \Gamma_{23}}{\Gamma_{23}} \\ \Gamma_2 = \frac{\Gamma_{12} \Gamma_{13} + \Gamma_{12} \Gamma_{23} + \Gamma_{13} \Gamma_{23}}{\Gamma_{13}} \\ \Gamma_3 = \frac{\Gamma_{12} \Gamma_{13} + \Gamma_{12} \Gamma_{23} + \Gamma_{13} \Gamma_{23}}{\Gamma_{12}} \end{array} \right.$$

La lettera gamma maiuscola indica il reciproco della induttanza.

DEDUZIONE,

TRASFORMAZIONI STELLA-TRIANGOLO PER BIPOLI INDUTTIVI. Valgono le seguenti trasformazioni, formalmente analoghe a quelle viste per i bipoli resistivi.

$$\begin{cases} L_{12} = \frac{L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3}{L_3} \\ L_{13} = \frac{L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3}{L_2} \\ L_{23} = \frac{L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3}{L_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Gamma_{12} = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} \\ \Gamma_{13} = \frac{\Gamma_1 \Gamma_3}{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} \\ \Gamma_{23} = \frac{\Gamma_2 \Gamma_3}{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} \end{cases}$$

La lettera gamma maiuscola indica il reciproco della induttanza.

DEDUZIONE,

TRASFORMAZIONI TRIANGOLO-STELLA PER BIPOLI CAPACITIVI. Valgono le seguenti trasformazioni formalmente analoghe a quelle della trasformazione inversa per bipoli resistivi (e dunque induttivi).

$$\begin{cases} C_1 = \frac{C_{12} C_{13} + C_{12} C_{23} + C_{13} C_{23}}{C_{23}} \\ C_2 = \frac{C_{12} C_{13} + C_{12} C_{23} + C_{13} C_{23}}{C_{13}} \\ C_3 = \frac{C_{12} C_{13} + C_{12} C_{23} + C_{13} C_{23}}{C_{12}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_1 = \frac{S_{12} S_{13}}{S_{12} + S_{23} + S_{13}} \\ S_2 = \frac{S_{12} S_{23}}{S_{12} + S_{23} + S_{13}} \\ S_3 = \frac{S_{23} S_{13}}{S_{12} + S_{23} + S_{13}} \end{cases}$$

La lettera esse maiuscola indica il reciproco della capacità.

DEDUZIONE,

TRASFORMAZIONI STELLA-TRIANGOLO PER BIPOLI CAPACITIVI. Valgono le seguenti trasformazioni formalmente analoghe a quelle della trasformazione inversa per bipoli resistivi (e dunque induttivi).

$$\begin{cases} C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3} \\ C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \\ C_{13} = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_{12} = \frac{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3}{S_3} \\ S_{23} = \frac{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3}{S_1} \\ S_{13} = \frac{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3}{S_2} \end{cases}$$

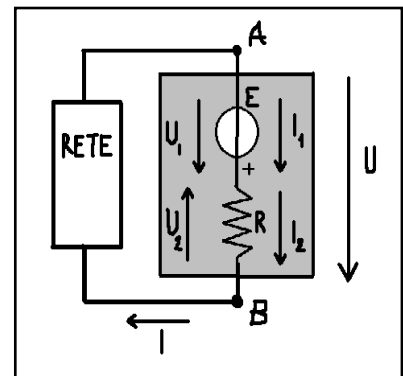
La lettera esse maiuscola indica il reciproco della capacità.

VI) GENERATORI NORMALI

DEFINIZIONE,

GENERATORE NORMALE DI TENSIONE.

Definisco generatore normale di tensione la serie tra un generatore ideale di tensione ed un resistore. Se applico la convenzione da generatore al bipolo serie (vedi figura) ottengo per la corrente e la tensione quanto segue



$$i(t) = i_1(t) = i_2(t)$$

$$u(t) = u_1(t) - u_2(t) = e(t) - i(t)R$$

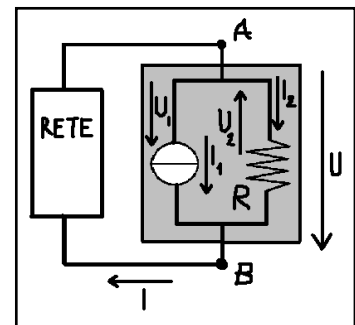
DEFINIZIONE,

GENERATORE NORMALE DI CORRENTE.

Definisco generatore normale di corrente il parallelo tra un generatore ideale di corrente ed un resistore. Se applico la convenzione da generatore al bipolo parallelo (vedi figura) ottengo per la corrente e la tensione quanto segue

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = j(t) + Gu_2(t) = j(t) - Gu(t)$$

$$u(t) = R(j(t) - i(t))$$



CAPITOLO II, RETI ELETTRICHE

I) DEFINIZIONI GENERALI

DEFINIZIONE,

RETE ELETTRICA. Definiamo rete elettrica (o, per brevità, rete) la interconnessione di più bipoli.

DEFINIZIONE,

NODI DI UNA RETE ELETTRICA. I punti nei quali sono uniti più bipoli sono detti nodi di una rete. Il numero dei nodi di una rete li indichiamo con la lettera n .

DEFINIZIONE,

LATI DI UNA RETE ELETTRICA. I collegamenti fra coppie di nodi di una rete sono detti lati di una rete. Il numero dei lati di una rete lo indichiamo con la lettera l .

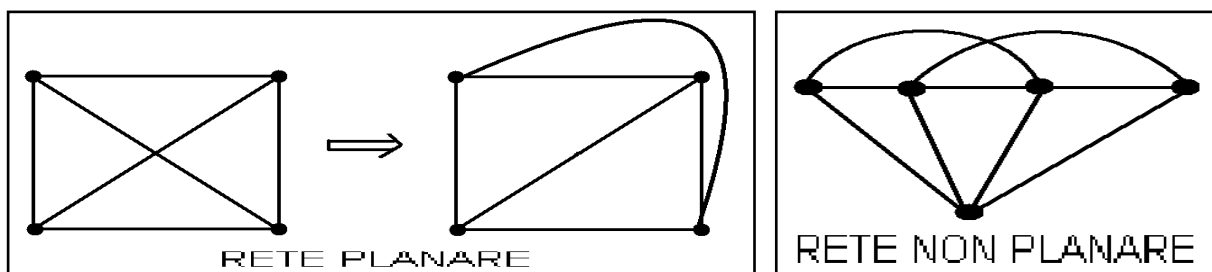
DEFINIZIONE,

MAGLIA DI UNA RETE ELETTRICA. Definiamo maglia di una rete elettrica ogni insieme di suoi lati che soddisfi alle seguenti due proprietà:

- 1) ogni lato della maglia può essere raggiunto da ciascun altro lato della maglia percorrendo la maglia stessa;
- 2) in ciascun nodo della maglia concorrono solo due lati della maglia stessa.

DEFINIZIONE,

GRAFO DI UNA RETE ELETTRICA. Il grafo di una rete elettrica è una rappresentazione



grafica della rete in cui i nodi sono rappresentati con punti ed i lati con curve.

DEFINIZIONE,

RETE ELETTRICA PLANARE. Una rete elettrica si definisce planare se il suo grafo può essere disegnato in modo che i lati non si intersechino fra loro.

DEFINIZIONE,

ANELLO DI UNA RETE ELETTRICA. Definiamo anello di una rete elettrica ogni maglia che orli una superficie del foglio, in cui è riportato il grafo della rete, la quale non sia attraversata da lati della rete stessa. Il numero di anelli di una rete lo indichiamo m .

DEDUZIONE,

NUMERO DI ANELLI DI UNA RETE. Il numero di anelli di una rete è dato dal numero dei lati della stessa, meno il numero dei nodi diminuito di uno. Cioè

$$m = l - (n - 1).$$

II) LE LEGGI DI KIRCHHOFF

DEDUZIONE,

LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE CORRENTI (LKC). In ogni rete elettrica, scelto comunque un nodo, si ha che la somma algebrica delle correnti dei lati che convergono in quel nodo, è nulla istante per istante.

Con la dizione ‘somma algebrica’ si intende che le correnti con verso entrante nel nodo vanno sommate, quelle con verso uscente vanno sottratte.

DEDUZIONE,

EQUAZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI FORNITE DALLA LKC. Un sistema di equazioni linearmente indipendenti nelle incognite delle correnti fornite dalla LKC è quello che si ottiene dalla applicazione della LKC a $n-1$ nodi della rete comunque scelti.

DEDUZIONE,

LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE TENSIONI (LKT). In ogni rete elettrica, scelta comunque una maglia, si ha che la somma algebrica delle tensioni dei lati della maglia è nulla istante per istante.

Con la dizione ‘somma algebrica’ si intende che, fissato un verso arbitrario di percorrenza della maglia, le tensioni con verso positivo concorde a tale verso di percorrenza vanno sommate, quelle con verso positivo discorde vanno sottratte.

DEDUZIONE,

EQUAZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI FORNITE DALLA LKT. Un sistema di equazioni linearmente indipendenti nelle incognite delle tensioni fornite dalla LKT è quello che si ottiene dalla applicazione della stessa agli m anelli della rete.

III) SOLUZIONE DI UNA RETE ELETTRICA

DEFINIZIONE,

SISTEMA DI EQUAZIONI TOPOLOGICHE DI UNA RETE ELETTRICA. L’insieme delle $n-1$ equazioni L.I. nelle correnti fornite dalla applicazione della LKC a $n-1$ nodi della rete elettrica e delle $m-1-(n-1)$ equazioni L.I. nelle tensioni fornite dalla applicazione della LKT agli m anelli della rete elettrica fornisce un sistema di l equazioni L.I. nelle correnti e tensioni. Tale sistema viene detto sistema delle equazioni topologiche della rete.

OSSERVAZIONE,

SISTEMA DI EQUAZIONI TOPOLOGICHE DI UNA RETE ELETTRICA. Il sistema di equazioni topologiche di una rete elettrica non dipende dalla natura dei suoi bipoli, ma solo dalla sua forma, ovvero dalla sua topologia. Ciò giustifica la dizione di equazioni topologiche.

DEFINIZIONE,

SISTEMA DI EQUAZIONI TIPOLOGICHE. L’insieme delle l caratteristiche esterne degli l bipoli degli l lati di una rete elettrica fornisce un sistema di l equazioni. Tale sistema è definito sistema delle equazioni tipologiche.

DEFINIZIONE,

SOLUZIONE DI UNA RETE ELETTRICA. Diciamo soluzione di una rete elettrica il calcolo delle tensioni e delle correnti di ciascuno dei suoi lati.

DEDUZIONE,

TEOREMA DI TELLEGEN. In ogni rete elettrica, convenzionati tutti i bipoli da utilizzatori, la somma delle loro potenze è nulla istante per istante. Ovvero, convenzionati tutti i bipoli da generatori, la somma delle loro potenze è nulla istante per istante. Ovvero, convenzionati i bipoli alcuni da utilizzatori, altri da generatori, allora la somma delle potenze degli utilizzatori (detta potenza assorbita) è pari a quella delle potenze dei generatori (detta potenza generata).

In realtà il teorema di Tellegen ha una enunciazione più sottile (di cui quella indicata è una particolarizzazione). Essa ricorda quella del teorema dei lavori virtuali. Vedi in proposito le dispense del prof. Geri a pag. 39.

IV) METODO GENERALE DI ANALISI DI UNA RETE ELETTRICA

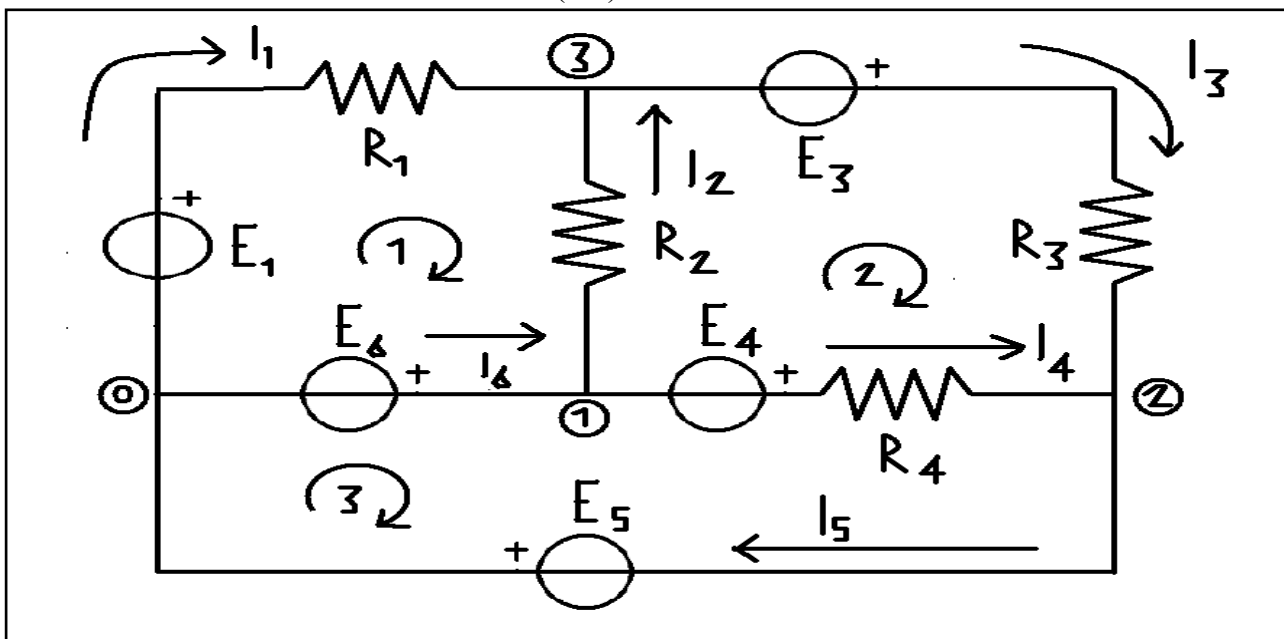
DEFINIZIONE,

METODO GENERALE DI ANALISI DI UNA RETE ELETTRICA. Per metodo generale di analisi di una rete elettrica intendiamo l'applicazione della LKC ad $n-1$ nodi e l'applicazione della LKT agli m anelli. La risoluzione del sistema in $2 \times l$ equazioni (le l equazioni topologiche più le l equazioni tipologiche) e $2 \times l$ incognite (le l correnti e le l tensioni di lato) può essere controllata vedendo se tale soluzione della rete verifica il teorema di Tellegen.

ESEMPIO,

METODO GENERALE DI ANALISI PER UNA RETE ELETTRICA LINEARE.

Consideriamo la rete elettrica in figura. Il suo numero di nodi è $n=4$, il suo numero di lati è $l=6$ mentre il suo numero di anelli risulta $m=l-(n-1)=6-3=3$. Procediamo alla sua risoluzione col metodo



generale di analisi il quale dovrà fornirci un sistema lineare di 6 equazioni nelle 6 incognite delle correnti.

Applicando la LKC ai nodi 1,2,3 abbiamo

$$-I_2 - I_4 + I_6 = 0$$

$$I_3 + I_4 - I_5 = 0$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

Applicando la LKT alle maglie 1,2,3 si ha poi

$$\begin{aligned} E_1 - R_1 I_1 + I_2 R_2 - E_6 &= 0 \\ -I_2 R_2 + E_3 - I_3 R_3 + I_4 R_4 - E_4 &= 0 \\ -I_4 R_4 + E_5 + E_6 + E_4 &= 0 \end{aligned}$$

Riordinando il nostro sistema abbiamo

$$\begin{cases} 0 - I_2 + 0 - I_4 + 0 + I_6 = 0 \\ 0 + 0 + I_3 + I_4 - I_5 + 0 = 0 \\ I_1 + I_2 - I_3 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ -R_1 I_1 + I_2 R_2 + 0 + 0 + 0 + 0 = -E_1 + E_6 \\ 0 - I_2 R_2 - I_3 R_3 + I_4 R_4 + 0 + 0 = -E_3 + E_4 \\ 0 + 0 + 0 - I_4 R_4 + 0 + 0 = -E_4 - E_5 - E_6 \end{cases}$$

che scritto in forma matriciale diviene

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & -R_3 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -E_1 + E_6 \\ -E_3 + E_4 \\ -E_4 - E_5 - E_6 \end{pmatrix}$$

Attribuendo i seguenti valori numerici alle costanti

$$\begin{aligned} R_1 = R_2 = R_3 = R_4 &= 5\Omega \\ E_1 = E_3 = E_4 = E_5 = E_6 &= 10V \end{aligned}$$

si ottiene il sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -5\Omega & 5\Omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5\Omega & -5\Omega & 5\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5\Omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -30V \end{pmatrix}$$

risolvendo il quale si ottengono le correnti seguenti

$$I_1 = 2A, I_2 = 2A, I_3 = 4A, I_4 = 6A, I_5 = 10A, I_6 = 8A$$

Per verificare il risultato ottenuto calcoliamo le potenze uscenti dai generatori e verifichiamo che siano pari a quelle entranti nei resistori.

La somma delle potenze uscenti è

$$I_1 E_1 + I_3 E_3 + I_4 E_4 + I_5 E_5 + I_6 E_6 = 2 \cdot 10W + 4 \cdot 10W + 6 \cdot 10W + 10 \cdot 10W + 8 \cdot 10W = 300W$$

La somma delle potenze entranti è

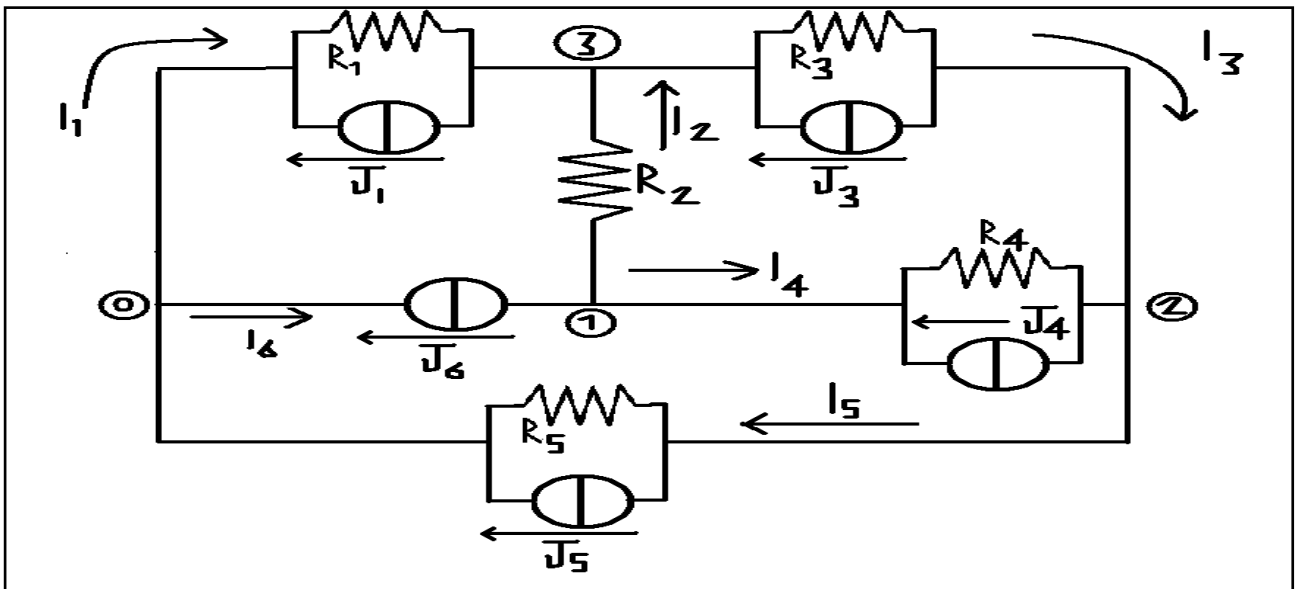
$$I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 = (2)^2 5W + (2)^2 5W + (4)^2 5W + (6)^2 5W = 300W$$

e la verifica è positiva.

ESEMPIO,

METODO GENERALE DI ANALISI PER UNA RETE ELETTRICA LINEARE.

Consideriamo la rete elettrica in figura. Il suo numero di nodi è $n=4$, il suo numero di lati è $l=6$



mentre il suo numero di anelli risulta $m=l-(n-1)=6-3=3$. Procediamo alla sua risoluzione col metodo generale di analisi.

Si ricorda, prima di procedere che, per un generatore normale di corrente convenzionato come in figura si ha la caratteristica esterna seguente

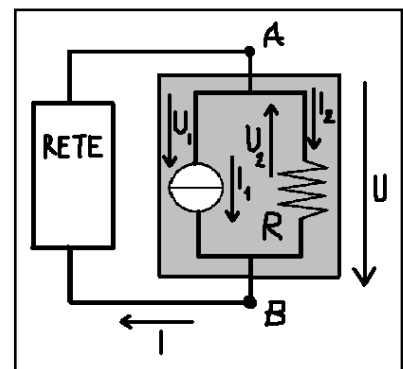
$$I = J + GU \Leftrightarrow U = R(J - I)$$

Applicando la LKC ai nodi 1,2,3 abbiamo

$$-I_2 - I_4 + I_6 = 0 \Rightarrow -I_2 - I_4 - J_6 = 0 \Rightarrow -I_2 - I_4 = J_6$$

$$I_3 + I_4 - I_5 = 0$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$



Applicando la LKT agli anelli 1,2,3 si ha

$$\begin{aligned}
-(J_1 + I_1)R_1 + I_2R_2 &= -(J_1 + I_1)R_1 + I_2R_2 \leftarrow \text{identità} \\
-I_2R_2 - (I_3 + J_3)R_3 + (I_4 + J_4)R_4 &= 0 \\
-(I_4 + J_4)R_4 + (J_5 - I_5)R_5 + (-R_1(J_1 + I_1) + I_2R_2) &= 0
\end{aligned}$$

Risrivendo ordinatamente le 5 equazioni trovate (una equazione di anello è una identità), si ha il sistema

$$\begin{cases}
0 - I_2 + 0 - I_4 + 0 = J_6 \\
0 + 0 + I_3 + I_4 - I_5 = 0 \\
I_1 + I_2 - I_3 + 0 + 0 = 0 \\
0 - I_2R_2 - I_3R_3 + I_4R_4 = J_3R_3 - J_4R_4 \\
-I_1R_1 + I_2R_2 + 0 - I_4R_4 - I_5R_5 = J_1R_1 + J_4R_4 - J_5R_5
\end{cases}$$

che scritto in forma matriciale diviene

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & -R_3 & +R_4 & 0 \\ -R_1 & R_2 & 0 & -R_4 & -R_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_6 \\ 0 \\ 0 \\ J_3R_3 - J_4R_4 \\ J_1R_1 + J_4R_4 - J_5R_5 \end{pmatrix}$$

Attribuendo i seguenti valori numerici alle costanti

$$\begin{aligned}
R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 &= 5\Omega \\
J_1 = J_3 = J_4 = J_5 = J_6 &= 2A
\end{aligned}$$

si ottiene il sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5\Omega & -5\Omega & 5\Omega & 0 \\ -5\Omega & 5\Omega & 0 & -5\Omega & -5\Omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10V \end{pmatrix}$$

risolvendo il quale si ottengono le correnti

$$I_1 = 0.25A, I_2 = -0.75A, I_3 = -0.5A, I_4 = -1.25A, I_5 = -1.75A, I_6 = -2A$$

Per verificare il risultato ottenuto calcoliamo le potenze uscenti dai generatori e verifichiamo che siano pari a quelle entranti nei resistori.

Le potenze uscenti dai generatori normali di corrente sono

$$-I_1(R_1(J_1 + I_1)) - I_3(R_3(J_3 + I_3)) - I_4(R_4(J_4 + I_4)) + I_5(R_5(J_5 - I_5)) = -27.1875W$$

La potenza uscente dal generatore ideale di corrente è

$$-I_6(V_0 - V_1) = -I_6(-I_2 R_2 + (R_1(J_1 + I_1))) = 30W$$

La potenza entrante nel resistore del secondo lato è

$$(I_2)^2 R_2 = 2.8125W$$

Dunque la potenza totale uscente dai generatori è

$$30W - 27.1875W = 2.8125W$$

Quella entrante nell'unico utilizzatore è

$$2.8125W$$

La verifica della soluzione dà quindi esito positivo.

CAPITOLO III, RETI LINEARI

I) SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

DEFINIZIONE,

RETE LINEARE. Una rete in regime stazionario è definita lineare se i parametri E, J, R sono delle costanti.

DEDUZIONE,

ESISTENZA ED UNICITA' DELLA SOLUZIONE. In una rete lineare le $n-1+m=l$ equazioni topologiche e le l equazioni tipologiche costituiscono un sistema lineare di $2 \times l$ per $2 \times l$ equazioni, avente come incognite le tensioni e le correnti di lato ($2 \times l$ incognite) con matrice dei coefficienti a determinante diverso da zero. Un sistema lineare è cioè risolubile a soluzione unica.

DEDUZIONE,

TEOREMA DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI. In una rete lineare

1) la tensione di un lato comunque scelto è pari alla somma delle tensioni che ciascun generatore ideale produce in quel lato quando sono annullate le grandezze impresse da ciascuna altro generatore ideale della rete elettrica;

2) la corrente di un lato comunque scelto è pari alla somma delle correnti che ciascun generatore ideale produce in quel lato quando sono annullate le grandezze impresse da ogni altro generatore ideale della rete elettrica.

Si ricorda che annullare la tensione impressa da un generatore ideale di corrente significa sostituirlo con un cortocircuito, mentre annullare la corrente impressa da un generatore ideale di tensione significa sostituirlo con un circuito aperto.

DIMOSTRAZIONE. Il sistema risolvibile della rete lineare è costituito dalle l equazioni tipologiche (date dalle caratteristiche esterne degli l bipoli) le quali possono scriversi

$$\left. \begin{array}{l} U = E \begin{pmatrix} \text{generatori} \\ \text{ideali} \\ \text{tensione} \end{pmatrix} \\ I = J \begin{pmatrix} \text{generatori} \\ \text{ideali} \\ \text{corrente} \end{pmatrix} \\ U = RI(\text{resistori}) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} l \\ \text{equazioni} \end{matrix}$$

e dalle l equazioni topologiche (date dalla applicazione della LKT agli m anelli e dalla applicazione della LKC agli $n-1$ nodi) le quali possono scriversi

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{\text{maglia}} \pm U = 0 \left(\begin{array}{c} m \\ \text{equazioni} \end{array} \right) \\ \sum_{\text{nodo}} \pm I = 0 \left(\begin{array}{c} n-1 \\ \text{equazioni} \end{array} \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{c} l \\ \text{equazioni} \end{array}$$

Nell'insieme si ha dunque un sistema lineare di 2xl equazioni in 2xl incognite in cui la matrice dei coefficienti ha coefficienti del tipo 1,-1,0,R e il vettore dei termini noti ha elementi dati dalla somma algebrica delle correnti imposte e delle tensioni imposte. Detta M la matrice dei coefficienti, X il vettore delle incognite (le tensioni e le correnti di lato) e Y il vettore dei termini noti, si ha dunque il sistema

$$X = M^{-1}Y$$

Supponiamo adesso che gli unici generatori ideali presenti nella rete siano tre. Se chiamo Y_i il vettore dei termini noti della rete che ottengo annullando i generatori che non siano l'i-mo generatore allora ho

$$X = M^{-1}Y = M^{-1}(Y_1 + Y_2 + Y_3) = M^{-1}Y_1 + M^{-1}Y_2 + M^{-1}Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$$

cioè appunto la tensione del lato h-mo è data da

(la tensione del lato h-mo che si ha quando è attivo solo il primo generatore)+
 (la tensione del lato h-mo che si ha quando è attivo solo il secondo generatore)+
 (la tensione del lato h-mo che si ha quando è attivo solo il terzo generatore)

Lo stesso dicasi per la corrente al lato h-mo. Ciò prova la tesi.

OSSERVAZIONE,

NON SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI PER LE POTENZE. L'enunciato del teorema di sovrapposizione degli effetti si può riassumere scrivendo

$$U_h = \sum_{i=1}^t U_{hE_i} + \sum_{j=1}^c U_{hJ_j}$$

$$I_h = \sum_{i=1}^t I_{hE_i} + \sum_{j=1}^c I_{hJ_j}$$

dove la tensione del lato h-mo è data dalla sommatoria delle tensioni del lato stesso dovute a ciascuno dei t generatori ideali di tensione a cui si aggiunge la somma delle tensioni dovute a ciascuno dei c generatori ideali di corrente. Ciascuna di queste tensioni si intende ottenuta annullando tutti gli altri generatori ideali della rete elettrica. Stesso discorso vale per la corrente del lato h-mo.

Con questa simbologia la potenza del lato h-mo si scrive

$$P_h = I_h U_h = \left(\sum_{i=1}^t I_{hE_i} + \sum_{j=1}^c I_{hJ_j} \right) \left(\sum_{i=1}^t U_{hE_i} + \sum_{j=1}^c U_{hJ_j} \right)$$

Supponiamo ora, per semplificare la scrittura, che sia $t=c=2$, cioè supponiamo di avere due generatori ideali di corrente e due generatori ideali di tensione. Allora la posizione precedente si scrive

$$\begin{aligned} P_h &= I_h U_h = (I_{hE_1} + I_{hE_2} + I_{hJ_1} + I_{hJ_2}) (U_{hE_1} + U_{hE_2} + U_{hJ_1} + U_{hJ_2}) = \\ &= I_{hE_1} (U_{hE_1} + U_{hE_2} + U_{hJ_1} + U_{hJ_2}) + \\ &+ I_{hE_2} (U_{hE_1} + U_{hE_2} + U_{hJ_1} + U_{hJ_2}) + \\ &+ I_{hJ_1} (U_{hE_1} + U_{hE_2} + U_{hJ_1} + U_{hJ_2}) + \\ &+ I_{hJ_2} (U_{hE_1} + U_{hE_2} + U_{hJ_1} + U_{hJ_2}) \end{aligned}$$

Se ora invece pensassimo di poter calcolare la potenza del lato h-mo usando una supposta proprietà di sovrapposizione degli effetti per le potenze che fosse analoga a quella vista per correnti e tensioni avremmo per la potenza del lato h-mo

$$P_h = I_{hE_1} U_{hE_1} + I_{hE_2} U_{hE_2} + I_{hJ_1} U_{hJ_1} + I_{hJ_2} U_{hJ_2}$$

che è la potenza determinata in tale lato da ogni generatore ideale quando sono annullati tutti gli altri. Ma è evidente che otterremmo un risultato sbagliato.

II) GENERATORI EQUIVALENTI

DEDUZIONE,

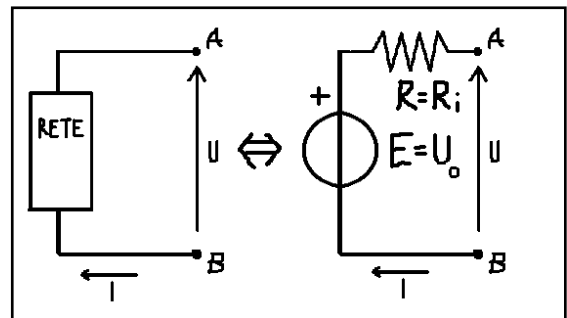
TEOREMA DI THEVENIN (DEL GENERATORE DI TENSIONE EQUIVALENTE). Sia data una rete lineare di cui siano accessibili i due soli morsetti A e B . Convenzionando da generatore tale bipolo si ha che esso è equivalente ad un generatore normale di tensione il quale abbia

- 1) f.e.m. pari alla tensione a vuoto¹ della rete fra i morsetti A e B ;
- 2) resistenza pari alla resistenza interna² della rete fra i morsetti A e B .

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo trovare la caratteristica esterna³ del bipolo costituito dalla rete, convenzionata da generatore, fra i morsetti A e B e provare che essa sia quella di un generatore normale di tensione avente f.e.m. pari alla tensione a vuoto della rete fra i morsetti A e B (che indichiamo U_0) e resistenza pari alla resistenza interna (che indichiamo R_i). Cioè dobbiamo provare che la caratteristica esterna della rete sia

$$U = U_0 - R_i I$$

A tale scopo inseriamo fra i due morsetti della rete un generatore ideale di corrente avente J pari ad I . In base al teorema di sovrapposizione degli effetti la tensione U è pari alla somma della tensione

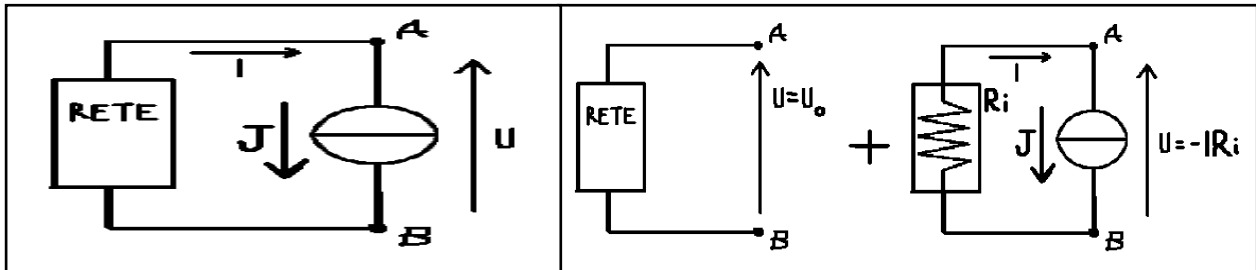


¹ La tensione a vuoto è quella che si ha quando fra i due morsetti è messo un interruttore aperto.

² La resistenza interna è quella vista fra i morsetti quando le f.e.m. dei generatori ideali di tensione sono poste pari a zero e le correnti dei generatori ideali di corrente sono poste uguali a zero.

³ La caratteristica esterna è la funzione $U=f(I)$ di un bipolo.

alla porta AB quando $J=0$ (che è la tensione a vuoto U_0) e della tensione alla porta AB quando sono azzerati i generatori ideali di tensione e corrente all'interno della rete (che è pari $-R_i J$). Si ha dunque



$$U = U_0 - R_i J = U_0 - R_i I$$

e la tesi è dimostrata.

COROLLARIO,

RESISTENZA INTERNA E CORRENTE DI CORTOCIRCUITO. Si consideri la rete del precedente teorema. Allora detta I_{cc} la corrente alla porta AB quando questa è posta in cortocircuito, ebbene si ha

$$R_i = \frac{U_0}{I_{cc}}$$

DIMOSTRAZIONE. Si deve considerare la caratteristica esterna ottenuta per la rete alla porta AB nel precedente teorema e considerare il caso in cui i morsetti A e B siano in cortocircuito, cioè il caso in cui sia $U = 0$. Si ha

$$\begin{cases} U = U_0 - R_i I \\ U = 0 \end{cases} \Rightarrow R_i = \frac{U_0}{I_{cc}}$$

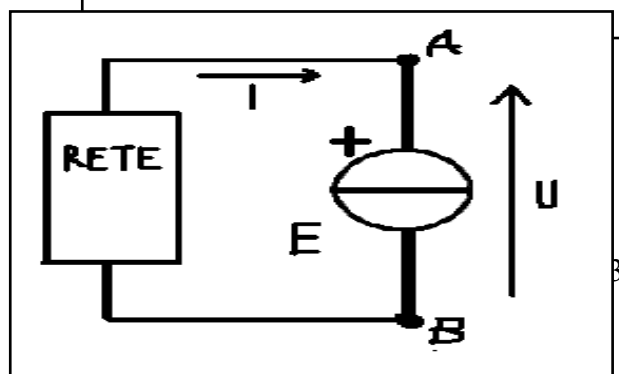
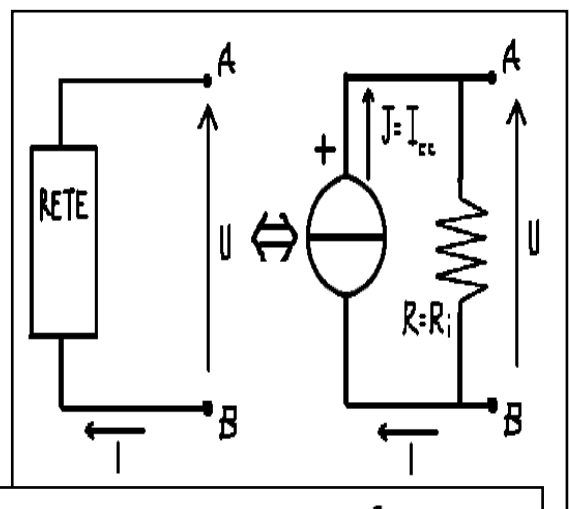
La tesi è dimostrata.

DEDUZIONE,

TEOREMA DI NORTON (DEL GENERATORE DI CORRENTE EQUIVALENTE). Sia data una rete lineare di cui siano accessibili i due soli morsetti A e B. Convenzionando da generatore tale bipolo si ha che esso è equivalente ad un generatore normale di corrente il quale abbia

- 1) corrente pari alla corrente di cortocircuito della rete fra i morsetti A e B;
- 2) resistenza pari alla resistenza interna della rete fra i morsetti A e B.

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo trovare la caratteristica esterna del bipolo costituito dalla rete, convenzionata da generatore, fra i morsetti A



e B , e provare che essa sia quella di un generatore normale di corrente avente corrente pari alla corrente di cortocircuito della rete fra i morsetti A e B (che indichiamo I_{cc}) e resistenza pari alla resistenza interna (che indichiamo R_i). Cioè dobbiamo provare che la caratteristica esterna della rete sia

$$I = I_{cc} - \frac{U}{R_i}.$$

A tale scopo inseriamo fra i due morsetti della rete un generatore ideale di tensione avente E pari ad U . In base al teorema di sovrapposizione degli effetti la corrente I è pari alla somma della corrente alla porta AB quando $E=0$ (che è la corrente di cortocircuito $I = I_{cc}$) e della corrente alla porta AB quando sono azzerati i generatori ideali di tensione e corrente all'interno della rete (che è pari $-\frac{U}{R_i}$). Si ha dunque

$$I = I_{cc} - \frac{U}{R_i}$$

e la tesi è dimostrata.

**DEDUZIONE,
GENERATORI**

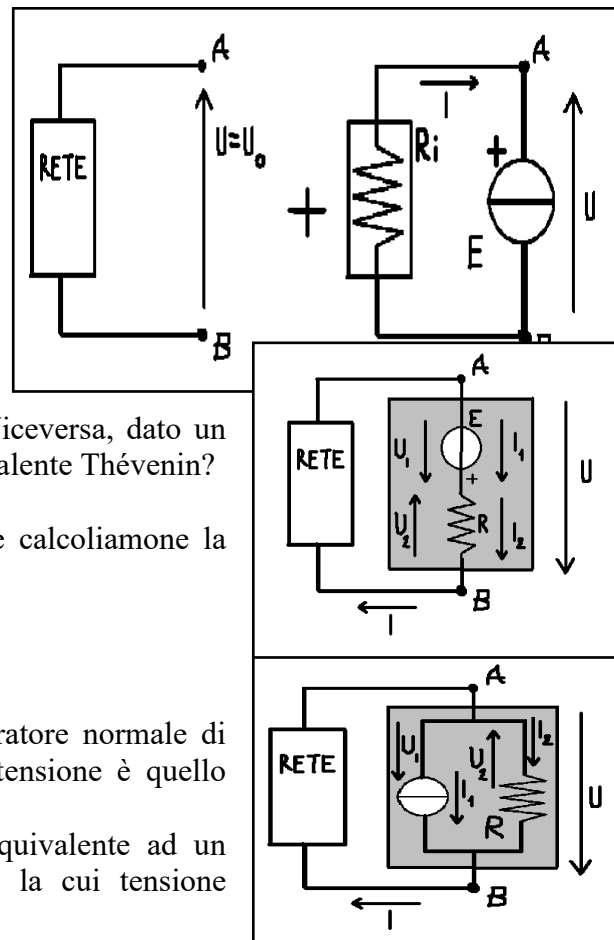
EQUIVALENTI. NORMALI Dato un generatore normale di tensione, quale ne è l'equivalente Norton? Viceversa, dato un generatore normale di corrente quale ne è l'equivalente Thévenin?

Prendiamo un generatore normale di tensione e calcoliamone la corrente di cortocircuito. In base alla LKT si ha

$$E - I_{cc}R = 0 \Rightarrow I_{cc} = EG$$

Dunque, in base al teorema di Norton, il generatore normale di corrente equivalente al generatore normale di tensione è quello avente corrente impressa $J=EG$ e resistenza R .

Viceversa il generatore normale di tensione equivalente ad un generatore normale di corrente dato è quello la cui tensione impressa si $E=RJ$ e la cui resistenza sia R .



III) TEOREMA DI SOSTITUZIONE E FORMULA DI MILLMANN

DEDUZIONE,

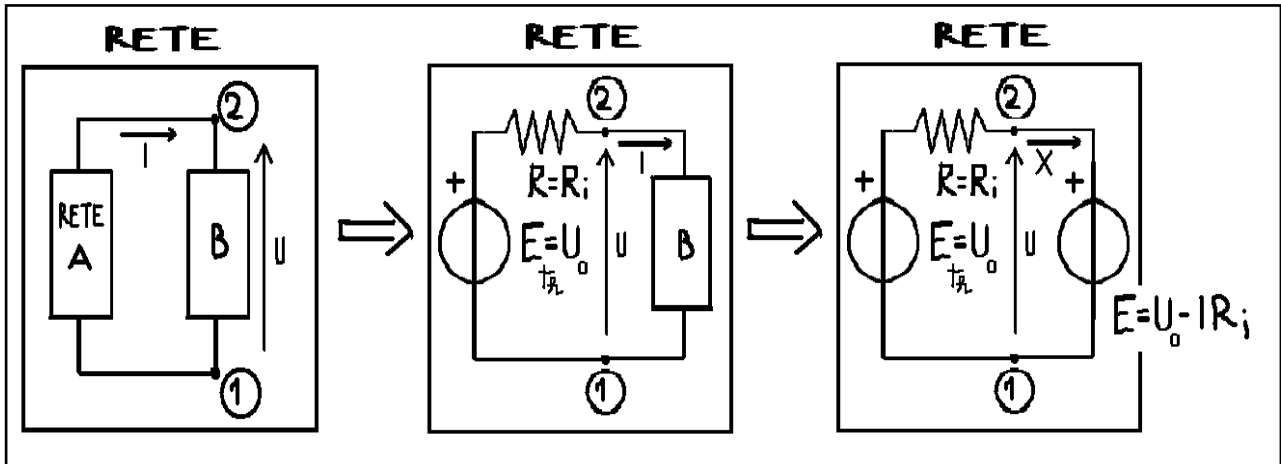
TEOREMA DI SOSTITUZIONE. Sia data una rete lineare in regime stazionario. Sia U_h la tensione del lato $h-mo$ e I_h la relativa corrente. Allora si ha che

- 1) la soluzione della rete non cambia se sostituisco al lato $h-mo$ un generatore ideale di tensione con tensione $E = U_h$;
- 2) la soluzione della rete non cambia se sostituisco al lato $h-mo$ un generatore ideale di corrente con corrente $J = I_h$.

DIMOSTRAZIONE.

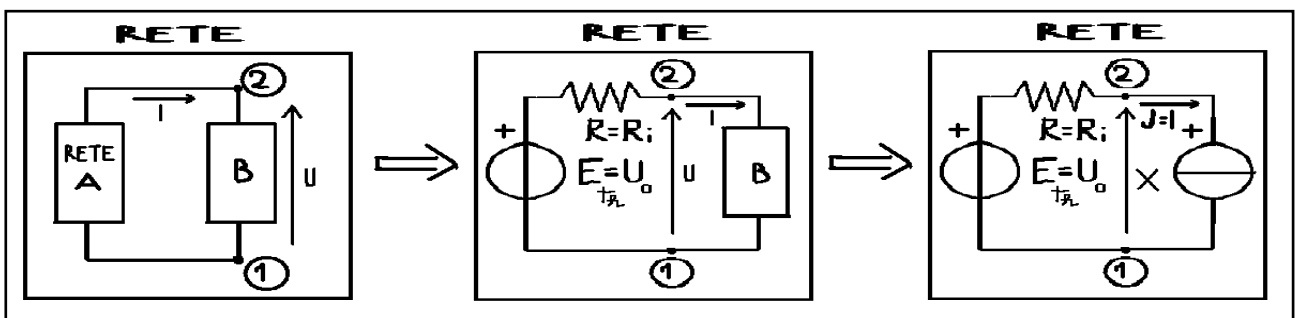
1) Si consideri la rete in figura. Essa è costituita da una rete (rete A, convenzionata da generatore) accessibile dai morsetti 1 e 2 e da un bipolo (bipolo B, convenzionato da utilizzatore) ad essa collegato. In base al teorema di Thévenin la tensione U è pari a

$$U = U_0 - R_i I$$



dove U_0 è la tensione a vuoto della rete A (la tensione fra i morsetti 1 e 2 quando fra essi c'è un circuito aperto) e R_i è la resistenza interna della rete A (la resistenza fra i morsetti 1 e 2 quando i generatori ideali di tensione della rete sono sostituiti con cortocircuiti e i generatori ideali di corrente della rete sono sostituiti con circuiti aperti). Ora se sostituisco al bipolo B un generatore ideale di tensione (con le convenzioni di figura per tensione e corrente) avente f.e.m. $E = U_0 - R_i I$ ho senz'altro la stessa tensione, fra i morsetti 1 e 2, della rete di partenza. Ho anche la stessa corrente? Detta X la corrente che circola nella maglia costituita dall'equivalente Thévenin della rete A e dal generatore ideale di tensione, la LKT (con i riferimenti adottati) si scrive

$$U_0 - XR_i - E = 0 \Leftrightarrow X = \frac{U_0 - E}{R_i} = \frac{U_0 - (U_0 - R_i I)}{R_i} = I$$



Dunque tensione e corrente ai morsetti 1 e 2 non variano e il teorema è dimostrato.

2) Nel procedimento precedentemente seguito si sostituisca al bipolo B un generatore ideale di corrente (con gli stessi riferimenti di tensione e corrente adottati per il generatore ideale di tensione) avente corrente $J = I$. Per verificare la tesi dobbiamo provare che la tensione ai morsetti 1 e 2 sia ancora $U = U_0 - R_i I$. Detta X la tensione ai morsetti 1 e 2, se applico la LKT alla maglia costituita dall'equivalente Thévenin della rete A e dal generatore ideale di corrente ottengo

$$U_0 - JR_i - X = 0 \Leftrightarrow X = U_0 - JR_i = U_0 - IR_i = U$$

Dunque tensione e corrente ai morsetti 1 e 2 non variano e il teorema è dimostrato.

COROLLARIO,

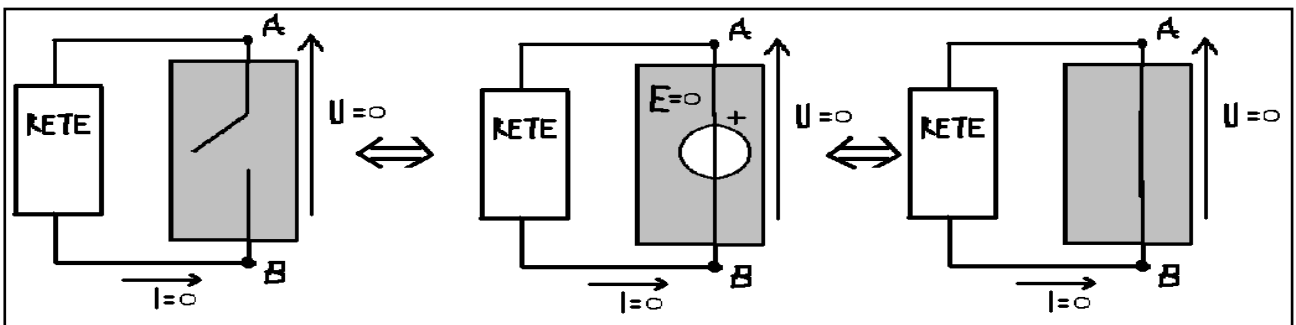
INTERRUTTORE APERTO CON TENSIONE NULLA.

1) In una rete lineare un interruttore aperto che abbia tensione nulla può essere chiuso senza che in esso passi corrente, cioè senza modificare la soluzione della rete.

2) In una rete lineare un interruttore chiuso con corrente nulla può essere aperto senza che appaia tensione ai suoi morsetti, cioè senza modificare la soluzione della rete.

DIMOSTRAZIONE. Se l'interruttore ha tensione nulla ciò significa che, in base al teorema di sostituzione, posso sostituirlo con un generatore ideale di tensione a tensione nulla senza modificare la soluzione della rete. Ma un generatore ideale di tensione a tensione nulla equivale ad un circuito chiuso. Dunque posso chiudere il circuito senza modificare la soluzione della rete, cioè senza che in esso passi corrente.

Facendo il ragionamento inverso possiamo dire che un circuito chiuso con corrente nulla può essere sostituito, per il teorema di sostituzione, con un generatore ideale di corrente a corrente nulla, senza modificare la soluzione della rete. Ma un generatore ideale di corrente a corrente nulla equivale ad un circuito aperto. Dunque posso aprire il circuito senza modificare la soluzione della rete, cioè senza che ai suoi morsetti si generi potenziale.



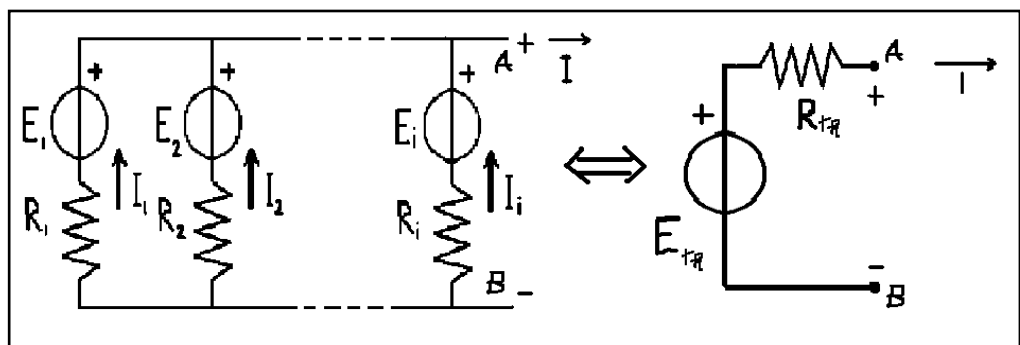
DEDUZIONE,

FORMULE DI MILLMANN.

1) Il generatore normale di tensione equivalente (l'equivalente Thévenin) di una rete costituita dal parallelo di n generatori normali di tensione ha tensione e resistenza date rispettivamente da

$$E_{th} = \frac{\sum_{h=1}^n \pm \frac{E_h}{R_h}}{\sum_{h=1}^n \frac{1}{R_h}}$$

$$R_{th} = \frac{1}{\sum_{h=1}^n \frac{1}{R_h}}$$

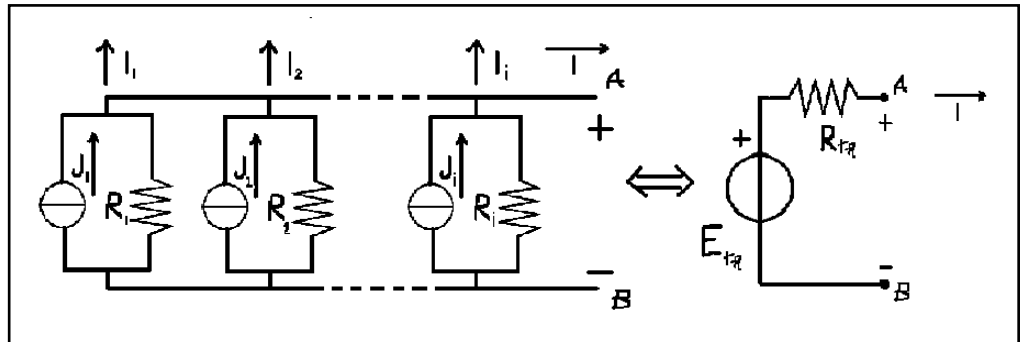


dove vale il segno positivo per gli addendi che si riferiscono a generatori con f.e.m. concordi a quella del generatore Thévenin (come in figura).

2) Il generatore normale di tensione equivalente (l'equivalente Thévenin) di una rete costituita dal parallelo di n generatori normali di corrente ha tensione e resistenza date rispettivamente da

$$E_{th} = \frac{\sum_{h=1}^n \pm J_h}{\sum_{h=1}^n \frac{1}{R_h}}$$

$$R_{th} = \frac{1}{\sum_{h=1}^n \frac{1}{R_h}}$$

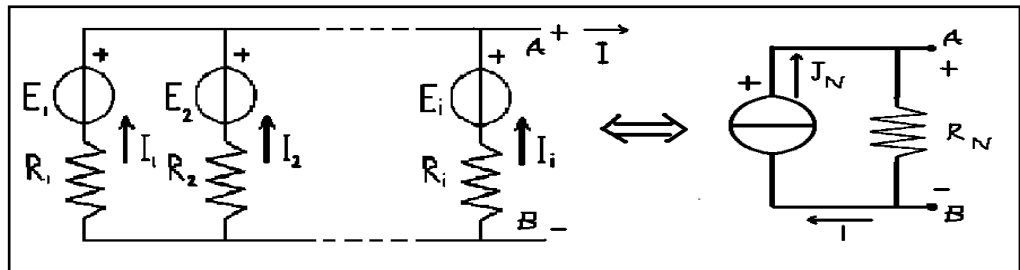


dove vale il segno positivo per gli addendi che si riferiscono a generatori ideali di corrente con riferimento di tensione concorde con quello del generatore Thévenin (come in figura).

3) Il generatore normale di corrente (equivalente Norton) di una rete costituita dal parallelo di n generatori normali di tensione ha corrente e resistenza date rispettivamente da

$$J_{No} = \sum_{h=1}^n \pm \frac{E_h}{R_h}$$

$$R_{No} = \frac{1}{\sum_{h=1}^n \frac{1}{R_h}}$$

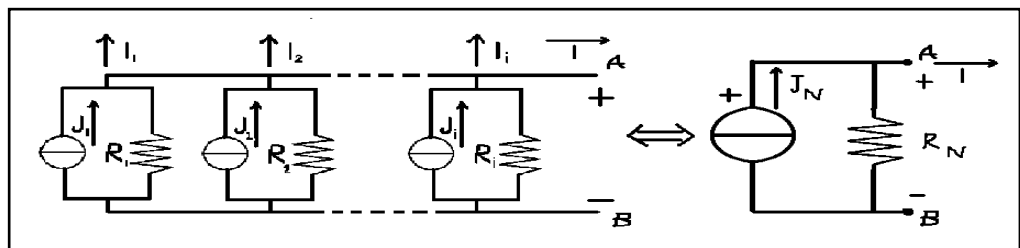


dove vale il segno positivo con le convenzioni indicate in figura per i generatori ideali, il segno negativo altrimenti.

4) Il generatore normale di corrente (equivalente Norton) di una rete costituita dal parallelo di n generatori normali di corrente ha corrente e resistenza date rispettivamente da

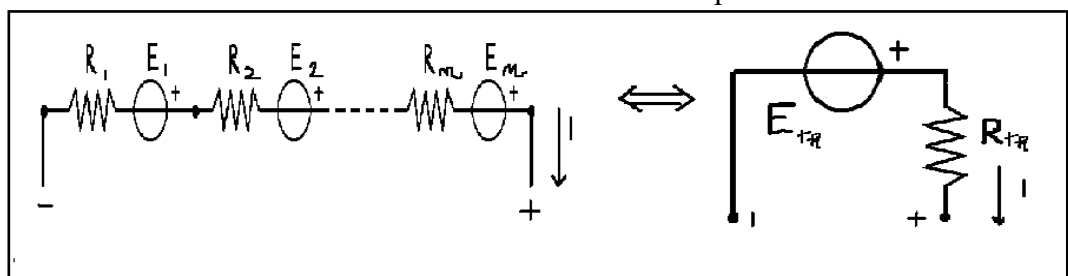
$$J_{No} = \sum_{h=1}^n \pm J_h$$

$$R_{No} = \frac{1}{\sum_{h=1}^n \frac{1}{R_h}}$$



dove vale il segno positivo con le convenzioni adottate in figura per i generatori ideali, il segno negativo altrimenti.

5) Il generatore normale di tensione equivalente (l'equivalente Thévenin) di una rete costituita dalla serie di n generatori normali di tensione ha tensione e resistenza date rispettivamente da



$$E_{th} = \sum_{h=1}^n \pm E_h$$

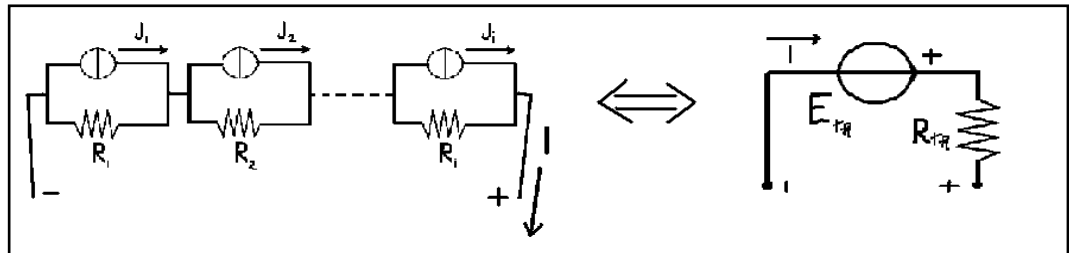
$$R_{th} = \sum_{h=1}^n R_h$$

dove vale il segno più nel caso in cui i generatori ideali di tensione siano convenzionati come in figura, il segno meno altrimenti.

6) Il generatore normale di tensione equivalente (l'equivalente Thévenin) di una rete costituita dalla serie di n generatori normali di corrente ha tensione e resistenza date rispettivamente da

$$E_{th} = \frac{\sum_{h=1}^n \pm J_h}{\sum_{h=1}^n \frac{1}{R_h}}$$

$$R_{th} = R_h$$

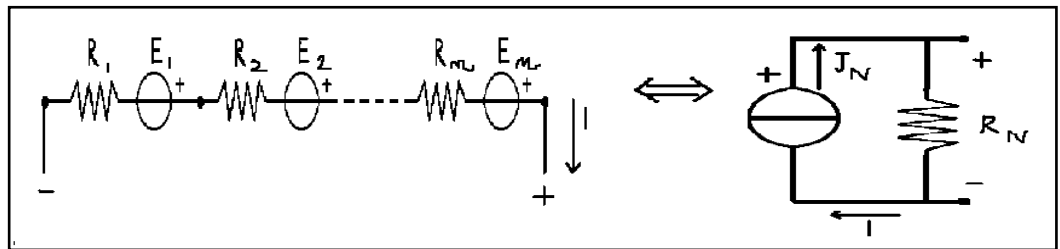


dove vale il segno più per le convenzioni in figura.

7) Il generatore normale di corrente (equivalente Norton) di una rete costituita dalla serie di n generatori normali di tensione ha corrente e resistenza date rispettivamente da

$$J_{No} = \frac{\sum_{h=1}^n \pm E_h}{\sum_{h=1}^n R_h}$$

$$R_{No} = \sum_{h=1}^n R_h$$

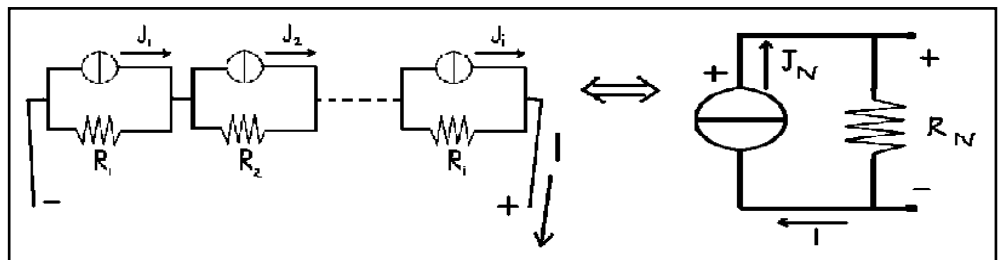


dove vale il segno più per le convenzioni adottate in figura.

8) Il generatore normale di corrente (equivalente Norton) di una rete costituita dalla serie di n generatori normali di corrente

$$J_{No} = \frac{\sum_{h=1}^n \pm J_h R_h}{\sum_{h=1}^n R_h}$$

$$R_{No} = \sum_{h=1}^n R_h$$



DIMOSTRAZIONE.

1) Si guardi la figura. La tensione a vuoto della serie è data, in base alla LKT, da

$$U_0 = E_i - I_i R_i$$

In base alla LKC si ha poi

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0$$

Esplicitando dunque la prima espressione rispetto le correnti e sostituendo queste nella sommatoria si ha

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{E_i - U_0}{R_i} \right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left(\frac{E_i}{R_i} \right) = U_0 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{R_i} \right) \Leftrightarrow U_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{E_i}{R_i} \right)}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{R_i} \right)}$$

Le somme sono qui tutte positive perché i generatori ideali di tensione sono convenzionati concordemente al generatore Thévenin.

2) Si guardi la figura. la tensione a vuoto della seri è, in base alla LKT, data da

$$U_0 = (J_i - I_i) R_i$$

In base alla LKC si ha poi

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0$$

Esplicitando dunque la prima espressione rispetto le correnti e sostituendo queste nella sommatoria si ha

$$\sum_{i=1}^n \left(J_i - \frac{U_0}{R_i} \right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (J_i) = U_0 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{R_i} \right) \Leftrightarrow U_0 = \frac{\sum_{i=1}^n (J_i)}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{R_i} \right)}$$

Le somme sono qui tutte positive perché i generatori ideali di corrente hanno convenzione di tensione concorde a quella del generatore Thévenin.

IV) RENDIMENTO E ADATTAMENTO DEL CARICO

DEFINIZIONE,

RENDIMENTO DEL GENERATORE NORMALE DI TENSIONE. Prendiamo in considerazione un generatore normale di tensione collegato ad un utilizzatore rappresentato da una resistenza R_u . I riferimenti siano quelli indicati nella figura. Definiamo rendimento del generatore normale di tensione il rapporto tra la potenza uscente dal bipolo generatore normale di tensione e quella uscente dal generatore ideale di tensione. Indicato η tale grandezza si ha

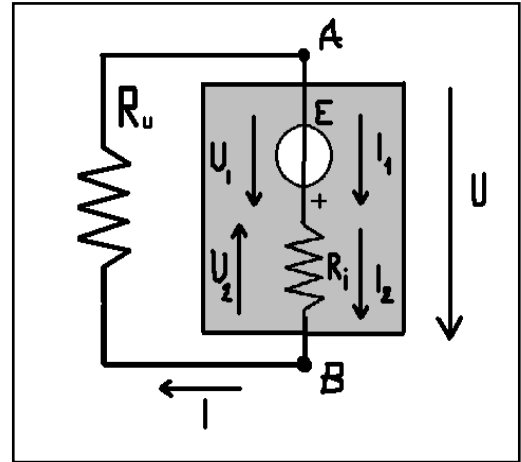
$$\eta = \frac{I^2 R_u}{IE} = \frac{IR_u}{E}$$

Osservando ora che, in base alla LKT, si ha

$$E - IR_i - IR_u = 0 \Rightarrow I = \frac{E}{R_i + R_u}$$

il rendimento si scrive

$$\eta = \frac{I^2 R_u}{IE} = \frac{IR_u}{E} = \frac{\left(\frac{E}{R_i + R_u}\right) R_u}{E} = \frac{ER_u}{(R_i + R_u)E} = \frac{R_u}{R_i + R_u}$$



Se diciamo potenza dissipata del generatore normale la potenza entrante nella sua resistenza interna, ponendo

$$P_d = I^2 R_i = \frac{E^2 R_i}{(R_i + R_u)^2}$$

e se diciamo potenza generata dal generatore normale di tensione la potenza uscente dal generatore ideale di tensione, ponendo

$$P_g = IE = \frac{E^2}{R_i + R_u}$$

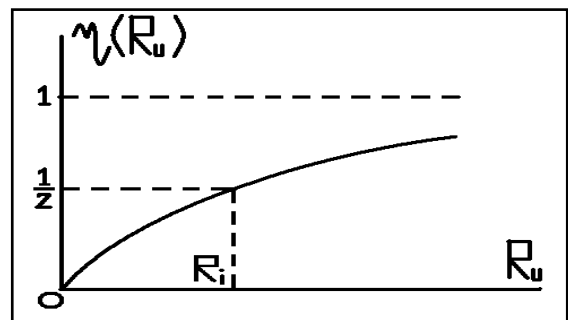
allora si potrà scrivere il rendimento anche come

$$\eta = \frac{P_g - P_d}{P_g}$$

OSSERVAZIONE,

RENDIMENTO IN FUNZIONE DELLA RESISTENZA DELL'UTILIZZATORE. Studiamo l'andamento del rendimento in funzione della resistenza dell'utilizzatore. Si osserva che esso tende all'unità quando la resistenza dell'utilizzatore tende all'infinito e questo perché, in tal caso, non passa corrente nella rete e dunque non si ha dissipazione di energia a causa della resistenza interna del generatore normale.

Esso vale inoltre 0.5 nel caso si abbia uguaglianza tra resistenza dell'utilizzatore e resistenza interna del generatore normale di tensione.



OSSERVAZIONE,

POTENZA USCENTE DAL GENERATORE NORMALE DI TENSIONE IN FUNZIONE DELLA RESISTENZA DELL'UTILIZZATORE. La potenza uscente dal generatore normale di tensione, detta potenza erogata dal generatore, risulta data dalla potenza generata meno la potenza dissipata. Dunque si ha

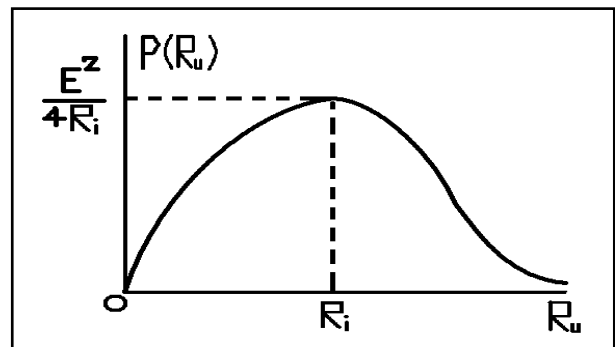
$$\begin{cases} P = P_g - P_d = IE - I^2 R_i \\ I = \frac{E}{R_i + R_u} \end{cases} \Rightarrow P = \frac{E^2}{R_i + R_u} - R_i \left(\frac{E}{R_i + R_u} \right)^2 = \frac{R_u E^2}{(R_i + R_u)^2}$$

Le derivate prima e seconda della funzione $P = P(R_u)$ sono le seguenti

$$\frac{dP}{dR_u} = E^2 \frac{R_i - R_u}{(R_i + R_u)^3}$$

$$\frac{d^2 P}{dR_u^2} = -E^2 \frac{4R_i - 2R_u}{(R_i + R_u)^4}$$

e ciò giustifica l'andamento riportato per la funzione.



DEDUZIONE,

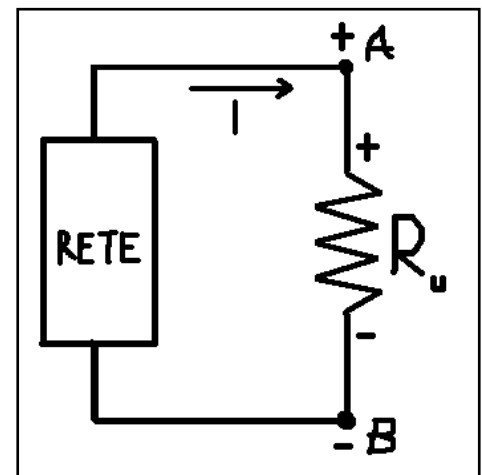
TEOREMA DEL MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA. La potenza erogata dal generatore normale di tensione, ovvero la potenza uscente dal generatore normale di tensione, ovvero la potenza trasferita dal generatore normale di tensione al carico, è massima quando $R_u = R_i$ e vale

$$P = \frac{E^2}{4R_u}$$

In tali condizioni il rendimento del generatore normale di tensione vale

$$\eta = \frac{P_g - P_d}{P_g} = \frac{1}{2}$$

DIMOSTRAZIONE. Basta considerare l'andamento della funzione $P = P(R_u)$ analizzata nella osservazione qui sopra e quello della funzione $\eta = \eta(R_u)$ analizzata più sopra.



DEDUZIONE

COROLLARIO. Si consideri il circuito in figura. Il massimo trasferimento di potenza della rete al carico si realizza quando $R_u = R_i$, dove R_i è la resistenza interna della rete, ovvero la resistenza equivalente della rete quando tutti i suoi generatori sono azzerati. Il valore della potenza uscente dalla rete in tali condizioni è

$$P = \frac{U_0^2}{4R_u}$$

dove U_0 è la tensione a vuoto fra i morsetti A e B, ovvero la tensione che si ha fra essi quando viene sostituito il carico con un circuito aperto.

Tuttavia il rendimento della rete non sarà, in tali condizioni, pari a 0,5.

DIMOSTRAZIONE. Sostituita la rete con il suo equivalente Thévenin si ottiene la tesi applicando al circuito così ottenuto il risultato del precedente teorema.

Per quello che riguarda il rendimento, esso è diverso da quello dell'equivalente Thévenin poiché diversa sarà la potenza dissipata e quella generata della rete rispetto a quelle dell'equivalente Thévenin. Per capire questo fatto si segua l'esempio qui riportato.

ESEMPIO,

EQUIVALENTE THEVENIN. Si consideri la rete in figura. Si trova che l'equivalente Thévenin della parte in evidenza è caratterizzato da tensione e resistenza date da

$$E_{Th} = \frac{E}{2}, R_{Th} = \frac{R}{2}$$

Ne segue, per il teorema precedente, che la massima potenza uscente dalla porta AB si ha quando la resistenza del carico è pari alla resistenza dell'equivalente Thévenin e vale

$$P = \frac{E_{Th}^2}{4R_{Th}} = \frac{E^2/4}{2R} = \frac{E^2}{8R}$$

Si vuole ora però far notare come l'equivalente Thévenin, sebbene possa fornirci l'espressione della potenza uscente dalla porta AB, non ci possa dare la misura della potenza dissipata dalla rete che sostituisce, né della potenza generata della stessa rete.

Infatti, osservato che

$$I = \frac{E}{R + 2R_u}$$

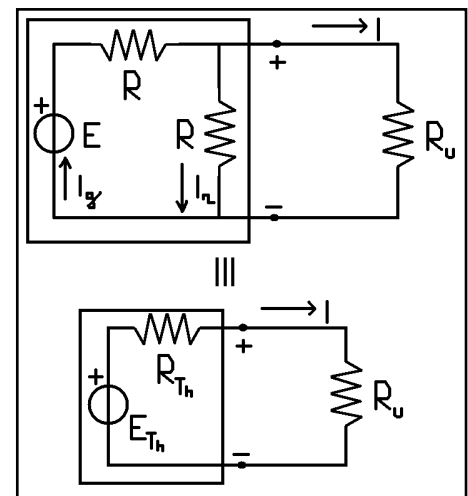
$$I_g = \frac{E(R + R_u)}{R(R + 2R_u)}$$

$$I_r = \frac{ER_u}{R(R + 2R_u)}$$

si ha che la potenza dissipata dalla rete evidenziata è

$$P_d = I_g^2 R + I_r^2 R = \frac{E^2 (R^2 + 2R_u^2 + 2RR_u)}{R(R + 2R_u)^2}$$

mentre quella dissipata nell'equivalente Thévenin è



$$P_{dTh} = I^2 R_{Th} = \frac{RE^2}{2(R + 2R_u)^2}$$

Come si vede le due potenze dissipate non sono uguali! E lo stesso discorso vale per le potenze generate. Infatti la potenza generata dalla rete di partenza è

$$P_g = EI_g = \frac{E^2(R + R_u)}{R(R + 2R_u)}$$

mentre quella generata dall'equivalente Thévenin è

$$P_{gTh} = E_{Th} I = \frac{E^2}{2(R + 2R_u)}$$

Tutto questo ci fa concludere anche che il rendimento della rete di partenza e del suo equivalente Thévenin non coincidono. In effetti il rendimento della rete di partenza è

$$\eta = \frac{P_g - P_d}{P_g} = \frac{\frac{E^2(R + R_u)}{R(R + 2R_u)} - \frac{E^2(R^2 + 2R_u^2 + 2RR_u)}{R(R + 2R_u)^2}}{\frac{E^2(R + R_u)}{R(R + 2R_u)}} = \frac{RR_u}{(R + 2R_u)(R + R_u)}$$

mentre il rendimento dell'equivalente Thévenin è

$$\eta_{Th} = \frac{P_{gTh} - P_{dTh}}{P_{gTh}} = \frac{\frac{E^2}{2(R + 2R_u)} - \frac{RE^2}{2(R + 2R_u)^2}}{\frac{E^2}{2(R + 2R_u)}} = \frac{2R_u}{R + 2R_u}$$

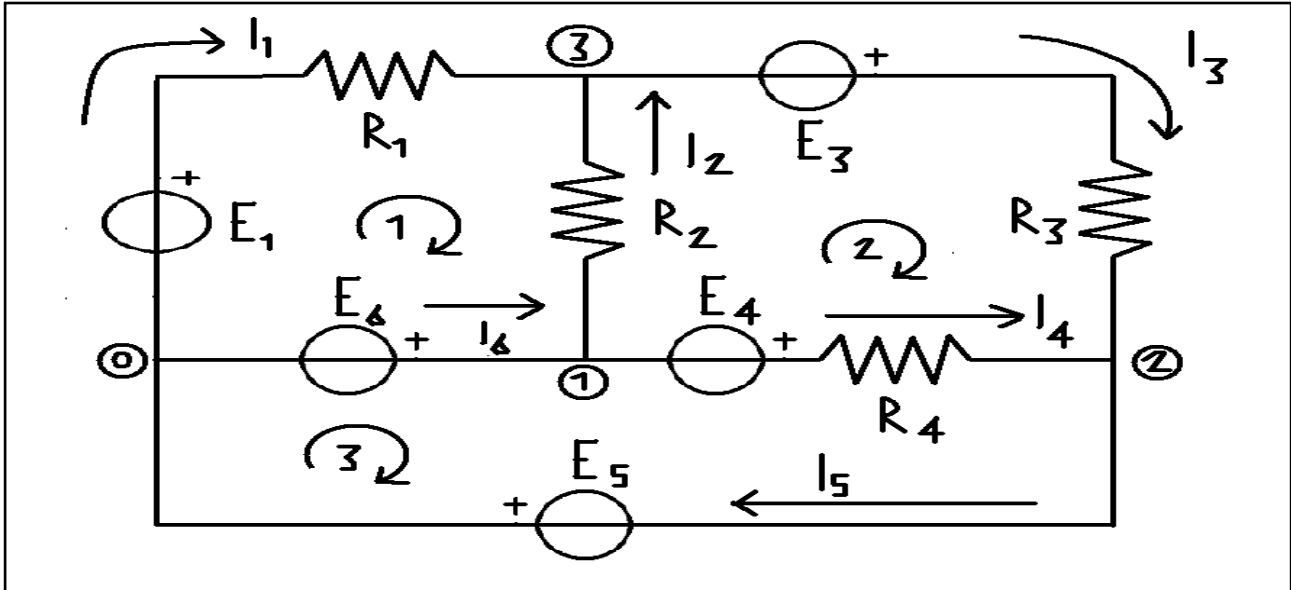
Questo vuol dire che, in condizioni di adattamento del carico, il rendimento della rete originaria non vale necessariamente 0,5. In effetti in tali condizioni si ha

$$\eta|_{R_u = \frac{R}{2}} = \frac{\frac{R}{2}}{\left(R + 2\frac{R}{2}\right)\left(R + \frac{R}{2}\right)} = \frac{\frac{R^2}{2}}{(R + R)\left(\frac{2R + R}{2}\right)} = \frac{\frac{R^2}{2}}{3R^2} = \frac{0,5}{3} = \frac{1}{6}$$

CAPITOLO IV, METODO RISOLUTIVO DELLE MAGLIE PER RETI LINEARI

ESEMPIO,

UNA RETE CON SOLI GENERATORI IDEALI DI TENSIONE. Consideriamo la rete



elettrica in figura. Il suo numero di nodi è $n=4$, il suo numero di lati è $l=6$ mentre il suo numero di anelli risulta $m=l-(n-1)=6-3=3$. Procedendo alla sua risoluzione col metodo generale di analisi si perviene al sistema 6×6 seguente

$$\begin{cases} 0 - I_2 + 0 - I_4 + 0 + I_6 = 0 \\ 0 + 0 + I_3 + I_4 - I_5 + 0 = 0 \\ I_1 + I_2 - I_3 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ -R_1 I_1 + I_2 R_2 + 0 + 0 + 0 + 0 = -E_1 + E_6 \\ 0 - I_2 R_2 - I_3 R_3 + I_4 R_4 + 0 + 0 = -E_3 + E_4 \\ 0 + 0 + 0 - I_4 R_4 + 0 + 0 = -E_4 - E_5 - E_6 \end{cases}$$

Attribuendo i seguenti valori numerici alle costanti

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 5\Omega$$

$$E_1 = E_3 = E_4 = E_5 = E_6 = 10V$$

si ottiene la soluzione

$$I_1 = 2A, I_2 = 2A, I_3 = 4A, I_4 = 6A, I_5 = 10A, I_6 = 8A$$

Si vuole ora mostrare come risolvere la rete con un numero minore di equazioni. A tale scopo si inseriscano delle correnti fittizie, dette correnti di maglia. Esse scorrono all'interno delle 3 maglie in verso orario. La corrente di maglia della prima maglia la chiameremo I_{m1} , quella della seconda maglia la chiameremo I_{m2} , e così via.

Le correnti effettive si esprimono in termini di correnti di maglia nel modo seguente

$$\begin{cases} I_1 = I_{m1} \\ I_2 = -I_{m1} + I_{m2} \\ I_3 = I_{m2} \\ I_4 = -I_{m2} + I_{m3} \\ I_5 = I_{m3} \\ I_6 = -I_{m1} + I_{m3} \end{cases}$$

Sostituendo tali espressioni nel sistema risolvete la rete si ha

$$\begin{cases} -(I_{m2} - I_{m1}) - (-I_{m2} + I_{m3}) + (-I_{m1} + I_{m3}) = 0 \\ I_{m2} - I_{m2} + I_{m3} - I_{m3} = 0 \\ I_{m1} + I_{m2} - I_{m1} - I_{m2} = 0 \\ -R_1 I_{m1} + (I_{m2} - I_{m1}) R_2 = -E_1 + E_6 \\ -(I_{m2} - I_{m1}) R_2 - I_{m2} R_3 + (-I_{m2} + I_{m3}) R_4 = -E_3 + E_4 \\ -(-I_{m2} + I_{m3}) R_4 = -E_4 - E_5 - E_6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ -(R_1 + R_2) I_{m1} + R_2 I_{m2} = -E_1 + E_6 \\ R_2 I_{m1} - (R_2 + R_3 + R_4) I_{m2} + R_4 I_{m3} = -E_3 + E_4 \\ R_4 I_{m2} - R_4 I_{m3} = -E_4 - E_5 - E_6 \end{cases}$$

Si vede che le tre equazioni dovute all'applicazione della LKC divengono delle identità. Ci si riduce così ad un sistema 3x3 che scritto in forma vettoriale risulta

$$\begin{pmatrix} -(R_1 + R_2) & R_2 & 0 \\ R_2 & -(R_2 + R_3 + R_4) & R_4 \\ 0 & R_4 & -R_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_1 + E_6 \\ -E_3 + E_4 \\ -E_4 - E_5 - E_6 \end{pmatrix}$$

e riarrangiando i segni abbiamo

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 - E_6 \\ E_3 - E_4 \\ E_4 + E_5 + E_6 \end{pmatrix}$$

Attribuiamo ora alle costanti i valori numerici già indicati. Si ottiene il sistema

$$\begin{pmatrix} 10\Omega & -5\Omega & 0 \\ 5\Omega & 15\Omega & -5\Omega \\ 0 & -5\Omega & 5\Omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30V \end{pmatrix}$$

Risolvendo si trovano le correnti di maglia

$$I_{m1} = 2A, I_{m2} = 4A, I_{m3} = 10A$$

Ricaviamo in fine le correnti effettive

$$\begin{cases} I_1 = I_{m1} = 2A \\ I_2 = I_{m2} - I_{m1} = 4A - 2A = 2A \\ I_3 = I_{m2} = 4A \\ I_4 = -I_{m2} + I_{m3} = -4A + 10A = 6A \\ I_5 = I_{m3} = 10A \\ I_6 = -I_{m1} + I_{m3} = -2A + 10A = 8A \end{cases}$$

E torna il risultato trovato col metodo generale di analisi.

Estrapoliamo ora da questo esempio una regola generale per la risoluzione di reti con soli generatori ideali di tensione.

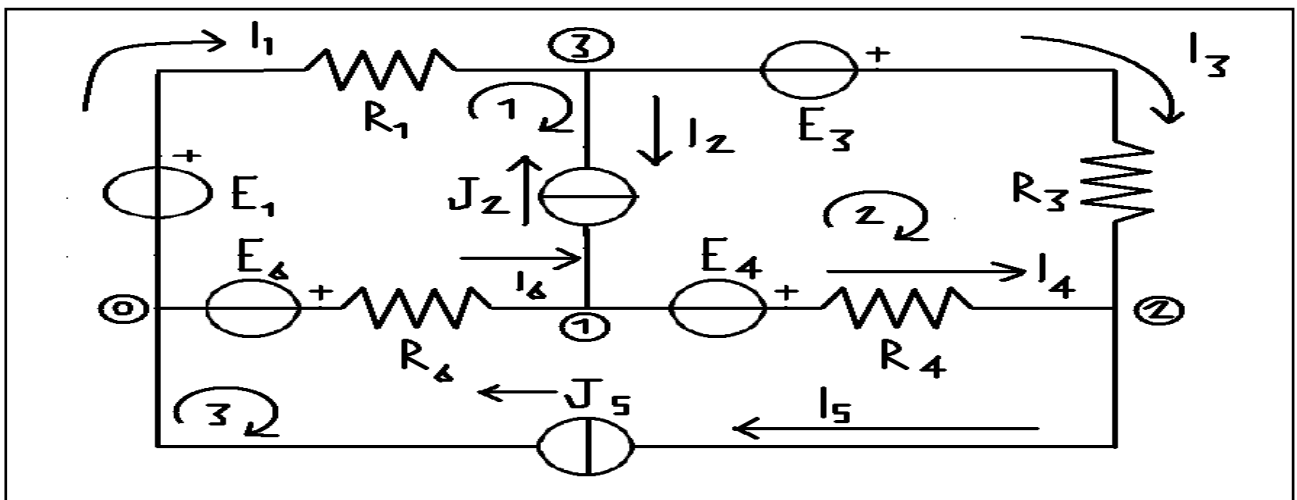
DEDUZIONE,

METODO DI RISOLUZIONE DELLE MAGLIE. Data una rete elettrica con soli generatori ideali di tensione, introdotte le correnti di maglia con verso positivo orario, allora si ha che il sistema risolvete nelle incognite delle correnti di maglia ha

1)matrice dei coefficienti simmetrica in cui

- a)il termine i-mo della diagonale principale è pari alla somma delle resistenze della i-ma maglia,
- b)il termine ij-mo fuori della diagonale principale è pari alla resistenza comune alla maglia i e alla maglia j, cambiata di segno;

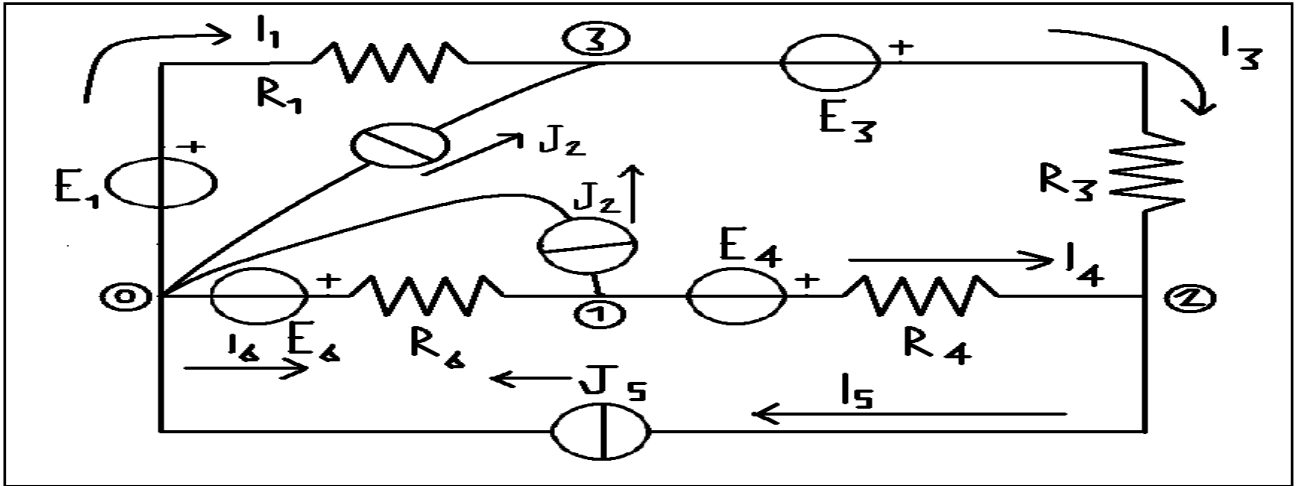
2)vettore dei termini noti con termine i-mo pari alla somma algebrica delle tensioni dei generatori ideali di tensione della maglia i-ma, presi con verso positivo se hanno tensione concorde al verso della corrente di maglia, con verso negativo altrimenti.



ESEMPIO,

UNA RETE CON GENERATORI IDEALI DI CORRENTE. Prendiamo la rete in figura. Ad essa non può essere direttamente applicato il metodo delle maglie in quanto sono presenti anche generatori ideali di corrente. Vediamo dunque di trasformarla in modo tale da togliere questo impedimento. Si consideri allora che la rete può essere disegnata nel modo seguente.

Procediamo ora a trasformare secondo Thévenin alcune porzioni della rete in modo da eliminare i



generatori ideali di corrente.

Si consideri la maglia in alto a sinistra fra i nodi 0 e 3. Per essa si ha

$$E_{Th1} = E_1 + J_2 R_1$$

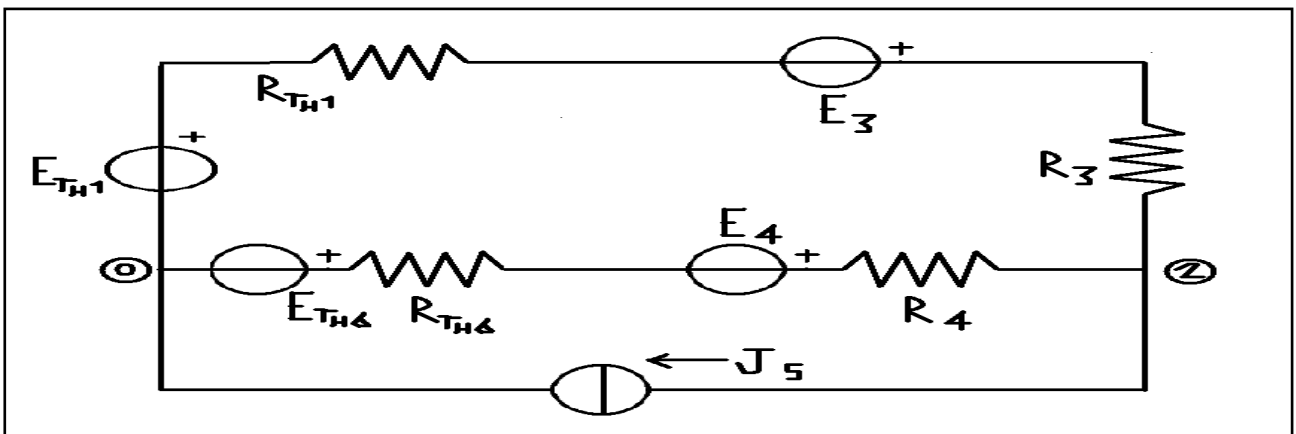
$$R_{Th1} = R_1$$

Si consideri ora la maglia fra i nodi 0 e 1 sotto quella precedentemente considerata. Per essa si ha

$$E_{Th6} = E_6 - J_2 R_6$$

$$R_{Th6} = R_6$$

Dunque la rete si disegna ora nel modo seguente.



Procediamo ora a trasformare secondo Thévenin la maglia inferiore di questa rete in modo da togliere l'ultimo generatore ideale di corrente. Si ha

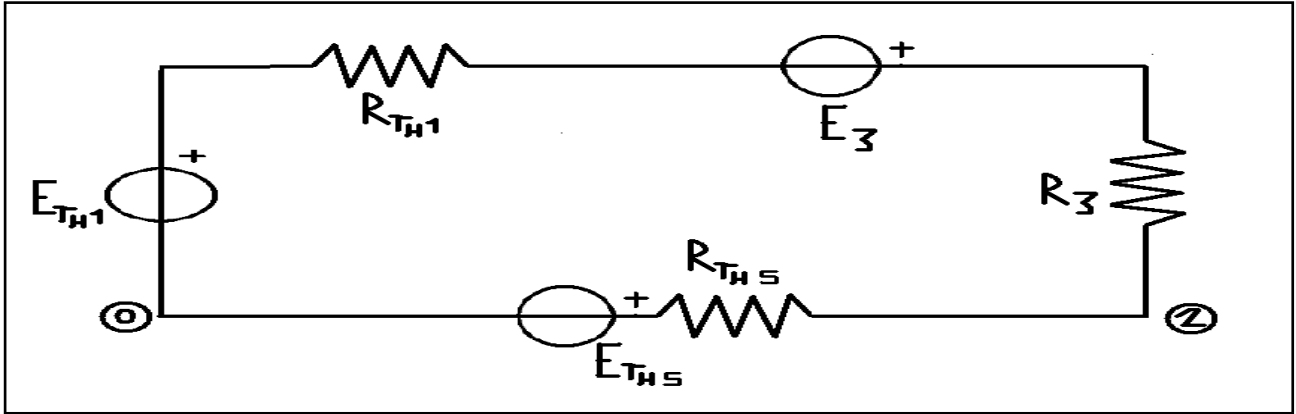
$$E_{Th5} = E_{Th6} + E_4 - (R_{Th6} + R_4)J_5 = (E_6 - J_2 R_6) + E_4 - (R_6 + R_4)J_5 = E_4 + E_6 - J_2 R_6 - J_5 (R_6 + R_4)$$

$$R_{Th5} = R_4 + R_{Th6} = R_4 + R_6$$

La rete dunque la disegniamo ora nel modo seguente.

La rete è ridotta dunque ad una sola maglia senza generatori ideali di tensione e può risolversi ora col metodo delle maglie.

Inserendo infatti una corrente di maglia avente verso positivo orario, applicando la regola generale, abbiamo



$$(R_{Th1} + R_{Th5} + R_3)I_m = E_{Th1} + E_3 - E_{Th5}$$

che, inserendo i parametri della rete originaria, diviene

$$\begin{aligned} (R_1 + R_4 + R_6 + R_3)I_m &= E_1 + J_2 R_1 + E_3 - (E_4 + E_6 - J_2 R_6 - J_5 (R_6 + R_4)) \Rightarrow \\ (R_1 + R_3 + R_4 + R_6)I_m &= E_1 + J_2 R_1 + E_3 - E_4 - E_6 + J_2 R_6 + J_5 (R_6 + R_4) \Rightarrow \\ (R_1 + R_3 + R_4 + R_6)I_m &= E_1 + E_3 - E_4 - E_6 + J_2 (R_1 + R_6) + J_5 (R_6 + R_4) \Rightarrow \\ I_m &= \frac{E_1 + E_3 - E_4 - E_6 + J_2 (R_1 + R_6) + J_5 (R_6 + R_4)}{(R_1 + R_3 + R_4 + R_6)} \end{aligned}$$

Si deve a questo punto risalire alle correnti originarie. Si osservi a tal proposito che

$$I_2 = -J_2$$

$$I_3 = I_m$$

$$I_5 = J_5$$

Applicando ora la LKC ai nodi 0,2,3 si ha rispettivamente

$$I_6 = -I_1 + I_5$$

$$I_4 = -I_3 + I_5 = -I_m + J_5$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = -J_2 + I_m$$

Per cui, ricapitolando, si trova la soluzione

$$I_1 = I_2 + I_3 = -J_2 + I_m$$

$$I_2 = -J_2$$

$$I_3 = I_m$$

$$I_4 = -I_3 + I_5 = -I_m + J_5$$

$$I_5 = J_5$$

$$I_6 = -I_1 + I_5 = J_2 - I_m + J_5$$

Se introduciamo i valori numerici

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 5\Omega$$

$$J_2 = J_5 = 2A$$

$$E_1 = E_3 = E_4 = E_6 = 10V$$

otteniamo la soluzione

$$I_m = \frac{10V + 10V - 10V - 10V + 2A(10\Omega) + 2A(10\Omega)}{20\Omega} = 2A \Rightarrow$$

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 = -2A + 2A = 0A \\ I_2 = -J_2 = -2A \\ I_3 = I_m = 2A \\ I_4 = -I_3 + I_5 = -I_m + J_5 = 0A \\ I_5 = J_5 = 2A \\ I_6 = -I_1 + I_5 = J_2 - I_m + J_5 = 2A \end{cases}$$

Procediamo ora a verificare che la potenza entrante nei resistori sia uguale alla potenza uscente dai generatori ideali (di corrente e di tensione).

La somma delle potenze entranti nei resistori è

$$I_1^2 R_1 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_6^2 R_6 = 0W + (2)^2 5W + 0W + (2)^2 5W = 40W$$

La potenza uscente dai generatori ideali di tensione è

$$I_1 E_1 + I_3 E_3 + I_4 E_4 + I_6 E_6 = 0 \cdot 10W + 2 \cdot 10W + 0 \cdot 10W + 2 \cdot 10W = 40W$$

La potenza uscente dai generatori ideali di corrente è

$$J_2(V_3 - V_1) + J_5(V_0 - V_2) = 2 \cdot 10W + 2 \cdot (-10)W = 0W$$

dove si è calcolato con la LKT che

$$(V_0 - V_2) = -10V$$

$$(V_3 - V_1) = 10V$$

La soluzione risulta dunque verificata.

OSSERVAZIONE,

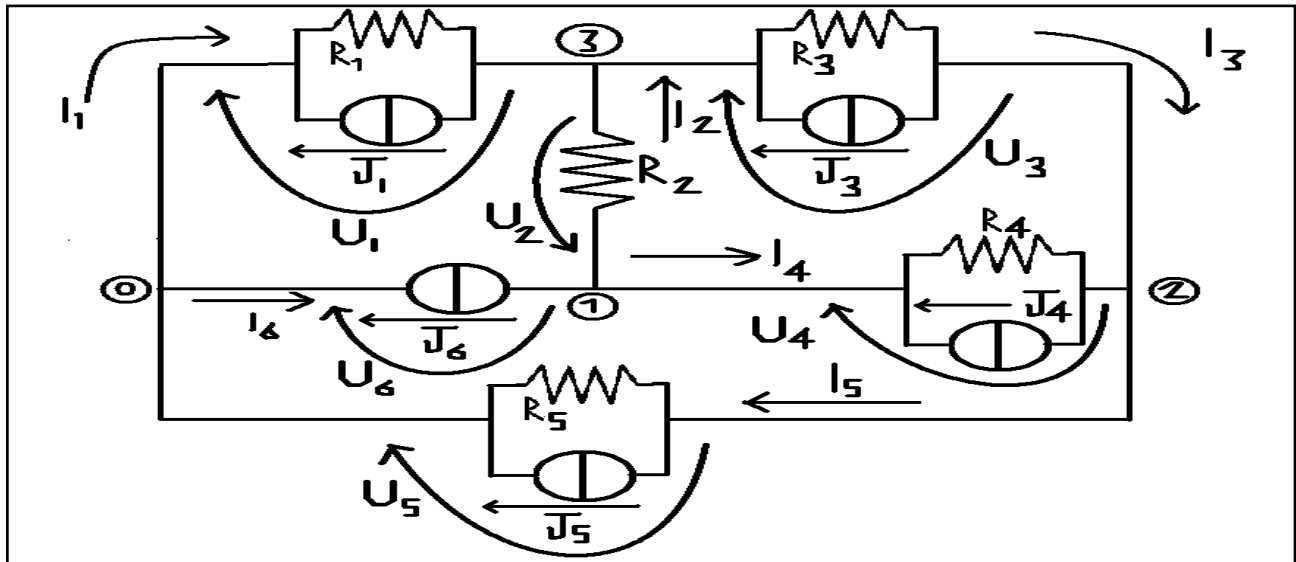
SOLUZIONE DI UNA RETE CON GENERATORI IDEALI DI CORRENTE ATTRAVERSO IL METODO DELLE MAGLIE. Quello che si voleva mostrare nell'esempio precedente è che una rete con generatori ideali di corrente può essere sempre trasformata in modo da avere solo generatori ideali di tensione ed in modo dunque da poter applicare ad essa il metodo delle maglie. Se infatti il generatore ideale di corrente è in parallelo ad un resistore, allora il generatore normale di corrente che ne risulta può essere trasformato in un generatore normale di

tensione applicando il teorema di Thévenin. Altrimenti si procede come visto nel precedente esempio, cioè ‘spostando’ il generatore ideale di corrente.

CAPITOLO V, METODO RISOLUTIVO DEI NODI PER RETI LINEARI

ESEMPIO,

UNA RETE CON SOLI GENERATORI IDEALI DI CORRENTE. Consideriamo la rete



elettrica in figura. Il suo numero di nodi è $n=4$, il suo numero di lati è $l=6$ mentre il suo numero di anelli risulta $m=l-(n-1)=6-3=3$. Procedendo alla sua risoluzione col metodo generale di analisi si perviene al sistema 6×6 seguente

$$\begin{cases} 0 - I_2 + 0 - I_4 + 0 = J_6 \\ 0 + 0 + I_3 + I_4 - I_5 = 0 \\ I_1 + I_2 - I_3 + 0 + 0 = 0 \\ -U_1 + U_2 + 0 + 0 + 0 + U_6 = 0 \\ 0 - U_2 - U_3 + U_4 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 - U_4 + U_5 - U_6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 - I_2 + 0 - I_4 + 0 = J_6 \\ 0 + 0 + I_3 + I_4 - I_5 = 0 \\ I_1 + I_2 - I_3 + 0 + 0 = 0 \\ \text{identità} \\ 0 - I_2 R_2 - I_3 R_3 + I_4 R_4 = J_3 R_3 - J_4 R_4 \\ -I_1 R_1 + I_2 R_2 + 0 - I_4 R_4 - I_5 R_5 = J_1 R_1 + J_4 R_4 - J_5 R_5 \end{cases}$$

Attribuendo i seguenti valori numerici alle costanti

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 5\Omega$$

$$J_1 = J_3 = J_4 = J_5 = J_6 = 2A$$

si ottiene la soluzione

$$I_1 = 0.25A, I_2 = -0.75A, I_3 = -0.5A, I_4 = -1.25A, I_5 = -1.75A, I_6 = -2A$$

Si vuole ora mostrare come risolvere la rete con un numero minore di equazioni. A tale scopo si considerano i potenziali ai singoli nodi. Si indica V_i il potenziale al nodo i -mo. Si assegna inoltre il potenziale al nodo zero ponendo $V_0 = 0$. Con tali posizioni le tensioni di lato si scrivono

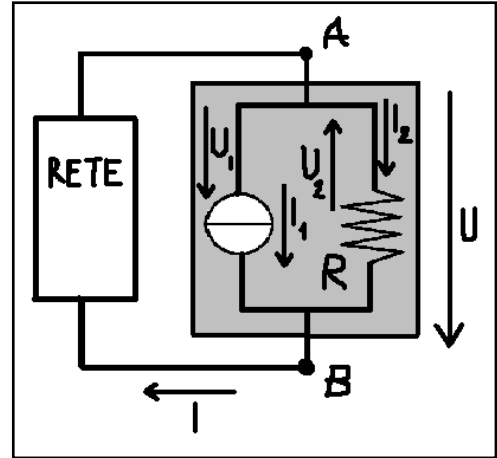
$$\begin{cases} U_1 = V_0 - V_3 = -V_3 \\ U_2 = V_1 - V_3 \\ U_3 = V_2 - V_3 \\ U_4 = V_1 - V_2 \\ U_5 = V_0 - V_2 = -V_2 \\ U_6 = V_0 - V_1 = -V_1 \end{cases}$$

Se ricordiamo poi che nei generatori normali di tensione convenzionati come in figura la caratteristica esterna si scrive

$$I = J - GU \Leftrightarrow U = R(J - I)$$

abbiamo, per le correnti di lato, le seguenti espressioni

$$\begin{cases} -I_1 = J_1 + G_1 U_1 = J_1 - G_1(V_0 - V_3) \Rightarrow I_1 = -J_1 - G_1 V_3 \\ I_2 = U_2 G_2 = V_1 G_2 - V_3 G_2 \\ -I_3 = J_3 - G_3(V_3 - V_2) \Rightarrow I_3 = -J_3 + G_3 V_3 - G_3 V_2 \\ -I_4 = J_4 - G_4(V_1 - V_2) \Rightarrow I_4 = -J_4 + G_4 V_1 - G_4 V_2 \\ I_5 = J_5 - G_5(V_0 - V_2) \Rightarrow I_5 = J_5 + G_5 V_2 \end{cases}$$



Sostituendo tali espressioni nel sistema risolvete la rete si ha

$$\begin{cases} 0 - (V_1 G_2 - V_3 G_2) + 0 - (-J_4 + G_4 V_1 - G_4 V_2) + 0 = J_6 \\ 0 + 0 + (-J_3 + G_3 V_3 - G_3 V_2) + (-J_4 + G_4 V_1 - G_4 V_2) - (J_5 + G_5 V_2) = 0 \\ (-J_1 - G_1 V_3) + (V_1 G_2 - V_3 G_2) - (-J_3 + G_3 V_3 - G_3 V_2) + 0 + 0 = 0 \\ -(-V_3) + (V_1 - V_3) + 0 + 0 + 0 + (-V_1) = 0 \\ 0 - (V_1 - V_3) - (V_3 - V_2) + (V_1 - V_2) + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 - (V_1 - V_2) + (-V_2) - (-V_1) = 0 \\ V_1(-G_2 - G_4) + V_2 G_4 + V_3 G_2 = -J_4 + J_6 \\ + V_1 G_4 + V_2(-G_3 - G_4 - G_5) + V_3 G_3 = J_3 + J_4 + J_5 \\ V_1 G_2 + V_2 G_3 + V_3(-G_1 - G_2 - G_3) = J_1 - J_3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Si vede che le tre equazioni dovute all'applicazione della LKT divengono delle identità. Ci si riduce così ad un sistema 3x3 che scritto in forma vettoriale risulta

$$\begin{pmatrix} (-G_2 - G_4) & G_4 & G_2 \\ G_4 & (-G_3 - G_4 - G_5) & G_3 \\ G_2 & G_3 & (-G_1 - G_2 - G_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -J_4 + J_6 \\ J_3 + J_4 + J_5 \\ J_1 - J_3 \end{pmatrix}$$

e riarrangiando i segni abbiamo

$$\begin{pmatrix} (G_2 + G_4) & -G_4 & -G_2 \\ -G_4 & (G_3 + G_4 + G_5) & -G_3 \\ -G_2 & -G_3 & (G_1 + G_2 + G_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_4 - J_6 \\ -J_3 - J_4 - J_5 \\ -J_1 + J_3 \end{pmatrix}$$

Attribuiamo ora alle costanti i valori numerici già indicati. Si ottiene il sistema

$$\begin{pmatrix} 0.4S & -0.2S & -0.2S \\ -0.2S & 0.6S & -0.2S \\ -0.2S & -0.2S & 0.6S \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6A \\ 0 \end{pmatrix}$$

Risolviendo si trovano i potenziali di nodo

$$V_1 = -15V, V_2 = -18.75V, V_3 = -11.25V$$

Inserendo queste espressioni in quelle delle correnti di lato si ha

$$\begin{cases} I_1 = -J_1 - G_1 V_3 = -2A - 0.2S(-11.25V) = -2A + 2.25A = 0.25A \\ I_2 = U_2 G_2 = V_1 G_2 - V_3 G_2 = -15V \cdot 0.2S + 11.25V \cdot 0.2S = -3A + 2.25A = -0.75A \\ I_3 = -J_3 + G_3 V_3 - G_3 V_2 = -2A + 0.2S(-11.25V) - 0.2S(-18.75V) = -0.5A \\ I_4 = -J_4 + G_4 V_1 - G_4 V_2 = -2A + 0.2S(-15V) - 0.2S(-18.75V) = -1.25A \\ I_5 = J_5 + G_5 V_2 = 2A + 0.2S(-18.75V) = -1.75A \\ I_6 = -J_6 = -2A \end{cases}$$

E torna il risultato trovato col metodo generale di analisi.

Estrapoliamo ora da questo esempio una regola generale per la risoluzione di reti con soli generatori ideali di corrente.

DEDUZIONE,

METODO DI RISOLUZIONE DEI NODI. Data una rete elettrica con soli generatori ideali di corrente, introdotti i potenziali dei nodi e posto nullo il potenziale del nodo di riferimento, allora si ha che il sistema risolvete nelle incognite dei potenziali ha

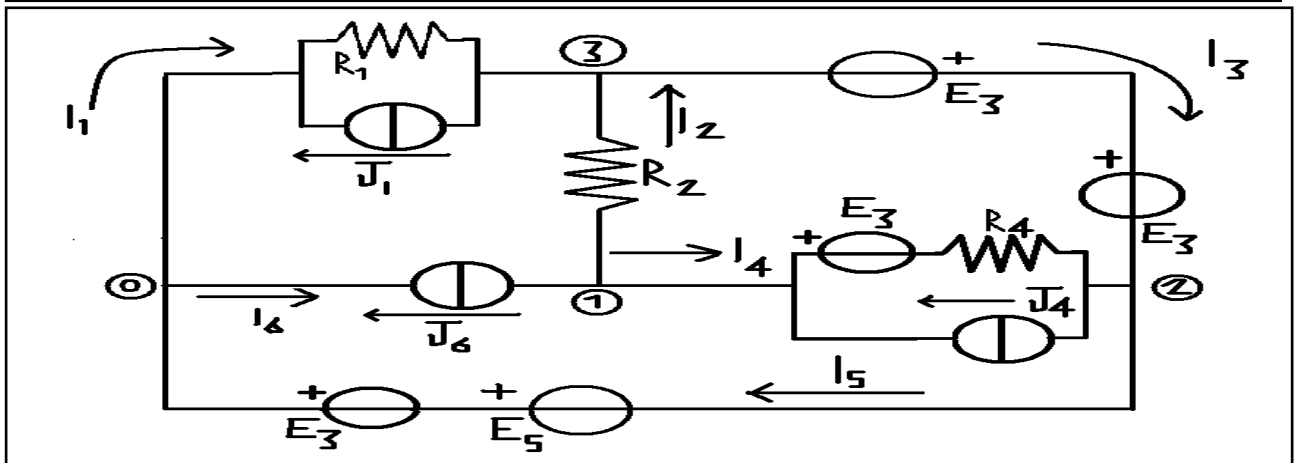
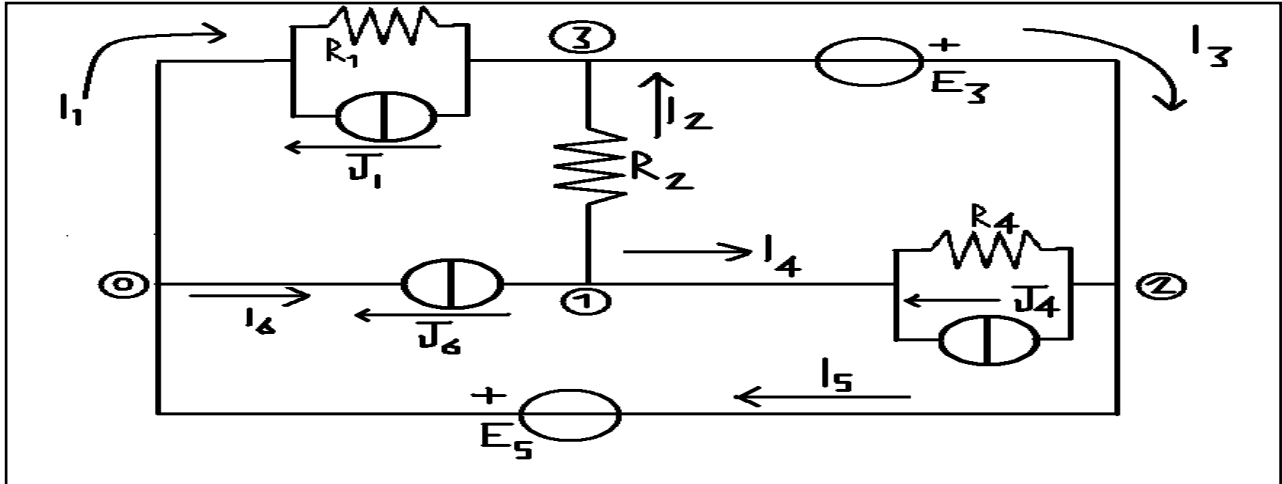
1)matrice dei coefficienti simmetrica in cui

- a)il termine i-mo della diagonale principale è pari alla somma delle conduttanze dei lati che convergono nel nodo i-mo,
- b)il termine ij-mo fuori della diagonale principale è pari alla conduttanza del lato che collega direttamente il nodo i-mo al nodo j-mo, cambiata di segno;

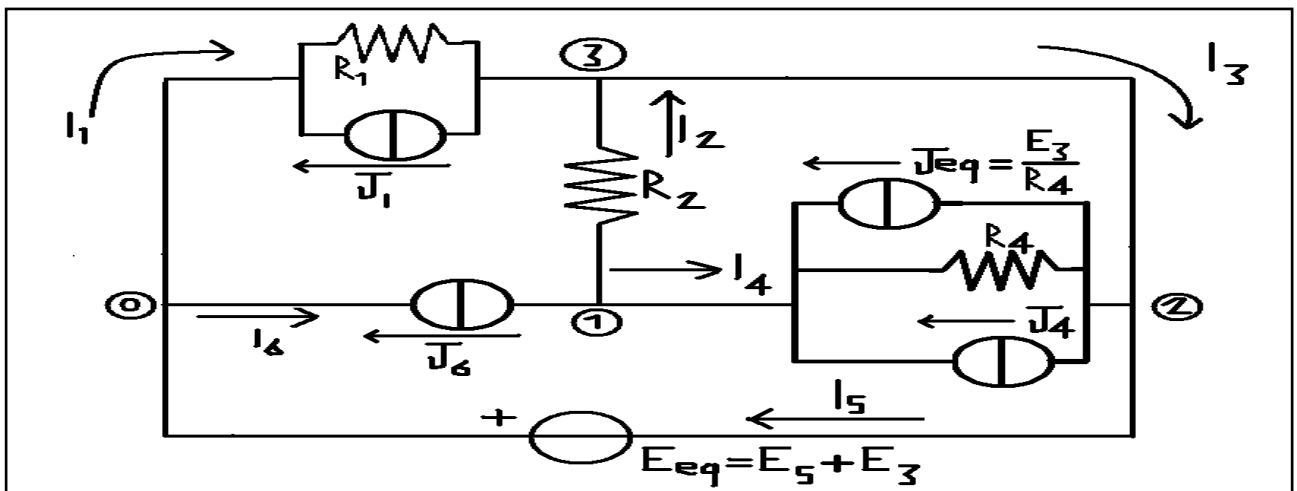
2) vettore dei termini noti con termine i -mo pari alla somma algebrica delle correnti dei generatori ideali di corrente dei lati che convergono al nodo i -mo, presi con verso positivo se hanno corrente entrante nel nodo, con verso negativo altrimenti.

ESEMPIO,

UNA RETE CON GENERATORI IDEALI DI TENSIONE. Prendiamo la rete in figura. Ad essa



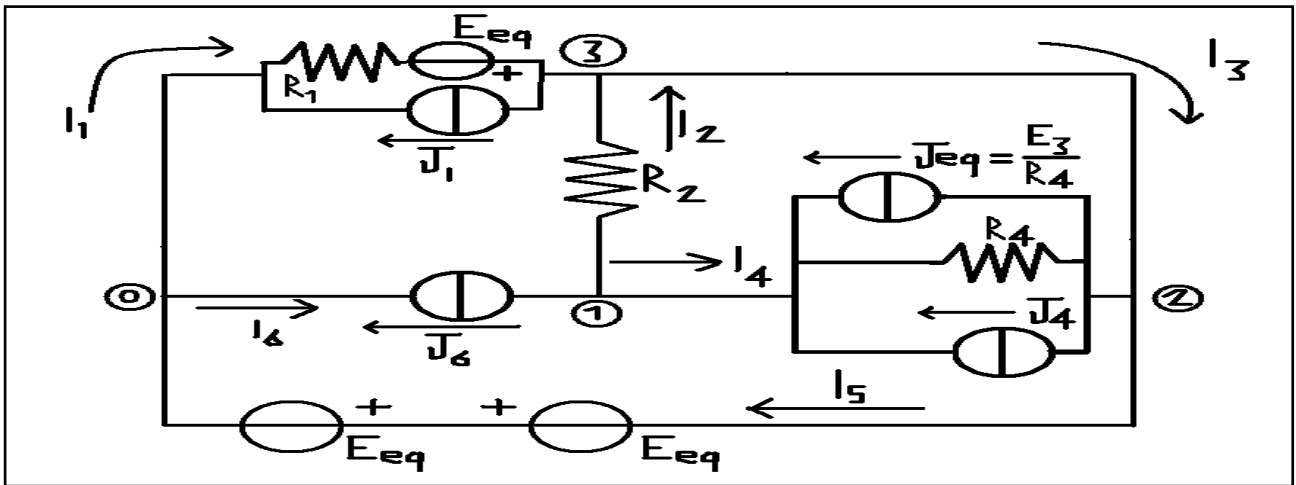
non può essere direttamente applicato il metodo dei nodi in quanto sono presenti anche generatori



ideali di tensione. Vediamo dunque di trasformarla in modo tale da togliere questo impedimento. Inseriamo tre generatori ideali di tensione di tipo E_3 , uno nel lato 3, uno nel lato 4 e uno nel lato 5. I versi dei generatori siano quelli indicati in figura.

Ora il lato 3 è un cortocircuito. Sul lato 4 possiamo poi sostituire il generatore normale di corrente venutosi ad avere con il suo equivalente Norton e sul lato 5 possiamo inserire un generatore ideale serie. Fatte queste modifiche otteniamo la rete in figura.

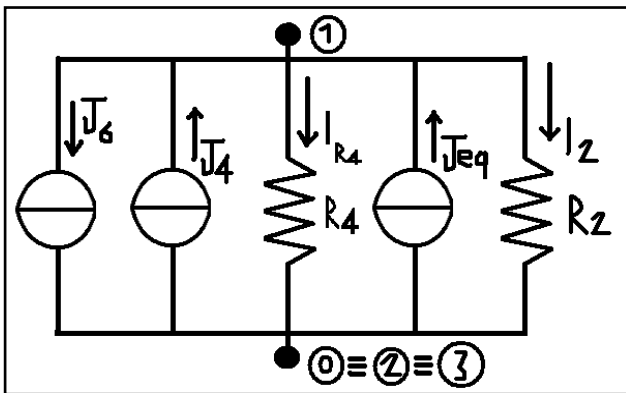
Procediamo ora nello stesso modo nei confronti del generatore ideale presente sul lato 5. Rendiamo



cioè equipotenziali i nodi 0 e 2 inserendo sul lato 5 un generatore uguale e contrario a quello già presente. Per non variare poi le correnti che transitano nella rete occorre inserire lo stesso generatore sul lato uno. Si ottiene così la rete seguente.

Semplificando la notazione sul lato 5 e trasformando Norton il generatore normale di tensione sul lato 1 si ha la seguente rete.

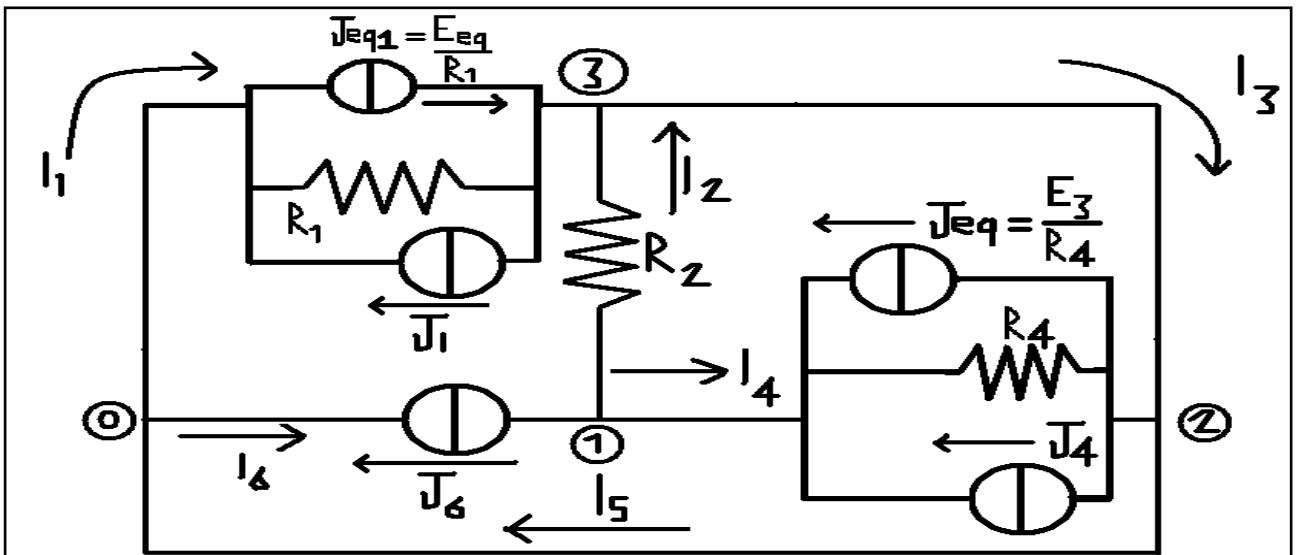
Ora, poiché il nodo 3, il 2 e il nodo 0 sono allo stesso potenziale, la rete si ridisegna nel modo seguente.



Abbiamo così una rete risolvibile col metodo dei nodi. Il sistema risolvete, in base alla regola generale sopra indicata, è dunque

$$(G_2 + G_4)V_1 = \left(\frac{E_3}{R_4} + J_4 - J_6 \right) \Rightarrow V_1 = \frac{\left(\frac{E_3}{R_4} + J_4 - J_6 \right)}{(G_2 + G_4)}$$

Attribuendo i valori numerici



$$R_1 = R_2 = R_4 = 5\Omega$$

$$J_1 = J_4 = J_6 = 2A$$

$$E_3 = E_5 = 10V$$

si ottiene la soluzione

$$V_1 = \frac{(2A + 2A - 2A)}{\left(\frac{1}{5}\Omega + \frac{1}{5}\Omega\right)} = \frac{(2A)}{\left(\frac{2}{5}\Omega\right)} = 5V$$

$$V_0 = V_2 = V_3 = 0$$

Ma noi dobbiamo risalire alle correnti della rete di partenza. A tale scopo si osserva intanto che dall'ultima rete si ricava

$$I_{R4} = \frac{V_1 - V_0}{R_4} = \frac{5V}{5\Omega} = 1A \Rightarrow I_4 = I_{R4} - J_4 - J_{eq} = -3A$$

$$I_2 = \frac{V_1 - V_0}{R_2} = \frac{5V}{5\Omega} = 1A$$

Inoltre $I_6 = -J_6 = -2A$. Considerando poi il generatore normale di tensione del lato 1 si ha

$$\begin{cases} I_1 + J_1 = \frac{(V_3 - V_0)_{iniziale}}{R_1} \Rightarrow I_1 = \frac{(V_3 - V_0)_{iniziale}}{R_1} - J_1 \\ (V_3 - V_0)_{finale} = (V_3 - V_0)_{iniziale} + E_{eq} \Rightarrow (V_3 - V_0)_{iniziale} = (V_3 - V_0)_{finale} - E_{eq} = 0 - (E_3 + E_5) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{-E_3 - E_5}{R_1} - J_1 = \frac{-20V}{5\Omega} - 2A = -4A - 2A = -6A$$

dove si è dovuto risalire alla differenza di potenziale iniziale fra i nodi.

Applicando la LKC al nodo 3 si ha

$$I_3 = I_1 + I_2 = -6A + 1A = -5A$$

Applicando poi la LKC al nodo 0 si ha

$$-I_1 + J_6 + I_5 = 0 \Rightarrow I_5 = I_1 - J_6 = -6A - 2A = -8A$$

Si conclude dunque che la soluzione della rete di partenza è

$$I_1 = -6A, I_2 = 1A, I_3 = -5A, I_4 = -3A, I_5 = -8A, I_6 = -2A$$

Procediamo ora alla verifica del bilancio energetico. A tale scopo calcoliamo le tensioni ai capi dei generatori normali di corrente.

$$(V_0 - V_3) - E_3 = E_5 \Rightarrow V_0 - V_3 = E_5 + E_3 = 20V$$

$$(V_0 - V_1) = (V_0 - V_3) - I_2 R_2 = E_3 + E_5 - I_2 R_2 = 20V - 5V = 15V$$

$$(V_1 - V_2) = E_5 - (V_0 - V_1) = E_5 - E_3 - E_5 + I_2 R_2 = -E_3 + I_2 R_2 = -5V$$

Allora la potenza erogata dalla rete è

$$(V_0 - V_3)(-I_1) + E_3 I_3 + (V_1 - V_2)(-I_4) + (V_0 - V_1)J_6 + E_5 I_5 =$$

$$= 20V \cdot 6A + 10V \cdot (-5A) + (-5V)(3A) + (15V)2A + 10V(-8A) = 5W$$

La potenza assorbita dalla rete è

$$I_2 R_2 = 5W$$

La verifica è positiva.

OSSERVAZIONE,

SOLUZIONE DI UNA RETE CON GENERATORI IDEALI DI TENSIONE ATTRAVERSO IL METODO DEI NODI. Quello che si voleva mostrare nell'esempio precedente è che una rete con generatori ideali di tensione può essere sempre trasformata in modo da avere solo generatori ideali di corrente ed in modo dunque da poter applicare ad essa il metodo dei nodi.

CAPITOLO VI, FUNZIONI SINUSOIDALI E FASORI

DEFINIZIONE,

FUNZIONE PERIODICA E PERIODO. Definiamo funzione periodica di periodo T ogni funzione $a = a(t)$ la quale soddisfa alla relazione

$$a(t) = a(t + nT)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ove T è una quantità detta periodo. Il periodo si misura in secondi (s).

DEFINIZIONE,

CICLO E FREQUENZA DI UNA FUNZIONE PERIODICA. Si dice che una funzione periodica compie un ciclo in un intervallo di tempo pari al periodo. Il numero di cicli che la funzione compie in un secondo è detto frequenza della funzione. La frequenza si indica con la lettera f e si misura in Hertz (Hz) ove $1\text{Hz} = 1/\text{secondo}$.

Vale la relazione

$$f = \frac{1}{T}.$$

DEFINIZIONE,

VALORE MEDIO, VALORE EFFICACE E FATTORE DI FORMA DI UNA FUNZIONE PERIODICA. Data una funzione periodica definiamo le grandezze seguenti:

$$\left(\begin{matrix} \text{valore} \\ \text{medio} \end{matrix} \right) A_m \triangleq \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt$$

$$\left(\begin{matrix} \text{valore} \\ \text{efficace} \end{matrix} \right) A \triangleq \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (a(t))^2 dt}$$

$$\left(\begin{matrix} \text{fattore} \\ \text{di} \\ \text{forma} \end{matrix} \right) K_f \triangleq \frac{A}{A_m}$$

DEFINIZIONE,

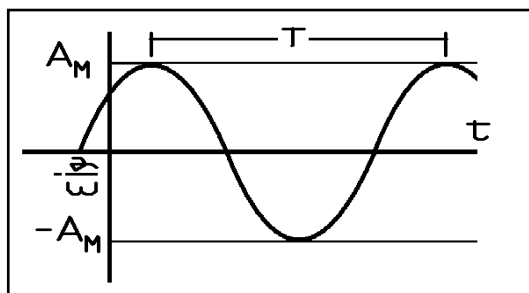
FUNZIONI PERIODICHE ISOFREQUENZIALI. Funzioni periodiche che abbiano stessa frequenza (e dunque stesso periodo) sono dette isofrequenziali.

DEFINIZIONE,

FUNZIONE SINUSOIDALE. Da qui in poi consideriamo particolari funzioni periodiche, ovvero funzioni del tipo

$$a(t) = A_m \sin(\omega t + \alpha)$$

che chiameremo funzioni sinusoidali o sinusoidi.



DEFINIZIONE,

AMPIEZZA, PULSAZIONE ANGOLARE, FASE INIZIALE E FASE ISTANTANEA DELLA FUNZIONE SINUSOIDALE. Definiamo ampiezza della funzione sinusoidale (o suo valore massimo) la grandezza positiva A_M . Essa ha la stessa dimensione della funzione sinusoidale ed inoltre è legata ad essa dalla relazione

$$A_M \geq |a(t)|, \forall t.$$

Definiamo pulsazione angolare della funzione sinusoidale la grandezza ω . Essa si misura in radianti al secondo.

Definiamo fase iniziale della funzione sinusoidale la grandezza α . Essa si misura in radianti e verifica la relazione $\alpha \in [-\pi, \pi)$.

Definiamo fase istantanea della funzione sinusoidale la grandezza $(\omega t + \alpha)$. Essa si misura in radianti.

DEDUZIONE,

PERIODO E FREQUENZA DI UNA FUNZIONE SINUSOIDALE. Ricaviamo il periodo di una funzione sinusoidale

$$\begin{aligned} a(t) = a(t + T) &\Rightarrow A_M \sin(\omega t + \alpha) = A_M \sin(\omega(t + T) + \alpha) \Rightarrow \omega(t + T) + \alpha = \omega t + \alpha + 2\pi \Rightarrow \\ \omega t + \omega T &= \omega t + 2\pi \Rightarrow \omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \end{aligned}$$

La frequenza risulta dunque data da

$$f = T^{-1} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

DEDUZIONE,

VALORE MEDIO, VALORE EFFICACE E FATTORE DI FORMA DI UNA FUNZIONE SINUSOIDALE. Procediamo alla deduzione, nel caso di funzioni sinusoidali, delle tre grandezze introdotte per la generica funzione periodica.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \text{valore} \\ \text{medio} \end{array} \right) A_m &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} A_M \sin(\omega t + \alpha) dt = \frac{A_M}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(\omega t + \alpha) d(\omega t + \alpha) = \frac{A_M}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(\omega t + \alpha) d(\omega t + \alpha) = \\ &= \frac{A_M}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha + 2\pi} \sin \delta d\delta = \frac{A_M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \delta d\delta = \frac{A_M}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin \delta d\delta - \int_{\pi}^{2\pi} \sin \delta d\delta \right) = \frac{A_M}{2\pi} (\cos \delta|_0^{\pi} - \cos \delta|_{\pi}^{2\pi}) = \frac{A_M}{2\pi} 4 = \frac{2A_M}{\pi} \\ \left(\begin{array}{c} \text{valore} \\ \text{efficace} \end{array} \right) A &= \sqrt{\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (A_M \sin(\omega t + \alpha))^2 dt} = \sqrt{\frac{\omega A_M^2}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (\sin(\omega t + \alpha))^2 dt} = \sqrt{\frac{A_M^2}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (\sin(\omega t + \alpha))^2 d(\omega t + \alpha)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{A_M^2}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} (\sin(\delta))^2 d\delta} = \sqrt{\frac{A_M^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin(\delta))^2 d\delta} = \sqrt{\frac{A_M^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\delta}{2} d\delta} = \sqrt{\frac{A_M^2}{2\pi} \left(\pi - \frac{\sin 2\delta}{4} \Big|_0^{2\pi} \right)} = \sqrt{\frac{A_M^2}{2\pi} (\pi - 0)} = \\
&= \sqrt{\frac{A_M^2}{2}} = \frac{A_M}{\sqrt{2}}. \\
&\left(\begin{array}{l} \text{fattore} \\ \text{di} \\ \text{forma} \end{array} \right) K_f = \frac{A}{A_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Riassumendo abbiamo

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{l} \text{valore} \\ \text{medio} \end{array} \right) A_m = \frac{2A_M}{\pi} \cong 0.636 A_M \\
&\left(\begin{array}{l} \text{valore} \\ \text{efficace} \end{array} \right) A = \frac{A_M}{\sqrt{2}} \cong 0.707 A_M \\
&\left(\begin{array}{l} \text{fattore} \\ \text{di} \\ \text{forma} \end{array} \right) K_f = \frac{A}{A_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cong 1.11
\end{aligned}$$

DEDUZIONE,

FUNZIONI SINUSOIDALI ISOFREQUENZIALI E PULSAZIONE. Le funzioni sinusoidali isofrequenziali hanno la caratteristica di condividere, oltre che alla frequenza ed al periodo, anche la pulsazione, essendo $f = T^{-1} = \omega/2\pi$.

DEFINIZIONE,

FASE DI ANTICIPO. Consideriamo le due funzioni sinusoidali isofrequenziali seguenti:

$$\begin{aligned}
a(t) &= A_M \sin(\omega t + \alpha) \\
b(t) &= B_M \sin(\omega t + \beta)
\end{aligned}$$

Allora diciamo fase di anticipo φ della funzione $a(t)$ rispetto alla funzione $b(t)$ la differenza della fase istantanea della prima rispetto alla fase istantanea della seconda. Si pone cioè:

$$\varphi \stackrel{\Delta}{=} (\omega t + \alpha) - (\omega t + \beta) = \alpha - \beta$$

Si usano poi le seguenti espressioni:

$\varphi = 0 (\alpha = \beta) \Rightarrow$ le due funzioni sinusoidali sono in fase;

$\varphi = \pm\pi (\alpha = \beta \pm \pi) \Rightarrow$ le due funzioni sinusoidali sono dette in opposizione di fase;

$\varphi = +\frac{\pi}{2} \left(\alpha = \beta + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$ la funzione $a(t)$ è detta in quadratura in anticipo rispetto alla funzione $b(t)$;

$\varphi = -\frac{\pi}{2} \left(\alpha = \beta - \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$ la funzione $a(t)$ è detta in quadratura in ritardo rispetto alla funzione $b(t)$.

OSSERVAZIONE,

INSIEME DELLE FUNZIONI SINUSOIDALI ISOFREQUENZIALI. Assegnata che sia una certa pulsazione ω abbiamo individuato un insieme di funzioni sinusoidali isofrequenziali avente quella pulsazione. Tale insieme può scriversi

$$\{a(t) = \sqrt{2}A \sin(\omega t + \alpha) \mid (A, \alpha) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Si osserva che il numero degli elementi di tale insieme, cioè il numero delle sinusoidi aventi pulsazione assegnata ω , risulta pari a ∞^2 , pari cioè, ad esempio, al numero di tutti i numeri complessi.

DEFINIZIONE,

TRASFORMAZIONE DI STEINMETZ. Poiché un insieme di funzioni isofrequenziali ha ∞^2 elementi ha senso cercare una relazione di corrispondenza biunivoca fra gli elementi di tale insieme e quelli dell'insieme dei numeri complessi.

In particolare definiamo trasformazione di Steinmetz quella relazione biunivoca che associa alla sinusoide

$$a(t) = \sqrt{2}A \sin(\omega t + \alpha)$$

il numero complesso

$$\bar{A} = Ae^{j\alpha} = A(\cos \alpha + j \sin \alpha)$$

e viceversa.

DEFINIZIONE,

FASORE DI UNA SINUSOIDE. Definiamo fasore di una sinusoide il numero complesso ad essa associato dalla trasformazione di Steinmetz.

OSSERVAZIONE,

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI SINUSOIDI. Consideriamo il piano complesso, cioè quel piano in cui si riporta in ascissa la parte reale di un numero complesso ed in ordinata la parte immaginaria del numero complesso stesso. Ogni numero complesso risulta in corrispondenza biunivoca con un punto del piano complesso ed anche con un vettore che abbia estremo libero in quel punto ed origine nell'origine del piano complesso.

Dunque, attraverso la trasformazione di Steinmetz, risulta in definitiva, che ogni sinusoide di un insieme di sinusoidi isofrequenziali è in corrispondenza biunivoca con un punto del piano complesso.

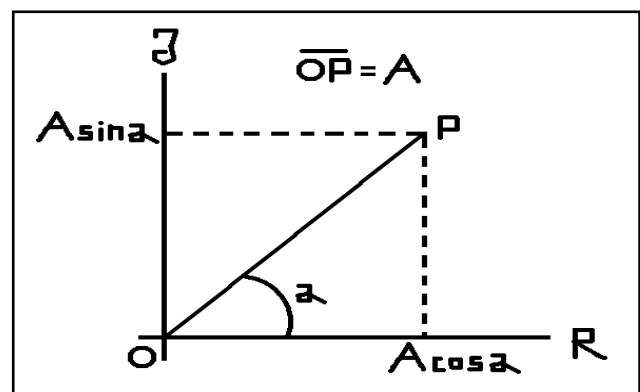
Si consideri allora la sinusoide

$$a(t) = \sqrt{2}A \sin(\omega t + \alpha)$$

il cui fasore è

$$\bar{A} = Ae^{j\alpha} = A(\cos \alpha + j \sin \alpha).$$

La sua rappresentazione nel piano complesso è quella indicata in figura.



OSSERVAZIONE,

FASE DI ANTICIPO SUL PIANO COMPLESSO. Consideriamo le due funzioni sinusoidali isofrequenziali

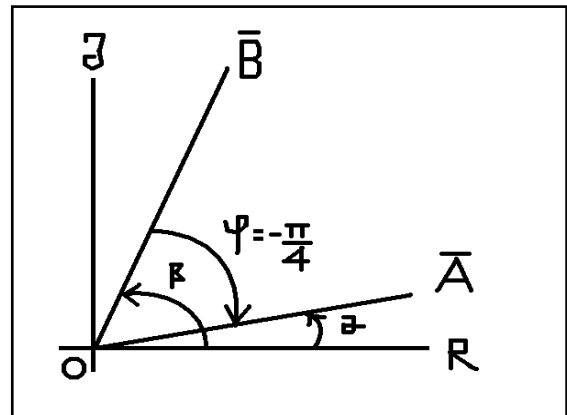
$$a(t) = \sqrt{2}A \sin(\omega t + \alpha)$$

$$b(t) = \sqrt{2}B \sin(\omega t + \beta)$$

ed i rispettivi fasori

$$\bar{A} = A(\cos \alpha + j \sin \alpha) = Ae^{j\alpha}$$

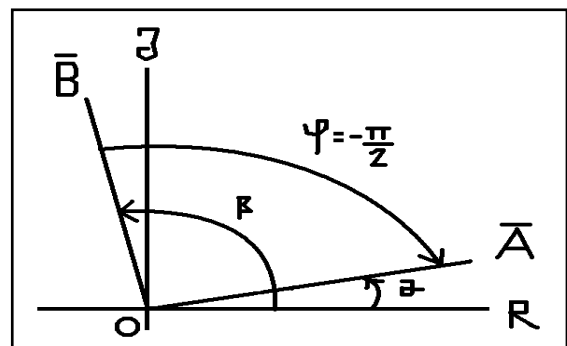
$$\bar{B} = B(\cos \beta + j \sin \beta) = Be^{j\beta}$$



Allora la fase di anticipo φ della funzione $a(t)$

rispetto alla funzione $b(t)$ nel piano complesso diviene l'angolo di cui deve ruotare il fasore $\bar{B}$ per sovrapporsi al fasore $\bar{A}$, assumendo positive le rotazioni antiorarie. Se per esempio risulta $\varphi = -\pi/4$ questo vuol dire che i due fasori sono posizionati come in figura.

Riprendendo poi in considerazione gli sfasamenti notevoli già introdotti potremo dire che sinusoidi isofrequenziali in fase hanno fasori sovrapposti, sinusoidi in quadratura hanno fasori che formano un angolo retto fra loro, sinusoidi in opposizione di fase hanno invece fasori che formano fra loro un angolo piatto. In figura è rappresentato il caso in cui il fasore $\bar{A}$ sia in quadratura in ritardo rispetto al fasore $\bar{B}$.



DEDUZIONE,

SOMMA DI SINUSOIDI ISOFREQUENZIALI. Date le due sinusoidi (con relativi fasori)

$$a(t) = \sqrt{2}A \sin(\omega t + \alpha) \leftrightarrow \bar{A} = A(\cos \alpha + j \sin \alpha) = Ae^{j\alpha}$$

$$b(t) = \sqrt{2}B \sin(\omega t + \beta) \leftrightarrow \bar{B} = B(\cos \beta + j \sin \beta) = Be^{j\beta}$$

la sinusoide somma è quella funzione di pulsazione ω il cui fasore è $\bar{C} = \bar{A} + \bar{B}$.

DIMOSTRAZIONE. La sinusoide somma è data da

$$\begin{aligned} c(t) &= a(t) + b(t) = \sqrt{2}A \sin(\omega t + \alpha) + \sqrt{2}B \sin(\omega t + \beta) = \\ &= \sqrt{2}(A \sin(\omega t) \cos(\alpha) + A \cos(\omega t) \sin(\alpha) + B \sin(\omega t) \cos(\beta) + B \cos(\omega t) \sin(\beta)) = \\ &= \sqrt{2}\{\sin(\omega t)[A \cos(\alpha) + B \cos(\beta)] + \cos(\omega t)[A \sin(\alpha) + B \sin(\beta)]\} \end{aligned}$$

Facendo ora le posizioni

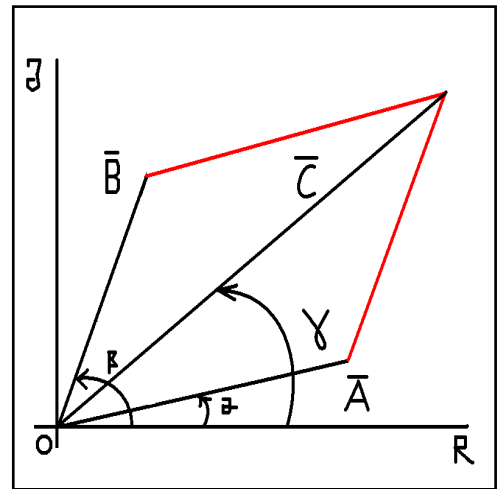
$$\begin{cases} C \cos \gamma = A \cos(\alpha) + B \cos(\beta) \\ C \sin \gamma = A \sin(\alpha) + B \sin(\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(\alpha - \beta)} \\ \tan(\gamma) = \frac{A \sin(\alpha) + B \sin(\beta)}{A \cos(\alpha) + B \cos(\beta)} \end{cases}$$

otteniamo per la sinusoide somma l'espressione

$$\begin{aligned} c(t) &= \sqrt{2} [\sin(\omega t) C \cos(\gamma) + \cos(\omega t) C \sin(\gamma)] = \\ &= \sqrt{2} C [\sin(\omega t) \cos(\gamma) + \cos(\omega t) \sin(\gamma)] = \sqrt{2} C \sin(\omega t + \gamma) \end{aligned}$$

D'altra parte il fasore somma dei due fasori dati risulta

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \bar{A} + \bar{B} = A[\cos(\alpha) + j \sin(\alpha)] + B[\cos(\beta) + j \sin(\beta)] = \\ &= [A \cos(\alpha) + B \cos(\beta)] + j[A \sin(\alpha) + B \sin(\beta)] = \\ &= C \cos(\gamma) + j C \sin(\gamma) = C[\cos(\gamma) + j \sin(\gamma)] \end{aligned}$$



che è proprio il fasore della sinusoide $c(t)$. E la tesi è dimostrata.

DEDUZIONE,

PRODOTTO DI UNA SINUSOIDE PER UNO SCALARE. Data la funzione sinusoidale (con relativo fasore)

$$a(t) = \sqrt{2} A \sin(\omega t + \alpha) \leftrightarrow \bar{A} = A(\cos \alpha + j \sin \alpha) = A e^{j\alpha}$$

il suo prodotto per lo scalare k è la sinusoide di pulsazione ω il cui fasore è $\bar{B} = k \bar{A}$.

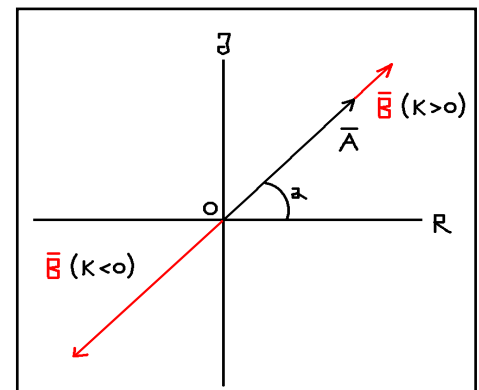
DIMOSTRAZIONE. Moltiplicando la funzione $a(t)$ per lo scalare k si ha la sinusoide

$$b(t) = k a(t) = k \sqrt{2} A \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2} |k| A \sin(\omega t + (\alpha + n\pi))$$

$$n = \begin{cases} 0 \Leftarrow k > 0 \\ \pm 1 \Leftarrow k < 0 \end{cases}$$

se poi k è nullo il valore di n è indifferente.

Si ottiene dunque la sinusoide (con relativo fasore)



$$b(t) = k a(t) = k \sqrt{2} A \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2} B \sin(\omega t + \beta) \leftrightarrow \bar{B} = B[\cos(\gamma) + j \sin(\gamma)]$$

$$\begin{cases} B = |k| A \\ \gamma = \begin{cases} \alpha \Leftarrow k > 0 \\ \alpha \pm \pi \Leftarrow k < 0 \end{cases} \end{cases}$$

La tesi è pertanto dimostrata.

DEDUZIONE,

DERIVATA DI UNA SINUSOIDE. Data la funzione sinusoidale (con relativo fasore)

$$a(t) = \sqrt{2}A \sin(\omega t + \alpha) \leftrightarrow \bar{A} = A(\cos \alpha + j \sin \alpha) = Ae^{j\alpha}$$

la sua derivata è la sinusoide di pulsazione ω il cui fasore è $\bar{B} = j\omega\bar{A}$.

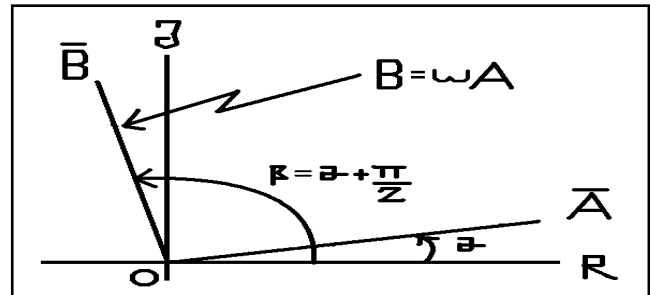
DIMOSTRAZIONE. Deriviamo la sinusoide $a(t)$. Abbiamo

$$\frac{d(a(t))}{dt} = \sqrt{2}A \frac{d(\sin(\omega t + \alpha))}{dt} = \sqrt{2}\omega A \cos(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}\omega A \sin(\omega t + (\alpha + \pi/2))$$

cioè

$$\frac{d(a(t))}{dt} = b(t) = \sqrt{2}B \sin(\omega t + \beta)$$

$$\begin{cases} B = \omega A \\ \beta = \alpha + \pi/2 \end{cases}$$



Calcoliamo ora il fasore $j\omega\bar{A}$ e vediamo se è veramente il fasore della sinusoide $b(t)$.

$$j\omega\bar{A} = \omega \left(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} \right) A (\cos \alpha + j \sin \alpha) = \omega e^{j\frac{\pi}{2}} A e^{j\alpha} = \omega A e^{j(\alpha + \frac{\pi}{2})} = B e^{j\beta}$$

ed effettivamente otteniamo il fasore della sinusoide $b(t) = \sqrt{2}B \sin(\omega t + \beta)$.

DEDUZIONE,

INTEGRALE DI UN FASORE. Data la funzione sinusoidale (con relativo fasore)

$$a(t) = \sqrt{2}A \sin(\omega t + \alpha) \leftrightarrow \bar{A} = A(\cos \alpha + j \sin \alpha) = Ae^{j\alpha}$$

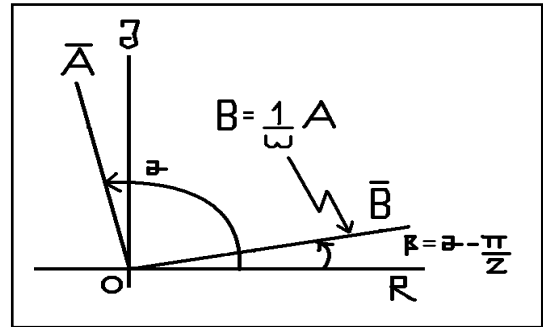
la sua primitiva è la sinusoide di pulsazione ω il cui fasore è $\bar{B} = -\frac{j}{\omega}\bar{A}$.

DIMOSTRAZIONE. Diciamo $b(t)$ la primitiva di $a(t)$. Sia inoltre $\bar{B}$ il suo fasore. Allora, per la deduzione precedente risulta

$$\frac{d(\bar{B})}{dt} = \bar{A} \Rightarrow j\omega\bar{B} = \bar{A} \Rightarrow \bar{B} = \frac{1}{j\omega}\bar{A} = \frac{j}{jj\omega}\bar{A} = -\frac{j}{\omega}\bar{A}$$

Per quanto riguarda la rappresentazione del fasore $\bar{B} = -\frac{j}{\omega}\bar{A}$ vediamo di esprimerlo in maniera più esplicita.

$$\begin{aligned}\bar{B} &= -\frac{j}{\omega} \bar{A} = -\frac{1}{\omega} \left(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} \right) A (\cos \alpha + j \sin \alpha) = \\ &= \frac{1}{\omega} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + j \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) A (\cos \alpha + j \sin \alpha) = \\ &= \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} A e^{j\alpha} = \frac{A}{\omega} e^{j\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}\end{aligned}$$



e il fasore primitiva risulta in quadratura in anticipo rispetto al fasore dato.

OSSERVAZIONE,

CALCOLO SIMBOLICO. L'introduzione di trasformate secondo Steinmetz permette di sostituire a operazioni integrali e differenziali su funzioni sinusoidali operazioni algebriche su numeri complessi. Questa notevole semplificazione giustifica l'introduzione dei fasori. Il calcolo attraverso fasori è anche detto calcolo simbolico.

DEDUZIONE,

PRODOTTO DI UN FASORE PER IL CONIUGATO DI UN SECONDO FASORE. Siano dati i due fasori seguenti

$$\bar{A} = A e^{j\alpha} = A (\cos \alpha + j \sin \alpha)$$

$$\bar{B} = B e^{j\beta} = B (\cos \beta + j \sin \beta)$$

Ricordando che il coniugato del fasore $\bar{B}$ è il fasore

$$\overline{\bar{B}}^* = B e^{-j\beta} = B (\cos \beta - j \sin \beta)$$

vogliamo calcolare il prodotto $\overline{\bar{A}\bar{B}}^*$. Si ha

$$\dot{P} = \overline{\bar{A}\bar{B}}^* = A e^{j\alpha} B e^{-j\beta} = A B e^{j(\alpha-\beta)} = A B (\cos(\alpha-\beta) + j \sin(\alpha-\beta))$$

Questo fasore in realtà non ha una sinusoide corrispondente ottenibile operando sulle sinusoidi dei fasori $\bar{A}, \bar{B}$. Per questo motivo non è indicato come fasore, ma con una scrittura diversa (lettera maiuscola con punto sopra).

DEDUZIONE,

RAPPORTO FRA FASORI. Siano dati i due fasori seguenti

$$\bar{A} = A e^{j\alpha} = A (\cos \alpha + j \sin \alpha)$$

$$\bar{B} = B e^{j\beta} = B (\cos \beta + j \sin \beta)$$

Il rapporto fra essi è dato da

$$\dot{R} = \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{A e^{j\alpha}}{B e^{j\beta}} = \frac{A}{B} e^{j(\alpha-\beta)}$$

Anche qui vale il discorso precedentemente fatto sulla natura del fasore ottenuto.

CAPITOLO VII,

BIPOLI IN REGIME SINUSOIDALE

I) POTENZE

DEDUZIONE,

POTENZA ISTANTANEA. Consideriamo un generico bipolo. Diciamo che sia convenzionato da utilizzatore. Diciamo che la corrente entrante nel polo negativo sia

$$i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \beta)$$

e che la tensione ai suoi capi sia

$$u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \alpha)$$

Allora la sua potenza istantanea entrante è data

$$p(t) = u(t)i(t) = 2UI \sin(\omega t + \alpha) \sin(\omega t + \beta)$$

Se avessimo considerato un bipolo convenzionato da generatore questa espressione avrebbe rappresentato la potenza istantanea uscente.

Cerchiamo ora di scriverla in una forma più espressiva. A tale scopo ricordiamo che, in base alle formule di Prostaferesi, si ha

$$\sin \frac{(p+q)}{2} \sin \frac{(p-q)}{2} = -\frac{\cos p - \cos q}{2}$$

Quindi ponendo

$$p = 2\omega t + \alpha + \beta$$

$$q = \alpha - \beta$$

abbiamo

$$\begin{cases} p + q = 2\omega t + 2\alpha \\ p - q = 2\omega t + 2\beta \end{cases} \Rightarrow \sin(\omega t + \alpha) \sin(\omega t + \beta) = -\frac{\cos(2\omega t + \alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} p(t) &= 2UI \sin(\omega t + \alpha) \sin(\omega t + \beta) = UI [-\cos(2\omega t + \alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] = \\ &= -UI \cos(2\omega t + \alpha + \beta) + UI \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

Dunque la potenza istantanea è esprimibile come somma di un termine periodico (di pulsazione 2ω e, dunque, di periodo pari a $T/2$) e di un termine costante.

DEFINIZIONE,

POTENZA FLUTTUANTE E POTENZA COSTANTE. Abbiamo visto che la potenza istantanea entrante in un utilizzatore (uscente da un generatore) si esprime

$$p(t) = -UI \cos(2\omega t + \alpha + \beta) + UI \cos(\alpha - \beta)$$

Definiamo potenza fluttuante il termine periodico e poniamo

$$p_f(t) \stackrel{\Delta}{=} -UI \cos(2\omega t + \alpha + \beta)$$

mentre definiamo (con grande fantasia) potenza costante il termine costante e poniamo

$$p_{\cos}(t) \stackrel{\Delta}{=} UI \cos(\alpha - \beta)$$

DEFINIZIONE,

POTENZA COMPLESSA. Definiamo potenza complessa il prodotto tra il fasore della tensione del bipolo per il coniugato del fasore della corrente che attraversa il fasore stesso. Si pone

$$\dot{S} \stackrel{\Delta}{=} UI^*$$

DEDUZIONE,

ESPRESSIONE DELLA POTENZA COMPLESSA. Sviluppiamo l'espressione fornita come definizione di potenza complessa.

$$\dot{S} = UI^* = Ue^{j\alpha} Ie^{-j\beta} = UIe^{j(\alpha-\beta)} = UI(\cos(\alpha-\beta) + j\sin(\alpha-\beta)) = UI \cos(\alpha-\beta) + jUI \sin(\alpha-\beta)$$

Si individuano così due termini, entrambi dipendenti dallo sfasamento della tensione rispetto alla corrente.

DEFINIZIONE,

POTENZA ATTIVA. Definiamo potenza attiva la parte reale della potenza complessa. Poniamo

$$P \stackrel{\Delta}{=} UI \cos(\alpha - \beta)$$

DEDUZIONE,

SIGNIFICATO FISICO DELLA POTENZA ATTIVA. Si scopre che la potenza attiva, definita in modo così astratto, non è altro che la media integrale sul periodo T (si può anche considerare la media integrale sul periodo T/2 della potenza fluttuante, il risultato non cambia) della potenza istantanea. Si ha cioè

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

DIMOSTRAZIONE. Calcolando la media integrale si ha

$$\frac{UI}{T} \int_0^T [-\cos(2\omega t + \alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] dt = -\frac{UI}{T} \int_0^T \cos(2\omega t + \alpha + \beta) dt + P$$

Basta dunque dimostrare che l'integrale a secondo membro sia nullo. Si trova che

$$\begin{aligned}\int_0^T \cos(2\omega t + \alpha + \beta) dt &= \frac{1}{2\omega t} \int_{t=0}^{t=T} \cos(2\omega t + \alpha + \beta) d(2\omega t + \alpha + \beta) = \frac{1}{2\omega t} \int_{t=0}^{t=T} d \sin(2\omega t + \alpha + \beta) = \\ &= \frac{1}{2\omega t} \sin(2\omega t + \alpha + \beta) \Big|_{t=0}^{t=T} = \frac{1}{2\omega t} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(2\omega T + \alpha + \beta)]\end{aligned}$$

Ricordando ora che $T = \frac{2\pi}{\omega}$, andando a sostituire abbiamo

$$\begin{aligned}\int_0^T \cos(2\omega t + \alpha + \beta) dt &= \frac{1}{2\omega t} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(2\omega T + \alpha + \beta)] = \frac{1}{2\omega t} \left[\sin(\alpha + \beta) - \sin\left(2\omega \frac{2\pi}{\omega} + \alpha + \beta\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2\omega t} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(4\pi + \alpha + \beta)] = \frac{1}{2\omega t} [\sin(\alpha + \beta) - [\sin(4\pi)\cos(\alpha + \beta) + \cos(4\pi)\sin(\alpha + \beta)]] = \\ &= \frac{1}{2\omega t} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha + \beta)] = 0\end{aligned}$$

E la tesi è dimostrata. Si osservi che allo stesso risultato saremmo giunti se avessimo integrato anziché sul periodo T della corrente e della tensione, su quello T/2 della potenza fluttuante.

DEDUZIONE,

ALTRO SIGNIFICATO FISICO DELLA POTENZA ATTIVA. Si consideri un circuito con un generatore ideale di tensione in serie con una resistenza, un induttore ed un condensatore. La potenza attiva entrante nel bipolo serie dei tre bipoli passivi rappresenta la media, sul periodo T, della potenza entrante nella sola resistenza.

DIMOSTRAZIONE. La potenza istantanea entrante nel resistore è data da

$$p_R(t) = Ri(t)^2 = 2I^2 R \sin^2(\omega t + \beta)$$

La media integrale sul periodo T di tale potenza è

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} \int_0^T p_R(t) dt &= \frac{1}{T} 2I^2 R \int_0^T \sin^2(\omega t + \beta) dt = \frac{1}{\omega T} 2I^2 R \int_{t=0}^{t=T} \sin^2(\omega t + \beta) d(\omega t + \beta) = \\ &= \frac{1}{\omega T} 2I^2 R \frac{\omega t + \beta - \sin(\omega t + \beta)\cos(\omega t + \beta)}{2} \Big|_{t=0}^{t=T} = \\ &= \frac{1}{2\pi} I^2 R [2\pi - \sin(2\pi + \beta)\cos(2\pi + \beta) + \sin(\beta)\cos(\beta)] = \\ &= I^2 R = I^2 Z \cos(\alpha - \beta) = IU \cos(\alpha - \beta)\end{aligned}$$

DEFINIZIONE,

POTENZA REATTIVA. Definiamo potenza reattiva la parte complessa della potenza complessa. Poniamo

$$Q = UI \sin(\alpha - \beta)$$

DEDUZIONE,

SIGNIFICATO FISICO DELLA POTENZA REATTIVA. Si consideri un circuito con un generatore ideale di tensione in serie con una resistenza e un induttore. La potenza reattiva entrante nel bipolo serie dei due bipoli passivi rappresenta il valore massimo della potenza istantanea entrante nella induttanza cioè il valore massimo della potenza da essa assorbita.

Analogamente in un circuito con un generatore ideale di tensione in serie con una resistenza ed un condensatore la potenza reattiva rappresenta il minimo della potenza istantanea entrante nel condensatore.

DIMOSTRAZIONE. La potenza istantanea entrante nell'induttore è data da

$$p_L(t) = i(t)u_L(t) = i(t)L \frac{di(t)}{dt} = 2I^2 L \omega \sin(\omega t + \beta) \cos(\omega t + \beta) = I^2 L \omega \sin(2\omega t + 2\beta)$$

La media integrale sul periodo T è nulla, infatti

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T p_L(t) dt &= \frac{2I^2 L \omega}{T} \int_0^T \sin(\omega t + \beta) \cos(\omega t + \beta) dt = \frac{2I^2 L}{T} \int_{t=0}^{t=T} \sin(\omega t + \beta) d \sin(\omega t + \beta) = \\ &= \frac{I^2 L}{T} \sin^2(\omega t + \beta) \Big|_{t=0}^{t=T} = \frac{I^2 L}{T} [\sin^2(2\pi + \beta) - \sin^2(\beta)] = 0 \end{aligned}$$

Il valore massimo della potenza entrante è invece

$$MAX[p_L(t)] = I^2 L \omega = I^2 Z \sin(\alpha - \beta) = UI \sin(\alpha - \beta).$$

La potenza istantanea che invece entra nel condensatore è data da

$$\begin{aligned} p_C(t) &= i(t)u_C(t) = \frac{i(t)}{C} \int i(t) dt = \frac{\sqrt{2}I \sin(\omega t + \beta)}{C} \int \sqrt{2}I \sin(\omega t + \beta) dt = \frac{2I^2 \sin(\omega t + \beta)}{C} \int \sin(\omega t + \beta) dt = \\ &= -\frac{2I^2 \sin(\omega t + \beta)}{\omega C} \cos(\omega t + \beta) = -\frac{I^2 \sin(2\omega t + 2\beta)}{\omega C} \end{aligned}$$

Anche qui la media integrale sul periodo risulta nulla, come sopra. Il valore minimo della potenza entrante è invece

$$MIN[p_C(t)] = -\frac{I^2}{\omega C} = I^2 Z \sin(\alpha - \beta) = UI \sin(\alpha - \beta)$$

OSSERVAZIONE,

POTENZA ATTIVA E CONVENZIONE DEL BIPOLO. Se si cambia convenzione per il bipolo di cui si esprime la potenza attiva, allora questa cambia di segno. Infatti cambiare il riferimento di tensione vuol dire cambiare il segno al valore della tensione, ovvero sfasarla di π (in più o in meno). In tal modo si ha

$$\begin{aligned} P &= UI \cos(\alpha - \beta \pm \pi) = UI [\cos(\alpha - \beta) \cos(\pm \pi) \pm \sin(\alpha - \beta) \sin(\pm \pi)] = \\ &= UI \cos(\alpha - \beta) \cos(\pm \pi) = -UI \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE,

POTENZA REATTIVA E CONVENZIONE DEL BIPOLO. Vale, per la potenza reattiva, lo stesso discorso fatto per quella attiva. Se si cambia convenzione per il bipolo di cui si esprime la potenza reattiva, allora questa cambia di segno. Infatti cambiare il riferimento di tensione vuol dire cambiare il segno al valore della tensione, ovvero sfasarla di π (in più o in meno). In tal modo si ha

$$Q = UI \sin(\alpha - \beta \pm \pi) = UI [\sin(\alpha - \beta) \cos(\pm \pi) \pm \cos(\alpha - \beta) \sin(\pm \pi)] = \\ = UI \sin(\alpha - \beta) \cos(\pm \pi) = -UI \sin(\alpha - \beta)$$

OSSERVAZIONE,

SFASAMENTI NOTEVOLI E POTENZE ATTIVA E REATTIVA. Vediamo cosa accade alle due potenze introdotte nel caso dei quattro sfasamenti notevoli tra tensione e corrente.

SFASAMENTO $\alpha - \beta$	POTENZA ATTIVA $P = UI \cos(\alpha - \beta)$	POTENZA REATTIVA $Q = UI \sin(\alpha - \beta)$
TENSIONE E CORRENTE IN FASE $\alpha = \beta$	POTENZA ATTIVA MASSIMA $P = UI$	POTENZA REATTIVA NULLA $Q = 0$
TENSIONE E CORRENTE IN OPPOSIZIONE DI FASE $\alpha - \beta = \pm \pi$	POTENZA ATTIVA MINIMA $P = -UI$	POTENZA REATTIVA NULLA $Q = 0$
TENSIONE IN QUADRATURA IN ANTICIPO SULLA CORRENTE $\alpha - \beta = \pi/2$	POTENZA ATTIVA NULLA $P = 0$	POTENZA REATTIVA MASSIMA $Q = UI$
TENSIONE IN QUADRATURA IN RITARDO SULLA CORRENTE $\alpha - \beta = -\pi/2$	POTENZA ATTIVA NULLA $P = 0$	POTENZA REATTIVA MINIMA $Q = -UI$

DEFINIZIONE,

POTENZA APPARENTE. Chiamiamo potenza apparente il modulo della potenza complessa. Poniamo

$$S = \left| \dot{S} \right|$$

DEDUZIONE,

RELAZIONI TRA LE POTENZE. Riportiamo le definizioni delle quattro potenze seguite da relazioni immediate fra esse.

$$S = \left| \dot{S} \right| = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$P = UI \cos(\alpha - \beta) = S \cos(\alpha - \beta)$$

$$Q = UI \sin(\alpha - \beta) = S \sin(\alpha - \beta)$$

$$\dot{S} = UI^* = S e^{j(\alpha - \beta)} = S \cos(\alpha - \beta) + jS \sin(\alpha - \beta) = P + jQ$$

DEDUZIONE,

CONSERVAZIONE DELLA POTENZA COMPLESSA. E' possibile dimostrare che in una rete in regime sinusoidale, se si convenzionano tutti i bipoli allo stesso modo allora la somma delle potenze complesse è pari a zero. Equivalentemente si può dire che la somma delle potenze attive e la somma delle potenze reattive sono entrambe nulle.

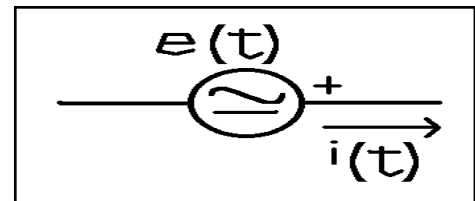
II) GENERATORI IDEALI IN REGIME SINUSOIDALE

DEFINIZIONE,

GENERATORE IDEALE DI TENSIONE IN REGIME SINUSOIDALE. Un generatore ideale di tensione in regime sinusoidale è quel bipolo il quale impone ai morsetti una tensione sinusoidale

$$u(t) = \sqrt{2}E \sin(\omega t + \alpha)$$

Il simbolo usato per questo bipolo è indicato in figura.

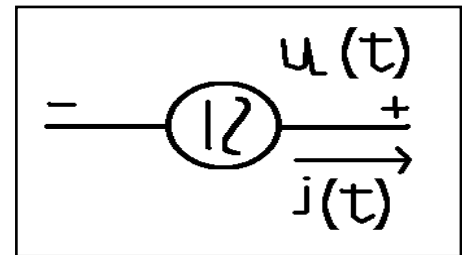


DEFINIZIONE,

GENERATORE IDEALE DI CORRENTE IN REGIME SINUSOIDALE. Un generatore ideale di corrente in regime sinusoidale è un bipolo che impone ai morsetti una corrente sinusoidale

$$i(t) = \sqrt{2}J \sin(\omega t + \beta)$$

Il simbolo usato per questo bipolo è quello indicato in figura.



III) RESISTORE IN REGIME SINUSOIDALE

DEFINIZIONE,

RESISTORE IDEALE IN REGIME SINUSOIDALE. Il resistore ideale in regime sinusoidale è caratterizzato dalla relazione

$$u(t) = Ri(t)$$

Se dunque è attraversato dalla corrente

$$i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \beta)$$

la tensione ai morsetti risulta

$$u(t) = \sqrt{2}RI \sin(\omega t + \beta)$$

Dunque il valore efficace e la fase iniziale della tensione sono rispettivamente

$$U = RI$$

$$\alpha = \beta$$

DEDUZIONE,

POTENZA ENTRANTE NEL RESISTORE. Nel caso del resistore le potenze assumono i seguenti valori

$$S = UI = P = RI^2$$

$$P = UI \cos(\beta - \beta) = S = RI^2$$

$$Q = UI \sin(\beta - \beta) = 0$$

$$\dot{S} = \overline{UI}^* = Se^{j(\beta - \beta)} = S = P = RI^2$$

$$p(t) = -RI^2 \cos(2\omega t + \beta + \beta) + RI^2 \cos(\beta - \beta) = -RI^2 \cos(2\omega t + 2\beta) + RI^2$$

Si osserva che la potenza istantanea è non negativa. Ciò è in accordo col fatto che la potenza entrante di un resistore non può essere negativa. Ciò infatti significherebbe che il resistore sviluppa potenza elettrica, il che è assurdo.

DEDUZIONE,

ENERGIA ENTRANTE NEL RESISTORE E SIGNIFICATO FISICO DEL VALORE EFFICACE DELLA CORRENTE. Quanta energia entra in un resistore in un intervallo di tempo $\Delta t = nT$? Risulta

$$\Delta E = P\Delta t = RI^2 nT$$

Risulta dunque evidente come la corrente efficace I rappresenti quella corrente costante che passando nel resistore per un tempo $\Delta t = nT$ determina un assorbimento di energia pari a quello determinato, nello stesso intervallo di tempo, dalla corrente sinusoidale $i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \beta)$.

DEDUZIONE,

RELAZIONE TRA I FASORI DELLA TENSIONE E DELLA CORRENTE DI UN RESISTORE IDEALE. I fasori della tensione e della corrente di un resistore si esprimono rispettivamente

$$\overline{U} = Ue^{j\beta}$$

$$\overline{I} = Ie^{j\beta}$$

Il legame dei valori efficaci si esprime

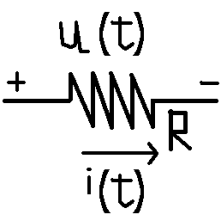
$$U = IR$$

Dunque si ha

$$\frac{\overline{U}}{\overline{I}} = \frac{Ue^{j\beta}}{Ie^{j\beta}} = Re^{j(\beta - \beta)} = R \Leftrightarrow \overline{U} = R\overline{I}$$

Cioè R è un operatore che trasforma tensione in corrente e viceversa.

RESISTORE IDEALE	
Relazione caratteristica	$u(t) = Ri(t)$
Corrente ai morsetti	$i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \beta)$

Tensione ai morsetti	$u(t) = \sqrt{2}RI \sin(\omega t + \beta)$
Sfasamento della tensione rispetto la corrente	$\varphi=0$
Fasore della corrente	$\bar{I} = Ie^{j\beta}$
Fasore della tensione	$\bar{U} = Ue^{j\beta}$
Espressioni delle potenze	$S = RI^2$ $P = RI^2$ $Q = 0$ $\dot{S} = RI^2$ $p(t) = -RI^2 \cos(2\omega t + 2\beta) + RI^2$
Simbolo e convenzione	

IV) INDUTTORE IN REGIME SINUSOIDALE

DEFINIZIONE,

INDUTTORE IDEALE IN REGIME SINUSOIDALE. L'induttore ideale in regime sinusoidale è caratterizzato dalla relazione

$$u(t) = L \frac{d(i(t))}{dt}$$

Se dunque è attraversato dalla corrente

$$i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \beta)$$

la tensione ai morsetti risulta

$$u(t) = L\sqrt{2}I\omega \cos(\omega t + \beta) = L\sqrt{2}I\omega \sin\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right)$$

Dunque il valore efficace e la fase iniziale della tensione sono rispettivamente

$$U = LI\omega$$

$$\alpha = \beta + \frac{\pi}{2}$$

DEFINIZIONE,

REATTANZA INDUTTIVA. Definiamo reattanza induttiva la quantità ωL e poniamo

$$X_L = \omega L$$

DEDUZIONE,

POTENZA ENTRANTE NELL'INDUTTORE. Nel caso dell'induttore le potenze assumono i seguenti valori

$$S = UI = \omega LI^2 = X_L I^2$$

$$P = UI \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2} - \beta\right) = UI \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$Q = UI \sin\left(\beta + \frac{\pi}{2} - \beta\right) = UI = X_L I^2$$

$$\dot{S} = \overline{UI}^* = S e^{j\left(\beta + \frac{\pi}{2} - \beta\right)} = S e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)} = jS = jX_L I^2$$

$$\begin{aligned} p(t) &= -X_L I^2 \cos\left(2\omega t + \beta + \beta + \frac{\pi}{2}\right) + X_L I^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -X_L I^2 \cos\left(2\omega t + 2\beta + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -X_L I^2 \left[\cos(2\omega t + 2\beta) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(2\omega t + 2\beta) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = X_L I^2 \sin(2\omega t + 2\beta) \end{aligned}$$

Si osserva che la potenza istantanea è oscillante in $[-X_L I^2, X_L I^2]$. Ciò significa che la potenza entrante nell'induttore è a volte positiva (potenza assorbita) e a volte negativa (potenza erogata) in accordo con la proprietà degli induttori di immagazzinare e restituire energia magnetica.

DEDUZIONE,

RELAZIONE TRA I FASORI DELLA TENSIONE E DELLA CORRENTE DI UN INDUTTORE IDEALE. I fasori della tensione e della corrente di un induttore si esprimono rispettivamente

$$\overline{U} = U e^{j(\beta + \pi/2)}$$

$$\overline{I} = I e^{j\beta}$$

Il legame dei valori efficaci si esprime

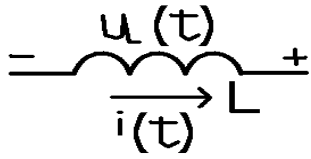
$$U = I X_L$$

Dunque si ha

$$\frac{\overline{U}}{\overline{I}} = \frac{U e^{j(\beta + \pi/2)}}{I e^{j\beta}} = X_L e^{j(\pi/2)} = jX_L \Leftrightarrow \overline{U} = jX_L \overline{I}$$

Cioè jX_L è un operatore che trasforma tensione in corrente e viceversa.

INDUTTORE IDEALE	
Relazione caratteristica	$u(t) = L \frac{d(i(t))}{dt}$
Corrente ai morsetti	$i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \beta)$
Tensione ai morsetti	$u(t) = \sqrt{2} X_L I \sin\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right)$

Reattanza induttiva	$X_L = \omega L$
Sfasamento della tensione rispetto la corrente	$\varphi = \pi/2$
Fasore della corrente	$\bar{I} = I e^{j\beta}$
Fasore della tensione	$\bar{U} = X_L I e^{j(\beta+\pi/2)}$
Espressioni delle potenze	$S = X_L I^2$ $P = 0$ $Q = X_L I^2$ $\dot{S} = jX_L I^2$ $p(t) = X_L I^2 \sin(2\omega t + 2\beta)$
Simbolo e convenzione	

V) CONDENSATORE IN REGIME SINUSOIDALE

DEFINIZIONE,

CONDENSATORE IDEALE IN REGIME SINUSOIDALE. Il condensatore ideale in regime sinusoidale è caratterizzato dalla relazione

$$i(t) = C \frac{d(u(t))}{dt}$$

Se dunque è attraversato dalla corrente

$$i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \beta)$$

la tensione ai morsetti risulta

$$\begin{aligned}
 u(t) - u(t=0) &= \sqrt{2} \frac{I}{C} \int_0^t \sin(\omega\tau + \beta) d\tau = \sqrt{2} \frac{I}{C\omega} \int_0^t \sin(\omega\tau + \beta) d(\omega\tau + \beta) = -\sqrt{2} \frac{I}{C\omega} \int_0^t d \cos(\omega\tau + \beta) = \\
 &= -\sqrt{2} \frac{I}{C\omega} \int_0^t d \cos(\omega\tau + \beta) = -\sqrt{2} \frac{I}{C\omega} \cos(\omega\tau + \beta) \Big|_0^t = \sqrt{2} \frac{I}{C\omega} [-\cos(\omega t + \beta) + \cos(\beta)] = \\
 &= \sqrt{2} \frac{I}{C\omega} \left[\sin\left(\omega t + \beta - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) \right] \Rightarrow u(t) = \sqrt{2} \frac{I}{C\omega} \sin\left(\omega t + \beta - \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Dunque il valore efficace e la fase iniziale della tensione sono rispettivamente

$$U = \frac{1}{C\omega}$$

$$\alpha = \beta - \frac{\pi}{2}$$

DEFINIZIONE,

REATTANZA CAPACITIVA. Definiamo reattanza capacitiva la quantità $-\frac{1}{\omega C}$ e poniamo

$$X_c \stackrel{\Delta}{=} -1/\omega C$$

DEDUZIONE,

POTENZA ENTRANTE NEL CONDENSATORE. Nel caso del condensatore le potenze assumono i seguenti valori

$$S = UI = \frac{1}{\omega C} I^2 = X_c I^2$$

$$P = UI \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2} - \beta\right) = UI \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$Q = UI \sin\left(\beta - \frac{\pi}{2} - \beta\right) = UI \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -X_c I^2$$

$$\dot{S} = \overline{UI}^* = S e^{j\left(\beta - \frac{\pi}{2} - \beta\right)} = S e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -jS = -jX_c I^2$$

$$\begin{aligned} p(t) &= -X_c I^2 \cos\left(2\omega t + \beta + \beta - \frac{\pi}{2}\right) + X_c I^2 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -X_c I^2 \cos\left(2\omega t + 2\beta - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -X_c I^2 \left[\cos(2\omega t + 2\beta) \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin(2\omega t + 2\beta) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = -X_c I^2 \sin(2\omega t + 2\beta) \end{aligned}$$

Si osserva che la potenza istantanea è oscillante in $[-X_c I^2, X_c I^2]$. Ciò significa che la potenza entrante nel condensatore è a volte positiva (potenza assorbita) e a volte negativa (potenza erogata) in accordo con la proprietà dei condensatori di immagazzinare e restituire energia di polarizzazione.

DEDUZIONE,

RELAZIONE TRA I FASORI DELLA TENSIONE E DELLA CORRENTE DI UN CONDENSATORE IDEALE. I fasori della tensione e della corrente di un condensatore si esprimono rispettivamente

$$\overline{U} = U e^{j(\beta - \pi/2)}$$

$$\overline{I} = I e^{j\beta}$$

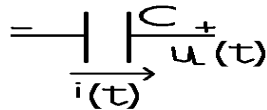
Il legame dei valori efficaci si esprime

$$U = I X_c$$

Dunque si ha

$$\frac{\overline{U}}{\overline{I}} = \frac{U e^{j(\beta - \pi/2)}}{I e^{j\beta}} = X_c e^{j(-\pi/2)} = -jX_c \Leftrightarrow \overline{U} = -jX_c \overline{I}$$

Cioè jX_c è un operatore che trasforma tensione in corrente e viceversa.

CONDENSATORE IDEALE	
Relazione caratteristica	$i(t) = C \frac{d(u(t))}{dt}$
Corrente ai morsetti	$i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \beta)$
Tensione ai morsetti	$u(t) = \sqrt{2}X_c I \sin\left(\omega t + \beta - \frac{\pi}{2}\right)$
Reattanza capacitiva	$X_c = -\frac{1}{\omega C}$
Sfasamento della tensione rispetto la corrente	$\varphi = -\pi/2$
Fasore della corrente	$\bar{I} = I e^{j\beta}$
Fasore della tensione	$\bar{U} = X_c I e^{j(\beta - \pi/2)}$
Espressioni delle potenze	$S = -X_c I^2$ $P = 0$ $Q = X_c I^2$ $\dot{S} = -jX_c I^2$ $p(t) = -X_c I^2 \sin(2\omega t + 2\beta)$
Simbolo e convenzione	

DEFINIZIONE,

BIPOLO PASSIVO. Definiamo bipolo passivo un bipolo che non possa erogare potenza attiva. Se un tale bipolo è convenzionato da utilizzatore la sua potenza attiva dovrà dunque essere non negativa. In base alla definizione data il resistore, l'induttore ed il condensatore sono tutti bipoli passivi.

VI) IMPEDENZA

DEFINIZIONE,

IMPEDENZA DI UN UTILIZZATORE. Consideriamo un bipolo convenzionato da utilizzatore. Diciamo che questo bipolo non possa erogare potenza attiva, cioè che la sua potenza attiva non possa essere negativa. Diciamo cioè che sia un bipolo passivo.

Per esso definiamo impedenza il rapporto fra fasore della tensione e fasore della corrente. Poniamo

$$\dot{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}}$$

In forma polare l'impedenza si scrive

$$\dot{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{U e^{j\alpha}}{I e^{j\beta}} = \frac{U}{I} e^{j(\alpha - \beta)} = \frac{U}{I} e^{j\varphi}$$

In forma trigonometrica abbiamo

$$\dot{Z} = \frac{U}{I} e^{j\varphi} = \frac{U}{I} (\cos \varphi + j \sin \varphi) \Leftrightarrow \begin{cases} Z_{\Re} = \frac{U}{I} \cos \varphi \geq 0 \\ Z_{\Im} = \frac{U}{I} \sin \varphi \\ \varphi = \arctan \frac{Z_{\Im}}{Z_{\Re}} \end{cases}$$

La parte reale dell'impedenza è non negativa e questo perché per l'argomento φ dell'impedenza sussiste un campo di esistenza dettato dalla natura del bipolo, cioè dal suo essere passivo. Infatti

$$P \geq 0 \Leftrightarrow UI \cos \varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

DEDUZIONE,

POTENZE DI UNA IMPEDENZA. Consideriamo un generico bipolo passivo, convenzionato da utilizzatore, di impedenza $\dot{Z}$. Determiniamo le espressioni della potenza complessa, della potenza apparente, della potenza attiva e di quella reattiva.

$$\dot{S} = \overline{U} \dot{I}^* = \dot{Z} \overline{I} \dot{I}^* = (Z_{\Re} + jZ_{\Im}) I^2$$

$$S = \left| \dot{S} \right| = I^2 \sqrt{Z_{\Re}^2 + Z_{\Im}^2}$$

$$P = I^2 Z_{\Re}$$

$$Q = I^2 Z_{\Im}$$

DEDUZIONE,

IMPEDENZA DEI BIBOLI PASSIVI. Prendiamo in considerazione i tre bipoli passivi studiati, ovvero il resistore, la induttanza e il condensatore. Quali sono le loro impedenze?

IMPEDENZE	
RESISTORE	$\dot{Z} = \frac{\overline{U}}{I} = \frac{U}{I} e^{j(0)} = R$
INDUTTORE	$\dot{Z} = \frac{\overline{U}}{I} = \frac{U}{I} e^{j(\frac{\pi}{2})} = j\omega L = jX_L$
CONDENSATORE	$\dot{Z} = \frac{\overline{U}}{I} = \frac{U}{I} e^{j(-\frac{\pi}{2})} = -j \frac{1}{\omega C} = jX_C$

VII) SUSCETTANZE E AMMETTENZE

DEFINIZIONE,

SUSCETTANZA INDUTTIVA E SUSCETTANZA CAPACITIVA. Definiamo suscettanza induttiva l'inverso (cioè l'opposto del reciproco) della reattanza induttiva. Poniamo dunque

$$B_L = -\frac{1}{X_L} = -\frac{1}{\omega L}$$

Definiamo suscettanza capacitiva l'inverso della reattanza capacitiva. Poniamo dunque

$$B_C = -\frac{1}{X_C} = \omega C$$

DEFINIZIONE,

AMMETTENZA DI UN UTILIZZATORE. Consideriamo un bipolo convenzionato da utilizzatore. Diciamo che questo bipolo non possa erogare potenza attiva, cioè che la sua potenza attiva non possa essere negativa. Diciamo cioè che sia un bipolo passivo.

Per esso definiamo ammettanza il rapporto fra fasore della tensione e fasore della corrente. Cioè il reciproco della impedenza. Poniamo

$$\dot{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \left(\dot{Z} \right)^{-1}$$

In forma polare l'ammettanza si scrive

$$\dot{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{I e^{j\beta}}{U e^{j\alpha}} = \frac{I}{U} e^{j(\beta-\alpha)} = \frac{I}{U} e^{-j\varphi}$$

In forma trigonometrica abbiamo

$$\dot{Y} = \frac{I}{U} e^{-j\varphi} = \frac{I}{U} (\cos \varphi - j \sin \varphi) \Leftrightarrow \begin{cases} Y_{\Re} = \frac{I}{U} \cos \varphi \geq 0 \\ Y_{\Im} = -\frac{I}{U} \sin \varphi \\ \varphi = \arctan \frac{Y_{\Im}}{Y_{\Re}} \end{cases}$$

Per la parte reale della ammettanza vale la stessa considerazione fatta per quella della impedenza.

DEDUZIONE,

AMMETTENZA DEI BIBOLI PASSIVI. Prendiamo in considerazione i tre bipoli passivi studiati, ovvero il resistore, la induttanza e il condensatore. Quali sono le loro ammettenze?

AMMETTENZE	
RESISTORE	$\dot{Y} = \left(\dot{Z} \right)^{-1} = (R)^{-1} = G$
INDUTTORE	$\dot{Y} = \left(\dot{Z} \right)^{-1} = (j\omega L)^{-1} = \frac{1}{j\omega L} = -\frac{j}{\omega L} = jB_L$
CONDENSATORE	$\dot{Y} = \left(\dot{Z} \right)^{-1} = \left(-j\frac{1}{\omega C} \right)^{-1} = -\frac{\omega C}{j} = j\omega C = jB_C$

VIII) IMPEDENZE EQUIVALENTI

DEDUZIONE,

IMPEDENZA SERIE. Più impedenze collegate in serie sono equivalenti ad una impedenza somma delle impedenze date.

$$\dot{Z}_s = \sum_i \dot{Z}_i$$

DEDUZIONE,

IMPEDENZA PARALLELO. Più impedenze collegate in parallelo son equivalenti ad una impedenza il cui reciproco è la somma dei reciproci delle impedenze date.

$$\frac{1}{\dot{Z}_p} = \sum_i \frac{1}{\dot{Z}_i}$$

DEDUZIONE,

TRASFORMAZIONI TRIANGOLO-STELLA. Un triangolo di impedenze può trasformarsi in una stella equivalente seguendo le formule di trasformazione seguenti.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Z}_1 = \frac{\dot{Z}_{12} \dot{Z}_{13}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{13} + \dot{Z}_{23}} \\ \dot{Z}_2 = \frac{\dot{Z}_{12} \dot{Z}_{23}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{13} + \dot{Z}_{23}} \\ \dot{Z}_3 = \frac{\dot{Z}_{13} \dot{Z}_{23}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{13} + \dot{Z}_{23}} \end{array} \right.$$

DEDUZIONE,

TRASFORMAZIONI STELLA-TRIANGOLO. Una stella di impedenze può trasformarsi in un triangolo di impedenze seguendo le seguenti formule di trasformazione.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Z}_{12} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_3} \\ \dot{Z}_{13} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_2} \\ \dot{Z}_{23} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_1} \end{array} \right.$$

OSSERVAZIONE,

TRASFORMAZIONI TRIANGOLO-STELLA E STELLA-TRIANGOLO. Si osserva che nelle due trasformazioni su indicate possono ottenersi impedenze con parte reale negativa. Ciò è dovuto al fatto che tali impedenze non rappresentano singoli bipoli passivi.

DEFINIZIONE,

SINTESI SERIE DI UNA IMPEDENZA. Abbiamo un generico bipolo passivo. La sua impedenza sia $\dot{Z}$. Vogliamo rappresentare questa impedenza con la serie di una resistenza R_s e di una reattanza X_s . Per fare questo occorre imporre che l'impedenza equivalente alla serie della resistenza e della reattanza sia proprio l'impedenza data. Dobbiamo imporre cioè che

$$\dot{Z} = (R_s + j0) + (0 + jX_s) \Leftrightarrow \begin{cases} R_s = Z_{\Re} = Z \cos \varphi \\ X_s = Z_{\Im} = Z \sin \varphi \end{cases}$$

Da questo si vede anche che se la tensione ai morsetti della impedenza $\dot{Z}$ è in anticipo sulla corrente, cioè se $\varphi > 0$, allora la reattanza X_s sarà positiva, cioè di tipo induttivo; se invece la tensione è in ritardo sulla corrente, cioè se $\varphi < 0$, allora la reattanza X_s sarà negativa, cioè di tipo capacitivo; se, in fine, tensione e corrente sono in fase avremo reattanza nulla.

DEFINIZIONE,

SINTESI PARALLELO DI UNA IMPEDENZA. Abbiamo un generico bipolo passivo. La sua impedenza sia $\dot{Z}$. Vogliamo rappresentare questa impedenza con il parallelo di una resistenza R_p e di una reattanza X_p . Per fare questo occorre imporre che l'impedenza equivalente al parallelo della resistenza e della reattanza sia proprio l'impedenza data. Dobbiamo imporre cioè che

$$\left(\dot{Z}\right)^{-1} = (R_p + j0)^{-1} + (0 + jX_p)^{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{R_p} = Y_{\Re} = \frac{1}{Z} \cos \varphi \\ -\frac{1}{X_p} = Y_{\Im} = -\frac{1}{Z} \sin \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_p = \frac{Z}{\cos \varphi} \\ X_p = \frac{Z}{\sin \varphi} \end{cases}$$

Per la natura della reattanza vale lo stesso discorso fatto nel caso della sintesi serie.

CAPITOLO VIII, RETI IN REGIME SINUSOIDALE

I) LEGGI DI KIRCHHOFF

DEFINIZIONE,

RETE ELETTRICA IN REGIME SINUSOIDALE. Una rete elettrica si dice in regime sinusoidale quando tutte le sue tensioni e le sue correnti sono in regime sinusoidale isofrequenziale. Da questo discende che per risolvere la rete, ovvero per determinare correnti e tensioni di lato, sarà sufficiente determinarne valore efficace e fase iniziale.

OSSERVAZIONE,

RETI IN REGIME SINUSOIDALE COME RETI LINEARI. L'introduzione dei fasori permette di trattare il problema delle reti in regime sinusoidale come un problema lineare. In tal modo possiamo adottare tutti i metodi di analisi studiati per le reti in regime permanente continuo, purché si sostituiscano alle correnti e alle tensioni i loro fasori.

DEDUZIONE,

LEGGE DI KIRCHHOFF AI FASORI DELLE CORRENTI. La somma algebrica dei fasori delle correnti entranti in ciascun nodo è nulla. Per somma algebrica si vuole intendere che i fasori delle correnti entranti vanno sommate, mentre quelli delle correnti uscenti vanno sottratti. Dunque tale legge è identica alla LKC nel dominio del tempo, purché, al posto delle correnti si considerino i loro fasori.

DEDUZIONE,

LEGGE DI KIRCHHOFF AI FASORI DELLE TENSIONI.

È identica alla LKT nel dominio del tempo, purché, al posto delle tensioni si considerino i loro fasori.

II) RIFASAMENTO DEL CARICO

DEFINIZIONE,

RIFASAMENTO DEL CARICO. Consideriamo la rete in regime sinusoidale indicata in figura. La tensione di alimentazione dell'impedenza è

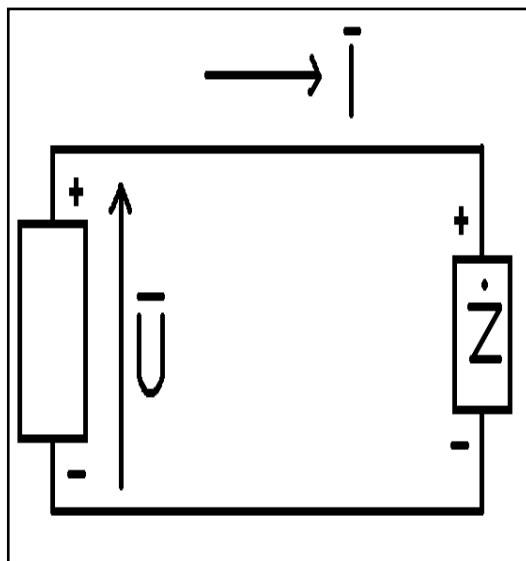
$$u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \alpha) \leftrightarrow \bar{U} = Ue^{j\alpha} = U \cos \alpha + jU \sin \alpha$$

mentre la corrente che l'attraversa è

$$i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \beta) \leftrightarrow \bar{I} = Ie^{j\beta} = I \cos \beta + jI \sin \beta$$

La sua impedenza è

$$\dot{Z} = Ze^{j(\alpha-\beta)} = Ze^{j(\varphi)} = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi$$



dove $\varphi = \alpha - \beta$ è l'anticipo della tensione sulla corrente. Con queste posizioni la potenza attiva entrante nella impedenza vale

$$P = UI \cos \varphi$$

mentre quella reattiva risulta

$$Q = UI \sin \varphi$$

Ammettendo che la tensione di alimentazione resti costante, ci chiediamo se è possibile ridurre il valore efficace della corrente uscente dall'alimentazione senza variare la potenza attiva. Data l'espressione della potenza attiva, dovendo essere U costante, ciò sarà possibile solo aumentando il fattore di potenza $\cos \varphi$, ovvero riducendo, in valore assoluto, lo sfasamento tra tensione e corrente.

Questo procedimento, realizzato nel modo illustrato nel seguito, prende il nome di rifasamento del carico.

DEDUZIONE,

RIFASAMENTO E POTENZA REATTIVA. Rifasare il carico significa ridurre, in valore assoluto, la potenza reattiva entrante nel carico (uscente dall'alimentazione).

DIMOSTRAZIONE. Si considerino le dimostrazioni dei due teoremi successivi.

1) Nel primo si affronta il rifasamento di un carico resistivo-induttivo con un condensatore in parallelo e si trova che la potenza reattiva del carico rifasato è

$$Q^I = Q + Q_C = UI \sin(\varphi) + UI_C \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = UI \sin(\varphi) - UI_C = UI \sin(\varphi) - \frac{U^2}{\omega C}$$

dove Q è la potenza del carico non rifasato. Si ottiene dunque

$$0 < Q^I < Q$$

essendo in questo caso la potenza reattiva di partenza positiva (il carico ha reattanza induttiva).

2) Nel secondo si affronta il rifasamento di un carico resistivo-capacitivo con un induttore in parallelo e si trova che la potenza reattiva del carico rifasato è

$$Q^I = Q + Q_L = UI \sin(\varphi) + UI_L \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = UI \sin(\varphi) + UI_L = UI \sin(\varphi) + \frac{U^2}{\omega L}$$

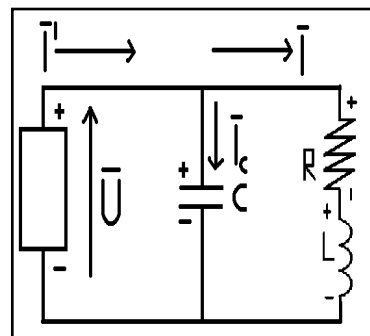
dove Q è la potenza del carico non rifasato. Si ottiene dunque

$$0 < Q < Q^I$$

DEDUZIONE,

RIFASAMENTO DI UN CARICO RESISTIVO-INDUTTIVO.

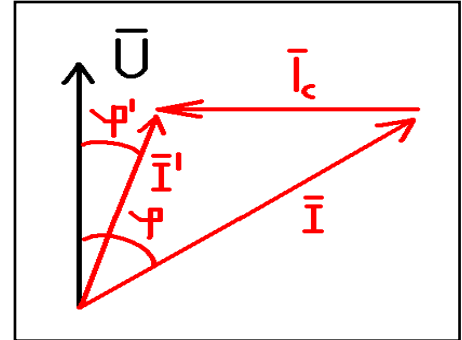
Il rifasamento di un carico resistivo-induttivo si realizza mettendo in parallelo ad esso un condensatore di capacità



$$C = \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi^l)}{\omega U^2}$$

dove $\varphi^l > \varphi$ ($|\varphi^l| > |\varphi|$) è il nuovo sfasamento della tensione rispetto alla corrente.

DIMOSTRAZIONE. Inserendo in parallelo un condensatore C otteniamo il circuito rappresentato in figura. Intanto è immediato constatare che l'introduzione del condensatore ha determinato una riduzione del valore efficace della corrente di alimentazione, che indichiamo $\bar{I}^l$, rispetto al caso in cui non vi fosse il condensatore. Questo in quanto (vedi il diagramma fasoriale) la corrente di alimentazione è ora la somma della corrente che attraversa l'impedenza, rimasta invariata, e della corrente che attraversa il condensatore la quale è in quadratura in anticipo sulla tensione di alimentazione (anch'essa rimasta invariata).



Vediamo ora di calcolare la capacità necessaria affinché si ottenga un angolo di fase assegnato $\varphi^l < \varphi$. Esprimiamo cioè C in funzione di φ^l .

Considerando la potenza reattiva entrante nel condensatore si ha

$$Q_c = UI_c \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -UI_c = -U \frac{U}{Z_c} = -U \frac{U}{|X_c|} = -\omega CU^2 \Rightarrow C = -\frac{Q_c}{\omega U^2}$$

Il legame tra la potenza reattiva della rete dopo il rifasamento (Q^l), la potenza reattiva prima del rifasamento (Q) e quella del condensatore (Q_c) è dato da

$$\begin{cases} Q^l = UI_c \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + UI \sin(\varphi) = Q_c + Q \Rightarrow Q_c = Q^l - Q = UI^l \sin(\varphi^l) - UI \sin(\varphi) \\ Q^l = UI^l \sin(\varphi^l) \end{cases}$$

Fin qui dunque abbiamo ottenuto che

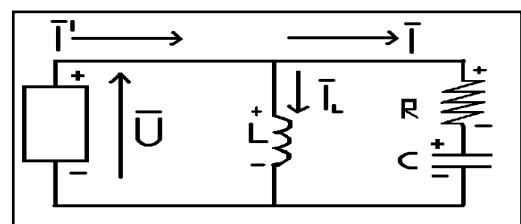
$$C = -\frac{Q_c}{\omega U^2} = -\frac{UI^l \sin(\varphi^l) - UI \sin(\varphi)}{\omega U^2}$$

Mettiamo in evidenza, nel secondo membro, la potenza attiva.

$$C = -\frac{\frac{UI^l \cos(\varphi^l) \sin(\varphi^l)}{\cos(\varphi^l)} - \frac{UI \cos(\varphi) \sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}}{\omega U^2} = -\frac{\frac{P \sin(\varphi^l)}{\cos(\varphi^l)} - \frac{P \sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}}{\omega U^2} = P \frac{\tan(\varphi) - \tan(\varphi^l)}{\omega U^2}$$

E la tesi è dimostrata.

DEDUZIONE,
RIFASAMENTO DI UN CARICO CAPACITIVO-INDUTTIVO. Il rifasamento di un carico capacitivo-



resistivo si realizza collegando in parallelo ad esso un induttore di induttanza

$$L = \frac{U^2}{\omega P (\tan \varphi' - \tan \varphi)}$$

dove $\varphi' < \varphi$ è il nuovo sfasamento fra tensione di alimentazione e corrente di alimentazione.

DIMOSTRAZIONE. Intanto si vede dal diagramma fasoriale come l'introduzione in parallelo di un induttore comporti una riduzione del valore efficace della corrente di alimentazione. Si vede inoltre, sempre dal diagramma fasoriale, come resti costante la potenza attiva e come invece si riduca il valore della potenza reattiva (che in questo caso è positiva essendo di natura induttiva).

Ricaviamo ora l'espressione della L necessaria a determinare il nuovo sfasamento tra tensione e corrente di alimentazione.

La potenza reattiva entrante nell'induttore si scrive

$$Q_L = UI_L \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = UI_L = U \frac{U}{Z_L} = U \frac{U}{X_L} = \frac{U^2}{\omega L} \Rightarrow L = \frac{U^2}{\omega Q_L}$$

Tra le potenze reattive sussiste la relazione

$$\begin{cases} Q' = UI_L \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + UI \sin(\varphi) = Q_L + Q \Rightarrow Q_L = Q' - Q = UI' \sin(\varphi') - UI \sin(\varphi) \\ Q' = UI' \sin(\varphi') \end{cases}$$

Dunque abbiamo

$$L = \frac{U^2}{\omega (UI' \sin(\varphi') - UI \sin(\varphi))}$$

Mettiamo in evidenza, nel secondo membro, la potenza attiva.

$$L = \frac{U^2}{\omega \left(UI' \cos(\varphi') \frac{\sin(\varphi')}{\cos(\varphi')} - UI \cos(\varphi) \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \right)} = \frac{U^2}{\omega (P \tan(\varphi') - P \tan(\varphi))} = \frac{U^2}{\omega P (\tan(\varphi') - \tan(\varphi))}$$

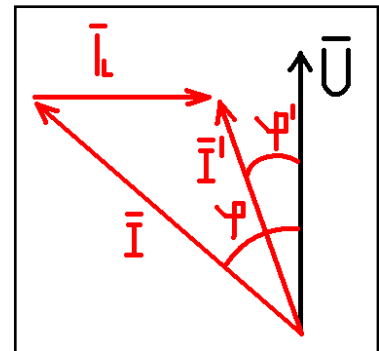
e la tesi è dimostrata.

III) EFFETTO PELLE

OSSERVAZIONE SPERIMENTALE,

EFFETTO PELLE. In un conduttore massiccio percorso da corrente in regime variabile si verifica che la densità di corrente non è uniforme nella sezione del conduttore stesso. Infatti le cariche in moto tendono ad addensarsi verso l'esterno del conduttore. Questo fenomeno è definito come effetto pelle.

In particolare in un conduttore cilindrico pieno, si ha che la densità di corrente ad una distanza dalla superficie pari a 4 o 5 volte il parametro

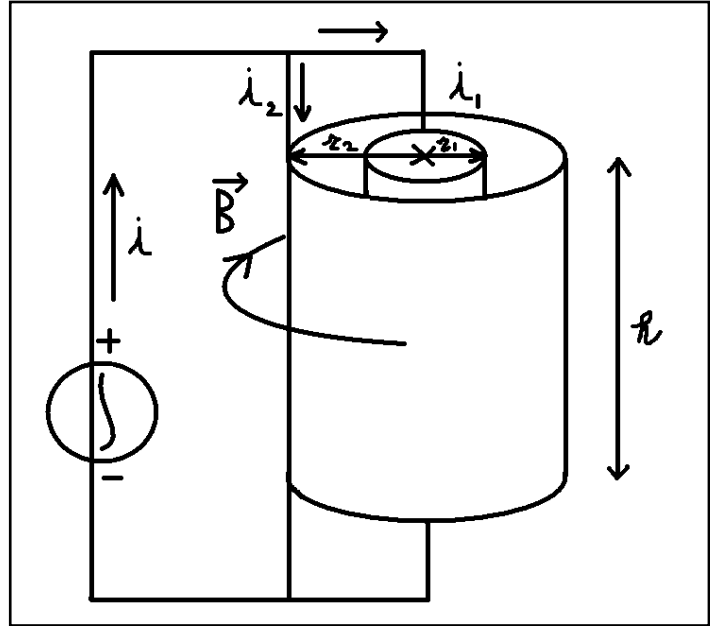


$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \gamma}}$$

risulta minore del 2-1% del valore massimo, raggiunto alla superficie. Il parametro introdotto si chiama **spessore di penetrazione**.

Lo spessore di penetrazione nel caso di un conduttore cilindrico di rame ($\gamma = 5 \cdot 10^7 \text{ S/m}$) presenta i seguenti valori correlati alla frequenza della corrente

$$\begin{cases} f = 50\text{Hz} \Rightarrow \delta = 10\text{mm} \\ f = 100\text{kHz} \Rightarrow \delta = 0,2\text{mm} \\ f = 100\text{MHz} \Rightarrow \delta = 7\mu\text{m} \end{cases}$$



DEDUZIONE,

ANALISI SEMPLIFICATA DELL'EFFETTO PELLE. Consideriamo i due conduttori tubolari in figura. Siano essi alimentati da un generatore sinusoidale. Siano $r_1 < r_2$ i loro raggi ed h la loro altezza.

L'induzione magnetica determinata da un conduttore tubolare è uguale, all'esterno, a quella determinata da un conduttore filiforme. Nello spazio compreso dal conduttore è invece nulla. Dunque, nel nostro caso, l'induzione sarà nulla solo nello spazio racchiuso dal conduttore più piccolo. Il flusso della induzione concatenato con il percorso dei due conduttori lo indichiamo con l'apice e e se è dovuto alla induzione che si sviluppa fuori dal tubo più largo, lo indichiamo con l'apice i e se è dovuto all'induzione che si sviluppa nello spazio compreso fra i due tubi. Come detto non si ha induzione nello spazio interno al tubo più piccolo.

Posto tutto ciò calcoliamo il coefficiente di autoinduzione e di mutua induzione per il conduttore tubolare più piccolo. Si ha

$$\begin{cases} \Phi_{12} = \Phi_2^e \Rightarrow \frac{1}{i_2} = M_{12} \Phi_{12} = M_{12} \Phi_2^e \Rightarrow M_{12} = \frac{\Phi_2^e}{i_2} \\ \Phi_{11} = \Phi_1^e + \Phi_1^i \Rightarrow \frac{1}{i_1} = L_1 \Phi_{11} = L_1 (\Phi_1^e + \Phi_1^i) \Rightarrow L_1 = \frac{(\Phi_1^e + \Phi_1^i)}{i_1} = \frac{\Phi_1^e}{i_1} + \frac{\Phi_1^i}{i_1} \triangleq L_1^e + L_1^i \end{cases}$$

Ora calcoliamo coefficiente di auto induzione e mutua induzione per il conduttore tubolare più grande.

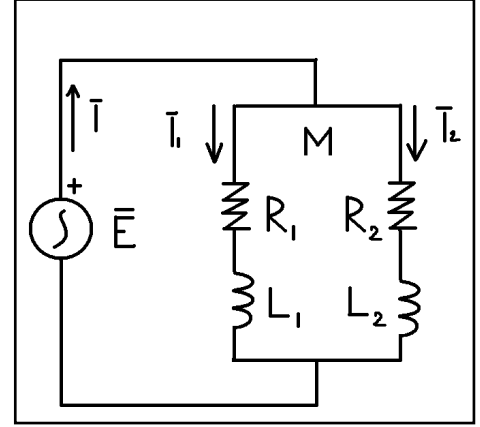
$$\begin{cases} \Phi_{21} = \Phi_1^e \Rightarrow \frac{1}{i_1} = M_{21} \Phi_{21} = M_{21} \Phi_1^e \Rightarrow M_{21} = \frac{\Phi_1^e}{i_1} = L_1^e \\ \Phi_{22} = \Phi_2^e \Rightarrow \frac{1}{i_2} = L_2 \Phi_{22} = L_2 \Phi_2^e \Rightarrow L_2 = \frac{\Phi_2^e}{i_2} = M_{12} \end{cases}$$

Poiché i coefficienti di mutua induzione devono coincidere si ha

$$M_{12} = M_{21} = M \Rightarrow \begin{cases} M = \frac{\Phi_1^e}{i_1} = L_1^e \\ L_2 = L_1^e \end{cases}$$

Attribuendo resistenza R_1 al conduttore tubolare più piccolo abbiamo che la LKT ai fasori per esso si scrive

$$\bar{E} = \bar{I}_1 R_1 + j\omega(\bar{I}_1 L_1 + \bar{I}_2 M) = \bar{I}_1 R_1 + j\omega(\bar{I}_1 L_1^e + \bar{I}_1 L_1^i + \bar{I}_2 L_1^e)$$



Per il conduttore esterno, attribuendogli resistenza R_2 , avremo invece che la LKT ai fasori so scrive

$$\bar{E} = \bar{I}_2 R_2 + j\omega(\bar{I}_2 L_2 + \bar{I}_1 M) = \bar{I}_2 R_2 + j\omega(\bar{I}_2 L_1^e + \bar{I}_1 L_1^e)$$

Riscrivendo le due espressioni si ha

$$\begin{cases} \bar{E} = \bar{I}_1 R_1 + j\omega\bar{I}_1 L_1^e + j\omega\bar{I}_1 L_1^i + j\omega\bar{I}_2 L_1^e \Rightarrow \bar{E} - j\omega\bar{I}_2 L_1^e - j\omega\bar{I}_1 L_1^e = \bar{I}_1 R_1 + j\omega\bar{I}_1 L_1^i \\ \bar{E} = \bar{I}_2 R_2 + j\omega\bar{I}_2 L_1^e + j\omega\bar{I}_1 L_1^e \Rightarrow \bar{E} - j\omega\bar{I}_2 L_1^e - j\omega\bar{I}_1 L_1^e = \bar{I}_2 R_2 \end{cases}$$

Per confronto si ricava allora

$$\begin{aligned} \bar{I}_2 R_2 &= \bar{I}_1 R_1 + j\omega\bar{I}_1 L_1^i = \bar{I}_1 (R_1 + j\omega L_1^i) \Rightarrow (\bar{I} - \bar{I}_1) R_2 = \bar{I}_1 (R_1 + j\omega L_1^i) \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{I} R_2 &= \bar{I}_1 (R_1 + j\omega L_1^i + R_2) \Rightarrow \bar{I}_1 = \frac{\bar{I} R_2}{R_1 + j\omega L_1^i + R_2} \end{aligned}$$

Analogamente si calcola

$$\begin{aligned} \bar{I}_2 R_2 &= (\bar{I} - \bar{I}_1) (R_1 + j\omega L_1^i) \Rightarrow \bar{I}_2 (R_2 + R_1 + j\omega L_1^i) = \bar{I} (R_1 + j\omega L_1^i) \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{I}_2 &= \frac{\bar{I} (R_1 + j\omega L_1^i)}{(R_2 + R_1 + j\omega L_1^i)} \end{aligned}$$

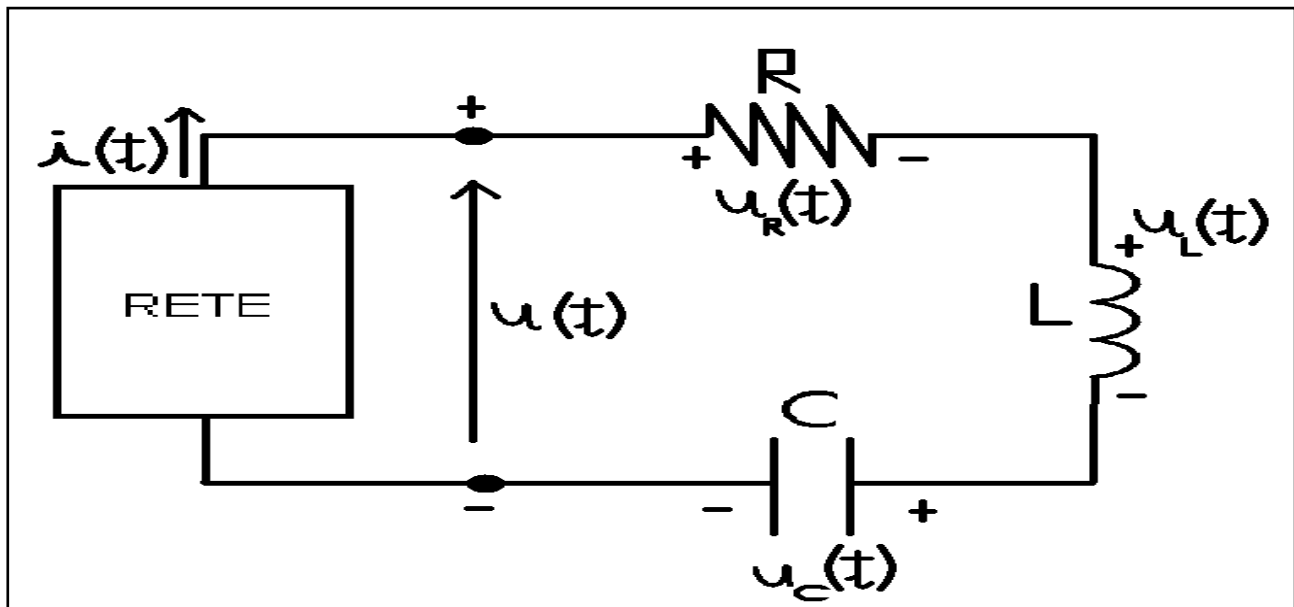
Mandando al limite per $\omega \rightarrow \infty$ si ha

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{I} R_2}{R_1 + j\omega L_1^i + R_2} \rightarrow 0, \bar{I}_2 = \frac{\bar{I} (R_1 + j\omega L_1^i)}{(R_2 + R_1 + j\omega L_1^i)} = \frac{\bar{I} \left(\frac{R_1}{\omega} + jL_1^i \right)}{\left(\frac{R_2 + R_1}{\omega} + jL_1^i \right)} \rightarrow \bar{I}$$

Cioè all'aumentare della pulsazione della corrente, questa si sposta dal conduttore tubolare interno a quello esterno. Questo semplice modello fornisce dunque una giustificazione analitica dell'effetto pelle.

CAPITOLO IX, RETI NOTEVOLI IN REGIME SINUSOIDALE

I) SERIE DI UN RESISTORE, UN INDUTTORE ED UN CONDENSATORE



In figura abbiamo una rete in cui si presenta una serie di una resistenza, un'induttanza e un condensatore. Tale serie è rappresentata dall'impedenza

$$\dot{Z} = R + j(X_L + X_C) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

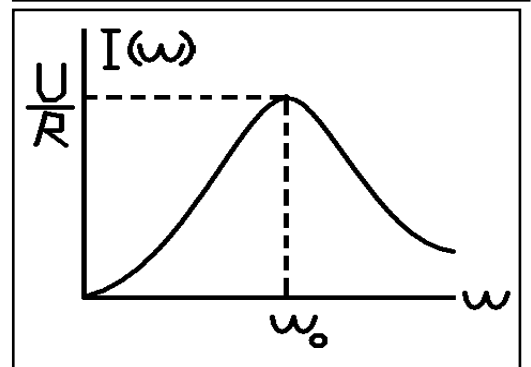
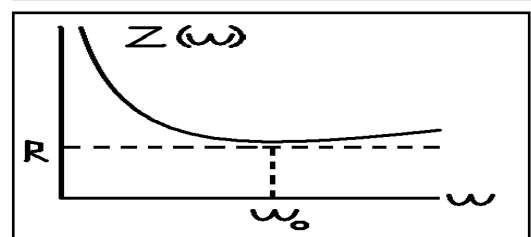
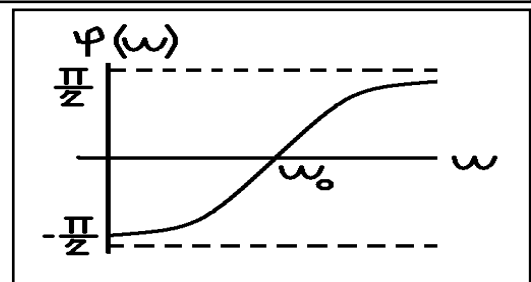
il cui modulo risulta

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

e il cui argomento è

$$\varphi = \arctan \frac{Z_{\Im}}{Z_{\Re}} = \arctan \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)$$

Le due funzioni $Z = Z(\omega)$ e $\varphi = \varphi(\omega)$ hanno l'andamento indicato in figura. Il punto $\omega = \omega_0$, in cui il modulo dell'impedenza è minimo e in cui il suo argomento si annulla, soddisfa la relazione



$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Leftrightarrow \omega^2 LC = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La corrente che attraversa l'impedenza ha valore efficace dato da

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Studiando tale funzione si trova l'andamento indicato in figura. Comunque è immediato vedere come in $\omega = \omega_0$ essa assuma il suo valore massimo.

DEFINIZIONE,

PULSAZIONE DI RISONANZA. Diciamo pulsazione di risonanza della serie RLC il valore della pulsazione per la quale è minimo il modulo dell'impedenza (ovvero nullo l'argomento dell'impedenza, ovvero massima l'ampiezza della corrente). Poniamo

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

OSSERVAZIONE,

COMPORTAMENTO IN FREQUENZA. Le discussioni fatte ci permettono di descrivere qualitativamente il comportamento del circuito al variare della pulsazione, cioè di descriverne il 'comportamento in frequenza'. Si ha che

1) per $\omega < \omega_0$ l'argomento dell'impedenza è negativo e dunque il circuito si comporta come un circuito RC, con corrente in anticipo sulla tensione;

2) per $\omega = \omega_0$ l'argomento della impedenza si annulla, cioè l'impedenza è tutta reale, cioè corrente e tensione sono in fase, cioè condensatore e induttore compensano i propri effetti, cioè il circuito si comporta come un circuito resistivo puro e l'ampiezza della corrente che lo attraversa diviene massima;

3) per $\omega > \omega_0$ l'argomento della impedenza diviene positivo, cioè l'impedenza diviene di tipo RL e la tensione va in anticipo sulla corrente.

DEFINIZIONE,

FATTORE DI MERITO. Definiamo fattore di merito del circuito RLC serie il rapporto fra il valore efficace della tensione ai capi dell'induttore (o del condensatore) e quello della tensione di alimentazione, quando ci si trovi alla pulsazione di risonanza. Poniamo

$$Q_0 = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U}$$

DEDUZIONE,

FATTORE DI MERITO. Il fattore di merito vale

$$Q_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

DIMOSTRAZIONE. Per il condensatore abbiamo

$$\begin{aligned}\overline{U_C} &= \bar{I} j X_C = I e^{j\beta} j X_C = I e^{j\beta} e^{j\frac{\pi}{2}} X_C = \frac{U}{Z} e^{j\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)} X_C = \\ &= \frac{U}{Z} e^{j\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)} \left(-\frac{1}{\omega C}\right) = -\frac{U}{\omega C Z} e^{j\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{U}{\omega C Z} e^{j\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)}\end{aligned}$$

Per l'induttore abbiamo invece

$$\overline{U_L} = \bar{I} j X_L = I e^{j\beta} j X_L = I e^{j\beta} e^{j\frac{\pi}{2}} X_L = \frac{U}{Z} e^{j\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)} X_L = \frac{U}{Z} e^{j\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)} (\omega L) = \frac{U \omega L}{Z} e^{j\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)}$$

In condizioni di risonanza si ha

$$\begin{aligned}\overline{U_C}(\omega = \omega_0) &= U \frac{\sqrt{LC}}{CR} e^{j\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{U}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} e^{j\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)} \\ \overline{U_L}(\omega = \omega_0) &= U \frac{L}{R \sqrt{LC}} e^{j\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{U}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} e^{j\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)}\end{aligned}$$

Pertanto il fattore di merito si scrive, secondo la definizione, come segue

$$Q_0 = \frac{\frac{U}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}}{U} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

e la tesi è dimostrata.

OSSERVAZIONE,

SIGNIFICATO DEL FATTORE DI MERITO. Il fattore di merito è un indice importante del circuito RLC serie per le due osservazioni seguenti.

1) All'aumentare del fattore di merito le funzioni $Z(\omega)$, $\varphi(\omega)$ e $I(\omega)$ divengono più 'ripide', cioè le grandezze Z , φ e I variano più velocemente.

2) In condizioni di risonanza le tensioni delle reattanze si scrivono

$$\begin{aligned}\overline{U_C}(\omega = \omega_0) &= U Q_0 e^{j\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow U_C = U Q_0 \\ \overline{U_L}(\omega = \omega_0) &= U Q_0 e^{j\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow U_L = U Q_0\end{aligned}$$

ne segue che un fattore di merito maggiore di uno caratterizza circuiti in cui, in condizioni di risonanza, il valore efficace della tensione ai capi delle reattanze sia superiore di quello della tensione di alimentazione.

OSSERVAZIONE,

DIAGRAMMA FASORIALE. Disegniamo il diagramma fasoriale del circuito RLC serie. I fasori del circuito sono i seguenti:

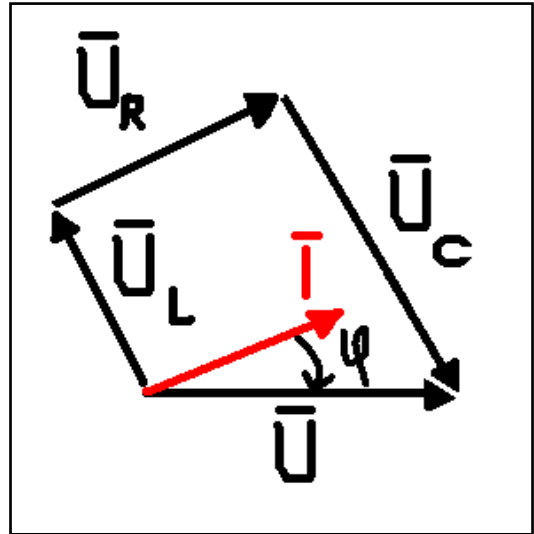
$$\bar{U} = Ue^{j\alpha}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}} = \frac{U}{Z} e^{j(\alpha-\varphi)}$$

$$\bar{U}_R = \frac{UR}{Z} e^{j(\alpha-\varphi)}$$

$$\bar{U}_L = \frac{U\omega L}{Z} e^{j\left(\alpha-\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\bar{U}_C = \frac{U}{\omega CZ} e^{j\left(\alpha-\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}$$

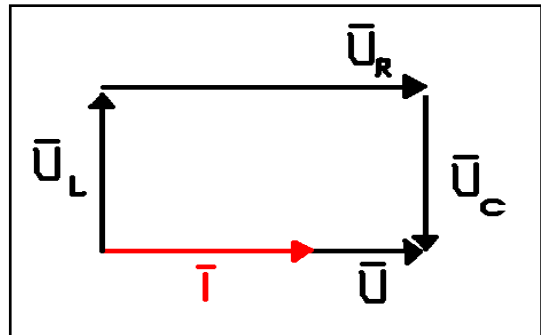


Il diagramma fasoriale nella figura presenta corrente in anticipo sulla tensione ed è dunque nel caso in cui il circuito abbia comportamento RL (caso $\omega > \omega_0$). Nel caso in cui ci si trovi in condizioni di risonanza si ha

$$\bar{U}_R = Ue^{j(\alpha)}$$

$$\bar{U}_L = \frac{U\omega_0 L}{R} e^{j\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\bar{U}_C = \frac{U}{\omega_0 CZ} e^{j\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$$



DEDUZIONE,

POTENZE. Valutiamo la potenza complessa entrante nei tre bipoli.

$$\dot{S}_L = \bar{U}_L \bar{I}^* = j\bar{I} X_L \bar{I}^* = jX_L I^2 = j\omega L I^2$$

$$\dot{S}_C = \bar{U}_C \bar{I}^* = j\bar{I} X_C \bar{I}^* = jX_C I^2 = -j \frac{I^2}{\omega C}$$

$$\dot{S}_R = \bar{U}_R \bar{I}^* = \bar{I} R \bar{I}^* = R I^2$$

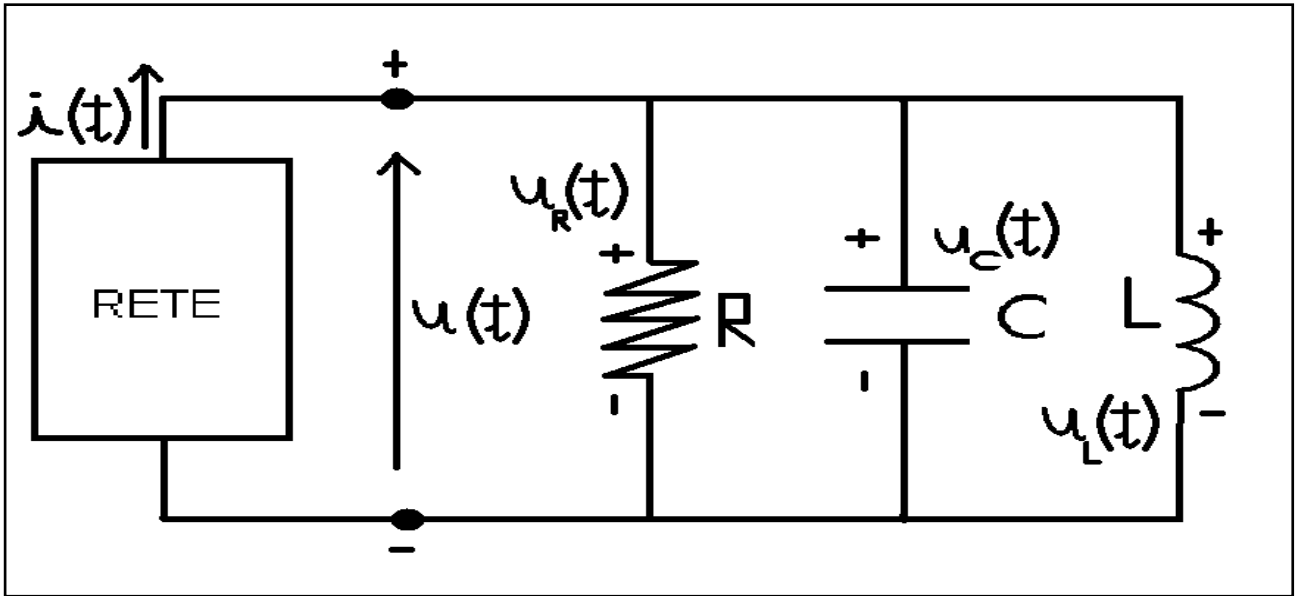
In condizioni di risonanza la potenza complessa entrante nell'induttore è l'opposto di quella entrante nel condensatore e la serie si comporta come una resistenza anche dal punto di vista della potenza nel senso che la potenza complessa complessivamente entrante è quella della sola resistenza.

II) PARALLELO DI UN RESISTORE, DI UN INDUTTORE E DI UN CONDENSATORE

In figura abbiamo una rete in cui si presenta un parallelo di una resistenza, un'induttanza e un condensatore. Tale parallelo è rappresentato dall'impedenza

$$\dot{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{-j\frac{1}{\omega C}}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{\omega C}{-j}} = \frac{1}{\frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)}$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{R} + j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)\right]}{\left[\frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)\right]\left[\frac{1}{R} + j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)\right]} = \frac{\left[\frac{1}{R} + j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)\right]}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$$

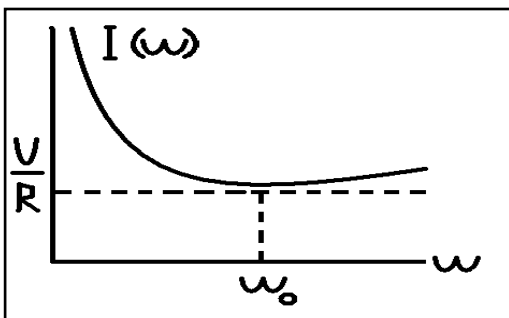
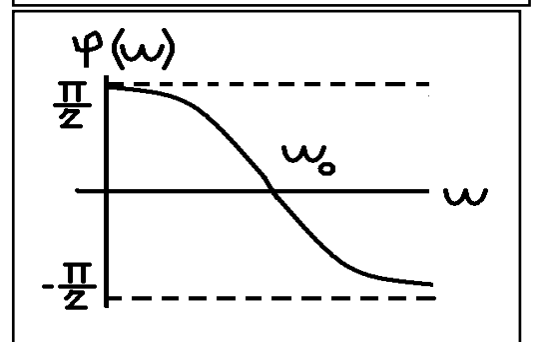
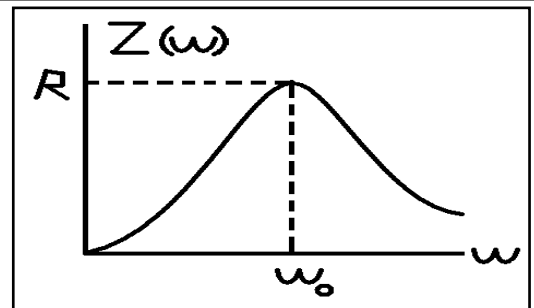


Il modulo dell'impedenza vale

$$Z = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}}$$

mentre il suo argomento vale

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{\frac{1}{R}}\right) = \arctan\left[\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)R\right]$$



Le due funzioni

$Z = Z(\omega)$ e $\varphi = \varphi(\omega)$ hanno l'andamento indicato in figura. Dunque si vede come in questo caso la frequenza di risonanza corrisponda ad un picco del modulo dell'impedenza sebbene sia ancora la frequenza alla quale il circuito diviene puramente resistivo.

La corrente che attraversa l'impedenza (l'impedenza equivalente, non le singole impedenze) ha valore efficace

dato da

$$I = \frac{U}{Z} = U \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$$

La funzione $I = I(\omega)$ ha la 'ndamento indicato in figura. Si rileva che alla frequenza di risonanza essa raggiunge il suo valore minimo.

OSSERVAZIONE,

COMPORTAMENTO IN FREQUENZA. Le dicussioni fatte ci permettono di descrivere qualitativamente anche qui il comportamento del circuito al variare della pulsazione, cioè di descriverne il 'comportamento in frequenza'. Si ha che

1) per $\omega < \omega_0$ l'argomento dell'impedenza è positivo e dunque il circuito si comporta come un circuito RL, con tensione in anticipo sulla corrente;

2) per $\omega = \omega_0$ l'argomento della impedenza si annulla, cioè l'impedenza è tutta reale, cioè corrente e tensione sono in fase, cioè condensatore e induttore compensano i propri effetti, cioè il circuito si comporta come un circuito resistivo puro e l'ampiezza della corrente che lo attraversa diviene minima;

3) per $\omega > \omega_0$ l'argomento della impedenza diviene negativo, cioè l'impedenza diviene di tipo RC e la corrente va in anticipo sulla tensione.

DEFINIZIONE,

FATTORE DI MERITO. Definiamo fattore di merito del circuito RLC parallelo il rapporto fra il valore efficace della corrente ai capi dell'induttore (o del condensatore) e quello della corrente di alimentazione, quando ci si trovi alla pulsazione di risonanza. Poniamo

$$Q_0 = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I}$$

DEDUZIONE,

FATTORE DI MERITO. Il fattore di merito vale

$$Q_0 = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

DIMOSTRAZIONE. Per il condensatore abbiamo

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{U}}{jX_C} = \frac{\bar{U}}{-j \frac{1}{\omega C}} = \frac{U \omega C e^{j\alpha}}{-j} = U \omega C j e^{j\alpha} = U \omega C e^{j\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Per l'induttore abbiamo invece

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{U}}{jX_L} = \frac{\bar{U}}{j\omega L} = -\frac{Uje^{j\alpha}}{\omega L} = \frac{Ue^{j\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}}{\omega L}$$

In condizioni di risonanza si ha

$$\bar{I}_C(\omega = \omega_0) = U\sqrt{\frac{C}{L}}e^{j\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\bar{I}_L(\omega = \omega_0) = U\sqrt{\frac{C}{L}}e^{j\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$$

e dunque il fattore di merito si scrive

$$Q_0 = \frac{I_C}{I} = \frac{I_L}{I} = \frac{U\sqrt{\frac{C}{L}}}{U/Z(\omega = \omega_0)} = \frac{U\sqrt{\frac{C}{L}}}{U/R} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

OSSERVAZIONE,

SIGNIFICATO DEL FATTORE DI MERITO. Il fattore di merito è un indice importante del circuito RLC parallelo per le due osservazioni seguenti.

1) All'aumentare del fattore di merito le funzioni $Z(\omega)$, $\varphi(\omega)$ e $I(\omega)$ divengono più 'ripide', cioè le grandezze Z , φ e I variano più velocemente.

2) In condizioni di risonanza le correnti delle reattanze si scrivono

$$\bar{I}_C(\omega = \omega_0) = U\sqrt{\frac{C}{L}}e^{j\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow I_C(\omega = \omega_0) = U\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{U}{R}Q_0 = IQ_0$$

$$\bar{I}_L(\omega = \omega_0) = U\sqrt{\frac{C}{L}}e^{j\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow I_L(\omega = \omega_0) = U\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{U}{R}Q_0 = IQ_0$$

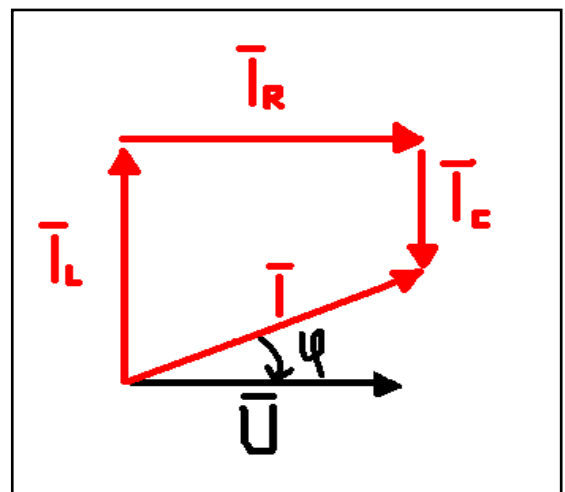
ne segue che un fattore di merito maggiore di uno caratterizza circuiti in cui, in condizioni di risonanza, il valore efficace della corrente attraverso le reattanze sia superiore di quello della corrente di alimentazione.

OSSERVAZIONE,

DIAGRAMMA FASORIALE. Disegniamo il diagramma fasoriale del circuito RLC parallelo. I fasori del circuito sono i seguenti:

$$\bar{U} = Ue^{j\alpha}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{\dot{Z}} = \frac{U}{Z}e^{j(\alpha-\varphi)}$$



$$\overline{I_R} = \frac{\overline{U}}{R} = \frac{U}{R} e^{j(\alpha)}$$

$$\overline{I_L} = \frac{\overline{U}}{jX_L} = -\frac{U}{\omega L} j e^{j(\alpha)} = \frac{U}{\omega L} e^{j\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\overline{I_C} = \frac{\overline{U}}{jX_C} = -\frac{U\omega C}{j} e^{j(\alpha)} = U\omega C j e^{j(\alpha)} = U\omega C e^{j\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Il diagramma fasoriale nella figura presenta corrente in anticipo sulla tensione ed è dunque nel caso in cui il circuito abbia comportamento RL (caso $\omega > \omega_0$).

Nel caso in cui ci si trovi in condizioni di risonanza si ha

$$\overline{I} = \overline{I_R} = \frac{\overline{U}}{\dot{Z}} = \frac{U}{R} e^{j(\alpha - \varphi)}$$

$$\overline{I_L} = U \sqrt{\frac{C}{L}} e^{j\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\overline{I_C} = U \sqrt{\frac{C}{L}} e^{j\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}$$

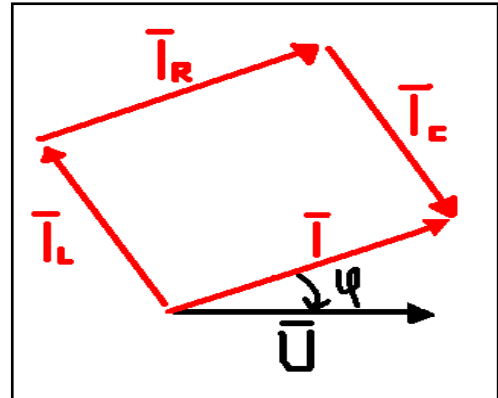
DEDUZIONE,

POTENZE. Valutiamo la potenza complessa entrante nei tre bipoli.

$$\dot{S}_L = \overline{U} \overline{I_L}^* = \overline{U} \left(\frac{\overline{U}}{jX_L} \right)^* = \frac{\overline{U} \overline{U}^*}{-jX_L} = j \frac{U^2}{\omega L}$$

$$\dot{S}_C = \overline{U} \overline{I_C}^* = \overline{U} \left(\frac{\overline{U}}{jX_C} \right)^* = \frac{\overline{U} \overline{U}^*}{-jX_C} = -j\omega C U^2$$

$$\dot{S}_R = \overline{U} \overline{I_R}^* = \frac{\overline{U} \overline{U}^*}{R} = \frac{U^2}{R}$$



In condizioni di risonanza la potenza complessa entrante nell'induttore è l'opposto di quella entrante nel condensatore e la serie si comporta come una resistenza anche dal punto di vista della potenza nel senso che la potenza complessa complessivamente entrante è quella della sola resistenza.

CAPITOLO X, RETI TRIFASI

I) SISTEMI POLIFASI

DEFINIZIONE,

SISTEMA POLIFASE SIMMETRICO. Un sistema polifase simmetrico a m fasi è un insieme di m grandezze sinusoidali isofrequenziali sfasate di $2\pi/m$ l'una dall'altra.

DEFINIZIONE,

SISTEMA POLIFASE SIMMETRICO DIRETTO. Un sistema polifase simmetrico a m fasi si dice diretto se ciascuna grandezza risulta in ritardo di $2\pi/m$ rispetto la precedente. Un esempio di sistema polifase simmetrico diretto a m fasi è il seguente.

$$\begin{cases} a_1(t) = \sqrt{2}A \sin(\omega t) \\ a_2(t) = \sqrt{2}A \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{m}\right) \\ a_3(t) = \sqrt{2}A \sin\left(\omega t - 2\frac{2\pi}{m}\right) \\ \dots \\ a_m(t) = \sqrt{2}A \sin\left(\omega t - (m-1)\frac{2\pi}{m}\right) \end{cases}$$

DEFINIZIONE,

SISTEMA POLIFASE SIMMETRICO INVERSO. Un sistema polifase simmetrico a m fasi si dice inverso se ciascuna grandezza risulta in anticipo di $2\pi/m$ rispetto la precedente. Un esempio di sistema polifase simmetrico inverso a m fasi è il seguente.

$$\begin{cases} a_1(t) = \sqrt{2}A \sin(\omega t) \\ a_2(t) = \sqrt{2}A \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{m}\right) \\ a_3(t) = \sqrt{2}A \sin\left(\omega t + 2\frac{2\pi}{m}\right) \\ \dots \\ a_m(t) = \sqrt{2}A \sin\left(\omega t + (m-1)\frac{2\pi}{m}\right) \end{cases}$$

DEDUZIONE,

SOMMA DI UN SISTEMA POLIFASE SIMMETRICO. La somma delle grandezze di un sistema polifase simmetrico (diretto o indiretto) è nulla.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo un caso particolare, un sistema trifase simmetrico diretto. Le grandezze di tale sistema sono

$$\begin{cases} a_1(t) = \sqrt{2}A \sin(\omega t) \\ a_2(t) = \sqrt{2}A \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ a_3(t) = \sqrt{2}A \sin\left(\omega t - 2\frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Sommandole membro a membro abbiamo

$$\begin{aligned} & \sqrt{2}A \left[\sin(\omega t) + \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\omega t - 2\frac{2\pi}{3}\right) \right] = \\ & = \sqrt{2}A \left[\sin(\omega t) + \sin(\omega t) \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos(\omega t) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin(\omega t) \cos\left(2\frac{2\pi}{3}\right) - \cos(\omega t) \sin\left(2\frac{2\pi}{3}\right) \right] = \\ & = \sqrt{2}A \left[\sin(\omega t) - \sin(\omega t) \frac{1}{2} - \cos(\omega t) \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin(\omega t) \frac{1}{2} + \cos(\omega t) \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \\ & = \sqrt{2}A \left[\sin(\omega t) - \sin(\omega t) \frac{1}{2} - \sin(\omega t) \frac{1}{2} \right] = 0 \end{aligned}$$

II) RETI TRIFASE

DEFINIZIONE,

RETE TRIFASE. Definiamo rete elettrica trifase una rete che presenti una delle due tipologie seguenti:

- 1)reti costituite da componenti quadripolari connessi per mezzo di collegamenti a quattro fili (reti trifasi con neutro);
- 2)reti costituite da componenti tripolariinterconnessi per mezzo di collegamenti a tre fili (reti trifasi senza neutro).

DEFINIZIONE,

TERNA DI TENSIONI DI FASE. In una rete trifase con neutro si definisce terna di tensioni di fase la terna di tensioni fra ciascuno dei tre morsetti 1,2,3 ed il morsetto di neutro (del generatore). I relativi fasori si indicano

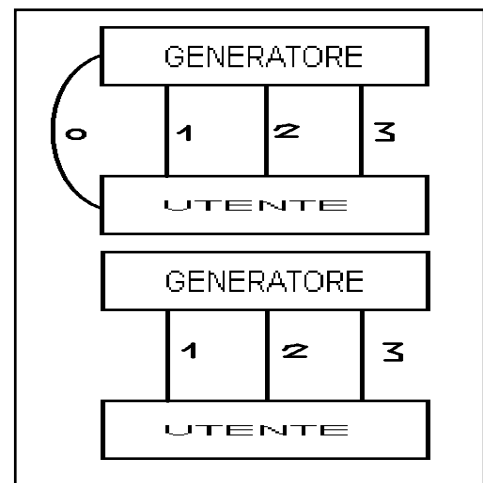
$$\overline{E}_1, \overline{E}_2, \overline{E}_3$$

DEFINIZIONE,

TERNA DI TENSIONI CONCATENATE. In una rete trifase, con o senza neutro, definiamo terna di tensioni concatenate le tensioni fra le tre coppie dei tre morsetti del generatore. I relativi fasori si indicano

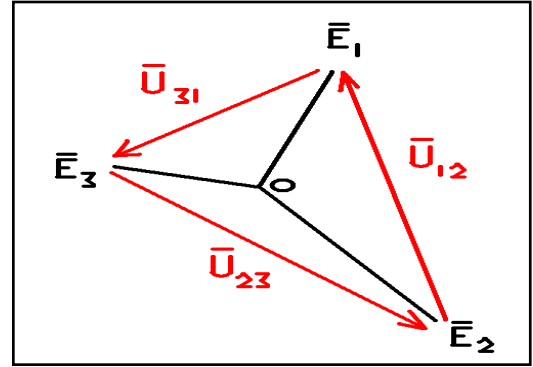
$$\overline{U}_{12}, \overline{U}_{13}, \overline{U}_{31}$$

e sussistono le relazioni (in base alla LKT)



$$\begin{cases} \bar{U}_{12} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2 \\ \bar{U}_{23} = \bar{E}_2 - \bar{E}_3 \\ \bar{U}_{31} = \bar{E}_3 - \bar{E}_1 \end{cases}$$

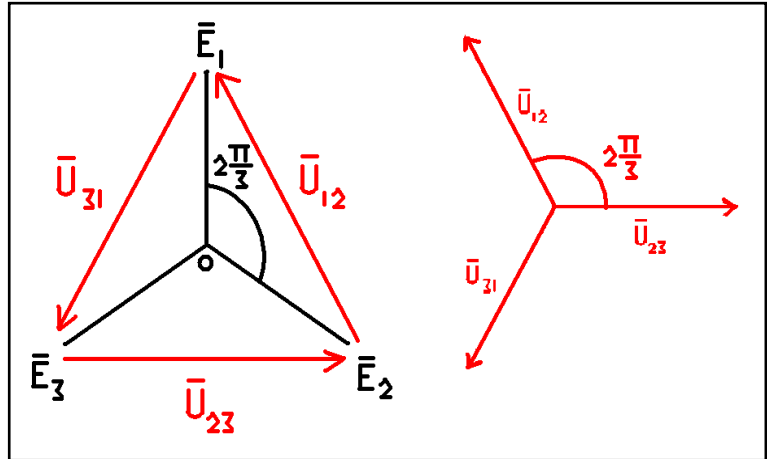
rese anche in modo grafico nella figura affianco, dove si è considerata una terna diretta (ma non simmetrica) di tensioni di fase.



DEDUZIONE,

RELAZIONE TRA TENSIONI DI FASE E TENSIONI CONCATENATE NEL CASO DI TERNA SIMMETRICA. Se le tensioni di fase costituiscono una terna simmetrica, diretta o inversa, allora le tensioni concatenate costituiscono una terna simmetrica, rispettivamente diretta o inversa, e la relazione tra i valori efficaci delle tensioni di fase e di quelle concatenate risulta $U = \sqrt{3}E$. La terna delle tensioni concatenate è sfasata di $\pi/6$, rispettivamente in anticipo o in ritardo, rispetto a quella delle tensioni di fase.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo graficamente la tesi ricorrendo al diagramma fasoriale delle tensioni. Se la terna delle tensioni di fase risulta diretta (cioè con la seconda tensione in ritardo rispetto alla prima e la terza in ritardo rispetto alla seconda) il diagramma è quello in figura. Considerando uno dei tre triangoli isosceli aventi i lati uguali costituiti da due tensioni di fase e la base costituita da una tensione concatenata si ha



$$E \sin \frac{2\pi}{6} = \frac{U}{2} \Leftrightarrow E \sin \frac{\pi}{3} = \frac{U}{2} \Leftrightarrow E \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{U}{2} \Leftrightarrow E = \frac{U}{\sqrt{3}}$$

Quanto poi alla natura della terna delle tensioni concatenate si vede dalla figura come la terna $\bar{U}_{12}, \bar{U}_{23}, \bar{U}_{31}$ risulti una terna simmetrica (cioè con moduli dei fasori uguali e con fasori sfasati di $2\pi/3$) nonché diretta (cioè col secondo fasore in ritardo sul primo ed il terzo in ritardo sul secondo).

Dimostriamo ora quanto detto anche calcolando direttamente la terna concatenata dalla terna delle tensioni di fase. Supponiamo di avere la terna di tensioni di fase simmetrica diretta

$$\begin{cases} e_1 = \sqrt{2}E \sin(\omega t) \\ e_2 = \sqrt{2}E \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ e_3 = \sqrt{2}E \sin\left(\omega t - 2\frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

allora, applicando le formule di Prostaferesi, si hanno le tensioni concatenate

$$\begin{cases} u_{12} = e_1 - e_2 = \sqrt{2}E \left[\sin(\omega t) - \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \right] = \sqrt{2}E \left[2 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] \\ u_{23} = e_2 - e_3 = \sqrt{2}E \left[\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\omega t - 2\frac{2\pi}{3}\right) \right] = \sqrt{2}E \left[2 \cos(\omega t - \pi) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] \\ u_{13} = e_3 - e_1 = \sqrt{2}E \left[\sin\left(\omega t - 2\frac{2\pi}{3}\right) - \sin(\omega t) \right] = \sqrt{2}E \left[2 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right] \end{cases}$$

Sviluppando ulteriormente i calcoli si ha

$$\begin{cases} u_{12} = e_1 - e_2 = \sqrt{2}\sqrt{3}E \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\sqrt{3}E \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}(\sqrt{3}E) \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \\ u_{23} = e_2 - e_3 = \sqrt{2}\sqrt{3}E \cos(\omega t - \pi) = \sqrt{2}\sqrt{3}E \cos\left(\omega t - \pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}(\sqrt{3}E) \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ u_{13} = e_1 - e_3 = -\sqrt{2}\sqrt{3}E \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{2}\sqrt{3}E \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \pi\right) = \sqrt{2}(\sqrt{3}E) \sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right) \end{cases}$$

la quale rappresenta la terna diretta delle tensioni concatenate che risulta in anticipo di $\pi/6$ sulla terna delle tensioni di fase.

III) GENERATORI TRIFASE

DEFINIZIONE,

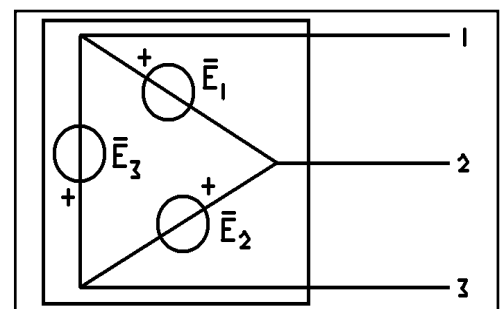
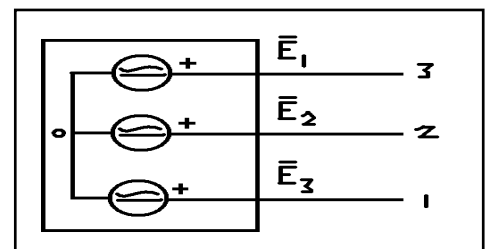
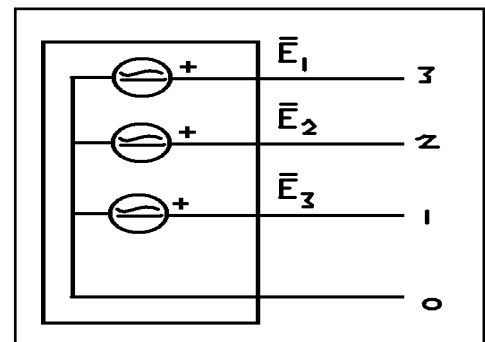
GENERATORE TRIFASE CON COLLEGAMENTO A STELLA CON NEUTRO. E' un generatore trifase quadripolare che presenta tra i tre morsetti di fase ed il morsetto neutro una terna simmetrica (diretta o inversa) di tensioni di fase. Presenta inoltre tra i tre morsetti di fase un terna di tensioni concatenate (rispettivamente diretta o inversa) avente valore efficace $U = \sqrt{3}E$.

DEFINIZIONE,

GENERATORE TRIFASE CON COLLEGAMENTO A STELLA SENZA NEUTRO. E' analogo al generatore precedentemente illustrato, tuttavia qui non è possibile accedere al neutro dall'esterno. In questo caso cioè non è possibile misurare le tensioni di fase ma solo quelle concatenate.

DEFINIZIONE,

GENERATORE TRIFASE CON COLLEGAMENTO A TRIANGOLO. E' un generatore nel quale i tre generatori ideali sono collegati a triangolo in modo che le tensioni di detti generatori coincidono con le tensioni concatenate. Si ha infatti



$$\bar{U}_{12} = \bar{E}_1$$

$$\bar{U}_{23} = \bar{E}_2$$

$$\bar{U}_{31} = \bar{E}_3$$

IV) CARICHI TRIFASE

DEFINIZIONE,

CARICO TRIFASE CON COLLEGAMENTO A STELLA CON NEUTRO. Si tratta di un quadrupolo costruito collegando tre impedenze nel modo indicato in figura.

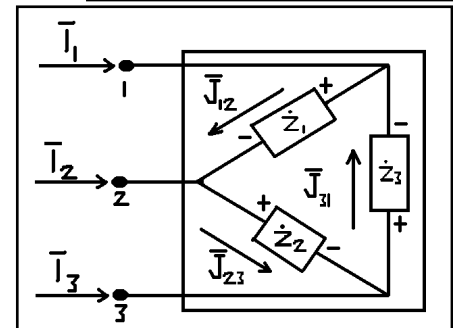
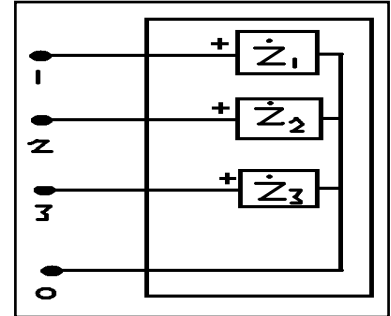
DEFINIZIONE,

CARICO TRIFASE CON COLLEGAMENTO A STELLA SENZA NEUTRO. Si tratta di un tripolo costruito togliendo il cavo

di neutro al quadrupolo visto sopra.

DEFINIZIONE,

CARICO TRIFASE CON COLLEGAMENTO A TRIANGOLO. Si tratta di un tripolo costruito collegando a triangolo tre impedenze. Si deve rilevare che, in questo caso, le correnti di linea non sono quelle che attraversano le impedenze. Queste ultime sono dette correnti delle fasi interne e vengono indicate con la lettera J piuttosto che con la lettera I.



DEDUZIONE,

RELAZIONE TRA LE CORRENTI DELLE FASI INTERNE E LE CORRENTI DI LINEA PER UN CARICO A TRIANGOLO. Consideriamo un carico a triangolo. Allora le correnti di linea sono legate a quelle delle fasi interne dalle relazioni seguenti.

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \bar{J}_{12} - \bar{J}_{31} \\ \bar{I}_2 = \bar{J}_{23} - \bar{J}_{12} \\ \bar{I}_3 = \bar{J}_{31} - \bar{J}_{23} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Le formule di trasformazione di cui sopra si trovano immediatamente applicando La LKC ai tre nodi del triangolo.

DEDUZIONE,

INDETERMINAZIONE DELLE CORRENTI DELLE FASI INTERNE. Le correnti delle fasi interne di una stella di impedenze non sono determinabili a partire dalle sole correnti di linea.

DIMOSTRAZIONE. Nella deduzione precedente si è provato come fra correnti di linea e correnti delle fasi interne sussista la relazione

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \bar{J}_{12} - \bar{J}_{31} \\ \bar{I}_2 = \bar{J}_{23} - \bar{J}_{12} \\ \bar{I}_3 = \bar{J}_{31} - \bar{J}_{23} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{23} \\ \bar{J}_{31} \end{pmatrix} \Leftrightarrow I = AJ$$

Ma la matrice A non è invertibile. Essa infatti ha rango 2. Pertanto risolvere il sistema lineare in funzione delle correnti delle fasi interne porta ad infinite soluzioni. A conti fatti si ha

$$\begin{cases} \bar{J}_{12} = \bar{I}_1 + \bar{K} \\ \bar{J}_{23} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{K} \\ \bar{J}_{31} = \bar{K} \end{cases}$$

$$\forall \bar{K} \in (\Re + j\Re)$$

DEDUZIONE,

RELAZIONE TRA LE CORRENTI DELLE FASI INTERNE E LE CORRENTI DI LINEA PER UN CARICO A TRIANGOLO NEL CASO DI TENSIONI CONCATENATE SIMMETRICHE E DI CARICO EQUILIBRATO. Se si verifica che

1) le tre impedenze del triangolo di impedenze sono uguali (carico equilibrato)

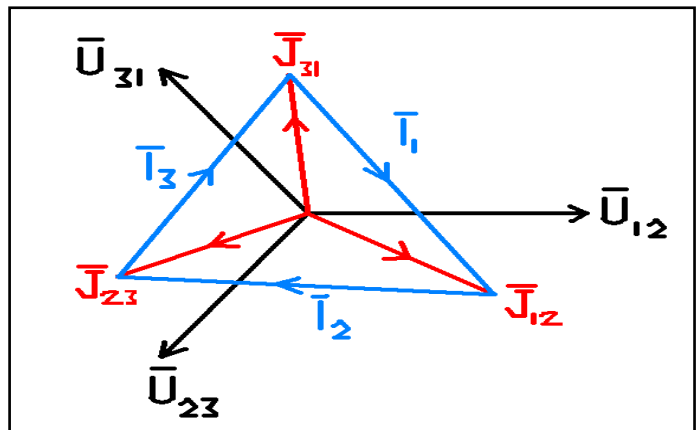
2) la terna delle tensioni concatenate è simmetrica (diretta o inversa)

allora le correnti di fase costituiscono una terna simmetrica (rispettivamente diretta o inversa) sfasata di $\pi/6$ (rispettivamente in ritardo o in anticipo) rispetto alla terna delle correnti delle fasi interne.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che la terna delle tensioni concatenate sia diretta. Cioè che si abbia

$$\begin{cases} u_{12} = \sqrt{2}U \sin(\omega t) \\ u_{23} = \sqrt{2}U \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ u_{31} = \sqrt{2}U \sin\left(\omega t - 2\frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

In base alla LTK le correnti delle fasi interne del carico sono



$$\begin{cases} \bar{J}_{12} = \frac{\bar{U}_{12}}{\dot{Z}} = \frac{U}{Ze^{j\varphi}} = \frac{Ue^{-j\varphi}}{Z} \\ \bar{J}_{23} = \frac{\bar{U}_{23}}{\dot{Z}} = \frac{Ue^{-j\frac{2\pi}{3}}}{Ze^{j\varphi}} = \frac{Ue^{-j\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)}}{Z} \\ \bar{J}_{31} = \frac{\bar{U}_{31}}{\dot{Z}_3} = \frac{Ue^{-j2\frac{2\pi}{3}}}{Ze^{j\varphi}} = \frac{Ue^{-j\left(2\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)}}{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} j_{12} = \sqrt{2} \frac{U}{Z} \sin(\omega t - \varphi) \\ j_{23} = \sqrt{2} \frac{U}{Z} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) \\ j_{31} = \sqrt{2} \frac{U}{Z} \sin\left(\omega t - 2\frac{2\pi}{3} - \varphi\right) \end{cases}$$

Dunque le correnti di linea sono

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \bar{J}_{12} - \bar{J}_{31} \\ \bar{I}_2 = \bar{J}_{23} - \bar{J}_{12} \\ \bar{I}_3 = \bar{J}_{31} - \bar{J}_{23} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i_1 = \sqrt{2} \frac{U}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \sin\left(\omega t - 2\frac{2\pi}{3} - \varphi\right) \right] \\ i_2 = \sqrt{2} \frac{U}{Z} \left[\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) - \sin(\omega t - \varphi) \right] \\ i_3 = \sqrt{2} \frac{U}{Z} \left[\sin\left(\omega t - 2\frac{2\pi}{3} - \varphi\right) - \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) \right] \end{cases}$$

Applicando una delle formule di Prostaferesi (il calcolo è analogo a quello fatto più sopra per ricavare le tensioni concatenate da quelle di linea) si ha

$$\begin{cases} i_1 = \sqrt{2} \frac{U}{Z} \left[2 \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ i_2 = \sqrt{2} \frac{U}{Z} \left[-2 \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] \\ i_3 = \sqrt{2} \frac{U}{Z} \left[-2 \cos(\omega t - \varphi - \pi) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] \end{cases}$$

Sviluppando ulteriormente i calcoli si ha

$$\begin{cases} i_1 = j_{12} - j_{31} = \sqrt{2} \left(\sqrt{3} \frac{U}{Z} \right) \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \left(\sqrt{3} \frac{U}{Z} \right) \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) \\ i_2 = j_{23} - j_{12} = \sqrt{2} \left(\sqrt{3} \frac{U}{Z} \right) \left[-\cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{3}\right) \right] = \sqrt{2} \left(\sqrt{3} \frac{U}{Z} \right) \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \pi\right) \\ i_3 = j_{31} - j_{23} = \sqrt{2} \left(\sqrt{3} \frac{U}{Z} \right) \left[-\cos(\omega t - \varphi - \pi) \right] = \sqrt{2} \left(\sqrt{3} \frac{U}{Z} \right) \sin\left(\omega t - \varphi - \pi + \frac{\pi}{2} + \pi\right) \end{cases}$$

Semplificando ulteriormente si ottiene infine la terna delle tensioni di fase

$$\begin{cases} i_1 = j_{12} - j_{31} = \sqrt{2} \left(\sqrt{3} \frac{U}{Z} \right) \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} (\sqrt{3} J) \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{6}\right) \\ i_2 = j_{23} - j_{12} = \sqrt{2} \left(\sqrt{3} \frac{U}{Z} \right) \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2} (\sqrt{3} J) \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{7\pi}{6}\right) \\ i_3 = j_{31} - j_{23} = \sqrt{2} \left(\sqrt{3} \frac{U}{Z} \right) \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} (\sqrt{3} J) \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Si vede come essa rappresenti una terna diretta in ritardo di $\pi/6$ sulla terna delle correnti delle fasi interne. Si vede inoltre come il valore efficace delle correnti di linea sia pari a $\sqrt{3}$ volte quello delle correnti delle fasi interne.

DEFINIZIONE,

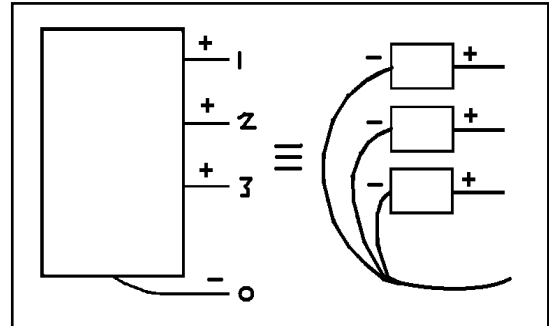
CARICHI EQUILIBRATI. Un carico, a stella o a triangolo, si dice equilibrato se le tre impedenze che lo costituiscono sono uguali fra loro.

V) POTENZA TRIFASE

DEDUZIONE,

POTENZA DI UN GENERATORE TRIFASE A QUATTRO FILI. Un generatore trifase a quattro fili si può considerare l'insieme di tre bipoli aventi un morsetto in comune (il morsetto di neutro). Pertanto la sua potenza istantanea è la somma delle potenze dei singoli bipoli e si scrive dunque

$$p(t) = e_1(t)i_1(t) + e_2(t)i_2(t) + e_3(t)i_3(t)$$



Supponiamo ora che le tensioni di linea siano simmetriche dirette e siano date in particolare da

$$\begin{cases} \bar{E}_1 = Ee^{j0} \\ \bar{E}_2 = Ee^{-j\frac{2\pi}{3}} \\ \bar{E}_3 = Ee^{-j2\frac{2\pi}{3}} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} e_1 = \sqrt{2}E \sin(\omega t) \\ e_2 = \sqrt{2}E \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ e_3 = \sqrt{2}E \sin\left(\omega t - 2\frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Se inoltre il generatore è collegato a carichi equilibrati le correnti di linea sono date da (vedi la rete trifase Yn-Yn)

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{Ee^{-j\varphi}}{Z} \\ \bar{I}_2 = \frac{Ee^{-j\left(\frac{2}{3}\pi+\varphi\right)}}{Z} \\ \bar{I}_3 = \frac{Ee^{-j\left(\frac{4}{3}\pi+\varphi\right)}}{Z} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} i_1 = \frac{E}{Z} \sin(\omega t - \varphi) \\ i_2 = \frac{E}{Z} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) \\ i_3 = \frac{E}{Z} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right) \end{cases}$$

Allora la potenza del generatore è data da

$$\begin{aligned} p(t) &= \\ &= \sqrt{2} \frac{E^2}{Z} \left[\sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi) + \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) + \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right) \right] \end{aligned}$$

A conti fatti si trova

$$p(t) = 3EI \cos(\varphi)$$

Quanto visto si formalizza nella seguente deduzione.

DEDUZIONE,

POTENZA ISTANTANEA TRIFASE DI UN SISTEMA SIMMETRICO ED EQUILIBRATO. Nel caso di un sistema trifase simmetrico ed equilibrato la potenza istantanea è costante. Più precisamente essa vale

$$p(t) = 3EI \cos(\varphi)$$

DEDUZIONE,

POTENZA ATTIVA DI UN SISTEMA TRIFASE EQUILIBRATO E SIMMETRICO. La potenza attiva di un sistema trifase equilibrato e simmetrico è pari alla sua potenza istantanea e vale

$$P = 3EI \cos(\varphi)$$

DIMOSTRAZIONE. Ricordando che la potenza attiva è la media, sul periodo T della rete, della potenza istantanea e osservato che, in questo caso, la potenza istantanea è costante, si ha la tesi.

DEDUZIONE,

POTENZA REATTIVA TRIFASE. La potenza reattiva trifase del nostro sistema equilibrato e simmetrico è la somma delle potenze reattive dei tre bipoli di cui si è detto più sopra. Dunque si ha

$$Q = 3EI \sin(\varphi)$$

DEDUZIONE,

POTENZA COMPLESSA TRIFASE E POTENZA APPARENTE. Calcolando la potenza complessa trifase come la somma delle potenze complesse dei tre bipoli di cui si è detto sopra si ha, sempre nel caso di sistema equilibrato e simmetrico, che

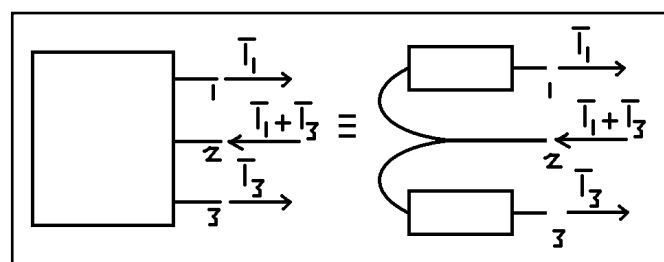
$$\dot{S} = P + jQ = 3EI [\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)]$$

La potenza apparente, modulo di quella complessa, sarà dunque data da

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

DEDUZIONE,

POTENZA DI UN GENERATORE TRIFASE A TRE FILI. Un generatore trifase a tre fili si può considerare un doppio bipolo in quanto al morsetto 2 entra la



corrente $i_1(t) + i_2(t)$, dovendo essere la somma delle correnti uscenti ai tre bipoli di somma nulla (LKC). Dunque la sua potenza istantanea uscente può scriversi

$$p(t) = u_{12}(t)i_1(t) + u_{32}(t)i_3(t)$$

dove si intende che il primo pedice delle tensioni concatenate indichi il polo positivo ed il secondo quello negativo (è una notazione anti-intuitiva a mio parere). Si osservi che, in caso di sistema equilibrato simmetrico, questa espressione dovrebbe fornire come risultato il valore $p(t) = 3EI \cos(\varphi)$, visto che in tale caso il sistema a tre fili è equivalente a quello a quattro fili.

Proviamo a fare la verifica di quanto detto. Data la terna simmetrica diretta di tensioni di fase

$$\begin{cases} e_1 = \sqrt{2}E \sin(\omega t) \\ e_2 = \sqrt{2}E \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ e_3 = \sqrt{2}E \sin\left(\omega t - 2\frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

la terna delle tensioni concatenate e quella delle correnti di linea è

$$\begin{cases} u_{12} = e_1 - e_2 = \sqrt{2}(\sqrt{3}E) \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \\ u_{23} = e_2 - e_3 = \sqrt{2}(\sqrt{3}E) \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ u_{13} = e_1 - e_3 = \sqrt{2}(\sqrt{3}E) \sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right) \end{cases} \begin{cases} i_1 = \sqrt{2} \frac{E}{Z} \sin(\omega t - \varphi) \\ i_2 = \sqrt{2} \frac{E}{Z} \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi - \varphi\right) \\ i_3 = \sqrt{2} \frac{E}{Z} \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi - \varphi\right) \end{cases}$$

dove si è supposto un carico equilibrato. Dunque la potenza istantanea risulta

$$\begin{aligned} p(t) &= \sqrt{2}(\sqrt{3}E) \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \sqrt{2} \frac{E}{Z} \sin(\omega t - \varphi) - \sqrt{2}(\sqrt{3}E) \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \sqrt{2} \frac{E}{Z} \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi - \varphi\right) = \\ &= 2\sqrt{3}EI \left[\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \sin(\omega t - \varphi) - \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi - \varphi\right) \right] = \end{aligned}$$

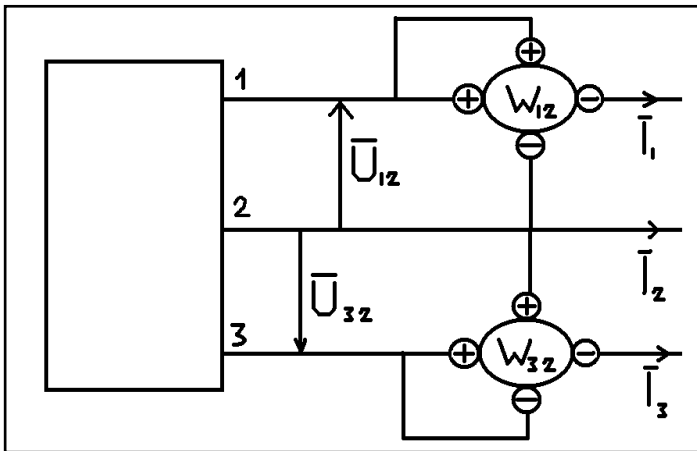
$$\begin{aligned}
&= 2\sqrt{3}EI \left\{ -\frac{1}{2} \left[\cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{6} - \varphi\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) \right] + \frac{1}{2} \left[\cos\left(2\omega t - \frac{11\pi}{6} - \varphi\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{6} + \varphi\right) \right] \right\} = \\
&= \sqrt{3}EI \left\{ -\cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{6} - \varphi\right) + \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\varphi) - \frac{1}{2} \sin(\varphi) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{6} - \varphi\right) + \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\varphi) + \frac{1}{2} \sin(\varphi) \right] \right\} = \\
&= 3EI \cos(\varphi)
\end{aligned}$$

come si voleva dimostrare.

VI) INSERZIONE ARON

DEFINIZIONE,

INSERZIONE ARON. Consideriamo il sistema di due wattmetri disegnati in figura. Si osserva che W_{12} è in grado di misurare il valore efficace della corrente $\bar{I}_1$ e della tensione concatenata $\bar{U}_{12}$ ed il reciproco sfasamento; il wattmetro W_{32} invece misura il valore efficace della corrente $\bar{I}_2$ e della tensione concatenata $\bar{U}_{32}$ ed il reciproco sfasamento.



Questo tipo di inserzione di due wattmetri in un sistema trifase è detto inserzione Aron.

DEDUZIONE,

L'INSERZIONE ARON PERMETTE IL CALCOLO DELLA POTENZA ATTIVA TRIFASE. Ricordiamo che la potenza istantanea trifase, nel caso generico di sistemi disimmetrici squilibrati, è data da

$$p(t) = e_1(t)i_1(t) + e_2(t)i_2(t) + e_3(t)i_3(t)$$

Ma essendo il sistema a tre fili si ha anche

$$i_2(t) + i_1(t) + i_3(t) = 0 \Rightarrow i_2(t) = -i_1(t) - i_3(t)$$

e dunque si potrà scrivere

$$p(t) = e_1(t)i_1(t) + e_2(t)[-i_1(t) - i_3(t)] + e_3(t)i_3(t) = [e_1(t) - e_2(t)]i_1(t) + [e_3(t) - e_2(t)]i_3(t)$$

Ma osservato che

$$u_{12}(t) = e_1(t) - e_2(t)$$

$$u_{32}(t) = e_3(t) - e_2(t)$$

si ha in definitiva

$$p(t) = e_1(t)i_1(t) + e_2(t)[-i_1(t) - i_3(t)] + e_3(t)i_3(t) = u_{12}(t)i_1(t) + u_{32}(t)i_3(t)$$

per cui la potenza attiva si scrive

$$P = U_{12}I_1 \cos(\varphi_1) + U_{32}I_3 \cos(\varphi_2)$$

dove si sono introdotti gli sfasamenti fra le correnti e le tensioni in gioco. Ma tale potenza è proprio quella che i due wattmetri della inserzione Aron sono in grado di fornirci.

DEDUZIONE,

SISTEMA SIMMETRICO EQUILIBRATO. Nel caso di un sistema simmetrico equilibrato l'inserzione Aron può fornirci anche la potenza reattiva, oltre a quella attiva.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo allora un sistema trifase simmetrico equilibrato. Allora le tensioni stellate, le tensioni concatenate e le correnti di linea costituiscono tutte delle terne simmetriche. Detto φ lo sfasamento fra la terna delle tensioni stellate e quella delle correnti di linea (che consideriamo in ritardo rispetto alla prima), le due misure fornite dai due wattmetri della inserzione Aron sono le seguenti

$$P_{12} = U_{12}I_1 \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) = UI \left(\cos\varphi \cos\frac{\pi}{6} - \sin\varphi \sin\frac{\pi}{6} \right) = UI \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\varphi - \frac{1}{2} \sin\varphi \right)$$

$$P_{32} = U_{32}I_3 \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = UI \left(\cos\varphi \cos\frac{\pi}{6} + \sin\varphi \sin\frac{\pi}{6} \right) = UI \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\varphi + \frac{1}{2} \sin\varphi \right)$$

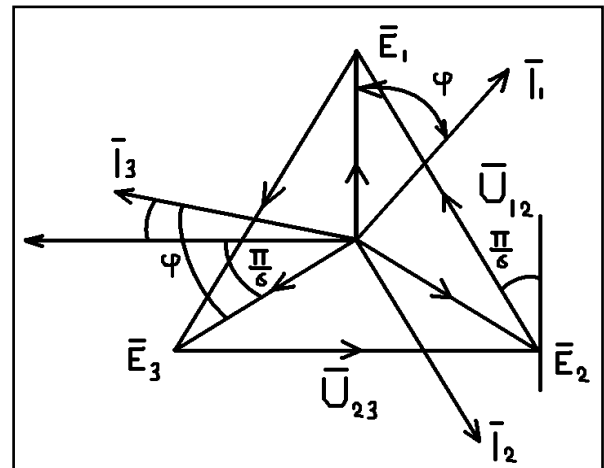
Sommando membro a membro le due letture si ha

$$\begin{aligned} P_{12} + P_{32} &= UI \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\varphi - \frac{1}{2} \sin\varphi \right) + \\ &+ UI \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\varphi + \frac{1}{2} \sin\varphi \right) = \\ &= UI\sqrt{3} \cos\varphi = 3EI \cos\varphi = P \end{aligned}$$

che la potenza attiva trifase di sistema trifase simmetrico equilibrato; sottraendo membro a membro le due letture invece si ha

$$\begin{aligned} -P_{12} + P_{32} &= -UI \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\varphi - \frac{1}{2} \sin\varphi \right) + UI \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\varphi + \frac{1}{2} \sin\varphi \right) = UI \sin\varphi = \sqrt{3}EI \sin\varphi = \\ &= \frac{3\sqrt{3}EI \sin\varphi}{3} = \frac{3EI \sin\varphi}{\sqrt{3}} = \frac{Q}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

che è la potenza reattiva diviso per la radice di tre.

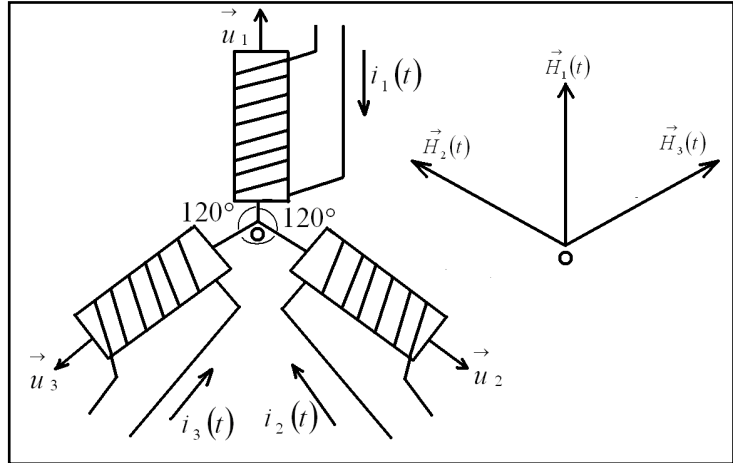


VII) CAMPO MAGNETICO ROTANTE

DEDUZIONE,

CAMPO MAGNETICO ROTANTE DI GALILEO FERRARIS.

Si considerino tre bobine disposte su di un piano, aventi i riferimenti indicati in figura, formanti un angolo di 120° a due a due. Allora si ha che se la terna delle tensioni che le alimenta è una terna sinusoidale simmetrica, con pulsazione ω , allora il campo magnetico generato dalle tre correnti, nel punto di intersezione degli assi degli avvolgimenti, ha modulo costante ma ruota nel piano delle tre bobine con velocità ω . Inoltre la rotazione risulta antioraria se la terna delle correnti è diretta, oraria se la terna delle correnti è inversa.



DIMOSTRAZIONE. Diciamo che la terna delle correnti in gioco sia simmetrica diretta ovvero che sia data da

$$\begin{cases} i_1(t) = I_M \cos(\omega t) \\ i_2(t) = I_M \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_3(t) = I_M \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

I tre campi magnetici prodotti da ciascuna delle tre correnti nel punto di intersezione degli assi degli avvolgimenti sono rispettivamente

$$\begin{cases} \vec{H}_1(t) = H_M \cos(\omega t) \vec{u}_1 \\ \vec{H}_2(t) = H_M \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \vec{u}_2 \\ \vec{H}_3(t) = H_M \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \vec{u}_3 \end{cases}$$

Introduciamo ora un sistema di riferimento Oxy ed i relativi versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$. Allora si ha

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{j} \\ \vec{u}_2 = \vec{i} \cos \frac{\pi}{6} - \vec{j} \sin \frac{\pi}{6} \\ \vec{u}_3 = -\vec{i} \cos \frac{\pi}{6} - \vec{j} \sin \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

e dunque si riscrivono i tre campi magnetici nel seguente modo

$$\begin{cases} \vec{H}_1(t) = H_M \cos(\omega t) \vec{j} \\ \vec{H}_2(t) = H_M \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \left(\vec{i} \cos \frac{\pi}{6} - \vec{j} \sin \frac{\pi}{6}\right) \\ \vec{H}_3(t) = H_M \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \left(-\vec{i} \cos \frac{\pi}{6} - \vec{j} \sin \frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

Concentriamoci ora sul primo campo magnetico. Esso può essere scomposto nella somma di due vettori ruotanti a velocità ω , uno in senso orario ed uno in senso antiorario, entrambi di modulo $H_M / 2$. Si può scrivere infatti

$$\begin{aligned} \vec{H}_1(t) &= H_M \cos(\omega t) \vec{j} = \frac{H_M}{2} \cos(\omega t) \vec{j} + \frac{H_M}{2} \cos(\omega t) \vec{j} = \\ &= \frac{H_M}{2} \cos(\omega t) \vec{j} + \frac{H_M}{2} \cos(\omega t) \vec{j} + \frac{H_M}{2} \sin(\omega t) \vec{i} - \frac{H_M}{2} \sin(\omega t) \vec{i} = \\ &= \left(\frac{H_M}{2} \sin(\omega t) \vec{i} + \frac{H_M}{2} \cos(\omega t) \vec{j} \right) + \left(\frac{H_M}{2} \sin(-\omega t) \vec{i} + \frac{H_M}{2} \cos(-\omega t) \vec{j} \right) \end{aligned}$$

Applicando le formule di Prostaferesi nella espressione del secondo campo magnetico si ottiene invece

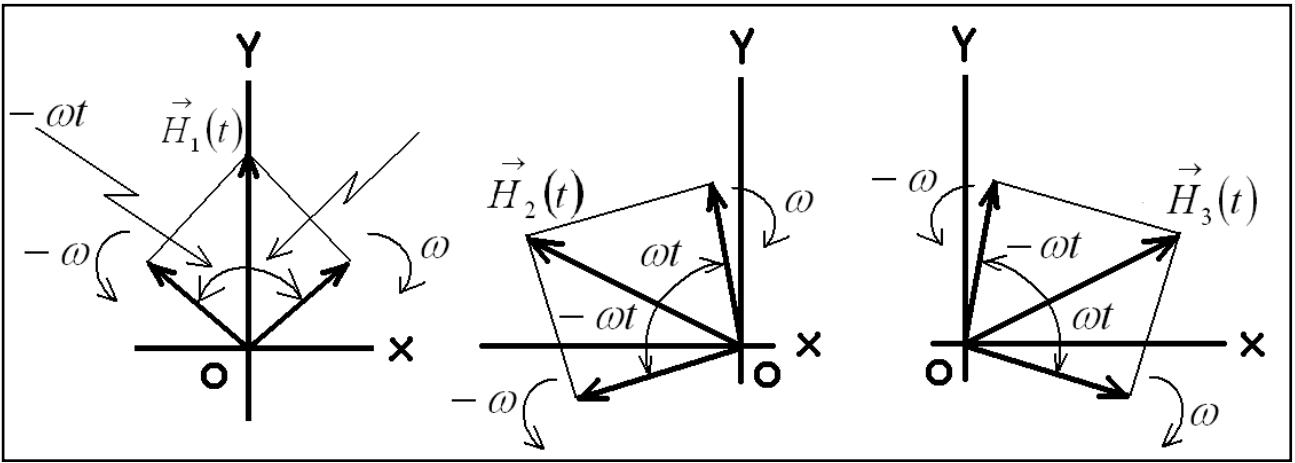
$$\begin{aligned} \vec{H}_2(t) &= H_M \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{6} \vec{i} - H_M \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \sin \frac{\pi}{6} \vec{j} = \\ &= \frac{H_M}{2} \left(\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right) \right) \vec{i} - \frac{H_M}{2} \left(\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right) \right) \vec{j} = \\ &= \frac{H_M}{2} \left(\cos\left(-\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \vec{i} + \sin\left(-\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \vec{j} \right) + \frac{H_M}{2} \left(\cos\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right) \vec{i} + \sin\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right) \vec{j} \right) \end{aligned}$$

Anche qui dunque si ha la scomposizione in due vettori che ruotano in versi opposti, a velocità ω , simmetricamente rispetto al campo magnetico somma.

Applicando le formule di Prostaferesi nella espressione del terzo campo magnetico si ottiene analogamente

$$\begin{aligned}
\vec{H}_3(t) &= H_M \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \left(-\vec{i} \cos \frac{\pi}{6} - \vec{j} \sin \frac{\pi}{6} \right) = \\
&= -H_M \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{6} \vec{i} - H_M \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \sin \frac{\pi}{6} \vec{j} = \\
&= \frac{H_M}{2} \left(-\cos\left(\omega t - \frac{7\pi}{6}\right) - \cos\left(\omega t - \frac{3\pi}{2}\right) \right) \vec{i} + \frac{H_M}{2} \left(\sin\left(-\omega t + \frac{7\pi}{6}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{3\pi}{2}\right) \right) \vec{j} = \\
&= \frac{H_M}{2} \left(-\cos\left(-\omega t + \frac{7\pi}{6}\right) \vec{i} + \sin\left(-\omega t + \frac{7\pi}{6}\right) \vec{j} \right) + \frac{H_M}{2} \left(-\cos\left(\omega t - \frac{3\pi}{2}\right) \vec{i} + \sin\left(\omega t - \frac{3\pi}{2}\right) \vec{j} \right)
\end{aligned}$$

Anche qui dunque si ha la scomposizione in due vettori che ruotano in versi opposti, a velocità ω , simmetricamente rispetto al campo magnetico somma.



Ora abbiamo due terne di vettori rotanti: una ruota in senso orario, l'altra in senso antiorario. Entrambe hanno velocità di rotazione ω .

La somma dei tre vettori rotanti che ruotano in senso antiorario è

$$\begin{aligned}
&\frac{H_M}{2} \left(\sin(-\omega t) \vec{i} + \cos(-\omega t) \vec{j} \right) + \frac{H_M}{2} \left(\cos\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right) \vec{i} + \sin\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right) \vec{j} \right) + \\
&+ \frac{H_M}{2} \left(-\cos\left(-\omega t + \frac{7\pi}{6}\right) \vec{i} + \sin\left(-\omega t + \frac{7\pi}{6}\right) \vec{j} \right) = \\
&= \frac{H_M}{2} \left(\sin(-\omega t) + \cos\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right) - \cos\left(-\omega t + \frac{7\pi}{6}\right) \right) \vec{i} + \\
&+ \frac{H_M}{2} \left(\cos(-\omega t) + \sin\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(-\omega t + \frac{7\pi}{6}\right) \right) \vec{j} = \\
&= \frac{H_M}{2} \left(-\sin(\omega t) + \cos\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right) - \cos\left(-\omega t + \frac{7\pi}{6}\right) \right) \vec{i} + \\
&+ \frac{H_M}{2} \left(\cos(\omega t) + \sin\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(-\omega t + \frac{7\pi}{6}\right) \right) \vec{j} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{H_M}{2} \left(-\sin(\omega t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t) + \frac{1}{2} \sin(\omega t) - \left(-\cos(\omega t) \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin(-\omega t) \left(-\frac{1}{2} \right) \right) \right) \vec{i} + \\
&+ \frac{H_M}{2} \left(\cos(\omega t) + \left(\sin(\omega t) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \cos(\omega t) \frac{1}{2} \right) + \left(\sin(-\omega t) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \cos(-\omega t) \left(-\frac{1}{2} \right) \right) \right) \vec{j} = \\
&= \frac{H_M}{2} \left(-\sin(\omega t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t) + \frac{1}{2} \sin(\omega t) + \cos(\omega t) \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin(\omega t) \frac{1}{2} \right) \vec{i} + \\
&+ \frac{H_M}{2} \left(\cos(\omega t) - \sin(\omega t) \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos(\omega t) \frac{1}{2} + \sin(\omega t) \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos(\omega t) \frac{1}{2} \right) \vec{j} = \\
&= \frac{H_M}{2} (0) \vec{i} + \frac{H_M}{2} (0) \vec{j} = 0
\end{aligned}$$

La somma invece dei tre vettori ruotanti che ruotano in senso orario è invece

$$\begin{aligned}
&\frac{H_M}{2} \left(\sin(\omega t) \vec{i} + \cos(\omega t) \vec{j} \right) + \frac{H_M}{2} \left(\cos\left(-\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \vec{i} + \sin\left(-\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \vec{j} \right) + \\
&+ \frac{H_M}{2} \left(-\cos\left(\omega t - \frac{3\pi}{2}\right) \vec{i} + \sin\left(\omega t - \frac{3\pi}{2}\right) \vec{j} \right) = \\
&= \frac{H_M}{2} \left(\sin(\omega t) + \cos\left(-\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\omega t - \frac{3\pi}{2}\right) \right) \vec{i} + \\
&+ \frac{H_M}{2} \left(\cos(\omega t) + \sin\left(-\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{3\pi}{2}\right) \right) \vec{j} = \\
&= \frac{H_M}{2} (\sin(\omega t) + \sin(\omega t) + \sin(\omega t)) \vec{i} + \\
&+ \frac{H_M}{2} (\cos(\omega t) + \cos(\omega t) + \cos(\omega t)) \vec{j} = \frac{3H_M}{2} \sin(\omega t) \vec{i} + \frac{3H_M}{2} \cos(\omega t) \vec{j}
\end{aligned}$$

In definitiva la somma dei tre campi magnetici generati dai tre avvolgimenti coincide con quest'ultimo vettore trovato, ovvero con un campo magnetico di modulo $\frac{3H_M}{2}$ che ruota in senso orario con velocità ω . Ciò dimostra la tesi.

OSSERVAZIONE,

CAMPO MAGNETICO ROTANTE E MACCHINE ELETTRICHE. Nelle macchine elettriche non si ha il campo magnetico rotante di Galileo Ferraris, visto sopra, ma un altro tipo di campo magnetico rotante. Con il precedente campo magnetico tuttavia condivide il fatto che è generato da tre avvolgimenti alimentati da una terna simmetrica di correnti sinusoidali. Ma la disposizione degli avvolgimenti è più complessa e la forma del campo magnetico è anch'essa più complessa.

Per la disposizione degli avvolgimenti e la forma del campo magnetico rotante in oggetto si può andare ai capitoli sulle macchine elettriche rotanti.

Si aggiunge che la velocità angolare di rotazione del campo magnetico rotante che si sviluppa nelle macchine elettriche rotanti non è pari alla pulsazione delle correnti di alimentazione degli avvolgimenti, come nel caso del campo di Galileo Ferraris, ma è pari a ω/p , essendo p il numero di coppie polari della macchina.

CAPITOLO XI, RETI TRIFASI NOTEVOLI

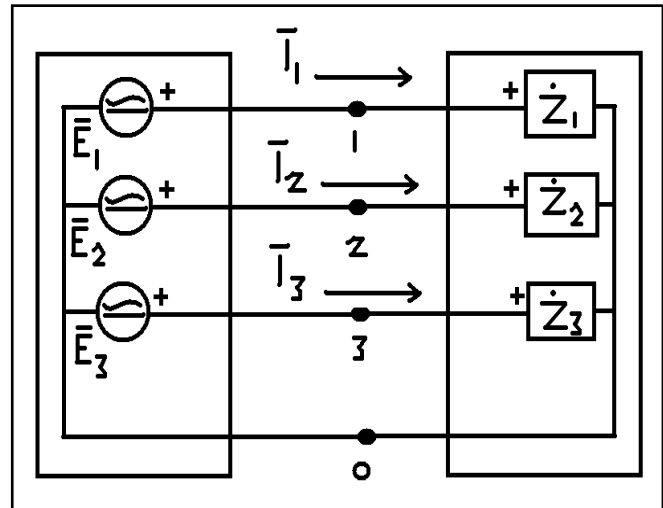
1) COLLEGAMENTO A STELLA CON NEUTRO DI GENERATORE E CARICO

La terna delle tensioni di fase è

$$\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$$

mentre quella delle tensioni concatenate è

$$\begin{cases} \bar{U}_{12} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2 \\ \bar{U}_{23} = \bar{E}_2 - \bar{E}_3 \\ \bar{U}_{31} = \bar{E}_3 - \bar{E}_1 \end{cases}$$



DEDUZIONE,

LE CORRENTI DI LINEA. Le correnti di linea sono date da

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1}, \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2}, \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3}$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la maglia che comprende il primo generatore, la prima impedenza ed il filo di neutro. In base alla LKT abbiamo

$$\bar{E}_1 - \dot{Z}_1 \bar{I}_1 = 0 \Rightarrow \bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1}$$

Analogamente si ricavano le altre tre correnti di linea.

DEDUZIONE,

GENERATORE SIMMETRICO E CARICO EQUILIBRATO. Se risulta che

1) la terna delle tensioni di fase del generatore è simmetrica (diretta o inversa),

2) il carico è equilibrato,

allora le correnti di linea costituiscono una terna simmetrica (rispettivamente diretta o inversa).

DIMOSTRAZIONE. La terna delle correnti si scrive

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}} = \frac{E e^{j0}}{Z e^{j\varphi}} = \frac{E e^{-j\varphi}}{Z}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}} = \frac{E e^{-j\frac{2}{3}\pi}}{Z e^{j\varphi}} = \frac{E e^{-j\left(\frac{2}{3}\pi + \varphi\right)}}{Z}$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}} = \frac{Ee^{-j2\frac{2}{3}\pi}}{Ze^{j\varphi}} = \frac{Ee^{-j\left(\frac{4}{3}\pi+\varphi\right)}}{Z}$$

Si ottiene dunque una terna diretta sfasata di un angolo φ rispetto alla terna delle tensioni di fase.

DEDUZIONE,

DIFFERENZA DI POTENZIALE FRA I CENTRI STELLA. La differenza di potenziale fra i centri stella è nulla.

DIMOSTRAZIONE. I due centri stella sono collegati dal filo di neutro che assumiamo essere un conduttore ad impedenza nulla. Attraverso di esso dunque non si ha caduta di tensione.

II) COLLEGAMENTO DI STELLA DI GENERATORI E DI STELLA DI IMPEDENZE SENZA NEUTRO

In questo caso la terna delle tensioni di fase non è misurabile dall'esterno poiché non è direttamente accessibile il centro stella. Sono misurabili solo le tensioni concatenate.

DEDUZIONE,

LE CORRENTI DI LINEA. Le correnti di linea sono date da

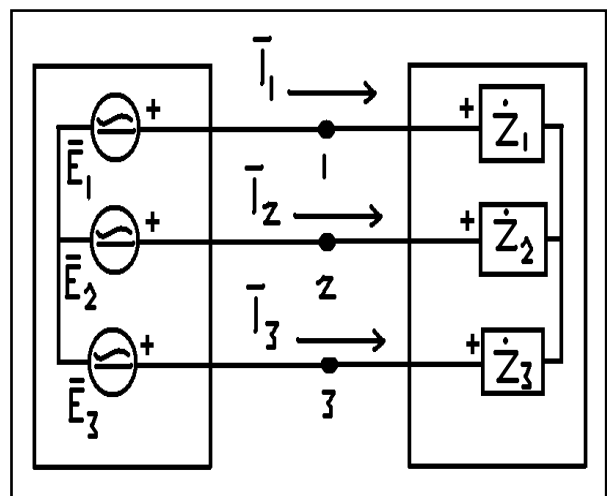
$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1 - \frac{\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3}}}{\dot{Z}_1}, \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2 - \frac{\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3}}}{\dot{Z}_2}, \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3 - \frac{\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3}}}{\dot{Z}_3}$$

DIMOSTRAZIONE. Applicando una delle formule di Millmann possiamo affermare che

$$\bar{U}_{0/0} = \frac{\sum_{h=1}^n \frac{\bar{E}_h}{\dot{Z}_h}}{\sum_{h=1}^n \frac{1}{\dot{Z}_h}} = \frac{\frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} + \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2} + \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3}}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3}}$$

Considerando poi che, in base alla LKT, si ha

$$\bar{E}_1 - \dot{Z}_1 \bar{I}_1 = \bar{U}_{0/0} \Rightarrow \bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1 - \frac{\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3}}}{\dot{Z}_1}$$



Espressioni analoghe valgono per le altre due correnti di linea.

DEDUZIONE,

GENERATORE SIMMETRICO E CARICO EQUILIBRATO. Se risulta che

1) la terna delle tensioni di fase del generatore è simmetrica (diretta o inversa),

2) il carico è equilibrato,

allora le correnti di linea costituiscono una terna simmetrica (rispettivamente diretta o inversa).

DIMOSTRAZIONE. L'ipotesi di carico equilibrato ci permette di scrivere per la prima corrente di linea

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1 - \frac{\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3}{3}}{\dot{Z}} = \frac{\bar{E}_1 - \frac{\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3}{3} \frac{\dot{Z}}{\dot{Z}}}{\dot{Z}} = \frac{\bar{E}_1 - \frac{\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3}{3}}{\dot{Z}}$$

L'ipotesi di simmetria della terna di tensioni di fase del generatore ci permette di scrivere per la prima corrente di linea

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1 - \frac{\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3}{3}}{\dot{Z}} = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}}$$

Dunque si ottiene in definitiva che le correnti di linea sono

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}} = \frac{Ee^{j0}}{Ze^{j\varphi}} = \frac{Ee^{-j\varphi}}{Z} \\ \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}} = \frac{Ee^{-j\frac{2}{3}\pi}}{Ze^{j\varphi}} = \frac{Ee^{-j(\frac{2}{3}\pi+\varphi)}}{Z} \\ \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}} = \frac{Ee^{-j\frac{4}{3}\pi}}{Ze^{j\varphi}} = \frac{Ee^{-j(\frac{4}{3}\pi+\varphi)}}{Z} \end{cases}$$

DEDUZIONE,

DIFFERENZA DI POTENZIALE FRA I CENTRI STELLA. In caso di carico equilibrato, cioè di impedenze uguali fra loro, e di terna di tensioni di fase simmetrica la differenza di potenziale fra i due centri stella, quello dei generatori e quello del carico, è nulla.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo dimostrato questa proposizione nella precedente deduzione. Infatti, in base ad una delle formule di Millmann, la differenza di potenziale fra i due centri stella vale

$$\bar{U}_{0'0} = \frac{\sum_{h=1}^n \frac{\bar{E}_h}{\dot{Z}_h}}{\sum_{h=1}^n \frac{1}{\dot{Z}_h}} = \frac{\frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} + \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2} + \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3}}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3}}$$

Tale espressione, nel caso di carico equilibrato, si riduce a

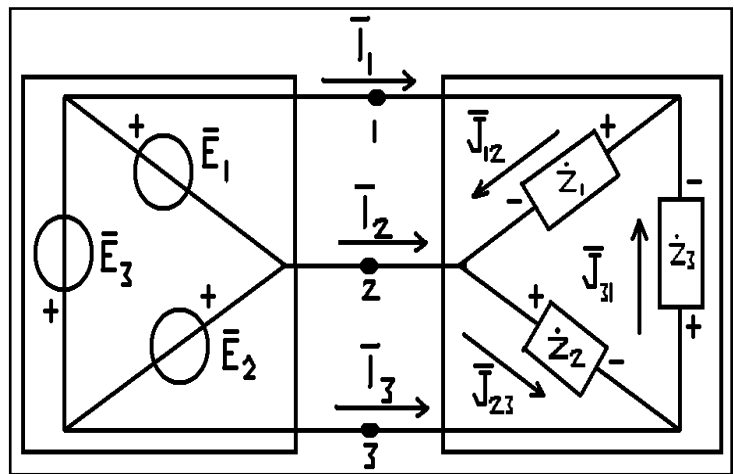
$$\bar{U}_{00} = \frac{\sum_{h=1}^n \frac{\bar{E}_h}{\dot{Z}}}{\sum_{h=1}^n \frac{1}{\dot{Z}}} = \frac{\frac{1}{\dot{Z}} (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3)}{\frac{3}{\dot{Z}}} = \frac{\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3}{3}$$

E tale espressione, nella ipotesi di terna delle tensioni di linea simmetrica, è nulla.

III) COLLEGAMENTO DI TRIANGOLO DI GENERATORI E DI TRIANGOLO DI IMPEDENZE

In questo caso sono assenti i centri stella sia del generatore tripolare che della impedenza tripolare. Questo comporta, fra l'altro, che non esistano le tensioni di fase. Le tensioni concatenate sono invece date dalle seguenti relazioni.

$$\begin{cases} \bar{U}_{12} = \bar{E}_1 \\ \bar{U}_{23} = \bar{E}_2 \\ \bar{U}_{31} = \bar{E}_3 \end{cases}$$



DEDUZIONE,

LE CORRENTI DELLE FASI INTERNE. Applicando la LKT si trova immediatamente che le correnti delle fasi interne sono date dalle espressioni

$$\bar{J}_{12} = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1}, \bar{J}_{23} = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2}, \bar{J}_{31} = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3}$$

DEDUZIONE,

LE CORRENTI DI LINEA. Applicando la LKC ai tre nodi del carico e tenendo presente il risultato della precedente deduzione si trovano per le tre correnti di linea le espressioni

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \bar{J}_{12} - \bar{J}_{31} \\ \bar{I}_2 = \bar{J}_{23} - \bar{J}_{12} \\ \bar{I}_3 = \bar{J}_{31} - \bar{J}_{23} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} - \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3} \\ \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2} - \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} \\ \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3} - \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2} \end{cases}$$

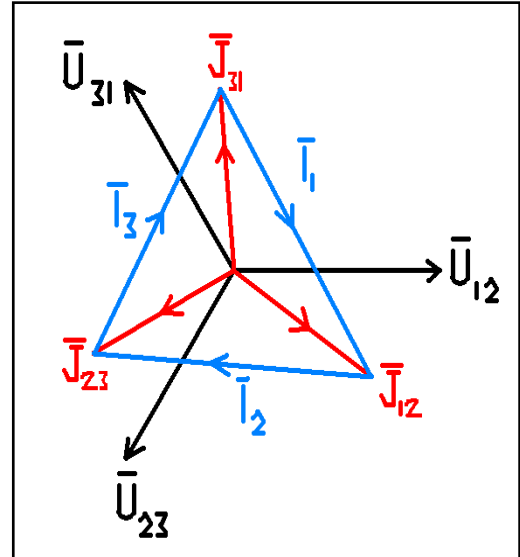
DEDUZIONE,

GENERATORE SIMMETRICO E CARICO EQUILIBRATO. CORRENTI DELLE FASI INTERNE. Se risulta che

1) la terna delle tensioni concatenate del generatore è simmetrica (diretta o inversa),
 2) il carico è equilibrato,
 allora le correnti delle fasi interne costituiscono una terna simmetrica (rispettivamente diretta o inversa).

DIMOSTRAZIONE. Riscriviamo le correnti delle fasi interne assumendo che la terna concatenata costituisca una terna simmetrica diretta. Si ha

$$\begin{cases} \bar{J}_{12} = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}} = \frac{E}{Ze^{j\varphi}} = \frac{Ee^{-j\varphi}}{Z} \\ \bar{J}_{23} = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}} = \frac{Ee^{-j\frac{2\pi}{3}}}{Ze^{j\varphi}} = \frac{Ee^{-j\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)}}{Z} \\ \bar{J}_{31} = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3} = \frac{Ee^{-j2\frac{2\pi}{3}}}{Ze^{j\varphi}} = \frac{Ee^{-j\left(2\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)}}{Z} \end{cases}$$



Si trova dunque che la terna delle correnti delle fasi interne è una terna simmetrica diretta sfasata in ritardo di un angolo φ rispetto alla terna delle tensioni concatenate.

DEDUZIONE,

GENERATORE SIMMETRICO E CARICO EQUILIBRATO. CORRENTI DI LINEA. Se risulta che

1) la terna delle tensioni concatenate del generatore è simmetrica (diretta o inversa),
 2) il carico è equilibrato,
 allora le correnti di linea costituiscono una terna simmetrica (rispettivamente diretta o inversa) sfasata di $\pi/6$ rispetto la terna delle correnti delle fasi interne (rispettivamente in ritardo o in anticipo).

DIMOSTRAZIONE. Nelle ipotesi fatte le correnti di linea sono date da

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \bar{J}_{12} - \bar{J}_{31} \\ \bar{I}_2 = \bar{J}_{23} - \bar{J}_{12} \\ \bar{I}_3 = \bar{J}_{31} - \bar{J}_{23} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = j_{12} - j_{31} = \sqrt{2}(\sqrt{3}J)\sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{6}\right) \\ i_2 = j_{23} - j_{12} = \sqrt{2}(\sqrt{3}J)\sin\left(\omega t - \varphi + \frac{7\pi}{6}\right) \\ i_3 = j_{31} - j_{23} = \sqrt{2}(\sqrt{3}J)\sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

I calcoli necessari a questa dimostrazione si trovano nella parte generale sulle reti trifase, in particolare nella sezione sull'esame del carico triangolare.

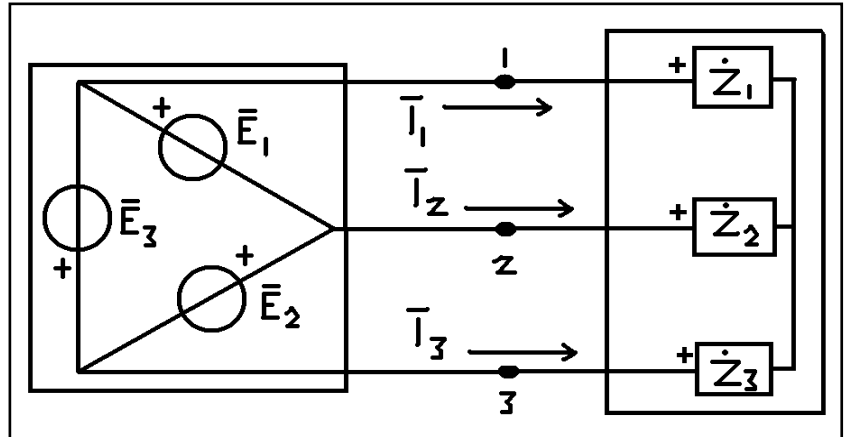
Si vede dalle espressioni come le correnti di linea siano una terna simmetrica diretta sfasata in ritardo di $\pi/6$ rispetto alla terna delle correnti delle fasi interne. Il legame fra i valori efficaci delle due terne di correnti è $I = \sqrt{3}J$.

IV) COLLEGAMENTO A TRIANGOLO DEL GENERATORE E A STELLA DELL'UTILIZZATORE

Le tensioni concatenate sono date, come nel caso precedente da

$$\begin{cases} \bar{U}_{12} = \bar{E}_1 \\ \bar{U}_{23} = \bar{E}_2 \\ \bar{U}_{31} = \bar{E}_3 \end{cases}$$

Coincidono cioè con la terna delle f.e.m. dei generatori.

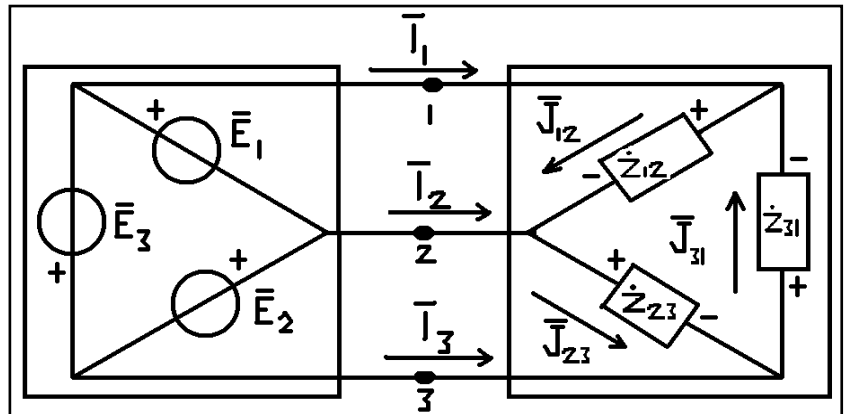


DEDUZIONE,

LE CORRENTI DI LINEA.

Nel caso di terna generica di tensioni concatenate e di carico generico le correnti di linea sono

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{\dot{Z}_3 \bar{E}_1 - \dot{Z}_2 \bar{E}_3}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3} \\ \bar{I}_2 = \frac{\dot{Z}_1 \bar{E}_2 - \dot{Z}_3 \bar{E}_1}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3} \\ \bar{I}_3 = \frac{\dot{Z}_2 \bar{E}_3 - \dot{Z}_1 \bar{E}_2}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3} \end{cases}$$



DIMOSTRAZIONE.

Procediamo trasformando il carico in un carico a triangolo. Ricordiamo che

$$\begin{cases} \dot{Z}_{12} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_3} \\ \dot{Z}_{13} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_2} \\ \dot{Z}_{23} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_1} \end{cases}$$

Osserviamo inoltre che nella rete Δ - Δ così ottenuta abbiamo

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \bar{J}_{12} - \bar{J}_{31} \\ \bar{I}_2 = \bar{J}_{23} - \bar{J}_{12} \\ \bar{I}_3 = \bar{J}_{31} - \bar{J}_{23} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_{12}} - \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_{31}} \\ \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_{23}} - \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_{12}} \\ \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_{31}} - \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_{23}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{\dot{Z}_3 \bar{E}_1 - \dot{Z}_2 \bar{E}_3}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3} \\ \bar{I}_2 = \frac{\dot{Z}_1 \bar{E}_2 - \dot{Z}_3 \bar{E}_1}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3} \\ \bar{I}_3 = \frac{\dot{Z}_2 \bar{E}_3 - \dot{Z}_1 \bar{E}_2}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3} \end{cases}$$

DEDUZIONE,

GENERATORE SIMMETRICO E CARICO EQUILIBRATO.

Se risulta che

1) la terna delle tensioni di fase del generatore è simmetrica (diretta o inversa),

2) il carico è equilibrato,

allora le correnti di linea costituiscono la terna simmetrica (rispettivamente diretta o inversa) di valore efficace $\frac{E}{\sqrt{3}Z}$ sfasata di $\frac{\pi}{6}$ rispetto alla terna delle tensioni concatenate (rispettivamente in ritardo o in anticipo).

DIMOSTRAZIONE. Nel caso di carico equilibrato si ha

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_3}{3 \dot{Z}}, \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2 - \bar{E}_1}{3 \dot{Z}}, \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3 - \bar{E}_2}{3 \dot{Z}}$$

Supponiamo ora che la terna delle tensioni concatenate sia la terna simmetrica diretta seguente

$$\begin{cases} u_{12} = e_1 = \sqrt{2}U \sin(\omega t) \\ u_{23} = e_2 = \sqrt{2}U \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ u_{31} = e_3 = \sqrt{2}U \sin\left(\omega t - 2\frac{2\pi}{3}\right) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \bar{U}_{12} = \bar{E}_1 = Ue^{j0} \\ \bar{U}_{23} = \bar{E}_2 = Ue^{-j\frac{2\pi}{3}} \\ \bar{U}_{31} = \bar{E}_3 = Ue^{-j2\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$$

Allora le correnti di linea si scrivono

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_3}{3 \dot{Z}} = \frac{E}{3Ze^{j\varphi}} \left(e^{j0} - e^{-j2\frac{2\pi}{3}} \right) \\ \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2 - \bar{E}_1}{3 \dot{Z}} = \frac{E}{3Ze^{j\varphi}} \left(e^{-j\frac{2\pi}{3}} - e^{j0} \right) \\ \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3 - \bar{E}_2}{3 \dot{Z}} = \frac{E}{3Ze^{j\varphi}} \left(e^{-j2\frac{2\pi}{3}} - e^{-j\frac{2\pi}{3}} \right) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} i_1 = \sqrt{2} \frac{E}{3Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \sin\left(\omega t - 2\frac{2\pi}{3} - \varphi\right) \right] \\ i_2 = \sqrt{2} \frac{E}{3Z} \left[\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) - \sin(\omega t - \varphi) \right] \\ i_3 = \sqrt{2} \frac{E}{3Z} \left[\sin\left(\omega t - 2\frac{2\pi}{3} - \varphi\right) - \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) \right] \end{cases}$$

Applicando una delle formule di Prostaferesi si ha

$$\begin{cases} i_1 = \sqrt{2} \frac{E}{3Z} 2 \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \frac{E}{\sqrt{3}Z} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_2 = \sqrt{2} \frac{E}{3Z} 2 \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{2} \frac{E}{\sqrt{3}Z} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{3}\right) \\ i_3 = \sqrt{2} \frac{E}{3Z} 2 \cos(\omega t - \varphi - \pi) \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{2} \frac{E}{\sqrt{3}Z} \cos(\omega t - \varphi - \pi) \end{cases}$$

Esprimendo tutto attraverso funzioni sinusoidali si ha poi

$$\begin{cases} i_1 = \sqrt{2} \frac{E}{\sqrt{3}Z} \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{6}\right) \\ i_2 = \sqrt{2} \frac{E}{\sqrt{3}Z} \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{7\pi}{6}\right) \\ i_3 = \sqrt{2} \frac{E}{\sqrt{3}Z} \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

che rappresenta proprio una terna diretta di valore efficace $E/\sqrt{3}Z$ sfasata di $\pi/6$ in ritardo rispetto alla terna delle tensioni concatenate.

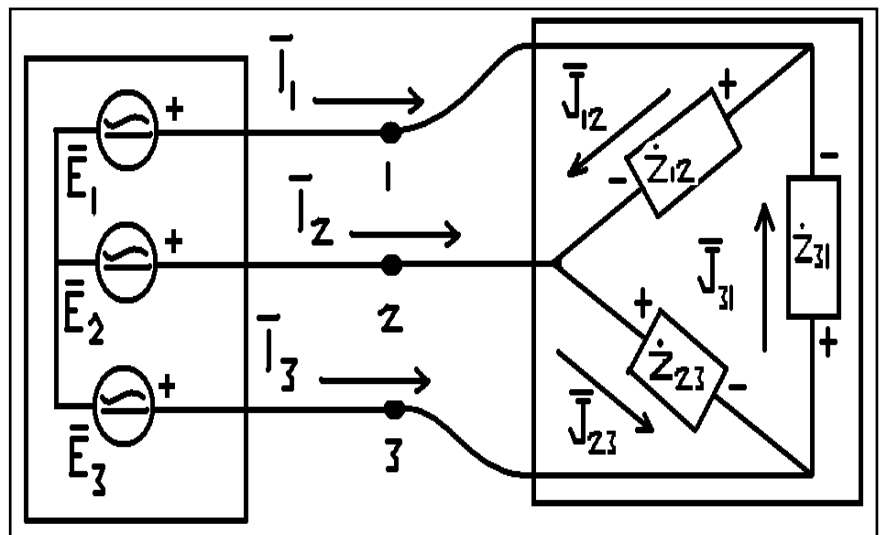
V) COLLEGAMENTO A STELLA DEL GENERATORE E A TRIANGOLO DEL CARICO

DEDUZIONE,

LE CORRENTI DELLE FASI INTERNE. In caso di carico generico e di tensioni di fase generiche le correnti delle fasi interne sono

$$\begin{cases} \bar{J}_{12} = \frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_2}{\dot{Z}_{12}} = \frac{\bar{U}_{12}}{\dot{Z}_{12}} \\ \bar{J}_{23} = \frac{\bar{E}_2 - \bar{E}_3}{\dot{Z}_{23}} = \frac{\bar{U}_{23}}{\dot{Z}_{23}} \\ \bar{J}_{31} = \frac{\bar{E}_3 - \bar{E}_1}{\dot{Z}_{31}} = \frac{\bar{U}_{31}}{\dot{Z}_{31}} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Si trova immediatamente la tesi applicando la LKT agli anelli identificati dalle tre tensioni concatenate.



DEDUZIONE,

LE CORRENTI DI LINEA. Nel caso di carico generico e di tensioni di fase generiche le correnti di linea sono date da

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_{12}}{\dot{Z}_{12}} - \frac{\bar{U}_{31}}{\dot{Z}_{31}} \\ \bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_{23}}{\dot{Z}_{23}} - \frac{\bar{U}_{12}}{\dot{Z}_{12}} \\ \bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_{31}}{\dot{Z}_{31}} - \frac{\bar{U}_{23}}{\dot{Z}_{23}} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare la LKC ai nodi del carico e ricordare le espressioni trovate per le correnti delle fasi interne.

DEDUZIONE,

GENERATORE SIMMETRICO E CARICO EQUILIBRATO. CORRENTI DELLE FASI INTERNE. Se risulta che

1) la terna delle tensioni di fase del generatore è simmetrica (diretta o inversa),

2) il carico è equilibrato,

allora le correnti delle fasi interne costituiscono una terna simmetrica (rispettivamente diretta o inversa) di valore efficace $\sqrt{3}E/Z$ sfasata in ritardo di φ rispetto alla terna delle tensioni concatenate.

DIMOSTRAZIONE. Diciamo che le tensioni di fase costituiscano la terna simmetrica diretta

$$\begin{cases} e_1 = \sqrt{2}E \sin(\omega t) \\ e_2 = \sqrt{2}E \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ e_3 = \sqrt{2}E \sin\left(\omega t - 2\frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Allora le tensioni concatenate si scrivono

$$\begin{cases} u_{12} = e_1 - e_2 = \sqrt{2}(\sqrt{3}E) \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \\ u_{23} = e_2 - e_3 = \sqrt{2}(\sqrt{3}E) \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ u_{31} = e_1 - e_3 = \sqrt{2}(\sqrt{3}E) \sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \bar{U}_{12} = (\sqrt{3}E)e^{j\frac{\pi}{6}} \\ \bar{U}_{23} = (\sqrt{3}E)e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ \bar{U}_{31} = (\sqrt{3}E)e^{j\frac{5\pi}{6}} \end{cases}$$

e dunque le correnti delle fasi interne sono

$$\begin{cases} \bar{J}_{12} = \frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_2}{\dot{\bar{Z}}_{12}} = \frac{\sqrt{3}E}{Z} e^{j\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)} \\ \bar{J}_{23} = \frac{\bar{E}_2 - \bar{E}_3}{\dot{\bar{Z}}_{23}} = \frac{\sqrt{3}E}{Z} e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)} \\ \bar{J}_{31} = \frac{\bar{E}_3 - \bar{E}_1}{\dot{\bar{Z}}_{31}} = \frac{\sqrt{3}E}{Z} e^{j\left(\frac{5\pi}{6}-\varphi\right)} \end{cases}$$

DEDUZIONE,

GENERATORE SIMMETRICO E CARICO EQUILIBRATO. CORRENTI DI LINEA. Se risulta che

1) la terna delle tensioni di fase del generatore è simmetrica (diretta o inversa),

2) il carico è equilibrato,

allora le correnti di linea costituiscono una terna simmetrica (rispettivamente diretta o inversa) di valore efficace $\frac{3E}{Z}$ sfasata in ritardo di φ rispetto alla terna delle tensioni di linea.

DIMOSTRAZIONE.

Trasformiamo il triangolo di impedenze in una stella di impedenze secondo le formule

$$\dot{\bar{Z}}_Y = \frac{\frac{\bar{E}_1}{Z} + \frac{\bar{E}_2}{Z} + \frac{\bar{E}_3}{Z}}{\frac{3}{Z}} = \frac{\dot{\bar{Z}}_\Delta}{3}$$

Applicando ora una delle formule di Millmann si ha che la tensione fra i due centri stella è

$$\bar{U}_{oo'} = \frac{\frac{\bar{E}_1}{Z} + \frac{\bar{E}_2}{Z} + \frac{\bar{E}_3}{Z}}{\frac{3}{Z}} = \frac{\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3}{3}$$

Dunque se applichiamo la LKT abbiamo

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{\bar{Z}}_Y} = 3 \frac{\bar{E}_1}{\dot{\bar{Z}}_\Delta} = 3 \frac{E}{Z} e^{j(-\varphi)} \\ \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\dot{\bar{Z}}_Y} = 3 \frac{\bar{E}_2}{\dot{\bar{Z}}_\Delta} = 3 \frac{E}{Z} e^{j\left(\frac{2\pi}{3}-\varphi\right)} \\ \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\dot{\bar{Z}}_Y} = 3 \frac{\bar{E}_3}{\dot{\bar{Z}}_\Delta} = 3 \frac{E}{Z} e^{j\left(\frac{4\pi}{3}-\varphi\right)} \end{cases}$$

RETE 1(Yn-Yn)	Carico generico	Carico equilibrato
Terna delle tensioni concatenate generica	$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1}, \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2}, \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3}$ $\sum \bar{I}_i = 0, \bar{U}_{00} = \frac{\frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} + \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2} + \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3}}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3}}$	$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}}, \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}}, \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}}$ $\sum \bar{I}_i = 0, \bar{U}_{00} = \frac{\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3}{3}$
Terna delle tensioni di linea simmetrica Diretta	$\begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{Ee^{-j\varphi_1}}{Z_1} \\ \bar{I}_2 = \frac{Ee^{-j\left(\frac{2}{3}\pi+\varphi_2\right)}}{Z_2} \\ \bar{I}_3 = \frac{Ee^{-j\left(\frac{4}{3}\pi+\varphi_3\right)}}{Z_3} \end{cases}$ $\sum \bar{I}_i = 0, \bar{U}_{00} = \frac{\frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} + \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2} + \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3}}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3}}$	$\begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{Ee^{-j\varphi}}{Z} \\ \bar{I}_2 = \frac{Ee^{-j\left(\frac{2}{3}\pi+\varphi\right)}}{Z} \\ \bar{I}_3 = \frac{Ee^{-j\left(\frac{4}{3}\pi+\varphi\right)}}{Z} \end{cases}$ $\sum \bar{I}_i = 0, \bar{U}_{00} = 0$

RETE 2(Y-Y)	Carico generico	Carico equilibrato
Terna delle tensioni di linea generica	$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1}, \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2}, \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3}$ $\sum \bar{I}_i = 0, \bar{U}_{00} = \frac{\frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} + \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2} + \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3}}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3}}$	$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}}, \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}}, \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}}$ $\sum \bar{I}_i = 0, \bar{U}_{00} = \frac{\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3}{3}$
Terna delle tensioni di linea simmetrica Diretta	$\begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{Ee^{-j\varphi_1}}{Z_1} \\ \bar{I}_2 = \frac{Ee^{-j\left(\frac{2}{3}\pi+\varphi_2\right)}}{Z_2} \\ \bar{I}_3 = \frac{Ee^{-j\left(\frac{4}{3}\pi+\varphi_3\right)}}{Z_3} \end{cases}$ $\sum \bar{I}_i = 0, \bar{U}_{00} = \frac{\frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} + \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2} + \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3}}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3}}$	$\begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{Ee^{-j\varphi}}{Z} \\ \bar{I}_2 = \frac{Ee^{-j\left(\frac{2}{3}\pi+\varphi\right)}}{Z} \\ \bar{I}_3 = \frac{Ee^{-j\left(\frac{4}{3}\pi+\varphi\right)}}{Z} \end{cases}$ $\sum \bar{I}_i = 0, \bar{U}_{00} = 0$

RETE 3(D-D)	Carico generico	Carico equilibrato
Terna delle tensioni conacenate generica	$\bar{J}_{12} = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1}, \bar{J}_{23} = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2}, \bar{J}_{31} = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3}$ $\begin{cases} \bar{I}_1 = \bar{J}_{12} - \bar{J}_{31} = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} - \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3} \\ \bar{I}_2 = \bar{J}_{23} - \bar{J}_{12} = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2} - \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} \\ \bar{I}_3 = \bar{J}_{31} - \bar{J}_{23} = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3} - \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2} \end{cases}$ $\sum \bar{I}_i = 0$	$\bar{J}_{12} = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}}, \bar{J}_{23} = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}}, \bar{J}_{31} = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}}$ $\begin{cases} \bar{I}_1 = \bar{J}_{12} - \bar{J}_{31} = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}} - \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}} \\ \bar{I}_2 = \bar{J}_{23} - \bar{J}_{12} = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}} - \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}} \\ \bar{I}_3 = \bar{J}_{31} - \bar{J}_{23} = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}} - \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}} \end{cases}$ $\sum \bar{I}_i = 0$
Terna delle tensioni concatenate simmetrica Diretta	$\bar{J}_{12} = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1}, \bar{J}_{23} = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2}, \bar{J}_{31} = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3}$ $\begin{cases} \bar{I}_1 = \bar{J}_{12} - \bar{J}_{31} = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} - \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3} \\ \bar{I}_2 = \bar{J}_{23} - \bar{J}_{12} = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2} - \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} \\ \bar{I}_3 = \bar{J}_{31} - \bar{J}_{23} = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3} - \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2} \end{cases}$ $\sum \bar{I}_i = 0$	$\bar{J}_{12} = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}}, \bar{J}_{23} = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}}, \bar{J}_{31} = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}}$ $\begin{cases} i_1 = j_{12} - j_{31} = \sqrt{2}(\sqrt{3}J)\sin(\omega t - \varphi) \\ i_2 = j_{23} - j_{12} = \sqrt{2}(\sqrt{3}J)\sin(\omega t - \varphi) \\ i_3 = j_{31} - j_{23} = \sqrt{2}(\sqrt{3}J)\sin(\omega t - \varphi) \end{cases}$ $\sum \bar{I}_i = 0$

RETE 4(D-Y)	Carico generico	Carico equilibrato
Terna delle tensioni concatenate generica	$\bar{I}_1 = \frac{\dot{Z}_3 \bar{E}_1 - \dot{Z}_2 \bar{E}_3}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3}$ $\bar{I}_2 = \frac{\dot{Z}_1 \bar{E}_2 - \dot{Z}_3 \bar{E}_1}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3}$ $\bar{I}_3 = \frac{\dot{Z}_2 \bar{E}_3 - \dot{Z}_1 \bar{E}_2}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3}$ $\sum \bar{I}_i = 0$	$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_3}{3\dot{Z}}$ $\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2 - \bar{E}_1}{3\dot{Z}}$ $\bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3 - \bar{E}_2}{3\dot{Z}}$ $\sum \bar{I}_i = 0$

Terna delle tensioni conactenate simmetrica Diretta	$\begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{\dot{Z}_3 \bar{E}_1 - \dot{Z}_2 \bar{E}_3}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3} \\ \bar{I}_2 = \frac{\dot{Z}_1 \bar{E}_2 - \dot{Z}_3 \bar{E}_1}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3} \\ \bar{I}_3 = \frac{\dot{Z}_2 \bar{E}_3 - \dot{Z}_1 \bar{E}_2}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3} \end{cases}$ $\sum \bar{I}_i = 0$	$\begin{cases} i_1 = \sqrt{2} \frac{E}{\sqrt{3}Z} \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{6}\right) \\ i_2 = \sqrt{2} \frac{E}{\sqrt{3}Z} \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{7\pi}{6}\right) \\ i_3 = \sqrt{2} \frac{E}{\sqrt{3}Z} \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ $\sum \bar{I}_i = 0$
--	--	--

RETE 5(Y-D)	Carico generico	Carico equilibrato
Terna delle tensioni concatenate generica	$\begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_{12}}{\dot{Z}_{12}} - \frac{\bar{U}_{31}}{\dot{Z}_{31}} \\ \bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_{23}}{\dot{Z}_{23}} - \frac{\bar{U}_{12}}{\dot{Z}_{12}} \\ \bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_{31}}{\dot{Z}_{31}} - \frac{\bar{U}_{23}}{\dot{Z}_{23}} \end{cases}$ $\begin{cases} \bar{J}_{12} = \frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_2}{\dot{Z}_{12}} = \frac{\bar{U}_{12}}{\dot{Z}_{12}} \\ \bar{J}_{23} = \frac{\bar{E}_2 - \bar{E}_3}{\dot{Z}_{23}} = \frac{\bar{U}_{23}}{\dot{Z}_{23}} \\ \bar{J}_{31} = \frac{\bar{E}_3 - \bar{E}_1}{\dot{Z}_{31}} = \frac{\bar{U}_{31}}{\dot{Z}_{31}} \end{cases}$ $\sum \bar{I}_i = 0$	$\begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_{12} - \bar{U}_{31}}{\dot{Z}} \\ \bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_{23} - \bar{U}_{12}}{\dot{Z}} \\ \bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_{31} - \bar{U}_{23}}{\dot{Z}_{31}} \end{cases}$ $\begin{cases} \bar{J}_{12} = \frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_2}{\dot{Z}} = \frac{\bar{U}_{12}}{\dot{Z}} \\ \bar{J}_{23} = \frac{\bar{E}_2 - \bar{E}_3}{\dot{Z}} = \frac{\bar{U}_{23}}{\dot{Z}} \\ \bar{J}_{31} = \frac{\bar{E}_3 - \bar{E}_1}{\dot{Z}} = \frac{\bar{U}_{31}}{\dot{Z}} \end{cases}$ $\sum \bar{I}_i = 0$
Terna delle tensioni di linea simmetrica Diretta	$\begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_{12}}{\dot{Z}_{12}} - \frac{\bar{U}_{31}}{\dot{Z}_{31}} \\ \bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_{23}}{\dot{Z}_{23}} - \frac{\bar{U}_{12}}{\dot{Z}_{12}} \\ \bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_{31}}{\dot{Z}_{31}} - \frac{\bar{U}_{23}}{\dot{Z}_{23}} \end{cases}$	$\begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_Y} = 3 \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_\Delta} = 3 \frac{E}{Z} e^{j(-\varphi)} \\ \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_Y} = 3 \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_\Delta} = 3 \frac{E}{Z} e^{j\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right)} \\ \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_Y} = 3 \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_\Delta} = 3 \frac{E}{Z} e^{j\left(\frac{4\pi}{3} - \varphi\right)} \end{cases}$

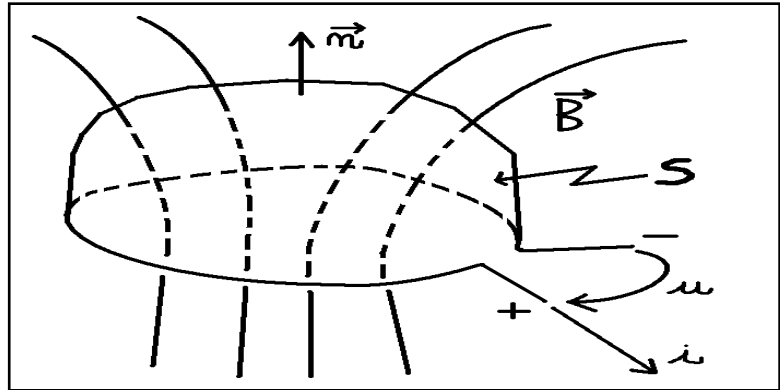
	$\left\{ \begin{array}{l} \bar{J}_{12} = \frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_2}{\dot{\bar{Z}}_{12}} = \frac{\bar{U}_{12}}{\dot{\bar{Z}}_{12}} \\ \bar{J}_{23} = \frac{\bar{E}_2 - \bar{E}_3}{\dot{\bar{Z}}_{23}} = \frac{\bar{U}_{23}}{\dot{\bar{Z}}_{23}} \\ \bar{J}_{31} = \frac{\bar{E}_3 - \bar{E}_1}{\dot{\bar{Z}}_{31}} = \frac{\bar{U}_{31}}{\dot{\bar{Z}}_{31}} \end{array} \right.$ $\sum \bar{I}_i = 0$	$\left\{ \begin{array}{l} \bar{J}_{12} = \frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_2}{\dot{\bar{Z}}_{12}} = \frac{\sqrt{3}E}{Z} e^{j\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)} \\ \bar{J}_{23} = \frac{\bar{E}_2 - \bar{E}_3}{\dot{\bar{Z}}_{23}} = \frac{\sqrt{3}E}{Z} e^{j\left(-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)} \\ \bar{J}_{31} = \frac{\bar{E}_3 - \bar{E}_1}{\dot{\bar{Z}}_{31}} = \frac{\sqrt{3}E}{Z} e^{j\left(\frac{5\pi}{6}-\varphi\right)} \end{array} \right.$ $\sum \bar{I}_i = 0$
--	---	---

CAPITOLO XII, TRASFORMATORI

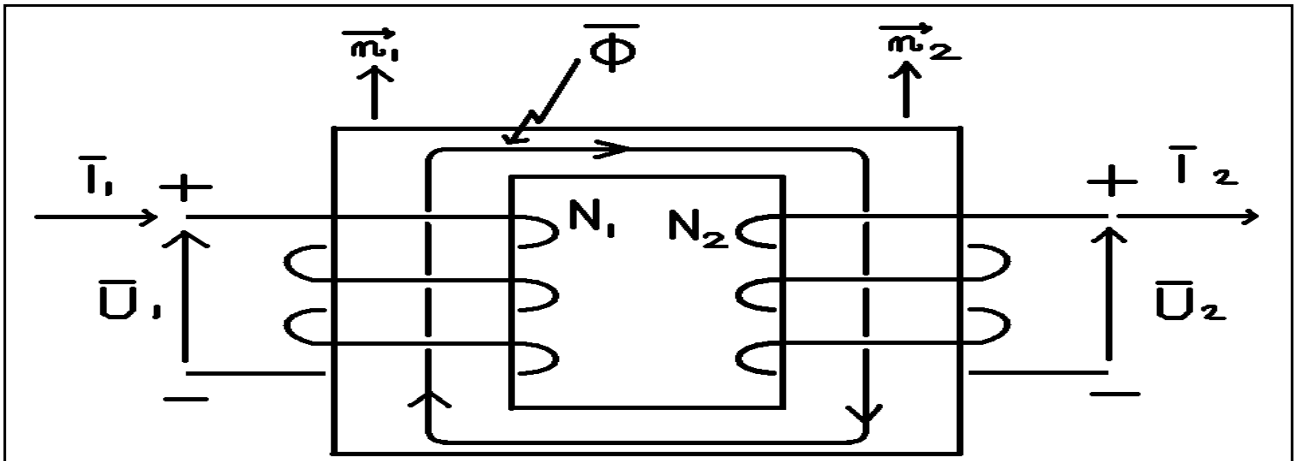
I) CIRCUITI ACCOPPIATI

LEGGE DI FARADAY-NEUMANN-LENZ. Sia data una spira avente i riferimenti di corrente e tensione come indicato in figura, cioè convenzionata da generatore. Si prenda una superficie S avente bordo la spira stessa. Su S si fissi un versore normale avente verso tale da vedere la corrente della spira circolare in senso antiorario. Allora la tensione ai capi della spira è data da

$$u(t) = -\frac{d}{dt} \left(\int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS \right) = -\frac{d}{dt} (\Phi_c)$$



CIRCUITI ACCOPPIATI. Consideriamo il sistema fisico indicato in figura. Due avvolgimenti sono avvolti attorno ad un nucleo ferromagnetico. Gli avvolgimenti sono percorsi da corrente e il



regime delle due correnti è sinusoidale. Dalla legge di Farady-Neumann-Lenz si ha che le tensioni ai capi delle due spire verificano, con i riferimenti adottati, le relazioni

$$\begin{cases} u_1(t) = \frac{d\Phi_{c1}(t)}{dt} = \frac{d(N_1\Phi(t))}{dt} = N_1 \frac{d(\Phi(t))}{dt} \\ u_2(t) = -\frac{d\Phi_{c2}(t)}{dt} = -\frac{d(-N_2\Phi(t))}{dt} = N_2 \frac{d(\Phi(t))}{dt} \end{cases}$$

le quali, in termini fasoriali, diventano

$$\begin{cases} \bar{U}_1 = N_1 j\omega \bar{\Phi} \\ \bar{U}_2 = N_2 j\omega \bar{\Phi} \end{cases}$$

Si osserva che il segno meno scompare nella prima equazione per il fatto che il riferimento di tensione risulta invertito rispetto al caso della spira usata per introdurre la legge di F.-N.-L.. Il segno meno scompare anche nella seconda equazione, ma in questo caso perché il flusso della induzione ha verso positivo entrante, anziché uscente.

Si evidenzia che si sono fatte le ipotesi semplificative seguenti:

- 1) si assume riluttanza nulla del nucleo ferromagnetico;
- 2) si è assunto che il flusso dell'induzione magnetica sia completamente canalizzato nel nucleo ferromagnetico, cioè che non vi siano dispersioni del flusso;
- 3) si è attribuita resistenza nulla a entrambi gli avvolgimenti;
- 4) si è assunto che non vi siano perdite per isteresi e correnti parassite.

Di queste in realtà si sono sfruttate solo le ultime tre. La prima verrà sfruttata nel seguito.

DEFINIZIONE,

RAPPORTO DI TRASFORMAZIONE. Definiamo rapporto di trasformazione il parametro adimensionale

$$n = \frac{N_1}{N_2}$$

DEDUZIONE,

RELAZIONI DEI CIRCUITI ACCOPPIATI. Considerando il rapporto di trasmissione si ha

$$\begin{cases} \bar{U}_1 = N_1 j\omega \bar{\Phi} \\ \bar{U}_2 = N_2 j\omega \bar{\Phi} \end{cases} \Rightarrow \frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_2} = \frac{N_1}{N_2} = n \Rightarrow \bar{U}_1 = n \bar{U}_2$$

Ora la legge di Hopkinson ci dice che

$$N_1 \bar{I}_1 - N_2 \bar{I}_2 - \bar{\Phi} \mathcal{R} = 0$$

dove si è introdotta la riluttanza del nucleo ferromagnetico. Tuttavia l'ipotesi uno ci garantisce che la riluttanza del nucleo ferromagnetico sia nulla. Dunque si ha

$$N_1 \bar{I}_1 - N_2 \bar{I}_2 = 0 \Leftrightarrow N_1 \bar{I}_1 = N_2 \bar{I}_2 \Leftrightarrow \bar{I}_1 = \frac{N_2}{N_1} \bar{I}_2 = \frac{1}{n} \bar{I}_2$$

Dunque si trova che i circuiti accoppiati, nelle ipotesi semplificative fatte, sono descritti dalle relazioni

$$\begin{cases} \bar{U}_1 = n \bar{U}_2 \\ \bar{I}_1 = \frac{N_2}{N_1} \bar{I}_2 = \frac{1}{n} \bar{I}_2 \end{cases}$$

DEDUZIONE,

RELAZIONE TRA COEFFICIENTE DI MUTUA INDUZIONE E INDUTTANZE.

Sussistono le relazioni

$$1) L_1 \geq 0$$

$$2) L_2 \geq 0$$

$$3) -\sqrt{L_1 L_2} < M < \sqrt{L_1 L_2}$$

DIMOSTRAZIONE. Si ricorda che l'energia magnetica che compete ai due circuiti accoppiati si esprime

$$U = \frac{1}{2} \Phi_1 i_1 + \frac{1}{2} \Phi_2 i_2 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

Ora dal dover essere questa quantità sempre positiva discende la tesi.

DEFINIZIONE,

COEFFICIENTE DI ACCOPPIAMENTO. Definiamo coefficiente di accoppiamento dei due circuiti la quantità adimensionale

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

la quale risulta, in base al terzo punto della tesi del precedente teorema, soddisfare la relazione

$$-1 < K < 1$$

DEFINIZIONE,

ACCOPPIAMENTO PERFETTO E ISOLAMENTO MAGNETICO. Se il coefficiente di accoppiamento ha valore assoluto unitario, allora si parla di accoppiamento perfetto fra i due circuiti. Se è invece nullo (cioè se il coefficiente di mutua induzione vale zero) allora i due circuiti si dicono magneticamente isolati.

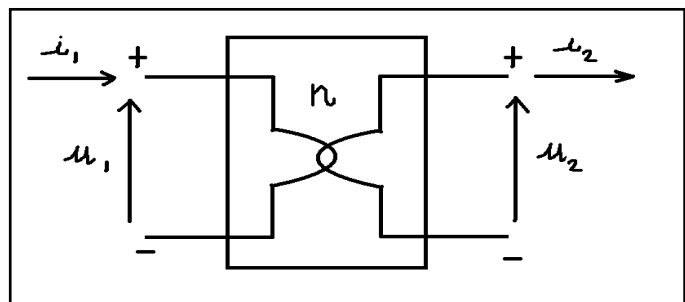
II) TRASFORMATORE IDEALE

DEFINIZIONE,

TRASFORMATORE IDEALE. Definisco trasformatore ideale quel doppio bipolo la cui caratteristica esterna sia quella trovata per i circuiti accoppiati nelle ipotesi semplificative adottate, ovvero

$$\begin{cases} u_1(t) = n u_2(t) \\ i_1(t) = \frac{1}{n} i_2(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{U}_1 = n \bar{U}_2 \\ \bar{I}_1 = \frac{1}{n} \bar{I}_2 \end{cases}$$

Il simbolo adottato per il trasformatore ideale è quello indicato in figura.



DEFINIZIONE,

RAPPRESENTAZIONE DI TRASMISSIONE. Più propriamente quella che noi abbiamo definito caratteristica esterna del doppio bipolo trasformatore ideale è detta rappresentazione di trasmissione alla porta uno. Naturalmente la rappresentazione di trasmissione alla porta due sarà

$$\begin{cases} u_2(t) = \frac{1}{n} u_1(t) \\ i_2(t) = n i_1(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{U}_2 = \frac{1}{n} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_2 = n \bar{I}_1 \end{cases}$$

DEDUZIONE,

PRIMA PROPRIETA' DEL TRASFORMATORE IDEALE. Assunto che sia $n > 1$ si ha che il trasformatore ideale riduce la tensione alla seconda porta e amplifica l'intensità di corrente alla seconda porta.

DEDUZIONE,

CONSERVAZIONE DELLE POTENZE. Nel trasformatore ideale si ha che

- 1) la potenza istantanea che entra alla prima porta è pari a quella che esce dalla seconda, qualunque sia il regime di funzionamento;
- 2) in regime sinusoidale la potenza complessa che entra alla prima porta è pari alla potenza complessa che esce dalla seconda.

Cioè il trasformatore ideale non assorbe potenza.

DIMOSTRAZIONE. La potenza istantanea che entra alla prima porta è

$$p_1(t) = i_1(t) u_1(t) = \left[\frac{1}{n} i_2(t) \right] [n u_2(t)] = i_2(t) u_2(t)$$

e dunque coincide con la potenza istantanea che esce dalla seconda porta

$$p_2(t) = i_2(t) u_2(t)$$

Questo prova la prima tesi. Inoltre, in regime sinusoidale, la potenza complessa che entra alla prima porta è

$$\dot{S}_1 = \bar{U}_1 \bar{I}_1^* = [n \bar{U}_2] \cdot \left[\frac{1}{n} \bar{I}_2 \right]^* = \bar{U}_2 \bar{I}_2^*$$

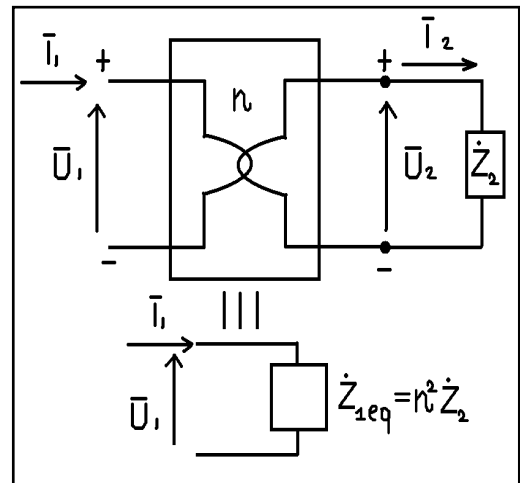
e dunque coincide con la potenza complessa che esce dalla seconda porta

$$\dot{S}_2 = \bar{U}_2 \bar{I}_2^*$$

DEDUZIONE,

CHIUSURA DEL SECONDARIO. Se collego la seconda porta del trasformatore ideale ad una impedenza $\dot{Z}_2$, allora il trasformatore stesso, visto dalla porta uno, è equivalente ad una impedenza

$$\dot{Z}_{1eq} = n^2 \dot{Z}_2$$



DIMOSTRAZIONE. L'impedenza equivalente verifica la relazione

$$\dot{Z}_{1eq} = \frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_1} = \frac{n\bar{U}_2}{\frac{1}{n}\bar{I}_2} = n^2 \left(\frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_2} \right)$$

D'altra parte l'impedenza collegata alla porta due deve verificare la relazione

$$\dot{Z}_2 = \frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_2}$$

Sostituendo la seconda espressione nella prima si ha

$$\dot{Z}_{1eq} = \frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_1} = \frac{n\bar{U}_2}{\frac{1}{n}\bar{I}_2} = n^2 \dot{Z}_2$$

che è la tesi.

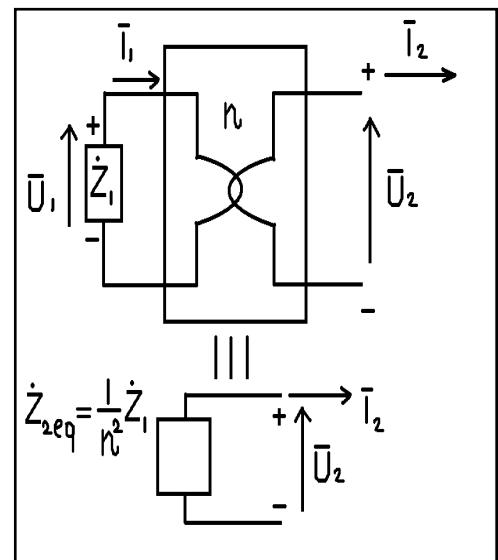
DEDUZIONE,

CHIUSURA DEL PRIMARIO. Se collego la prima porta del trasformatore ideale ad una impedenza $\dot{Z}_1$, allora il trasformatore stesso, visto dalla porta due, è equivalente ad una impedenza

$$\dot{Z}_{2eq} = \frac{1}{n^2} \dot{Z}_1$$

DIMOSTRAZIONE. L'impedenza equivalente verifica la relazione

$$\dot{Z}_{2eq} = -\frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_2} = -\frac{\frac{1}{n}\bar{U}_1}{n\bar{I}_1} = -\frac{1}{n^2} \left(\frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_1} \right)$$



dove il segno meno è dovuto al fatto che tale impedenza risulta convenzionata da generatore. D'altra parte l'impedenza collegata all'induttore primario deve verificare la relazione

$$\dot{Z}_1 = -\frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_1}$$

Ora sostituendo la seconda espressione nella prima si ha

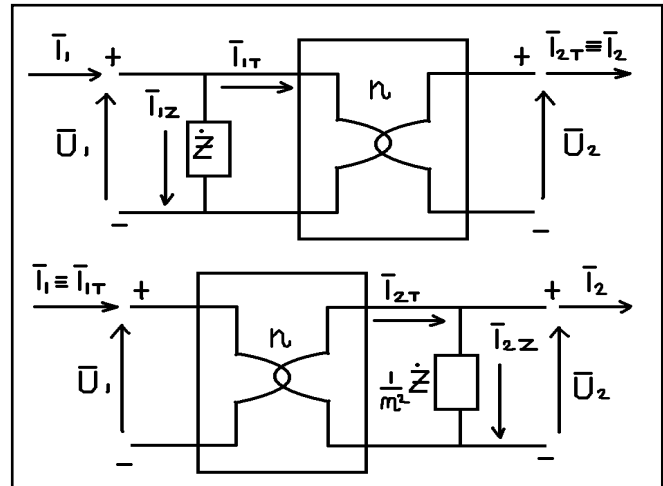
$$\dot{Z}_{2eq} = -\frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_2} = -\frac{\frac{1}{n}\bar{U}_1}{n\bar{I}_1} = -\frac{1}{n^2} \left(-\dot{Z}_1 \right) = \frac{1}{n^2} \dot{Z}_1$$

e dunque la tesi è dimostrata.

DEDUZIONE,

TRASFERIMENTO DI IMPEDENZA. Si vuole dimostrare che i due doppi bipoli seguenti (ottenuti collegando il trasformatore ideale in parallelo con una impedenza, una volta a primario e una volta a secondario) sono equivalenti, cioè hanno la stessa rappresentazione di trasmissione alla porta uno.

DIMOSTRAZIONE. Ricaviamo la rappresentazione di trasmissione alla porta uno del bipolo in alto nella illustrazione. Si ha



$$\begin{cases} \bar{U}_1 = n\bar{U}_2 \\ \bar{I}_1 = \bar{I}_{1Z} + \bar{I}_{1T} = \frac{\bar{U}_1}{\dot{Z}} + \frac{1}{n}\bar{I}_{2T} = \frac{n\bar{U}_2}{\dot{Z}} + \frac{1}{n}\bar{I}_{2T} = \frac{n\bar{U}_2}{\dot{Z}} + \frac{1}{n}\bar{I}_2 \end{cases}$$

Ora ricaviamo la rappresentazione di trasmissione alla porta uno del secondo doppio bipolo

$$\begin{cases} \bar{U}_1 = n\bar{U}_2 \\ \bar{I}_1 = \bar{I}_{1T} = \frac{1}{n}\bar{I}_{2T} = \frac{1}{n}(\bar{I}_{2Z} + \bar{I}_2) = \frac{1}{n}\left(\frac{\bar{U}_2}{\frac{1}{n^2}\dot{Z}} + \bar{I}_2\right) = \frac{n\bar{U}_2}{\dot{Z}} + \frac{1}{n}\bar{I}_2 \end{cases}$$

Ma le due rappresentazioni coincidono e dunque i due doppi bipoli sono equivalenti.

II) VERSO IL TRASFORMATORE REALE, TRASFORMATORE IDEALE CON RILUTTANZA

INTRODUZIONE. In questo paragrafo e nei successivi rimuoviamo le quattro ipotesi semplificatrici fatte, le quali permettono di schematizzare il sistema fisico costituito dai due avvolgimenti accoppiati per mezzo di un nucleo di materiale ferromagnetico (vedi la seconda illustrazione del presente capitolo) attraverso quel particolare doppio bipolo detto trasformatore ideale.

Rimuoviamo una ad una le quattro ipotesi, procedendo nell'ordine seguente

- 1) si assume riluttanza non nulla del nucleo ferromagnetico;
- 2) si ammettono dispersioni del flusso della induzione;
- 3) si assegna resistenza non nulla a entrambi gli avvolgimenti;
- 4) si considerano le perdite per isteresi e correnti parassite.

Alla prima ipotesi che cade parliamo di trasformatore ideale con riluttanza; al cadere sia della prima che della seconda ipotesi, parliamo di trasformatore ideale con riluttanza e dispersione; al cadere sia della prima, che della seconda, che della terza ipotesi, parliamo di trasformatore ideale con

riluttanza, dispersione e resistenza; Al cadere di tutte e quattro le ipotesi parliamo di trasformatore reale.

DEDUZIONE,

RILUTTANZA NON NULLA. Facciamo cadere l'ipotesi di riluttanza nulla per il nucleo ferromagnetico. Allora la rappresentazione di trasmissione alla porta uno del trasformatore ideale con riluttanza è

$$\begin{cases} \bar{U}_1 = n\bar{U}_2 \\ \bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1}{j\omega L_1} + \frac{1}{n}\bar{I}_2 \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Partiamo, come ad inizio capitolo, dalla legge di Farady-Neumann-Lenz. Si ha

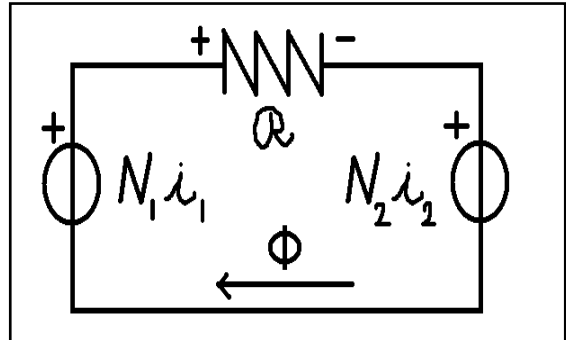
$$\begin{cases} u_1(t) = \frac{d\Phi_{c1}(t)}{dt} = \frac{d(N_1\Phi(t))}{dt} = N_1 \frac{d(\Phi(t))}{dt} \\ u_2(t) = -\frac{d\Phi_{c2}(t)}{dt} = -\frac{d(-N_2\Phi(t))}{dt} = N_2 \frac{d(\Phi(t))}{dt} \end{cases}$$

Da qui ricaviamo subito la prima equazione della rappresentazione di trasmissione alla porta uno

$$\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow u_1(t) = \frac{N_1}{N_2} u_2(t) \Rightarrow u_1(t) = nu_2(t)$$

In base alla legge di Hopkinson (o, se si vuole, alla legge LKT per circuiti magnetici) si ha poi

$$N_1 i_1(t) - N_2 i_2(t) - \Phi(t)\mathfrak{R} = 0$$



dove si è introdotta la riluttanza del nucleo ferromagnetico (vedi lo schema circuitale in figura). Dunque si ha

$$N_1 i_1(t) - N_2 i_2(t) - \Phi(t)\mathfrak{R} = 0 \Rightarrow i_1(t) = \frac{N_2}{N_1} i_2(t) + \frac{\Phi(t)\mathfrak{R}}{N_1}$$

Adesso ricaviamo la relazione fra riluttanza e induttanza del primo avvolgimento. Se nella LKT poniamo nulla la seconda corrente si ha in particolare

$$N_1 i_1(t) - \Phi(t)\mathfrak{R} = 0 \Rightarrow \mathfrak{R} = \frac{N_1 i_1(t)}{\Phi(t)}$$

D'altra parte, per definizione di autoinduttanza, si ha

$$N_1 \Phi(t) = L_1 i_1(t) \Rightarrow L_1 = \frac{N_1 \Phi(t)}{i_1(t)}$$

Dunque si trova

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi(t)}{i_1(t)} = \frac{N_1^2 \Phi(t)}{N_1 i_1(t)} = \frac{N_1^2}{\Re} \Leftrightarrow \Re = \frac{N_1^2}{L_1}$$

Sostituendo nella espressione della corrente dell'avvolgimento primario si ha

$$i_1(t) = \frac{N_2}{N_1} i_2(t) + \frac{\Phi(t) N_1}{L_1}$$

Fin qui dunque si è trovata la rappresentazione di trasmissione alla porta uno

$$\begin{cases} u_1(t) = n u_2(t) \\ i_1(t) = \frac{1}{n} i_2(t) + \frac{\Phi(t) N_1}{L_1} \end{cases}$$

che in termini fasoriali, in caso di regime sinusoidale, si scrive

$$\begin{cases} \bar{U}_1 = n \bar{U}_2 \\ \bar{I}_1 = \frac{1}{n} \bar{I}_2 + \frac{\bar{\Phi} N_1}{L_1} \end{cases}$$

Ora si osservi che, per la legge di Farady-Neumann-Lenz, si ha

$$u_1(t) = N_1 \frac{d\Phi(t)}{dt} \Rightarrow \bar{U}_1 = N_1 j\omega \bar{\Phi} \Rightarrow \bar{\Phi} N_1 = \frac{\bar{U}_1}{j\omega}$$

e dunque la rappresentazione di trasmissione alla porta uno si scrive

$$\begin{cases} \bar{U}_1 = n \bar{U}_2 \\ \bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1}{j\omega L_1} + \frac{1}{n} \bar{I}_2 \end{cases}$$

e la tesi è dimostrata.

DEDUZIONE,

RAPPORTO DI TRASFORMAZIONE E INDUTTANZE PER IL TRASFORMATORE IDEALE CON RILUTTANZA. Nel trasformatore ideale con riluttanza si verifica che il rapporto di trasmissione è dato da

$$n = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

DIMOSTRAZIONE. La LKT per il circuito magnetico costituito dai due avvolgimenti e dal nucleo ferromagnetico, con le convenzioni adottate per le forze magnetomotrici, si scrive

$$N_1 i_1(t) - N_2 i_2(t) - \Phi(t) \mathcal{R} = 0$$

Questa relazione è sempre vera, dunque in particolare è vera quando è nulla la corrente nel secondo avvolgimento. In tal caso si ha

$$N_1 i_1(t) = \Phi(t) \mathcal{R}$$

D'altra parte la definizione di autoinduttanza ci permette di scrivere

$$\Phi_{C1} = L_1 i_1 \Rightarrow N_1 \Phi = L_1 i_1 \Rightarrow L_1 = \frac{N_1 \Phi}{i_1} = \frac{N_1^2 \Phi}{\Phi \mathcal{R}} = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}}$$

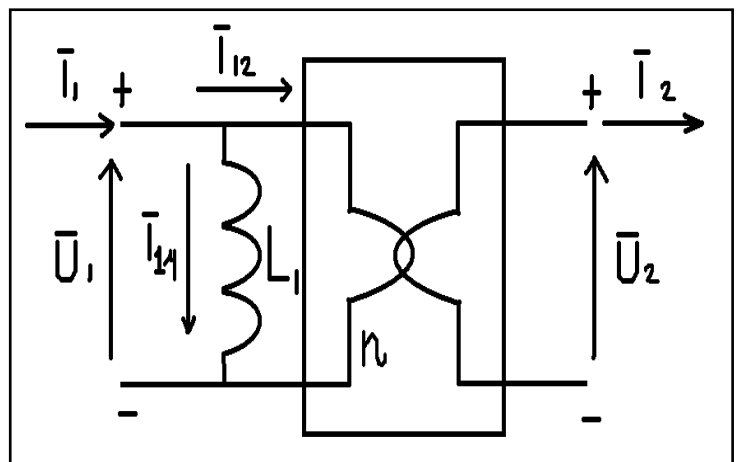
Ragionando allo stesso modo si trova

$$L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}}$$

Dunque si conclude che

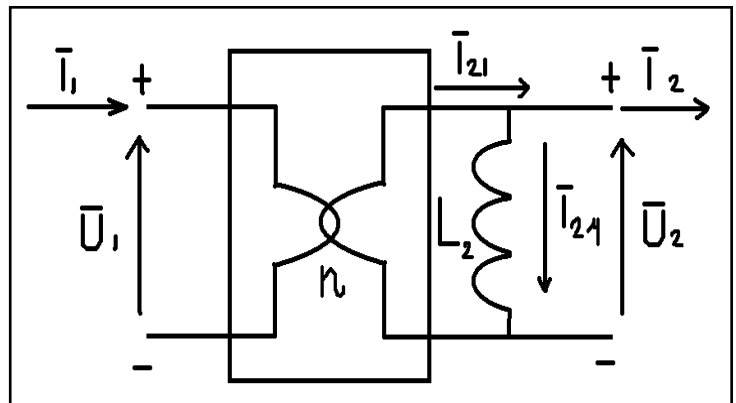
$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{N_1^2}{N_2^2} = n^2$$

che è la tesi.



DEDUZIONE,

SCHEMA EQUIVALENTE DEL TRASFORMATORE IDEALE CON RILUTTANZA. In base a quanto appena dimostrato il trasformatore ideale con riluttanza può essere rappresentato come un trasformatore ideale il cui primario è collegato in parallelo con l'induttanza del primo avvolgimento, come indicato nella figura, dove sono introdotte la corrente magnetizzante a primario e la corrente secondaria riportata a primario (vedi le definizioni che seguono).



In base a quanto dimostrato sulla proprietà di trasferimento dell'impedenza del trasformatore ideale, abbiamo poi che lo stesso trasformatore può essere rappresentato come il trasformatore ideale il cui secondo avvolgimento è collegato in parallelo con la induttanza

$$\frac{1}{n^2} L_1$$

che tra l'altro è proprio l'induttanza del secondo avvolgimento. Quindi, in definitiva, il trasformatore con riluttanza non nulla del nucleo, si può rappresentare anche nel modo qui raffigurato.

Questo secondo doppio bipolo suggerisce la rappresentazione di trasmissione alla porta due, rappresentazione la quale si ricava da quella alla porta uno mettendo in evidenza le grandezze della porta due. Si ha

$$\begin{cases} \bar{U}_2 = \frac{1}{n} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_2 = -n \frac{\bar{U}_1}{j\omega L_1} + n \bar{I}_1 = -n^2 \frac{\bar{U}_1}{j\omega n L_1} + n \bar{I}_1 = -\frac{\bar{U}_2}{j\omega L_2} + n \bar{I}_1 \end{cases}$$

DEDUZIONE,

TRASFORMATORE IDEALE CON RILUTTANZA: ACCOPPIAMENTO PERFETTO. Nel trasformatore ideale con riluttanza si verifica l'accoppiamento perfetto.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il primo avvolgimento del trasformatore ideale con riluttanza. La legge di Farady-Neumann-Lenz ci dice che

$$u_1 = \frac{d\Phi_{C1}}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \Rightarrow \bar{U}_1 = j\omega \bar{\Phi}_{C1} = L_1 j\omega \bar{I}_1 + M j\omega \bar{I}_2 \Rightarrow M \bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_1}{j\omega} - L_1 \bar{I}_1$$

Ma dalla rappresentazione di trasmissione alla porta uno si ha

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1}{j\omega L_1} + \frac{1}{n} \bar{I}_2$$

e dunque abbiamo

$$M \bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_1}{j\omega} - L_1 \bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1}{j\omega} - L_1 \left(\frac{\bar{U}_1}{j\omega L_1} + \frac{1}{n} \bar{I}_2 \right) = -\frac{L_1}{n} \bar{I}_2 = -\frac{L_1 \sqrt{L_2}}{\sqrt{L_1}} \bar{I}_2 = -\sqrt{L_1 L_2} \bar{I}_2 \Rightarrow M^2 = L_1 L_2$$

e l'accoppiamento è perfetto.

DEFINIZIONE,

CORRENTE MAGNETIZZANTE. Dato il doppio bipolo trasformatore ideale con riluttanza non nulla definiamo corrente magnetizzante alla porta uno la corrente

$$\bar{I}_{1\mu} \triangleq \frac{\bar{U}_1}{j\omega L_1}$$

E' la corrente che transita nella induttanza del primo avvolgimento.

Definiamo invece corrente magnetizzante alla porta due la corrente

$$\bar{I}_{2\mu} = -\frac{\bar{U}_2}{j\omega L_2}$$

E' la corrente che transita nell'induttanza del secondo avvolgimento.

DEFINIZIONE,

CORRENTE SECONDARIA RIPORTATA A PRIMARIO. Dato il trasformatore ideale con riluttanza non nulla, diciamo corrente secondaria riportata a primario la corrente

$$\bar{I}_{12} \stackrel{\Delta}{=} -\frac{1}{n} \bar{I}_2$$

E' la corrente che entra nel primario del trasformatore ideale.

DEFINIZIONE,

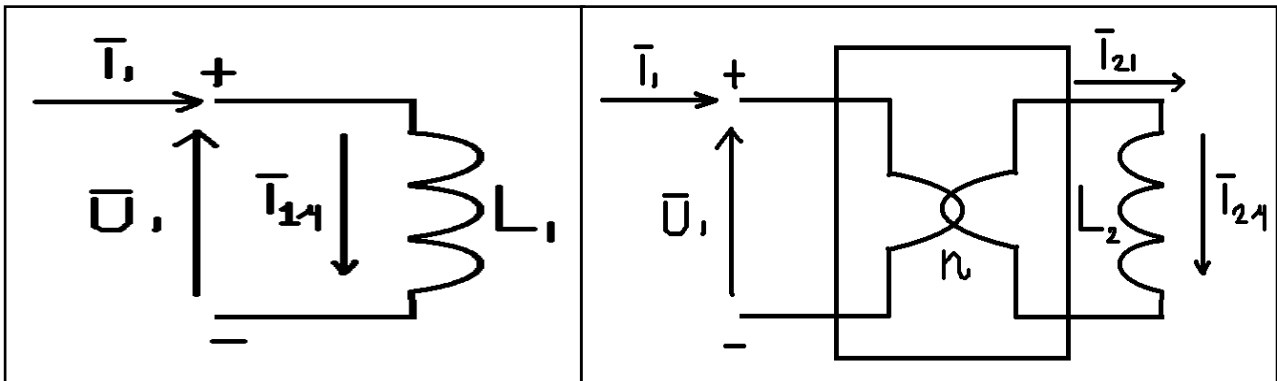
CORRENTE PRIMARIA RIPORTATA A SECONDARIO. Dato il trasformatore ideale con riluttanza non nulla, diciamo corrente primaria riportata a secondario la corrente

$$\bar{I}_{21} \stackrel{\Delta}{=} -\frac{1}{n} \bar{I}_1$$

E' la corrente che esce dal secondario del trasformatore ideale.

DEDUZIONE,

FUNZIONAMENTO A VUOTO. Si parla di funzionamento a vuoto quando la corrente del secondo avvolgimento è nulla. Gli schemi equivalenti del trasformatore ideale con secondario a vuoto sono i due qui riportati.



Nel primo caso si ha l'equivalenza con un bipolo induttore. Riportando però l'impedenza a secondario si ha un trasformatore ideale chiuso su una impedenza.

III) VERSO IL TRASFORMATORE REALE, TRASFORMATORE IDEALE CON RILUTTANZA E DISPERSIONE DEL FLUSSO

DEDUZIONE,

RILUTTANZA NON NULLA E DISPERSIONE DEL FLUSSO. Se cadono le ipotesi di riluttanza nulla del nucleo e di perfetta canalizzazione del flusso della induzione allora la rappresentazione di trasmissione alla porta uno si scrive

$$\begin{cases} (\bar{U}_1 - j\omega L_{1d} \bar{I}_1) = n(\bar{U}_2 + j\omega L_{2d} \bar{I}_2) \\ \bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1}{j\omega L_1} + \frac{(\bar{U}_1 - j\omega L_{1d} \bar{I}_1)}{n} \bar{I}_2 \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Rappresentiamo i flussi dispersi mediante i due fasori indicati in figura. Considerati tali flussi la legge di Farady-Neumann-Lenz si scrive

$$\begin{cases} u_1(t) = \frac{d\Phi_{c1}(t)}{dt} = N_1 \frac{d(\Phi(t))}{dt} + N_1 \frac{d(\Phi_{1d}(t))}{dt} \\ u_2(t) = -\frac{d\Phi_{c2}(t)}{dt} = N_2 \frac{d(\Phi(t))}{dt} - N_2 \frac{d(\Phi_{2d}(t))}{dt} \end{cases}$$

che ai fasori diventa

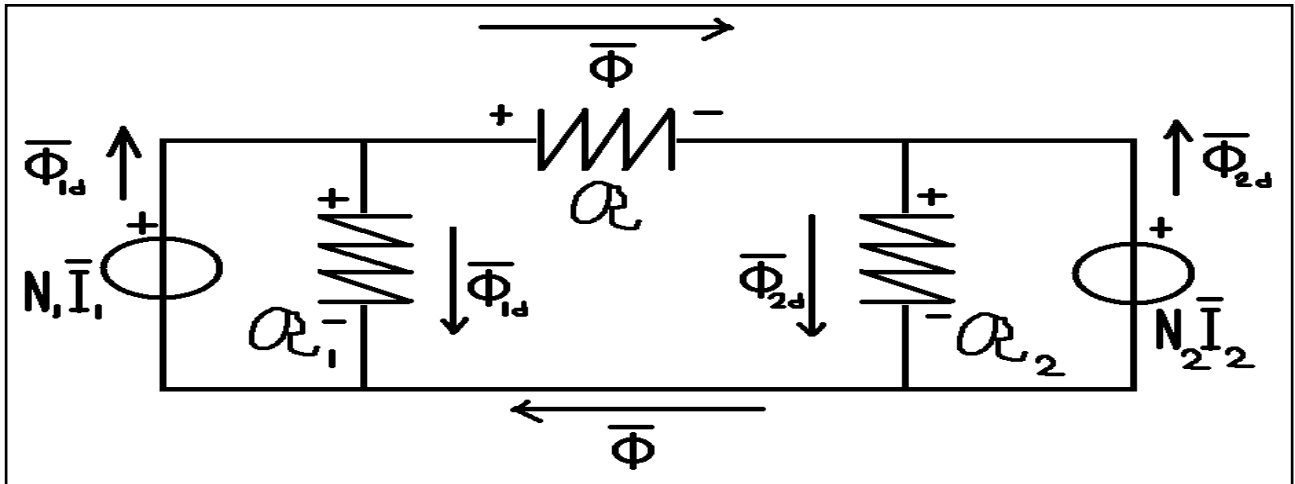
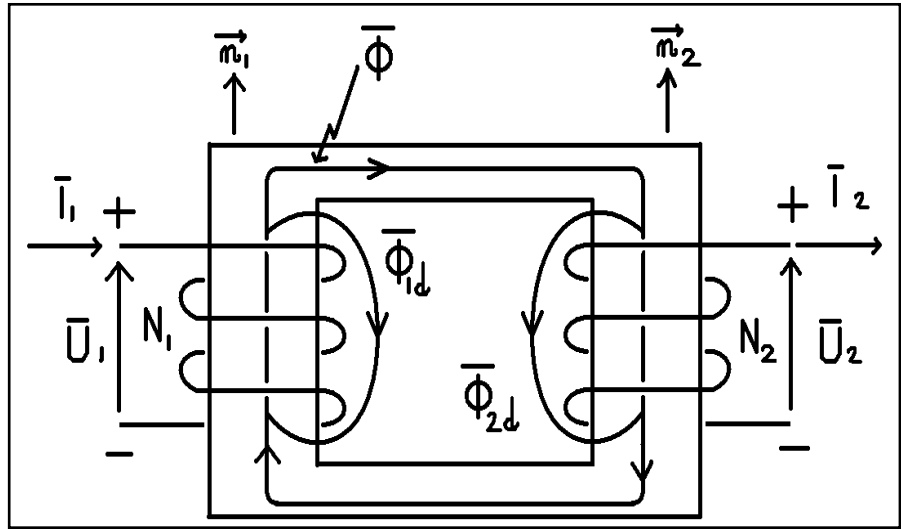
$$\begin{cases} \bar{U}_1 = N_1 j\omega \bar{\Phi} + N_1 j\omega \bar{\Phi}_{1d} \\ \bar{U}_2 = N_2 j\omega \bar{\Phi} - N_2 j\omega \bar{\Phi}_{2d} \end{cases}$$

Facciamo ora le posizioni

$$\begin{cases} L_{1d} = \frac{N_1 \bar{\Phi}_{1d}}{\bar{I}_1} \\ L_{2d} = \frac{N_2 \bar{\Phi}_{2d}}{\bar{I}_2} \end{cases}$$

Con ciò si ha

$$\begin{cases} \bar{U}_1 = N_1 j\omega \bar{\Phi} + N_1 j\omega \bar{\Phi}_{1d} = N_1 j\omega \bar{\Phi} + j\omega \bar{I}_1 \bar{L}_{1d} \\ \bar{U}_2 = N_2 j\omega \bar{\Phi} - N_2 j\omega \bar{\Phi}_{2d} = N_2 j\omega \bar{\Phi} - j\omega \bar{I}_2 \bar{L}_{2d} \end{cases}$$



Da cui si ricava la relazione fra i fasori delle tensioni

$$\begin{aligned} \begin{cases} \bar{U}_1 = N_1 j\omega \bar{\Phi} + j\omega \bar{I}_1 \bar{L}_{1d} \\ n\bar{U}_2 = N_1 j\omega \bar{\Phi} - n j\omega \bar{I}_2 \bar{L}_{2d} \end{cases} &\Rightarrow \bar{U}_1 = N_1 j\omega \bar{\Phi} + j\omega \bar{I}_1 \bar{L}_{1d} - n j\omega \bar{I}_2 \bar{L}_{2d} + n j\omega \bar{I}_2 \bar{L}_{2d} = \\ &= (N_1 j\omega \bar{\Phi} - n j\omega \bar{I}_2 \bar{L}_{2d}) + j\omega \bar{I}_1 \bar{L}_{1d} + n j\omega \bar{I}_2 \bar{L}_{2d} = n\bar{U}_2 + j\omega \bar{I}_1 \bar{L}_{1d} + n j\omega \bar{I}_2 \bar{L}_{2d} \end{aligned}$$

Adesso si deve ricavare la relazione fra i fasori delle correnti. A tale scopo si consideri il disegno del circuito magnetico costituito dal nucleo e dai passaggi in aria del flusso disperso. La LKT alla maglia esterna porge

$$N_1 \bar{I}_1 - N_2 \bar{I}_2 - \bar{\Phi} \mathfrak{R} = 0 \Rightarrow \bar{I}_1 = \frac{\bar{\Phi} \mathfrak{R}}{N_1} + \frac{1}{n} \bar{I}_2$$

Tenendo poi conto che

$$\bar{U}_1 = N_1 j\omega \bar{\Phi} + N_1 j\omega \bar{\Phi}_{1d} \Rightarrow N_1 \bar{\Phi} = \frac{\bar{U}_1}{j\omega} - \bar{I}_1 L_{1d}$$

si deve concludere che

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \frac{\bar{\Phi} \mathfrak{R}}{N_1} + \frac{1}{n} \bar{I}_2 = \frac{\left(\frac{\bar{U}_1}{j\omega} - \bar{I}_1 L_{1d} \right) \mathfrak{R}}{N_1^2} + \frac{1}{n} \bar{I}_2 = \frac{\left(\frac{\bar{U}_1}{j\omega} - \bar{I}_1 L_{1d} \right) \frac{N_1^2}{L_1}}{N_1^2} + \frac{1}{n} \bar{I}_2 = \\ &= \frac{\bar{U}_1 - j\omega \bar{I}_1 L_{1d}}{j\omega L_1} + \frac{1}{n} \bar{I}_2 \end{aligned}$$

Dunque la rappresentazione alla porta uno del trasformatore ideale con riluttanza e dispersione si scrive

$$\begin{cases} (\bar{U}_1 - j\omega L_{1d} \bar{I}_1) = n(\bar{U}_2 + j\omega L_{2d} \bar{I}_2) \\ \bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1 - j\omega L_{1d} \bar{I}_1}{j\omega L_1} + \frac{1}{n} \bar{I}_2 \end{cases}$$

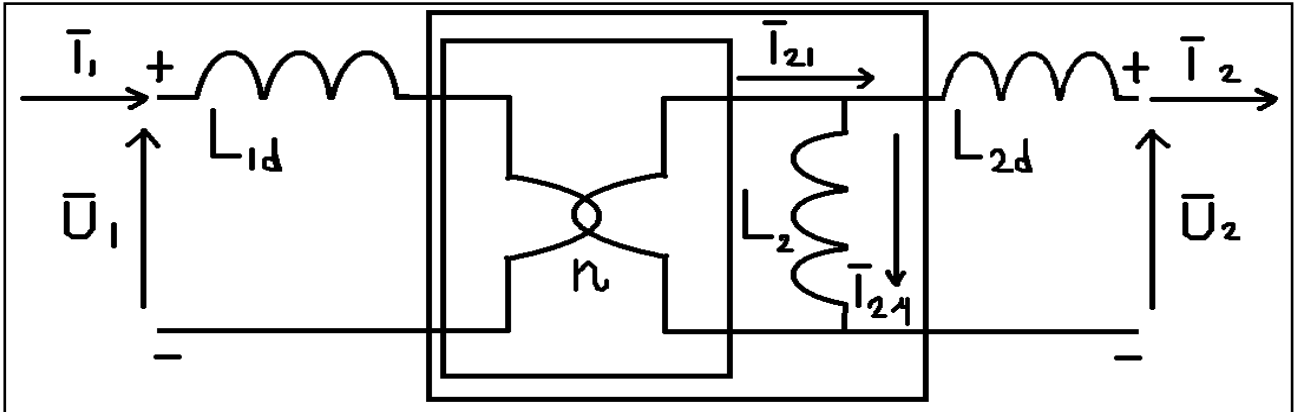
E la tesi è dimostrata.

DEDUZIONE,

SCHEMA EQUIVALENTE DEL TRASFORMATORE CON RILUTTANZA E DISPERSIONE DEL FLUSSO. Dalla rappresentazione di trasmissione alla porta uno si riconosce che a primario si ha una caduta di tensione da induttanza e che stessa cosa si ha a secondario. Le induttanze sono quelle legate al flusso disperso. Si osserva che le tensioni raccolte in parentesi nella rappresentazione di trasmissione qui sopra sono quelle ai capi del trasformatore ideale. Si vede anche che la corrente magnetizzante a primario si stacca dalla corrente di alimentazione dopo la caduta di tensione dovuta alla induttanza di dispersione. Allora lo schema equivalente del trasformatore con riluttanza e dispersione non può che essere quello qui raffigurato.

Anche qui si sono introdotte la corrente di magnetizzazione e la corrente secondaria riportata a primario, le quali in questo caso valgono

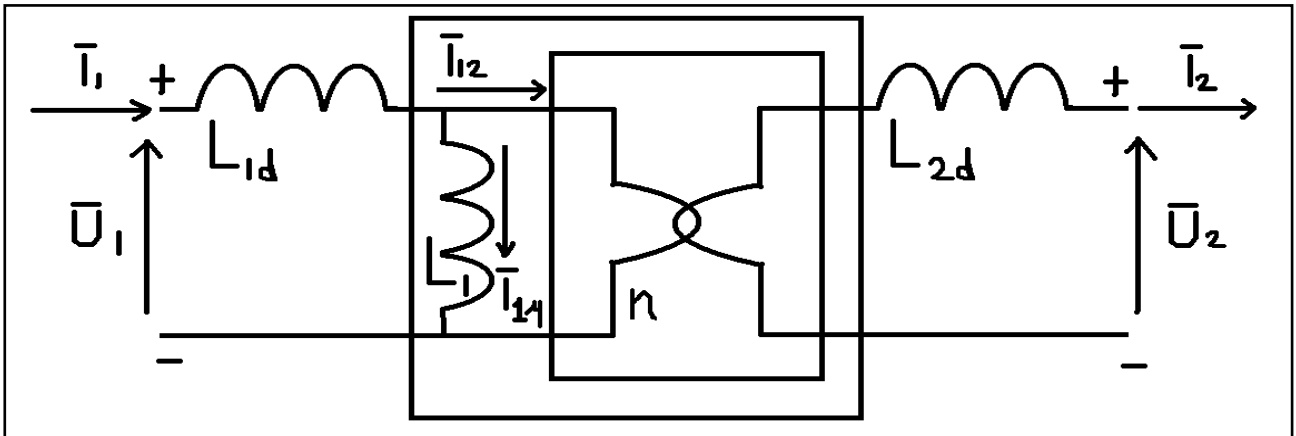
$$\bar{I}_{1\mu} = \frac{\bar{U}_1 - j\omega L_{1d} \bar{I}_1}{j\omega L_1}$$



$$\bar{I}_{12} = \frac{1}{n} \bar{I}_2$$

I riquadri isolano il trasformatore ideale (riquadro interno) e il trasformatore ideale con riluttanza (riquadro esterno). Il trasformatore ideale con riluttanza e dispersione si ottiene collegando in serie al trasformatore ideale con riluttanza due induttanze, una a primario ed una a secondario.

La rappresentazione di trasmissione a secondario del trasformatore ideale con riluttanza e dispersione si ricava facilmente. Si ha



$$\begin{cases} (\bar{U}_1 - j\omega \bar{I}_1 L_{1d}) = n(\bar{U}_2 + j\omega L_{2d} \bar{I}_2) \\ \bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1 - j\omega L_{1d} \bar{I}_1}{j\omega L_1} + \frac{1}{n} \bar{I}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\bar{U}_2 + j\omega L_{2d} \bar{I}_2) = \frac{(\bar{U}_1 - j\omega \bar{I}_1 L_{1d})}{n} \\ \bar{I}_2 = n \bar{I}_1 - n \frac{\bar{U}_1 - j\omega L_{1d} \bar{I}_1}{j\omega L_1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (\bar{U}_2 + j\omega L_{2d} \bar{I}_2) = \frac{(\bar{U}_1 - j\omega \bar{I}_1 L_{1d})}{n} \\ \bar{I}_2 = n \bar{I}_1 - n^2 \frac{\bar{U}_2 + j\omega L_{2d} \bar{I}_2}{j\omega L_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\bar{U}_2 + j\omega L_{2d} \bar{I}_2) = \frac{(\bar{U}_1 - j\omega \bar{I}_1 L_{1d})}{n} \\ \bar{I}_2 = n \bar{I}_1 - \frac{\bar{U}_2 + j\omega L_{2d} \bar{I}_2}{j\omega L_2} \end{cases}$$

e lo schema equivalente è quello indicato in figura, il quale poi poteva anche essere desunto dalla proprietà del trasferimento di impedenza del trasformatore ideale.

IV) VERSO IL TRASFORMATORE REALE, TRASFORMATORE IDEALE CON RILUTTANZA, DISPERSIONE DEL FLUSSO E RESISTENZA NEGLI AVVOLGIMENTI

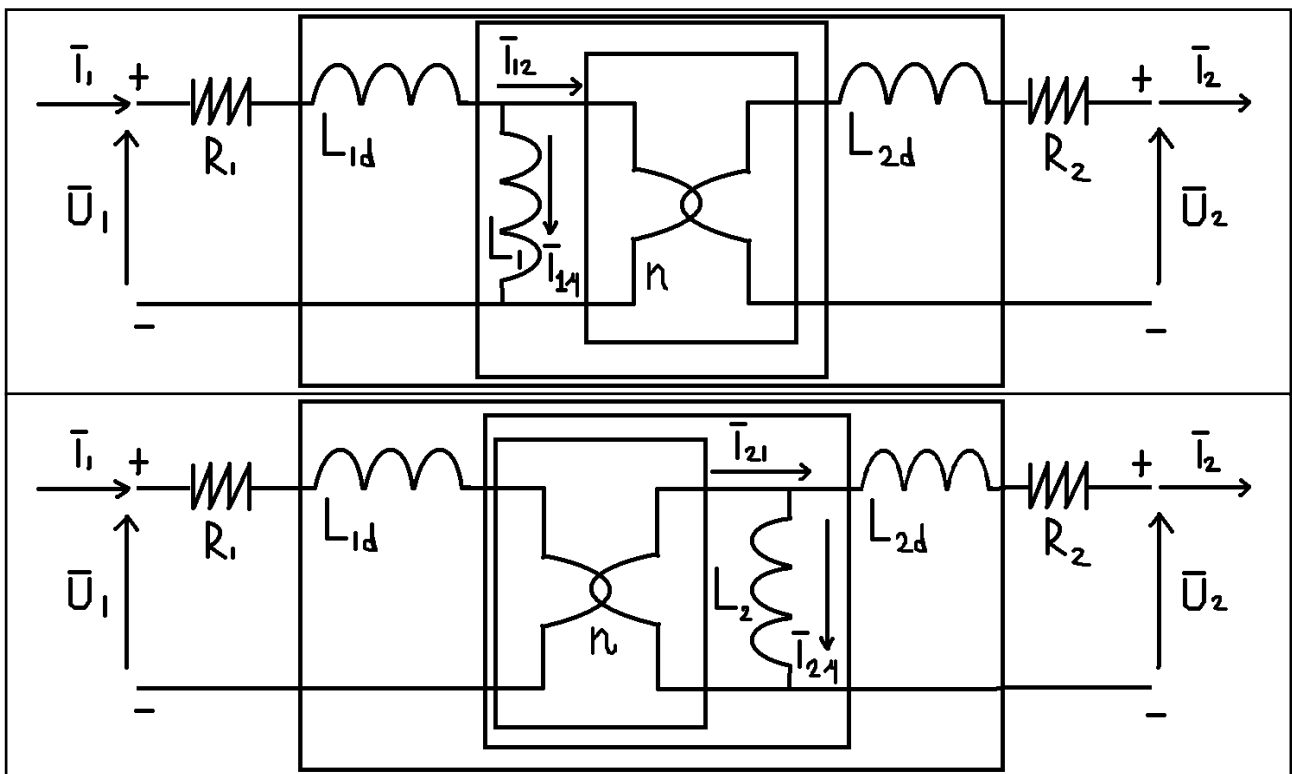
DEDUZIONE,

TRASFORMATORE IDEALE CON RILUTTANZA, DISPERSIONE E RESISTENZA. La rappresentazione di trasmissione alla porta uno del trasformatore ideale con riluttanza, dispersione e resistenza è

$$\begin{cases} [\bar{U}_1 - (R_1 + j\omega L_{1d})\bar{I}_1] = n[\bar{U}_2 + (R_2 + j\omega L_{2d})\bar{I}_2] \\ \bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1 - (R_1 + j\omega L_{1d})\bar{I}_1}{j\omega L_1} + \frac{1}{n}\bar{I}_2 \end{cases}$$

La rappresentazione di trasmissione alla porta due è

$$\begin{cases} [\bar{U}_2 + (R_2 + j\omega L_{2d})\bar{I}_2] = \frac{[\bar{U}_1 - (R_1 + j\omega \bar{I}_1 L_{1d})]}{n} \\ \bar{I}_2 = n\bar{I}_1 - \frac{\bar{U}_2 + (R_2 + j\omega L_{2d})\bar{I}_2}{j\omega L_2} \end{cases}$$



DIMOSTRAZIONE. La resistenza degli avvolgimenti è messa in conto inserendo una resistenza R_1 in serie con la induttanza di dispersione a primario e una resistenza R_2 in serie con la induttanza di dispersione a secondario. Da ciò le due rappresentazioni di trasmissione indicate.

DEDUZIONE,

SCHEMA EQUIVALENTE DEL TRASFORMATORE CON RILUTTANZA, DISPERSIONE DEL FLUSSO E RESISTENZA. Gli schemi equivalenti in questo caso si ottengono mettendo in serie alle induttanze di dispersione due resistenze. Sono dunque quelli in figura.

I riquadri isolano, da quello più interno, a quello più esterno

- 1)il trasformatore ideale;
- 2)il trasformatore ideale con riluttanza;
- 3)il trasformatore ideale con riluttanza e dispersione;
- 4)il trasformatore ideale con riluttanza, dispersione e resistenza negli avvolgimenti.

V) TRASFORMATORE REALE

DEDUZIONE,

TRASFORMATORE REALE. La rappresentazione di trasferimento alla porta uno del trasformatore reale (ovvero del trasformatore ideale con riluttanza, dispersione, resistenza e perdite nel nucleo) è la seguente

$$\begin{cases} [\bar{U}_1 - (R_1 + j\omega L_{1d})\bar{I}_1] = n[\bar{U}_2 + (R_2 + j\omega L_{2d})\bar{I}_2] \\ \bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1 - (R_1 + j\omega L_{1d})\bar{I}_1}{\frac{j\omega RL_1}{R + j\omega L_1}} + \frac{1}{n}\bar{I}_2 \end{cases}$$

mentre la rappresentazione di trasferimento alla porta due è data da

$$\begin{cases} [\bar{U}_2 + (R_2 + j\omega L_{2d})\bar{I}_2] = \frac{[\bar{U}_1 - (R_1 + j\omega \bar{I}_1 L_{1d})]}{n} \\ \bar{I}_2 = n\bar{I}_1 - n^2 \frac{\bar{U}_2 + (R_2 + j\omega L_{2d})\bar{I}_2}{\frac{j\omega RL_1}{R + j\omega L_1}} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che la perdita di potenza causata da isteresi e correnti parassite è proporzionale al quadrato del valore massimo della induzione magnetica. Ora consideriamo che nel trasformatore ideale la tensione ai capi del primario, per la legge di Farady-Neumann-Lenz è

$$j\omega N_1 \bar{\Phi} = j\omega N_1 \bar{B}S$$

dove S è la sezione del nucleo ferromagnetico. Dunque il suo valore efficace sarà

$$\frac{\omega N_1 B_M S}{\sqrt{2}} = k B_M$$

Se ora mettiamo una resistenza R in parallelo all'avvolgimento primario del trasformatore ideale, la potenza dissipata, per effetto Joule, da tale resistenza sarà

$$\frac{(kB_M)^2}{R}$$

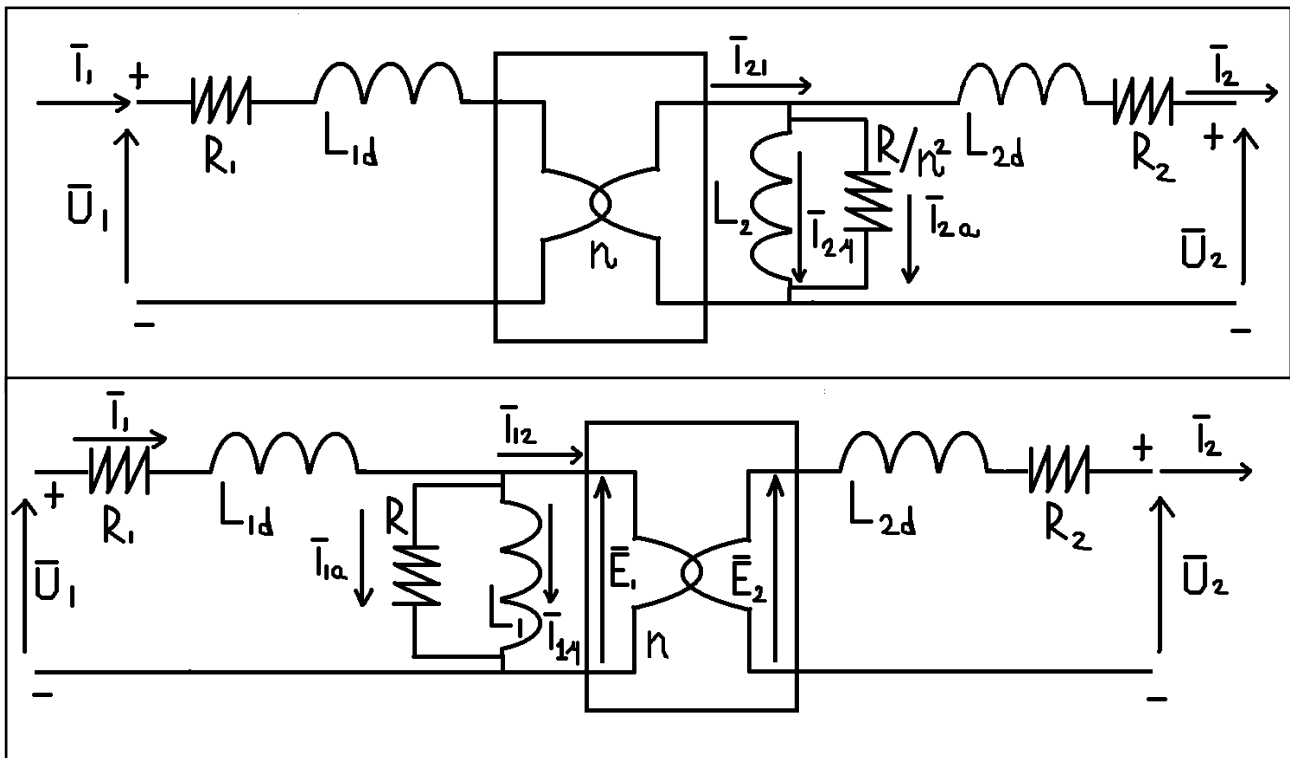
Questo per dire che le perdite per isteresi e correnti parassite possono essere rappresentate da una resistenza messa in parallelo al trasformatore ideale. Da ciò deriva la tesi, dove si è considerata una resistenza R in parallelo con il trasformatore ideale, a primario, e dunque con l'impedenza dell'avvolgimento primario. Infatti l'impedenza così costituita si scrive

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L_1} \right)^{-1} = \left(\frac{R + j\omega L_1}{j\omega L_1 R} \right)^{-1} = \frac{j\omega L_1 R}{R + j\omega L_1}$$

La rappresentazione di trasmissione a secondario si ottiene poi immediatamente da quella a primario.

DEDUZIONE,

SCHEMA EQUIVALENTE DEL TRASFORMATORE REALE. Per quanto visto si parte dal trasformatore ideale con riluttanza, perdite e resistenza e vi si aggiunge in parallelo a primario una



resistenza. Naturalmente lo schema equivalente può essere fatto anche trasferendo la resistenza a secondario con l'accortezza di dividerla per il quadrato del rapporto di trasformazione (proprietà del trasferimento di impedenza del trasformatore ideale).

DEDUZIONE,

DIAGRAMMA FASORIALE DEL TRASFORMATORE REALE. Si assumono note la tensione e la corrente a secondario. Si disegna allora il diagramma fasoriale secondo l'ordine seguente.

1) si tracciano tensione e corrente del secondario (nel diagramma si è assunto corrente in ritardo di fase, ovvero carico resistivo-induttivo);

2) si disegna la tensione a secondario del trasformatore ideale che si indica

$$\bar{E}_2 \stackrel{\Delta}{=} \bar{U}_2 + (R_2 + j\omega L_{2d})\bar{I}_2$$

3) si disegna la tensione a primario del trasformatore ideale che si indica

$$\bar{E}_1 \stackrel{\Delta}{=} \bar{U}_1 - (R_1 + j\omega L_{1d})\bar{I}_1$$

e che risulta in fase con $\bar{E}_2$ essendo $\bar{E}_1 = n\bar{E}_2$ (nel diagramma si assume $n > 1$);

4) si disegna la corrente secondaria riportata a primario, data da

$$\bar{I}_{12} = \frac{1}{n} \bar{I}_2$$

in fase dunque con $\bar{I}_2$ (nel diagramma si assume $n > 1$);

5) la corrente

$$\begin{aligned} \bar{I}_{10} &\stackrel{\Delta}{=} \bar{I}_{1\mu} + \bar{I}_{1a} = \\ &= \frac{\bar{U}_1 - (R_1 + j\omega L_{1d})\bar{I}_1}{R_1} + \frac{\bar{U}_1 - (R_1 + j\omega L_{1d})\bar{I}_1}{j\omega L_1} = \frac{\bar{E}_1}{R_1} + \frac{\bar{E}_1}{j\omega L_1} \end{aligned}$$

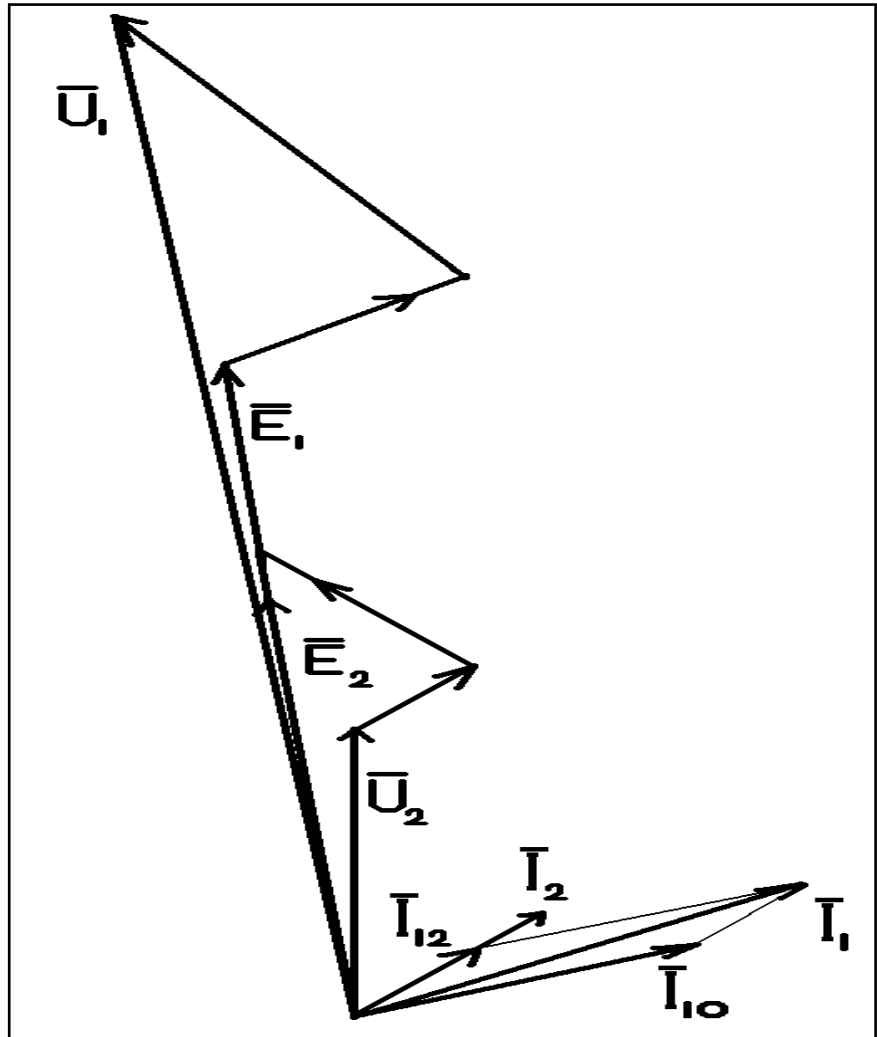
detta corrente a vuoto, le cui componenti sono rispettivamente in fase e in quadratura in ritardo rispetto ad $\bar{E}_1$;

6) la corrente primaria $\bar{I}_1$ data da

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_{10} + \bar{I}_{12}$$

7) la tensione primaria data da

$$\bar{U}_1 = \bar{E}_1 + (R_1 + j\omega L_{1d})\bar{I}_1$$



VI) FUNZIONAMENTO A VUOTO DEL TRASFORMATORE REALE

DEFINIZIONE,

IMPEDENZA A VUOTO A PRIMARIO. Definiamo impedenza a vuoto a primario la impedenza dovuta alla riluttanza del nucleo e alle perdite del nucleo. Si pone

$$\dot{Z}_{10} \triangleq \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L_1} \right)^{-1} = \frac{j\omega L_1 R}{R + j\omega L_1}$$

DEDUZIONE,

FUNZIONAMENTO A VUOTO DEL TRASFORMATORE REALE. A vuoto il trasformatore reale presente i due schemi equivalenti seguenti. Nel primo abbiamo una serie di due impedenze, l'impedenza

$$\dot{Z}_1 \triangleq R_1 + j\omega L_{1d}$$

e l'impedenza

$$\dot{Z}_{10} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L_1} \right)^{-1} = \frac{j\omega L_1 R}{R + j\omega L_1}$$

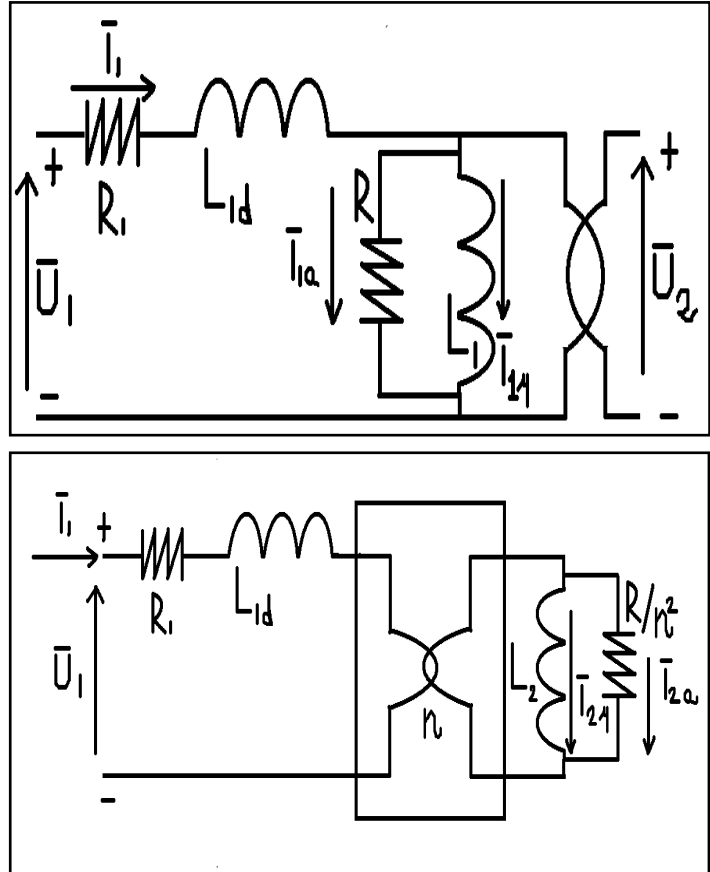
Riportando quest'ultima a secondario si ha il secondo schema equivalente.

Si deve osservare che nei trasformatori di potenza⁴ in genere il modulo della prima impedenza (quella dovuta a resistenza nell'avvolgimento e a perdite di flusso) è circa 1000 volte minore di quello della seconda (quella dovuta a perdite nel nucleo e alla riluttanza del nucleo) e dunque, essendo le due in serie, la prima può trascurarsi rispetto alla seconda. Ne segue che la rappresentazione di trasferimento alla porta uno del trasformatore è

$$\begin{cases} \bar{U}_1 (= \bar{E}_1) = n \bar{U}_2 (= n \bar{E}_2) \\ \bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_{10}} \approx \bar{I}_{10} = \bar{I}_{1a} + \bar{I}_{1\mu} = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_{10}} = \frac{\bar{E}_1}{\frac{j\omega L_1 R}{R + j\omega L_1}} \end{cases}$$

DEFINIZIONE,

CORRENTE A VUOTO A PRIMARIO. Dico corrente a vuoto a primario il valore efficace della corrente che circola nella impedenza a vuoto a primario quando la tensione a primario ha valore efficace pari a quello della tensione nominale a primario. Dunque essa vale



⁴ Sono quei trasformatori nei quali la frequenza è uguale a quella industriale, ovvero sui 50 o 60 Hz.

$$I_{10} = \frac{U_{1n}}{Z_{10}}$$

Essa spesso è considerata sottoforma di corrente percentuale. Si parla allora di corrente a vuoto a primario percentuale, data da

$$i_{10} \% = \frac{I_{10}}{I_{1n}} 100 = \frac{U_{1n}}{Z_{10} I_{1n}} 100$$

dove al denominatore compare la corrente nominale a primario.

OSSERVAZIONE,

CONCLUSIONE. Il trasformatore a vuoto si comporta come un trasformatore ideale per quanto concerne le tensioni, ma non per quanto riguarda le correnti. Infatti basti vedere che pur essendo nulla la corrente del secondo avvolgimento, la corrente del primo avvolgimento è non nulla.

VI) FUNZIONAMENTO IN CORTOCIRCUITO DEL TRASFORMATORE REALE

DEFINIZIONE,

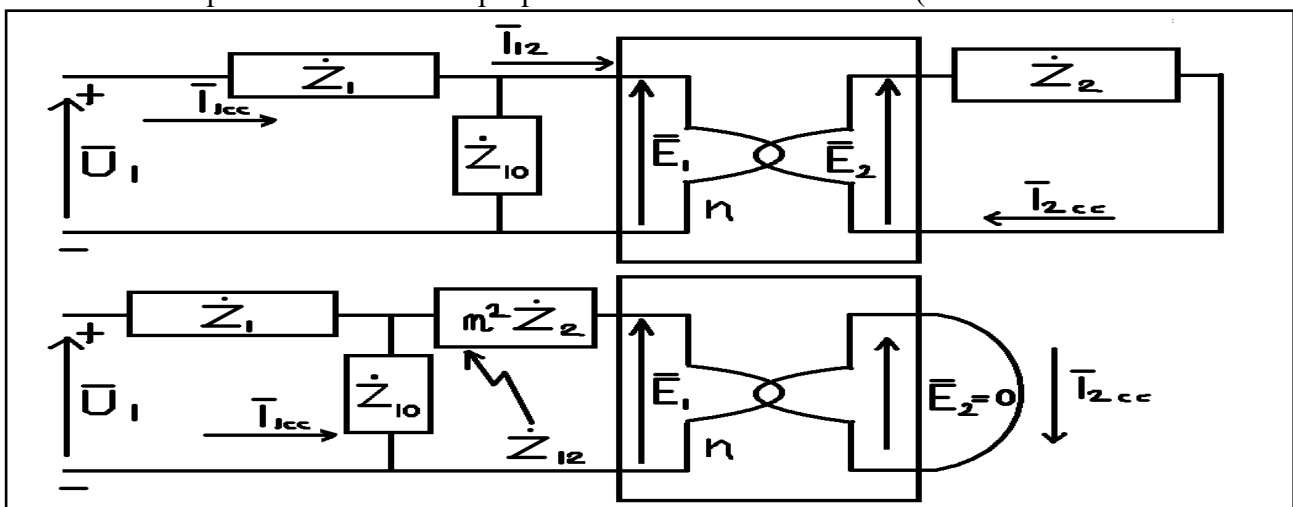
CORTOCIRCUITO. Si parla di cortocircuito del trasformatore reale quando il secondario è cortocircuitato. In queste condizioni le correnti a primario e a secondario sono dette di cortocircuito e si pone

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_{1cc}$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_{2cc}$$

DEDUZIONE,

SCHEMA EQUIVALENTE RIPORTATO A PRIMARIO. Quando si studia il comportamento in cortocircuito del trasformatore reale si riporta a primario l'impedenza che si trova al secondario. Sfruttando dunque il risultato di una proprietà del trasformatore ideale (vedi il teorema 'chiusura del



secondario') si passa dallo schema equivalente disegnato sopra a quello disegnato più sotto, dove compare l'impedenza

$$\dot{Z}_{12} \overset{\Delta}{=} n^2 \dot{Z}_2$$

Poiché poi l'impedenza dovuta a riluttanza e induttanza di avvolgimento è, nei trasformatori di potenza, circa 1000 volte superiore a quella dovuta a perdite nel nucleo e flusso disperso, lo schema equivalente si riduce a quello più sotto.

DEFINIZIONE,

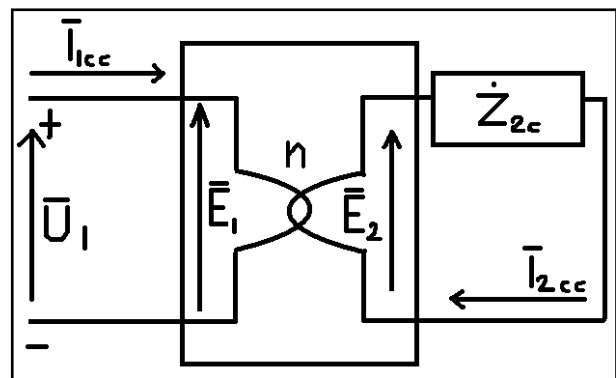
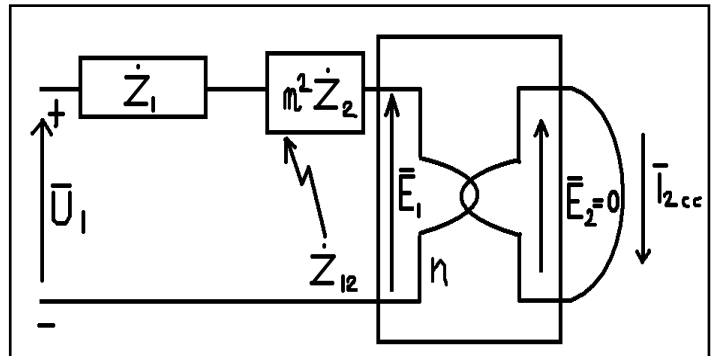
IMPEDENZA DI CORTOCIRCUITO A PRIMARIO. Si consideri lo schema equivalente del trasformatore in corto circuito. Le due impedenze in serie a primario costituiscono una impedenza detta impedenza di corto circuito a primario. Si pone

$$\dot{Z}_{1c} = \dot{Z}_1 + n^2 \dot{Z}_2$$

DEFINIZIONE,

IMPEDENZA DI CORTOCIRCUITO A SECONDARIO. Se riportiamo a secondario l'impedenza di cortocircuito a primario otteniamo la così detta impedenza di cortocircuito a secondario. Poniamo

$$\dot{Z}_{2c} \overset{\Delta}{=} \frac{\dot{Z}_{1c}}{n^2} = \frac{\dot{Z}_1}{n^2} + \dot{Z}_2$$



DEDUZIONE,

SCHEMA EQUIVALENTE RIPORTATO A SECONDARIO. Riportando a secondario l'impedenza di cortocircuito a primario otteniamo lo schema equivalente qui disegnato.

DEFINIZIONE,

TENSIONE PRIMARIA DI CORTOCIRCUITO. La tensione primaria di cortocircuito è la tensione efficace che si avrebbe a primario qualora circolasse in esso la corrente nominale primaria, dunque

$$U_{1c} = I_{1n} Z_{1c}$$

Si usa anche introdurre una tensione primaria di cortocircuito percentuale

$$u_{1c} \% = \frac{I_{1n} Z_{1c}}{U_{1n}} 100$$

DEFINIZIONE,

TENSIONE SECONDARIA DI CORTOCIRCUITO. La tensione secondaria di cortocircuito è la tensione efficace che si avrebbe a secondario se in esso circolasse la corrente nominale secondaria, dunque

$$U_{2c} = I_{2n} Z_{2c}$$

Si usa anche introdurre una tensione secondaria di cortocircuito percentuale

$$u_{2c} \% = \frac{I_{2n} Z_{2c}}{U_{2n}} 100$$

DEDUZIONE,

TENSIONI PERCENTUALI DI CORTOCIRCUITO. Le due tensioni percentuali di cortocircuito sono uguali fra loro.

DIMOSTRAZIONE. Si osservi che

$$u_{1c} \% = \frac{I_{1n} Z_{1c}}{U_{1n}} 100 = \left(\frac{I_{2n}}{n} \right) \frac{(n^2 Z_{2c})}{(n U_{2n})} 100 = \frac{I_{2n} Z_{2c}}{U_{2n}} 100$$

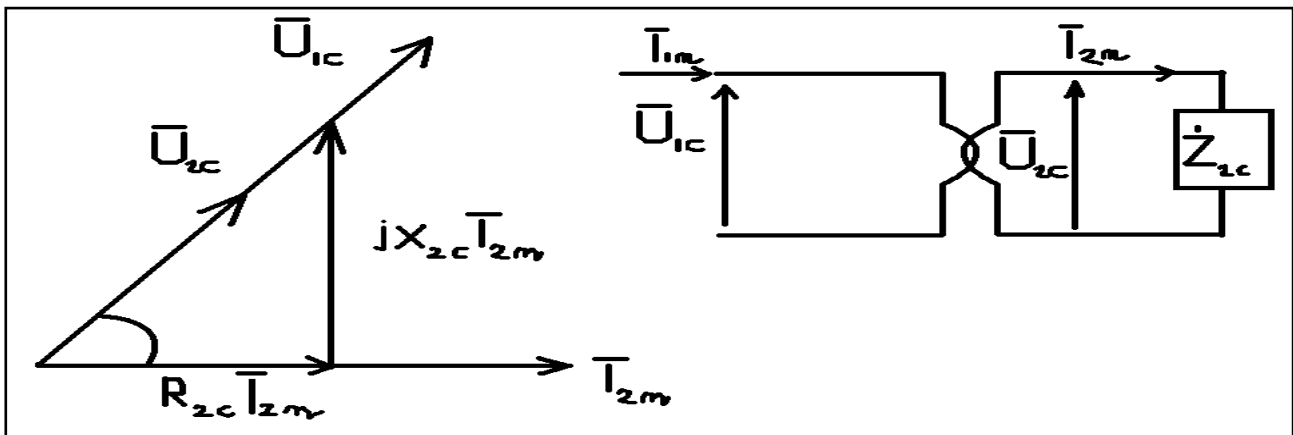
Si pone allora

$$u_{cc} \% \overset{\Delta}{=} u_{1c} \% = u_{2c} \%$$

DEFINIZIONE,

FATTORE DI POTENZA IN CORTOCIRCUITO. Definisco fattore di potenza in cortocircuito

$$\cos \phi_{cc} \overset{\Delta}{=} \cos \left[\arg \left(\dot{Z}_{1c} \right) \right] = \cos \left[\arg \left(\dot{Z}_{2c} \right) \right]$$

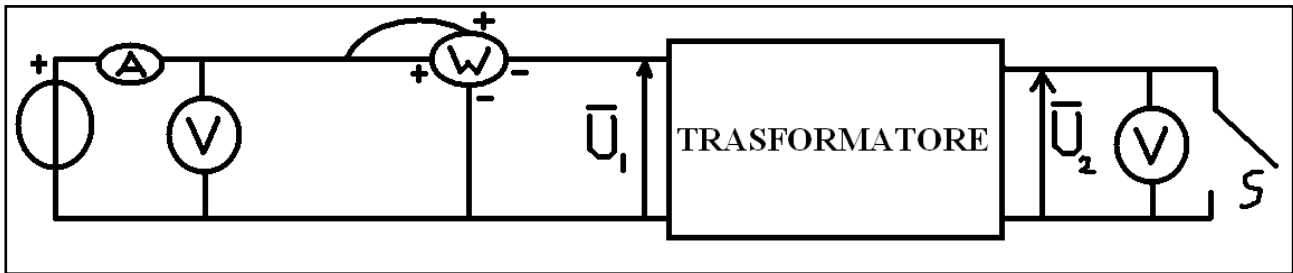


DEFINIZIONE,

TRIANGOLO DI CORTOCIRCUITO. Nel caso in cui le correnti primaria e secondaria abbiano valore efficace pari a quello delle correnti nominali, il diagramma fasoriale prende il nome di triangolo di cortocircuito.

VII) MISURA DEI PARAMETRI DEGLI SCHEMI EQUIVALENTI

La misura dei parametri degli schemi equivalenti del trasformatore può essere effettuata attraverso gli strumenti di misura indicati nella illustrazione.



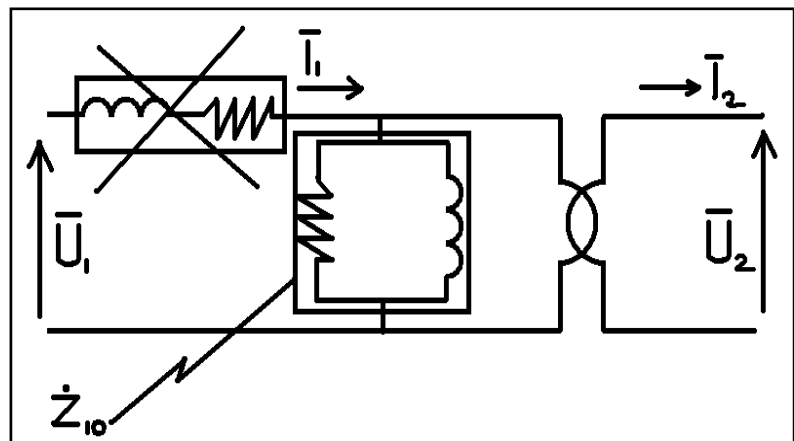
PROVA A VUOTO. L'interruttore S sia aperto. Il primario sia alimentato. Allora gli strumenti consentono di calcolare l'impedenza a vuoto a primario. Si ha infatti

$$Z_{10} = \frac{U_1}{I_1}$$

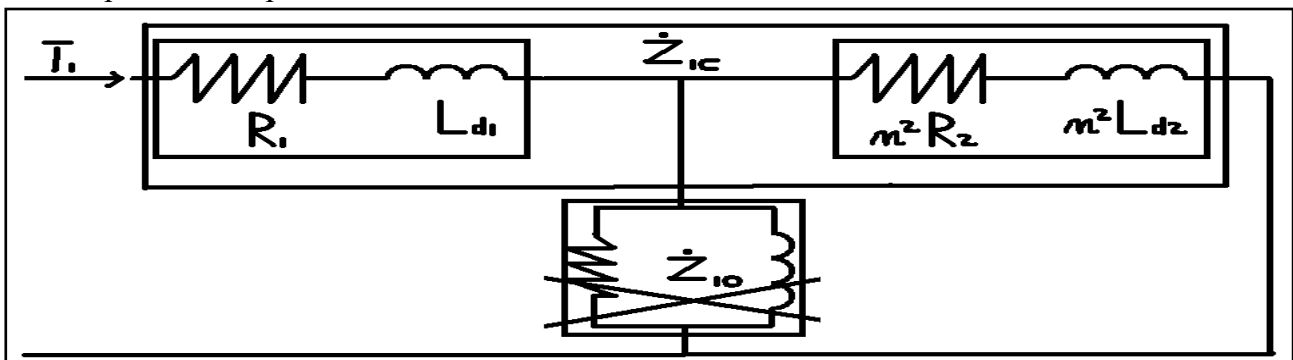
$$\cos \varphi_0 = \frac{P}{U_1 I_1} \Rightarrow \varphi_0 = \arccos \left(\frac{P}{U_1 I_1} \right)$$

Sarà inoltre possibile ricavare anche il rapporto di trasformazione

$$n = \frac{U_1}{U_2}$$



PROVA IN CORTOCIRCUITO. L'interruttore S sia ora chiuso. Il primario sia alimentato. Il modulo dell'impedenza di cortocircuito a primario si ricava dalle misure del voltmetro e dell'amperometro a primario, infatti



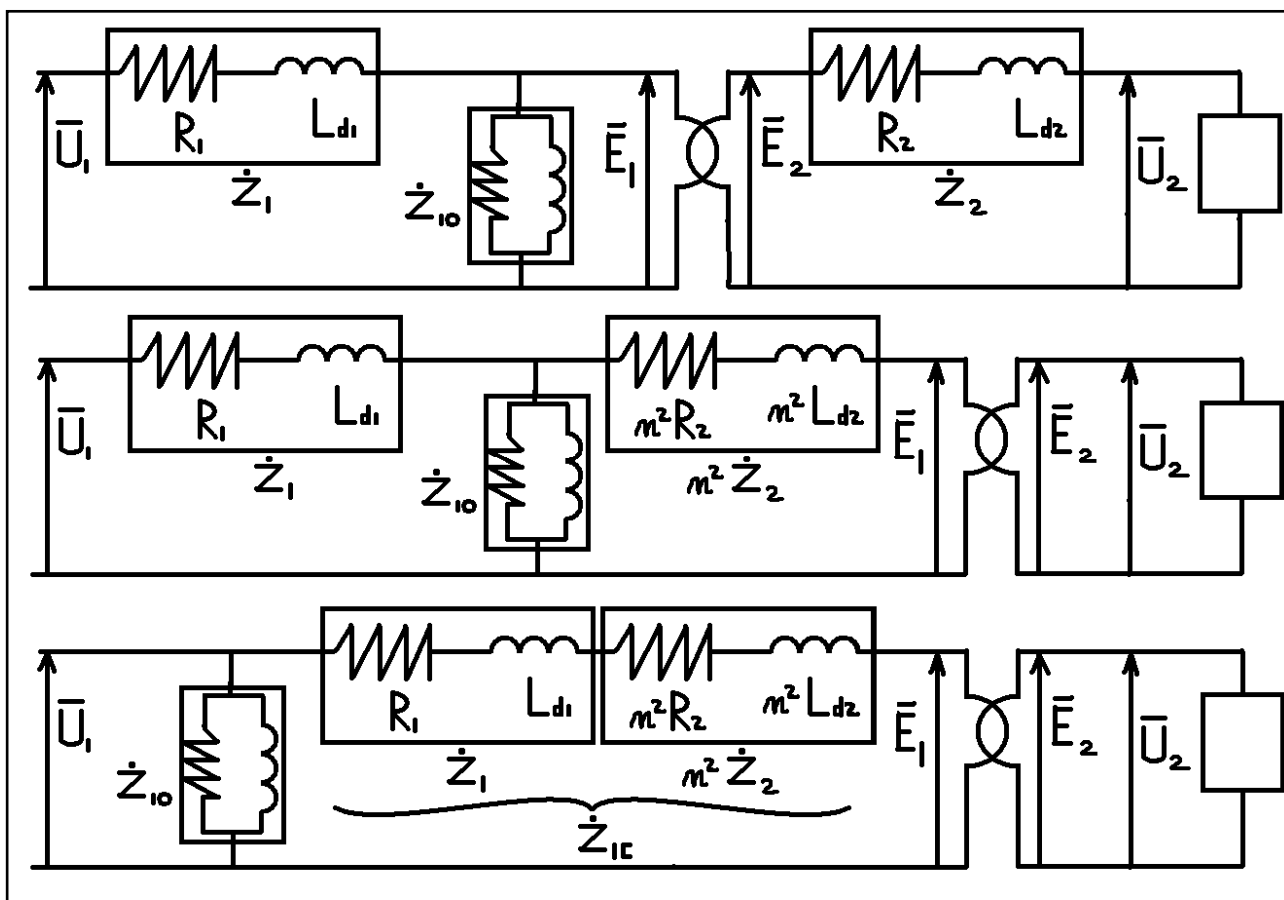
$$Z_{1c} = \frac{U_1}{I_1} \Rightarrow Z_{2c} = \frac{Z_{1c}}{n^2}$$

e ovviamente, dalla conoscenza del rapporto di trasformazione deriva anche la conoscenza della impedenza di cortocircuito a secondario. L'argomento della impedenza di cortocircuito si ricava dalla misura del wattmetro. Si infatti

$$\cos \varphi_c = \frac{P}{U_1 I_1} \Rightarrow \varphi_c = \arccos \left(\frac{P}{U_1 I_1} \right)$$

VII) FUNZIONAMENTO A CARICO

Il funzionamento a carico si realizza quando la porta del secondario è chiusa su di un carico.



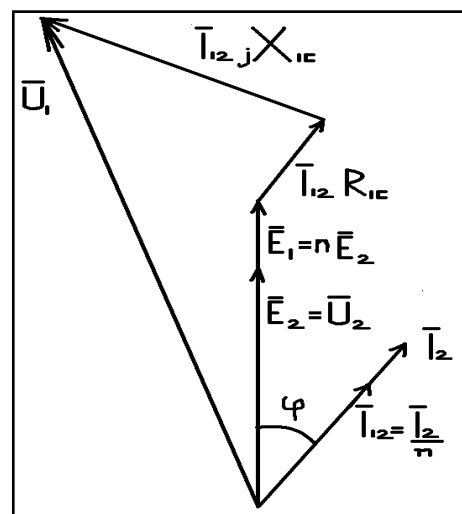
SCHEMA EQUIVALENTE SEMPLIFICATO. Partiamo dallo schema equivalente del trasformatore reale chiuso a secondario su un carico. Spostiamo a primario la impedenza del secondario in cui sono considerati gli effetti della resistenza dell'avvolgimento a secondario e della dispersione del flusso di induzione da parte dell'avvolgimento secondario. Fatto ciò si osserva che in genere si ha

$$\bar{U}_1 \approx \bar{E}_1$$

e ciò ci induce a slittare l'impedenza a vuoto del primario a monte della impedenza del primario. Otteniamo così a primario una impedenza serie la quale non è altro che l'impedenza di cortocircuito a primario.

Quello che così si ottiene è lo schema semplificato a cui si ricorre per descrivere il funzionamento del trasformatore reale chiuso su di un carico.

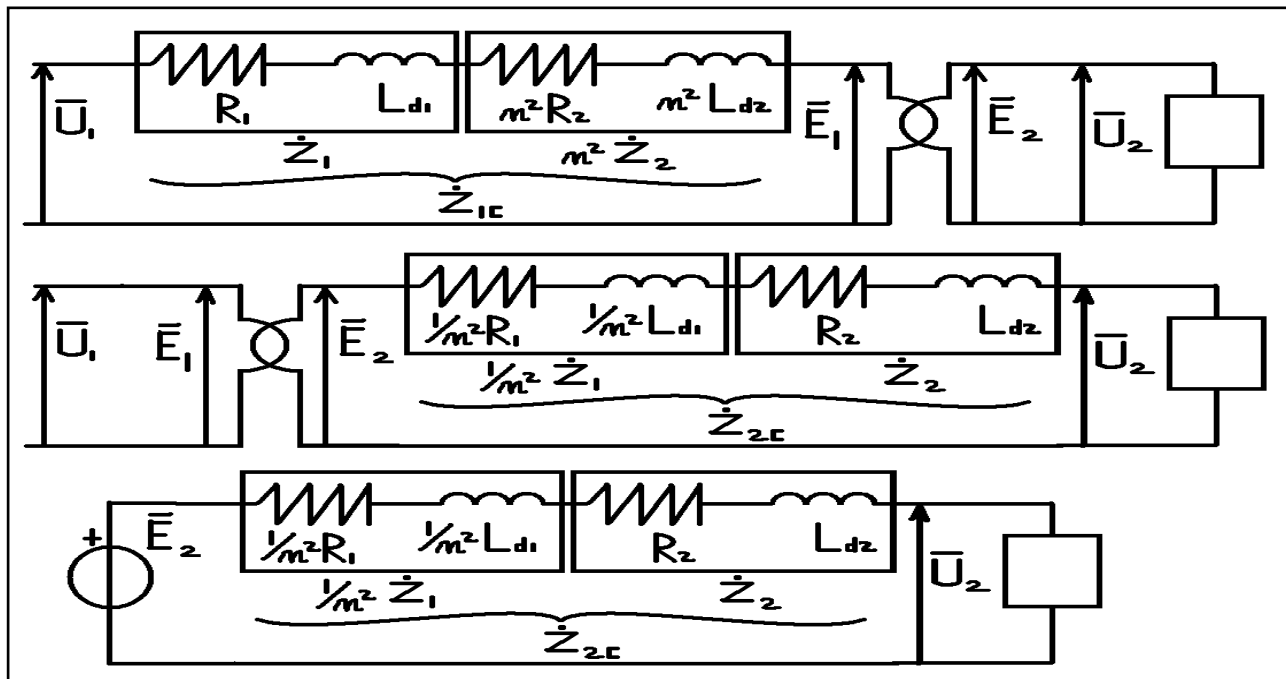
DIAGRAMMA FASORIALE. Per disegnare il diagramma fasoriale del trasformatore reale chiuso su di un carico si procede secondo i passi seguenti.



1) Si assumono note la tensione e la corrente del secondario, ovvero del carico.

- 2) Si tracciano la corrente secondaria riportata a primario e la tensione $\bar{E}_2$.
- 3) Si risale alla tensione a primario tracciando il fasore della caduta di tensione in corrispondenza della impedenza di cortocircuito.

SECONDO SCHEMA EQUIVALENTE SEMPLIFICATO. Se non ci interessa conoscere la

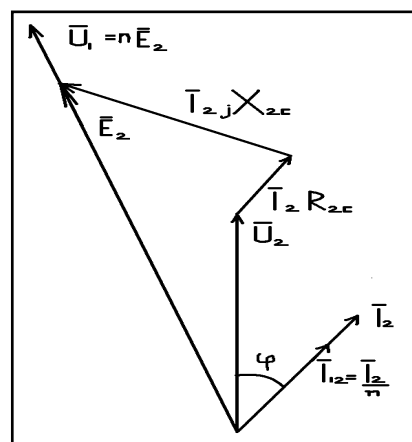


corrente a vuoto del primario, ovvero la $\bar{I}_{10}$, allora possiamo non considerare l'impedenza a vuoto a primario. Trasportando poi a secondario l'impedenza a vuoto a primario otteniamo lo schema equivalente indicato in figura.

E' evidente allora come, dal punto di vista del carico, il trasformatore non sia che un generatore normale di tensione avente tensione imposta

$$\bar{E} = \bar{E}_2 = \frac{1}{n} \bar{U}_1$$

Si riporta anche il diagramma fasoriale relativo a questa situazione.



METODO GRAFICO PER LA DETERMINAZIONE DELLA CADUTA DI TENSIONE A SECONDARIO. Ci interessa conoscere la caduta di tensione che si verifica nell'avvolgimento secondario quando da aperto che sia lo chiudiamo su di un carico. In particolare ci interessa la caduta in termini di valore efficace. Vogliamo cioè conoscere la quantità

$$\Delta U_2 = U_{20} - U_2 = E_2 - U_2$$

A tale scopo si usa una formula approssimata che si ricava da un metodo grafico illustrato nel seguito.

Si parte dal diagramma fasoriale del secondo schema equivalente introdotto. Si tralascia la tensione del primario che ora non ci interessa.

Il metodo si basa sulla assunzione che il segmento CD sia di lunghezza trascurabile. Ovvero che la caduta di tensione, in termini di valori efficaci, sia esprimibile come

$$\Delta U_2 = E_2 - U_2 = \overline{BC} + \overline{AB} = I_2 (R_{2c} \cos \varphi + X_{2c} \sin \varphi)$$

Dunque si distinguono i tre casi seguenti.

1) Nel passaggio da vuoto a carico si ha una caduta di tensione. Allora si verifica che

$$\Delta U_2 = E_2 - U_2 = I_2 (R_{2c} \cos \varphi + X_{2c} \sin \varphi) > 0 \Leftrightarrow$$

$$R_{2c} \cos \varphi + X_{2c} \sin \varphi > 0 \Leftrightarrow \tan \varphi > \frac{-R_{2c}}{X_{2c}}$$

Cioè la tensione a secondario scende da vuoto a carico se esso è chiuso su di un carico ohmico-capacitivo, prevalentemente ohmico, oppure se il carico è ohmico induttivo.

2) Nel passaggio da vuoto a carico si ha un aumento di tensione. Ragionando come sopra si vede che questo accade in caso in cui il secondario si chiuda su un carico ohmico-induttivo.

3) Nel passaggio da vuoto a carico la tensione resta inalterata. Il carico sarà dunque prevalentemente resistivo.

CADUTA DI TENSIONE PERCENTUALE. Spesso la caduta di tensione è espressa sulla tensione a vuoto a secondario. Si parla di caduta di tensione percentuale e si esprime

$$\Delta u_2 \% = \frac{\Delta U_2}{U_{20}} 100 \approx \frac{I_2 (R_{2c} \cos \varphi + X_{2c} \sin \varphi)}{U_{20}} 100$$

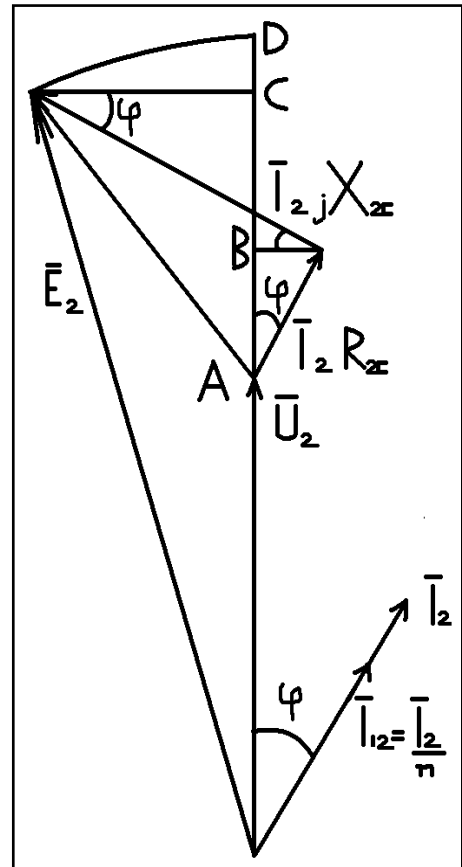
VIII) RENDIMENTO DEL TRASFORMATORE

PERDITE. Le perdite di potenza che si verificano nel trasformatore reale sono di due tipi. Esaminiamole una ad una.

1) Perdite nel rame. Si tratta delle perdite di potenza dovute alla resistenza elettrica dei due avvolgimenti. Se facciamo riferimento allo schema equivalente semplificato del trasformatore reale tali perdite si possono esprimere nel seguente modo

$$P_{cu} = R_{1c} I_1^2 = \frac{R_{2c}}{n^2} (n I_2)^2 = R_{2c} I_2^2$$

2) Perdite nel ferro. Si tratta delle perdite che si manifestano nel nucleo ferromagnetico per isteresi e per correnti parassite. Facendo riferimento allo schema equivalente semplificato del trasformatore reale tali perdite si possono esprimere nel modo seguente



$$P_f = R_{10} I_{10R}^2 = R_{10} \frac{U_1^2}{R_{10}^2} = \frac{U_1^2}{R_{10}}$$

RENDIMENTO. Sia P la potenza attiva erogata a secondario dal trasformatore. Allora il suo rendimento si scrive

$$\eta = \frac{P}{P_f + P_{cu} + P}$$

Si definisce anche un rendimento nominale. Esso è il rendimento che si ha quando al primario viene fornita una potenza pari alla potenza nominale con fattore di potenza unitario (si ricorda che la potenza nominale ha significato di potenza apparente e che dunque, in questo caso, essa coincide con la potenza attiva). Si riscontra che il rendimento nominale aumenta all'aumentare della potenza nominale del trasformatore.

Si riportano alcuni valori del rendimento nominale di trasformatori monofase caratterizzati da diverse potenze nominali.

POTENZA NOMINALE (kVA)	1	10	100	1.000	10.000	50.000
RENDIMENTO NOMINALE	0,93	0,96	0,975	0,985	0,99	0,993

IX) VALORI NOMINALI, DATI DI TARGA

VALORI NOMINALI. I valori nominali sono in genere i valori efficaci delle grandezze elettriche per le quali si ha il funzionamento ottimale della macchina, con alcune eccezioni. I valori nominali più importanti sono quelli riportati in questa tabella.

U_{1n}	tensione nominale primaria (V)
U_{2n}	tensione nominale secondaria (V)
I_{1n}	corrente nominale primaria (A)
I_{2n}	corrente nominale secondaria (A)
P_n	potenza nominale (VA)
f_n	frequenza nominale (Hz)
n	rapporto di trasformazione

Le tensioni e le correnti si intendono come valori efficaci. Nel caso di macchine trifasi le tensioni sono quelle concatenate e le correnti sono le correnti di linea. La potenza nominale è la potenza apparente in entrata a primario. Essa soddisfa la seguente relazione per le macchine monofasi

$$P_n = U_{1n} I_{1n} = U_{2n} I_{2n}$$

e la seguente relazione per le macchine trifasi

$$P_n = 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} U_{1n} \right) I_{1n} = 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} U_{2n} \right) I_{2n}$$

Si osserva che la potenza in entrata si considera uguale a quella in uscita, come se non si avessero perdite di potenza nel trasformatore.

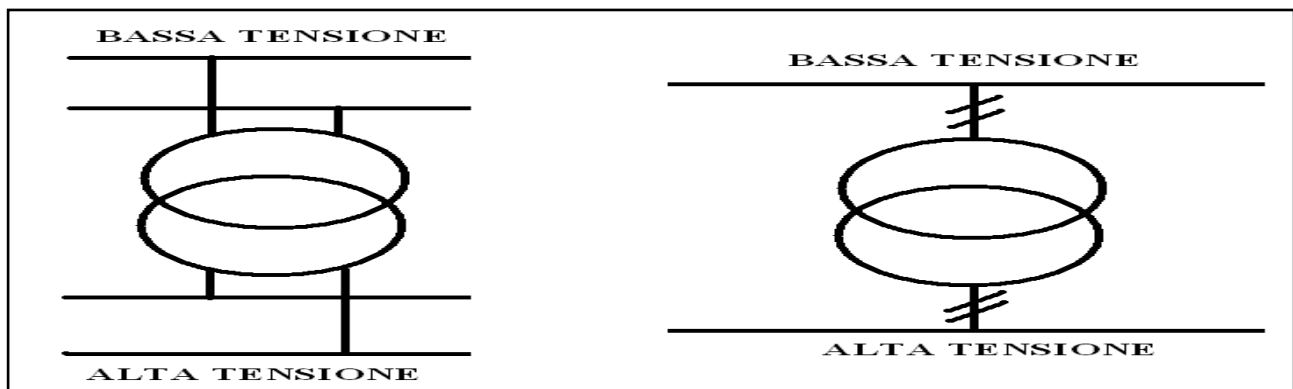
La frequenza nominale è quella delle grandezze elettriche della rete a cui viene collegato il trasformatore. Noi consideriamo esclusivamente i trasformatori che lavorino a frequenza industriale (50 Hz). Essi sono spesso detti **trasformatori di potenza**.

DATI DI TARGA. I principali parametri di funzionamento del trasformatore sono detti dati di targa. Il nome è dovuto al fatto che essi sono riportati su una vera e propria targa montata sullo stesso trasformatore. Gli elementi riportati sulla targa del trasformatore sono i seguenti.

- 1) Costruttore, numero di matricola e anno di fabbricazione.
- 2) Marchi di conformità normativa (quali il marchio europeo CE).
- 3) I valori nominali.
- 4) $u_{cc} \%$.
- 5) $\cos \varphi_{cc}$.
- 6) Tipo di raffreddamento (si usano sigle come O.N.=olio naturale, A.N.=aria naturale...).
- 7) Tipo di servizio.
- 8) Peso.

Riporto una targa paradigmatica.

Officine Elettriche Anonime Boara Pisani (Padova)			
TRASFORMATORE MONOFASE		N. 3827	
anno	1999	f_n	50 Hz
P_n	100 kVA	$u_{cc} \%$	4%
U_{1n}	10 kV	$\cos \varphi_{cc}$	0,2
U_{2n}	220 V	tipo	O.N.A.N.
peso	800 kg	servizio	continuo



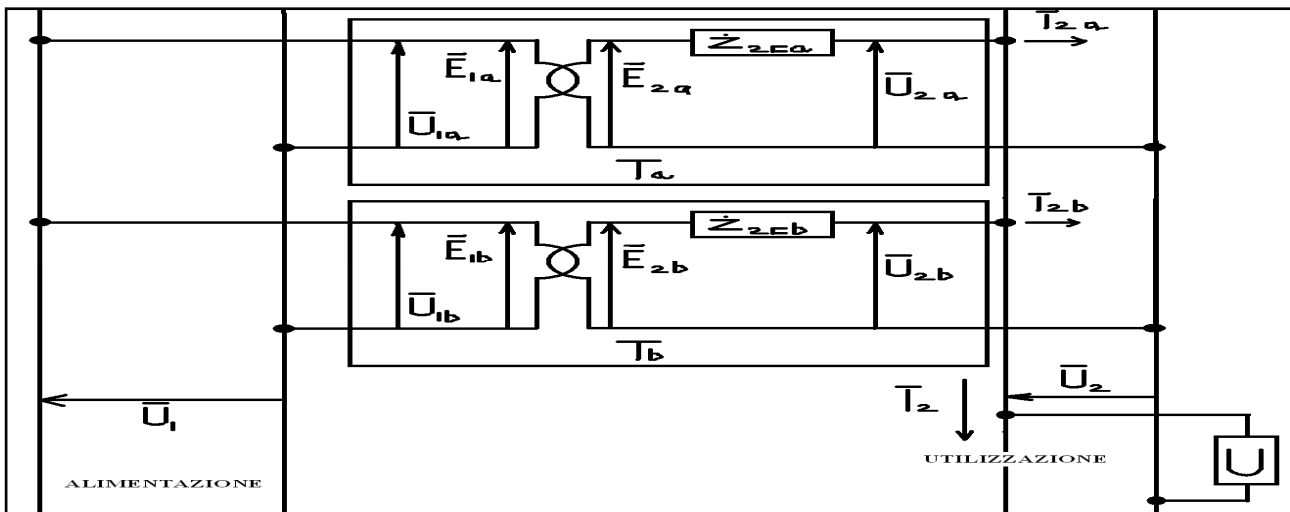
SIMBOLI IMPIANTISTICI PER IL TRASFORMATORE MONOFASE. Il simbolo usato per il trasformatore monofase negli impianti è molto semplice. Si tratta di due circonferenze sovrapposte. Nel disegno è rappresentato un trasformatore monofase inserito fra una linea ad alta tensione ed una linea a bassa tensione. In un caso le due linee sono rappresentate da due fili nell'altro sono entrambe rappresentate da un unico filo. In quest'ultimo caso si usano due linette

parallele per indicare la presenza dei due fili di collegamento del primario del trasformatore con la linea ad alta tensione e del secondario del trasformatore con la linea a bassa tensione.

X) COLLEGAMENTO DI TRASFORMATORI MONOFASE

PARALLELO DI TRASFORMATORI MONOFASE. In genere è preferibile far servire una utenza da più trasformatori monofase in parallelo anziché da uno solo. Questo per i motivi seguenti.

- 1) Un singolo trasformatore va tenuto in servizio continuo.
- 2) In caso di guasto del singolo trasformatore l'utenza resta sprovvista di elettricità.
- 3) In caso il carico abbia bisogno, per certi periodi, di potenza molto più bassa di quella nominale dell'unico trasformatore, allora si avrà trasformazione con basso rendimento.



Si collegano allora più trasformatori in parallelo. Nel caso di due trasformatori monofase si ha il collegamento illustrato in figura in cui per ciascun trasformatore è usato lo schema equivalente semplificato (il secondo).

Tra le tensioni e tra le correnti sussistono le relazioni seguenti

$$\begin{aligned}\bar{U}_{1a} &= \bar{U}_{1b} = \bar{U}_1 \\ \bar{U}_{2a} &= \bar{U}_{2b} = \bar{U}_2 \\ \bar{I}_{2a} + \bar{I}_{2b} &= \bar{I}_2\end{aligned}$$

CONDIZIONI DI FUNZIONAMENTO OTTIMALE DI TRASFORMATORI MONOFASE IN PARALLELO. Per il funzionamento ottimale di due trasformatori collegati in parallelo si richiede quanto segue.

- 1) Quando la linea di utilizzazione è a vuoto, cioè con corrente nulla, devono risultare a vuoto anche i due (o più) trasformatori collegati in parallelo. Se così infatti non fosse si avrebbero delle correnti circolanti nei due avvolgimenti secondari, cosa che porterebbe a delle dissipazioni di potenza elettrica in calore a fronte di una potenza nulla ceduta all'utilizzatore.
- 2) La potenza nominale erogata dal parallelo dei due trasformatori deve essere pari alla somma delle due potenze nominali dei trasformatori stessi.

Vediamo cosa implica la prima condizione. Diciamo che la linea di utilizzazione sia a vuoto. Imponiamo allora che i due trasformatori monofase in parallelo abbiano anch'essi secondario a vuoto. Poiché la LKT porge

$$\bar{U}_2 = \bar{E}_{2a} - \dot{Z}_{2ca} \bar{I}_{2a}$$

$$\bar{U}_2 = \bar{E}_{2b} - \dot{Z}_{2cb} \bar{I}_{2b}$$

l'imposizione dell'annullamento delle correnti a secondario porge a sua volta

$$\bar{E}_{2a} = \bar{E}_{2b}$$

Le tensioni secondarie a vuoto debbono dunque essere uguali, in modulo e fase. Si osservi ora che

$$\bar{E}_{2a} = \bar{E}_{2b} \Rightarrow \frac{\bar{E}_{2a}}{\bar{U}_1} = \frac{\bar{E}_{2b}}{\bar{U}_1} \Rightarrow \frac{\bar{E}_{2a}}{\bar{U}_{1a}} = \frac{\bar{E}_{2b}}{\bar{U}_{1b}} \Rightarrow n_a = n_b$$

Dalla prima condizione per il funzionamento ottimale discende dunque che i due trasformatori debbono avere lo stesso rapporto di trasformazione.

Vediamo ora cosa implica la seconda condizione. La potenza apparente dell'insieme dei due trasformatori è data da

$$S = \left| \dot{\bar{S}} \right| = \left| \bar{U}_2 \cdot \bar{I}_2^* \right| = \left| \bar{U}_2 \cdot (\bar{I}_{2a} + \bar{I}_{2b})^* \right| = \left| \bar{U}_2 \right| \left| (\bar{I}_{2a} + \bar{I}_{2b})^* \right| = U_2 \left| \bar{I}_{2a} + \bar{I}_{2b} \right|$$

Ora noi vogliamo che la potenza nominale del trasformatore che si ottiene dal parallelo dei due trasformatori sia la somma delle potenze nominali dei due trasformatori stessi.

Ebbene, consideriamo a secondario dei due trasformatori delle correnti con valore efficace pari a quello delle reciproche correnti nominali. Si ha

$$S = U_2 \left| \bar{I}_{2na} + \bar{I}_{2nb} \right|$$

Se adesso supponiamo che le due correnti a secondario dei due trasformatori siano in fase fra loro e che la tensione della linea a secondario abbia valore efficace pari a quello della tensione nominale a secondario dei due trasformatori, allora abbiamo

$$S = U_{2n} \left| \bar{I}_{2na} + \bar{I}_{2nb} \right| = U_{2n} \left(\left| \bar{I}_{2na} \right| + \left| \bar{I}_{2nb} \right| \right) = U_{2n} (I_{2na} + I_{2nb}) = U_{2na} I_{2na} + U_{2nb} I_{2nb} = P_{na} + P_{nb}$$

Ebbene, la potenza apparente

$$P_n = P_{na} + P_{nb} = U_{2na} I_{2na} + U_{2nb} I_{2nb} = U_{2n} (I_{2na} + I_{2nb}) = U_{2n} I_{2n}$$

è la potenza nominale del trasformatore costituito dal parallelo dei due trasformatori dati. Si osservi che si assume come sua corrente nominale a secondario la somma delle correnti nominali a secondario dei due trasformatori dati. Quindi la seconda condizione impone che le correnti dei due trasformatori a secondario siano, a potenza nominale, in fase fra loro.

Ora si osservi anche che se la linea di utilizzazione è a carico si ha

$$\begin{cases} \bar{E}_{2a} = \bar{E}_{2b} \\ \bar{U}_2 = \bar{E}_{2a} - \dot{Z}_{2ca} \bar{I}_{2a} \Rightarrow \dot{Z}_{2ca} \bar{I}_{2a} = \dot{Z}_{2cb} \bar{I}_{2b} \\ \bar{U}_2 = \bar{E}_{2b} - \dot{Z}_{2cb} \bar{I}_{2b} \end{cases}$$

Se in particolare le correnti a secondario hanno valore efficace pari a quello delle correnti nominali si ha

$$\dot{Z}_{2ca} \bar{I}_{2a} = \dot{Z}_{2cb} \bar{I}_{2b} \Rightarrow \dot{Z}_{2ca} \bar{I}_{2na} = \dot{Z}_{2cb} \bar{I}_{2nb}$$

Ricordando poi che le due correnti nominali a secondario dei trasformatori collegati in parallelo sono in fase fra di loro, allora si ha che gli angoli di cortocircuito sono i medesimi nei due trasformatori.

Ricordando poi le definizioni di tensioni di cortocircuito a secondario si ha che tali tensioni coincidono nei due trasformatori.

$$\bar{U}_{2ca} = \dot{Z}_{2ca} \bar{I}_{2na} = \dot{Z}_{2cb} \bar{I}_{2nb} = \bar{U}_{2cb}$$

Si osservi ancora che dall'uguaglianza degli angoli di cortocircuito e dalla uguaglianza delle cadute di tensione a secondario si ha

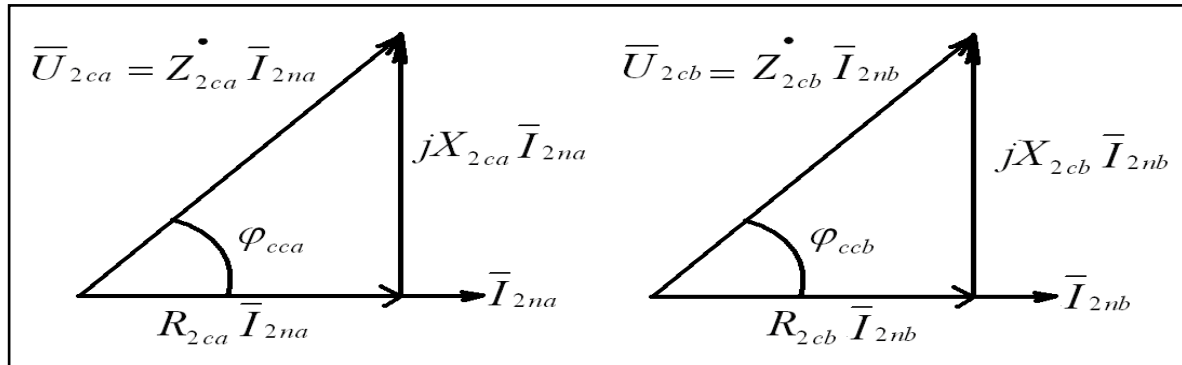
$$\begin{cases} \dot{Z}_{2ca} \bar{I}_{2a} = \dot{Z}_{2cb} \bar{I}_{2b} \Rightarrow Z_{2ca} e^{j\varphi_{cca}} \bar{I}_{2a} = Z_{2cb} e^{j\varphi_{ccb}} \bar{I}_{2b} \Rightarrow Z_{2ca} \bar{I}_{2a} = Z_{2cb} \bar{I}_{2b} \\ \varphi_{cca} = \varphi_{ccb} \end{cases}$$

ovvero le correnti a secondario dei due trasformatori sono sempre in fase fra loro.

Nella seguente tabella riportiamo a sx le due condizioni da noi imposte ai due trasformatori, a dx le conseguenze che ciascuna di esse comporta in termini di vincoli sulle caratteristiche fisiche dei due componenti.

CONDIZIONI IMPOSTE	CONSEGUENZE
1) $\bar{I}_2 = 0 \Rightarrow \bar{I}_{2a} = \bar{I}_{2b} = 0$	1.1) $n_a = n_b$
2) $P_n = P_{na} + P_{nb}$	2.1) Le correnti a secondario dei due trasformatori sono in fase fra loro 2.2) Le tensioni di cortocircuito a secondario sono uguali fra loro 2.3) Gli angoli di cortocircuito sono uguali fra loro

Si osserva che le conseguenze 2.2 e 2.3 si possono riassumere nell'affermare che i triangoli di cortocircuito dei due trasformatori debbono essere uguali fra loro.

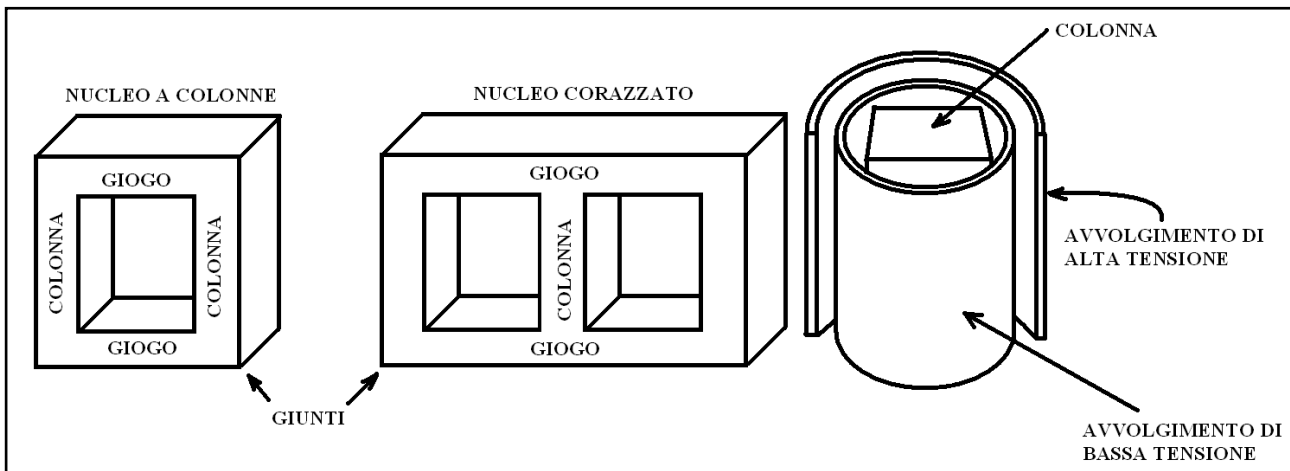


XI) CENNI COSTRUTTIVI

NUCLEO FERROMAGNETICO. La forma del nucleo ferromagnetico è fondamentalmente di due tipi:

- 1) il tipo a colonne;
- 2) il tipo a mantello corazzato.

Nel primo caso si hanno due colonne unite fra loro da due tratti detti gioghi. Nel primo tipo si ha una sola colonna, al centro di una sorta di corazza.



In entrambi i casi gli avvolgimenti sono coassiali, con l'avvolgimento di alta tensione all'esterno.

Il nucleo è costituito da lamierini dello spessore di 0,3 e 0,5 mm. Essi risultano disposti verticalmente, sono isolati reciprocamente e sono tenuti insieme da bulloni passanti.

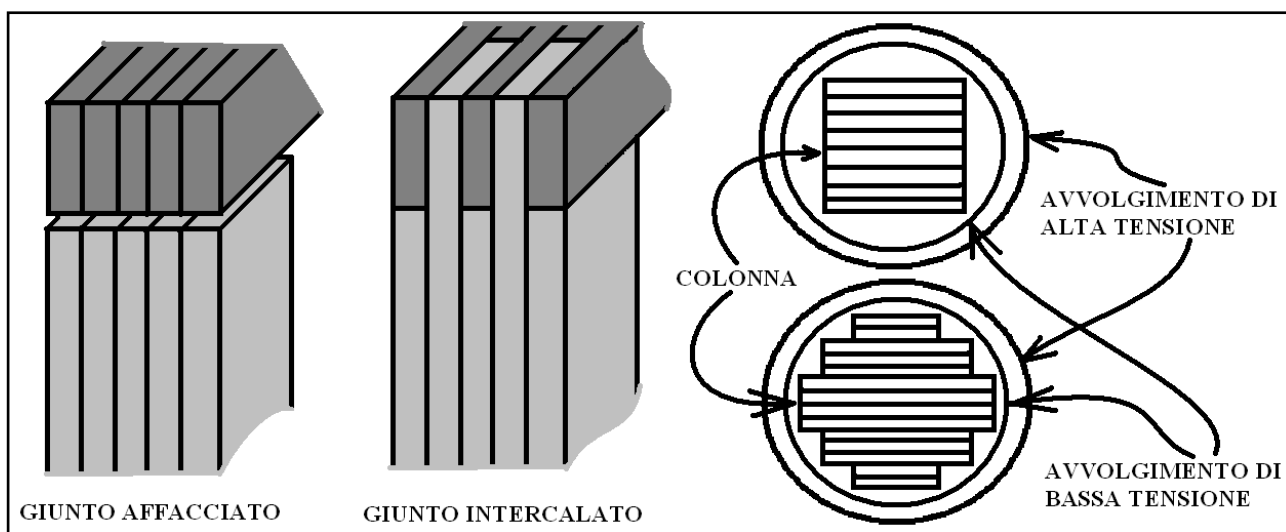
I giunti possono essere affacciati o intercalati. Il primo tipo è più economico, ma offre una minore resistenza meccanica e una maggiore riluttanza di traferro.

La sezione della colonna (o delle colonne) può essere quadrata o a gradini. La prima soluzione è più economica rispetto alla seconda ma determina una maggiore dispersione di flusso di induzione.

AVVOLGIMENTI. Gli avvolgimenti sono di fil di rame o di alluminio arrotolati in bobine intorno alle colonne (o alla colonna). I due avvolgimenti sono coassiali e possono avere una delle due disposizioni seguenti.

1) Disposizione concentrica. In questo caso i due avvolgimenti hanno diametro diverso. Si ha l'avvolgimento di alta tensione avvolto attorno ad un tubo di materiale dielettrico. Dentro questo tubo se ne ha un secondo, coassiale al primo, il quale avvolge la colonna e sul quale si avvolge la bobina di bassa tensione. Questa disposizione, che consente un perfetto isolamento fra i due avvolgimenti, è preferita per trasformatori nei quali il salto di tensione fra primario e secondario è molto elevato.

2) Disposizione alternata. In questo caso i due avvolgimenti hanno lo stesso diametro e sono intercalati fra loro. Pare che in questo caso i due avvolgimenti vengano realizzati attraverso moduli assemblabili. Naturalmente in questo caso l'isolamento fra i due avvolgimenti e fra gli avvolgimenti ed il nucleo sarà ottenuto mediante l'isolamento dei fili che costituiscono gli avvolgimenti stessi. Questo tipo di avvolgimenti si usa nel caso in cui il salto di tensione fra primario e secondario non sia molto elevato.



RAFFREDDAMENTO. I trasformatori dissipano calore per via dei tre fenomeni seguenti:

- 1) produzione di calore per effetto joule negli avvolgimenti;
- 2) produzione di calore per effetto joule nel nucleo ferromagnetico a causa delle correnti parassite;
- 3) produzione di calore nel nucleo ferromagnetico per il continuo riorentamento dei domini di Weiss (perdita per isteresi).

E' dunque necessario smaltire questo calore, onde evitare il deterioramento degli isolanti degli avvolgimenti e delle lamelle del nucleo ferromagnetico.

A tale scopo si ricorre alla realizzazione di canali per il passaggio di fluidi refrigeranti tanto tra gli avvolgimenti che dentro al nucleo.

I trasformatori di piccola potenza sono raffreddati ad aria in ventilazione forzata o naturale.

I trasformatori di potenza più grande sono immersi in olio, il quale, oltre a svolgere la funzione di fluido di raffreddamento, garantisce anche l'isolamento fra le parti. Il trasformatore immerso in olio è contenuto in un cassone il quale può essere

- 1) un cassone liscio;
- 2) un cassone a pareti alettate (10kVA-100kVA);
- 3) un cassone co radiatori esterni raffreddati a convezione naturale (50kVA-500kVA);
- 4) un cassone con scambiatori di calore esterni raffreddati a convezione forzata, ad aria o ad acqua (oltre i 500kVA).

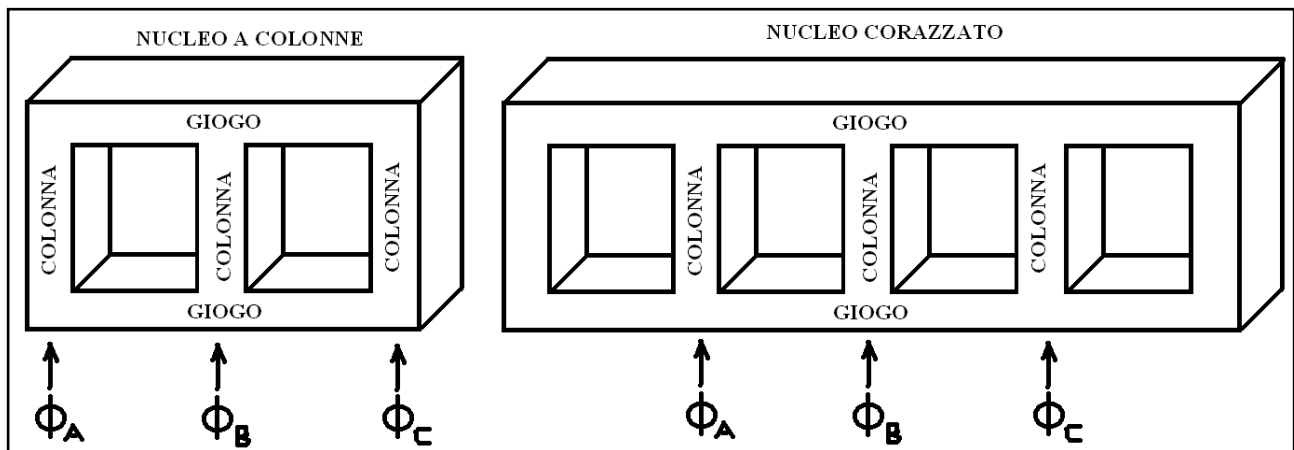
I trasformatori di uso domestico sono immersi invece in particolari resine. Questa soluzione permette di avere trasformatori che richiedono una manutenzione nulla.

CAPITOLO XIII, TRASFORMATORE TRIFASE E TRASFORMATORI SPECIALI

I) CENNI COSTRUTTIVI

INTRODUZIONE. Per trasformare un sistema trifase di tensioni e di correnti si possono usare tre trasformatori monofase distinti, oppure un solo trasformatore trifase, ovvero un dispositivo con tre avvolgimenti di alta tensione e tre avvolgimenti di bassa tensione, tutti avvolti su di un unico nucleo.

NUCLEO FERROMAGNETICO. Anche nel caso di trasformatori trifase il nucleo può essere di due tipi: a colonne o a mantello (detto anche corazzato).



Si deve osservare che nel caso di nucleo a colonne la LKT dei circuiti magnetici ai fasori impone la condizione

$$\Phi_A + \Phi_B + \Phi_C = 0$$

Tale condizione non è invece imposta ai flussi della induzione nel caso di un nucleo corazzato. In questo caso allora il funzionamento del trasformatore trifase è quello di tre trasformatori monofase.

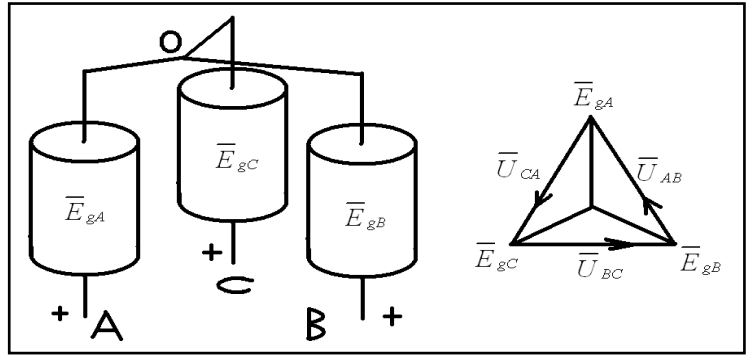
COLLEGAMENTO DEGLI AVVOLGIMENTI. Indichiamo gli avvolgimenti primari con le tre lettere maiuscole A,B,C. Gli avvolgimenti secondari li indichiamo rispettivamente a,b,c. Si intende che A-a sono avvolgimenti coassiali e relativi alla stessa fase. Così B-b e C-c.

Ora i tre avvolgimenti primari possono essere collegati fra loro in diversi modi. Altrettanto dicasi per i tre avvolgimenti secondari.

Prendiamo in considerazione, per fissare le idee, i tre avvolgimenti primari. Si possono avere i tre collegamenti qui di seguito elencati.

1) Collegamento a stella. In questo caso i tre morsetti negativi dei tre avvolgimenti sono uniti fra loro, formando il centro stella. Tale collegamento si indica Y per gli avvolgimenti primari e y per quelli secondari. Sussistono in questo caso le relazioni seguenti.

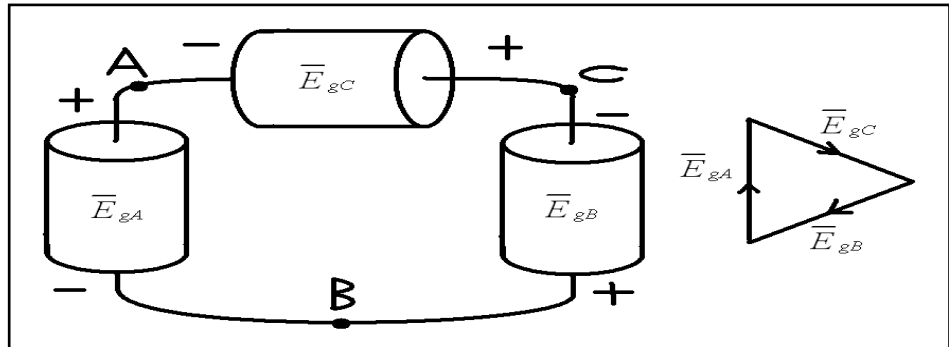
$$\begin{cases} \bar{U}_{AB} = \bar{E}_{gA} - \bar{E}_{gB} \\ \bar{U}_{BC} = \bar{E}_{gB} - \bar{E}_{gC} \\ \bar{U}_{CA} = \bar{E}_{gC} - \bar{E}_{gA} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{E}_{gA} = \bar{U}_{AB} e^{-j\frac{\pi}{6}} \\ \bar{E}_{gB} = \bar{U}_{BC} e^{-j\frac{\pi}{6}} \\ \bar{E}_{gC} = \bar{U}_{CA} e^{-j\frac{\pi}{6}} \end{cases}$$



2) Collegamento a triangolo. In questo caso il morsetto negativo della bobina A è collegato a quello positivo della bobina B; il morsetto negativo della bobina B è collegato al morsetto positivo della bobina C; infine il morsetto negativo della bobina C è collegato a quello positivo della bobina A.

Sussistono in questo caso le relazioni

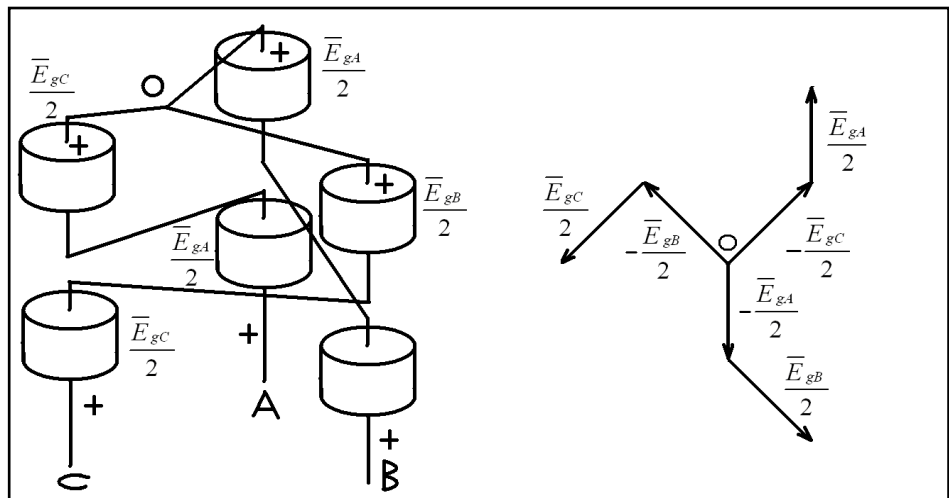
$$\begin{cases} \bar{E}_{gA} = \bar{U}_{AB} \\ \bar{E}_{gB} = \bar{U}_{BC} \\ \bar{E}_{gC} = \bar{U}_{CA} \end{cases}$$



3) Collegamento a zig-zag. Le tre bobine sono divise in due parti ciascuna. Sia hanno così sei bobine: due mezza bobine A, due mezza bobine B e due mezza bobine C. Le prime tre mezza bobine, una per ogni avvolgimento, vengono collegate a triangolo. A questo punto la prima mezza bobina A è messa in antiserie con la seconda mezza bobina B; la prima mezza bobina B viene messa in antiserie con la seconda mezza bobina C e la prima mezza bobina C viene messa in antiserie con la seconda mezza bobina A.

Sussistono allora le relazioni seguenti.

$$\begin{cases} \bar{U}_{AB} = \frac{\bar{E}_{gA}}{2} - \frac{\bar{E}_{gC}}{2} + \frac{\bar{E}_{gA}}{2} - \frac{\bar{E}_{gB}}{2} = \bar{E}_{gA} - \frac{\bar{E}_{gB}}{2} - \frac{\bar{E}_{gC}}{2} \\ \bar{U}_{BC} = \frac{\bar{E}_{gB}}{2} - \frac{\bar{E}_{gA}}{2} + \frac{\bar{E}_{gB}}{2} - \frac{\bar{E}_{gC}}{2} = \bar{E}_{gB} - \frac{\bar{E}_{gA}}{2} - \frac{\bar{E}_{gC}}{2} \\ \bar{U}_{CA} = \frac{\bar{E}_{gC}}{2} - \frac{\bar{E}_{gB}}{2} + \frac{\bar{E}_{gC}}{2} - \frac{\bar{E}_{gA}}{2} = \bar{E}_{gC} - \frac{\bar{E}_{gB}}{2} - \frac{\bar{E}_{gA}}{2} \end{cases}$$



SPOSTAMENTO ANGOLARE. Se si alimentano i tre avvolgimenti primari con una terna simmetrica di tensioni concatenate si ottiene a secondario una terna di tensioni concatenate ruotata

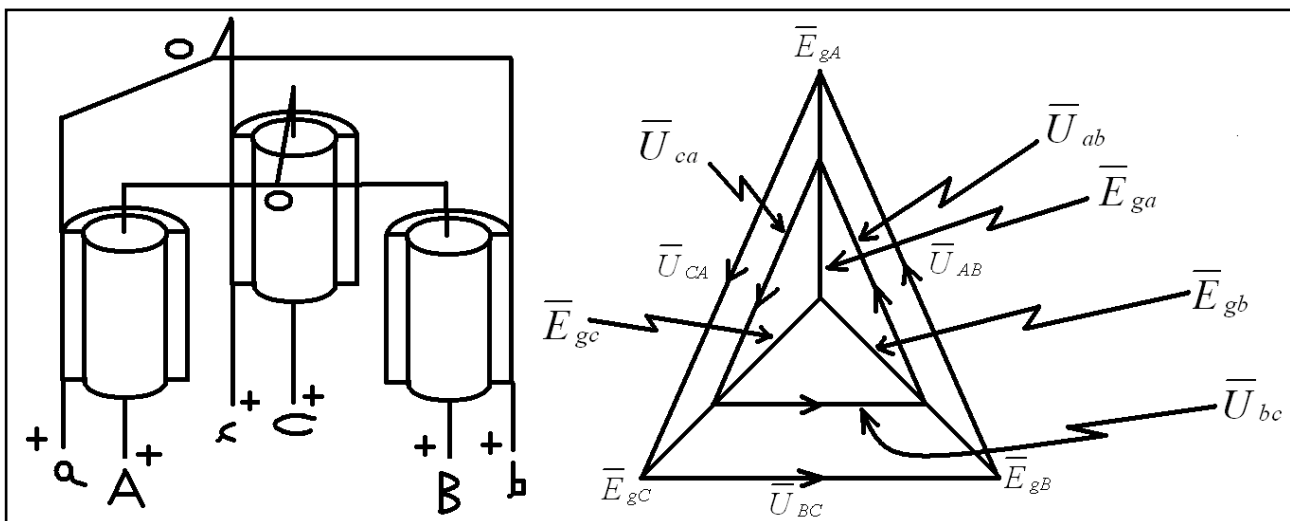
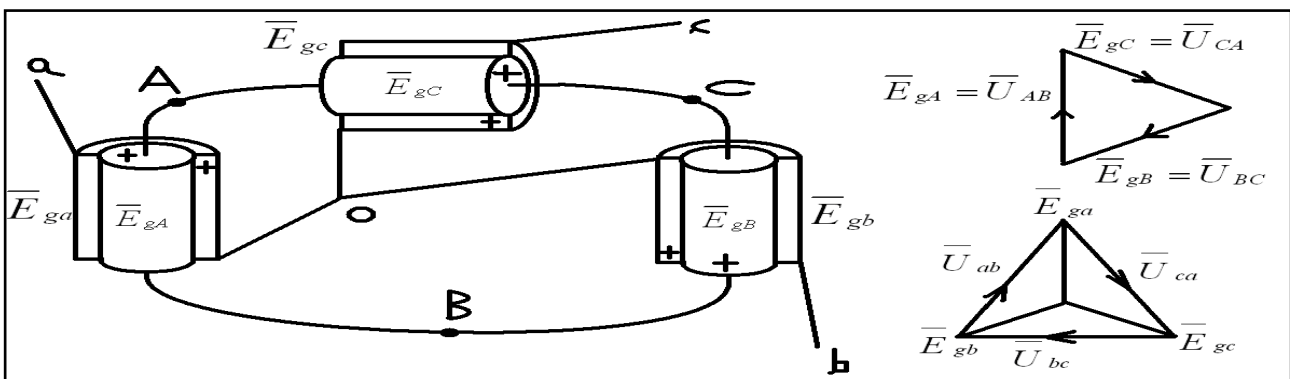
di un angolo, multiplo di $\pi/6$, rispetto alla terna di tensioni concatenate a primario. Il valore dell'angolo dipende dal tipo di collegamento adottato per gli avvolgimenti a primario e di quello utilizzato per gli avvolgimenti a secondari.

Ebbene si definisce **spostamento angolare** lo sfasamento in ritardo della terna di tensioni a secondario rispetto alla terna di tensioni a primario.

GRUPPO DI COLLEGAMENTO. Il gruppo di collegamento è pari allo spostamento angolare diviso $\pi/6$. Si trova che il gruppo di collegamento coincide con l'ora indicata, su un quadrante di orologio analogico, dalla tensione $\bar{U}_{ab}$, quando $\bar{U}_{AB}$ è posta sulle dodici.

I gruppi di collegamento possibili sono tutti quelli compresi fra 0 e 11, esclusi i gruppi 3 e 9.

ESEMPIO. COLLEGAMENTO A STELLA DEI PRIMARI E A STELLA DEI SECONDARI. I primari siano collegati a stella e tale collegamento sia effettuato anche per i secondari. In figura i secondari sono gli avvolgimenti posti all'esterno e contrassegnati con lettere minuscole. I primari sono contrassegnati con lettere maiuscole. Se si ammette che nei tre accoppiamenti si abbiano coefficienti di trasformazione >1 , allora il diagramma fasoriale delle due terne di tensioni stellate e delle due terne di tensioni concatenate risulta come quello indicato in figura. È evidente che le due terne di tensioni concatenate sono in fase e dunque lo spostamento



angolare sarà pari a zero. Nullo sarà anche l'indice orario.

ESEMPIO. COLLEGAMENTO A TRIANGOLO DEI PRIMARI E A STELLA DEI SECONDARI. Si vede come in questo caso lo spostamento angolare sia pari a $\pi/6$ e dunque l'indice orario sia unitario. Quanto vale il rapporto di trasformazione per questo trasformatore? Detto k tale rapporto di trasformazione e indicato con quello dei tre accoppiamenti si ha

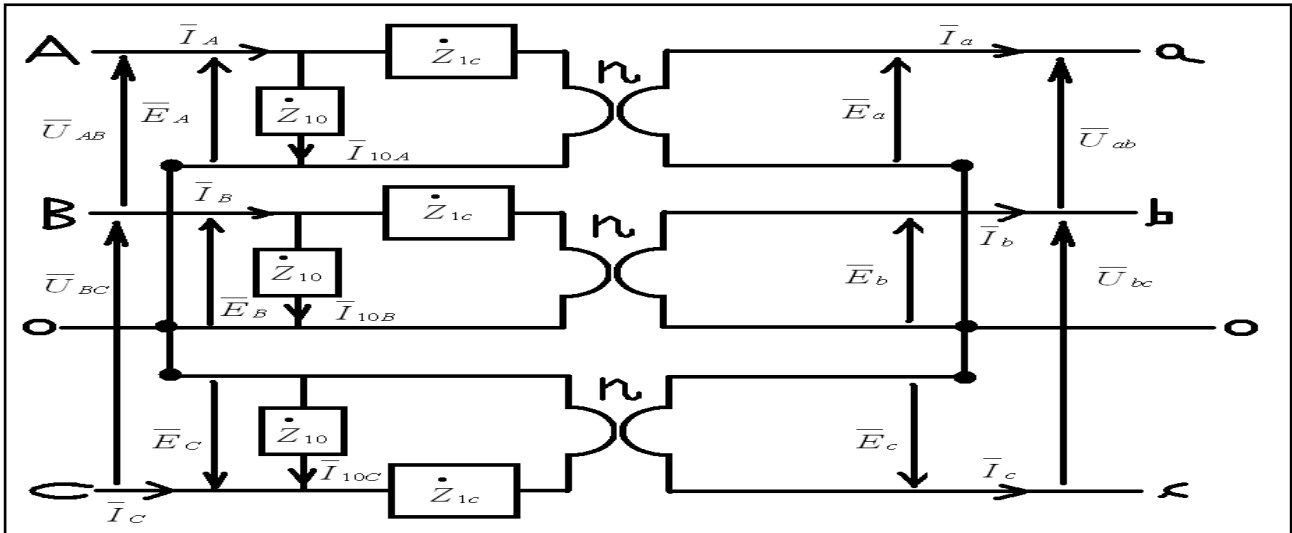
$$n = \frac{E_{gA}}{E_{ga}} \Rightarrow k = \frac{U_{AB}}{U_{ab}} = \frac{E_{gA}}{\sqrt{3}E_{ga}} = \frac{1}{\sqrt{3}} n$$

Si osserva che nel trasformatore trifase il rapporto di trasformazione si intende fra le tensioni concatenate.

II) SCHEMA EQUIVALENTE E PARAMETRI DEL TRASFORMATORE TRIFASE

SCHEMA EQUIVALENTE. Nel disegnare lo schema elettrico equivalente trifase si adotta per ogni fase lo schema elettrico equivalente del trasformatore monofase. Questi tre trasformatori monofase sono poi collegati a stella fra loro, a prescindere da quale sia poi l'effettivo collegamento dei sei avvolgimenti. Si ottiene pertanto il seguente schema elettrico equivalente.

Se la terna stellata a primario è simmetrica e se il carico a secondario è equilibrato allora è possibile



considerare il trasformatore equivalente monofase. Esso è caratterizzato nel seguente modo.

- 1) La tensione primaria e secondaria sono pari alle tensioni stellate.
- 2) Le perdite sono pari ad un terzo delle perdite del trasformatore trifase.
- 3) La potenza nominale è pari ad un terzo della potenza nominale del trasformatore trifase.
- 4) La potenza attiva erogata è pari ad un terzo di quella del trasformatore trifase.

In pratica le potenze del trasformatore trifase possono essere espresse in termini dei parametri del trasformatore monofase nel modo seguente.

$$\begin{cases} P = 3E_2 I_2 \cos \varphi \\ P_f = 3 \frac{E_1^2}{R_{10}} \\ P_{cu} = 3R_{1c} I_1^2 \end{cases}$$

DETERMINAZIONE DEI PARAMETRI. I parametri del trasformatore trifase sono da intendersi uguali per ciascuna delle sue fasi. Essi sono

$$\dot{Z}_{1c} = R_{1c} + jX_{1c}$$

$$\dot{Z}_{10} = \left(\frac{1}{R_{10}} + \frac{1}{jX_{10}} \right)^{-1}$$

n

La loro determinazione viene fatta per mezzo della prova a vuoto e di cortocircuito analogamente a quanto visto per il trasformatore monofase.

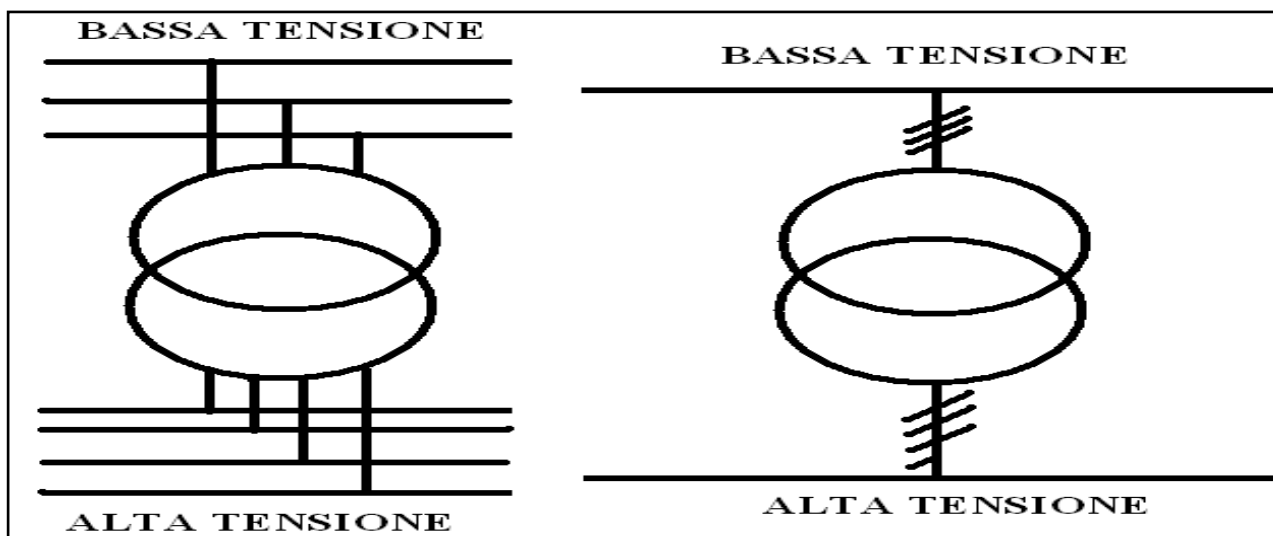
DATI DI TARGA. Rispetto al caso del trasformatore monofase, la targa di un trasformatore trifase riporta due dati in più. Essi sono

- 1) il tipo di collegamento degli avvolgimenti di primario e di quelli di secondario;
- 2) l'indice orario.

Una tipica targa per un trasformatore trifase è riportata nel seguito.

Elettromeccanica Friulana Palazzo dello Stella (Udine)			
TRASFORMATORE TRIFASE		N. 5671	
anno	1999	f_n	50 Hz
collegamento	D-y	gruppo	5
P_n	500 kVA	$u_{cc} \%$	4%
U_{1n}	10 kV	$\cos \varphi_{cc}$	0,2
U_{2n}	400 V	tipo	O.N.A.N.
peso	1600 kg	servizio	continuo

SIMBOLI IMPIANTISTICI. Il simbolo impiantistico del trasformatore trifase è lo stesso di quello monofase tranne per il numero di cavi che da esso escono. Essi possono infatti essere tre o quattro (in caso di presenza di neutro). Nel caso di schemi unifilari (schemi in cui cioè si usa una



sola line per rappresentare i cavi di una line elettrica, a prescindere dal loro numero effettivo) allora le line che partono dai due avvolgimenti del trasformatore saranno marcate ciascuna con tre line oblique. Per il neutro si aggiungerà una mezza line obliqua.

In figura si ha una linea ad alta tensione a tre cavi ed una linea a bassa tensione a quattro cavi. A sx i cavi sono tutti rappresentati. A dx invece si usa lo schema unifilare.

PARALLELO DI TRASFORMATORI TRIFASI. Negli impianti trifasi, come in quelli monofasi, si usa collegare in parallelo i trasformatori che servono una stessa utenza. Nel caso di trasformatori trifasi le condizioni sui parametri sono le seguenti.

CONDIZIONI IMPOSTE	CONSEGUENZE
1) $\bar{I}_2 = 0 \Rightarrow \bar{I}_{2a} = \bar{I}_{2b} = 0$	1.1) $n_a = n_b$ 1.2) stesso gruppo orario
2) $P_n = P_{na} + P_{nb}$	2.1) Le correnti a secondario dei due trasformatori sono in fase fra loro 2.2) Le tensioni di cortocircuito a secondario sono uguali fra loro 2.3) Gli angoli di cortocircuito sono uguali fra loro

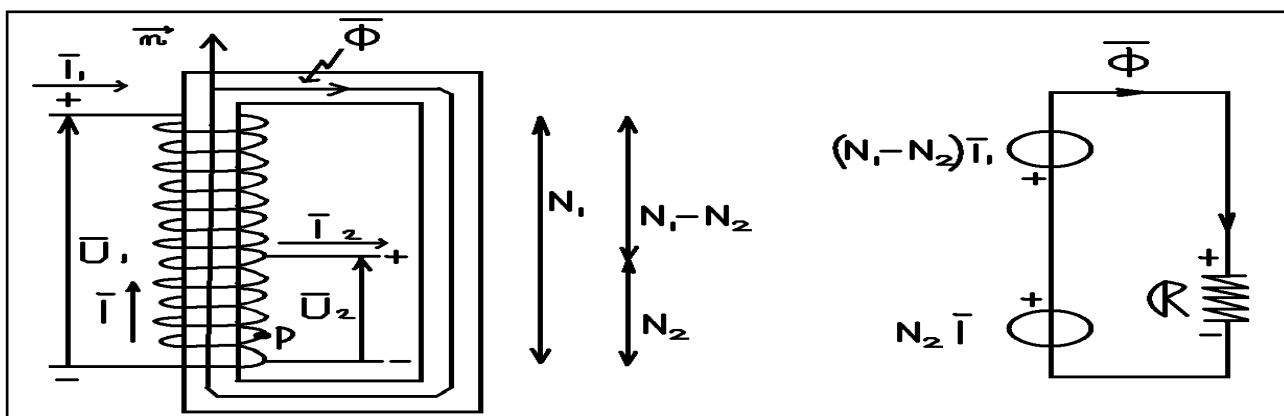
Si osserva che, rispetto al caso di trasformatori monofase, qui c'è in più la condizione dell'appartenenza allo stesso gruppo orario.

III) TRASFORMATORI SPECIALI

INTRODUZIONE. I trasformatori speciali sono tutti quei dispositivi che condividono con il trasformatore i principi di funzionamento e si caratterizzano per piccole differenze costruttive legate al particolare utilizzo per il quale sono destinati.

AUTOTRASFORMATORI. Un nucleo ferromagnetico è avvolto da un avvolgimento dal quale fuoriescono quattro derivazioni, come in figura. Fissati i riferimenti di tensioni, correnti e flusso di induzione, allora si scrive la legge di Farady-Neumann-Lenz nel modo seguente.

$$\begin{cases} -\bar{U}_1 = N_1 j \omega \bar{\Phi} \\ \bar{U}_2 = -N_2 j \omega \bar{\Phi} \end{cases}$$



Si trova dunque che

$$1) \bar{U}_2 = \frac{N_2}{N_1} \bar{U}_1 = \frac{1}{n} \bar{U}_1 < \bar{U}_1$$

avendo posto

$$n = \frac{N_1}{N_2} > 1$$

Consideriamo ora il circuito magnetico relativo a questo trasformatore. La LKT ai fasori dei circuiti magnetici ci permette di affermare che

$$-(N_1 - N_2)\bar{I}_1 + N_2\bar{I} - \bar{\Phi}\mathfrak{R} = 0 \Rightarrow -(N_1 - N_2)\bar{I}_1 + N_2\bar{I} = \bar{\Phi}\mathfrak{R}$$

Se ammettiamo che la reattanza del nucleo ferromagnetico sia trascurabile, ovvero che la permeabilità magnetica del nucleo sia molto elevata, allora deduciamo che

$$\begin{aligned} N_2\bar{I} &= (N_1 - N_2)\bar{I}_1 = (N_1 - N_2)(\bar{I}_2 - \bar{I}) = (N_1 - N_2)\bar{I}_2 - (N_1 - N_2)\bar{I} \Rightarrow \\ 2) \Rightarrow N_2\bar{I} + (N_1 - N_2)\bar{I} &= (N_1 - N_2)\bar{I}_2 \Rightarrow N_1\bar{I} = (N_1 - N_2)\bar{I}_2 \Rightarrow \bar{I} = \frac{(N_1 - N_2)}{N_1}\bar{I}_2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\bar{I}_2 \end{aligned}$$

Si ricava anche che

$$3) \bar{I}_2 = n \bar{I}_1$$

Dunque si ha intanto, dalla 1 e dalla 3, che la caratteristica di trasformazione alla porta uno dell'autotrasformatore ideale è identica a quella del trasformatore ideale monofase, cioè

$$\begin{cases} \bar{U}_2 = \frac{1}{n} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_2 = n \bar{I}_1 \end{cases}$$

$$n = N_2 / N_1 > 1$$

Tuttavia la corrente che transita nelle N_2 spire del secondario è, per la 2, data da

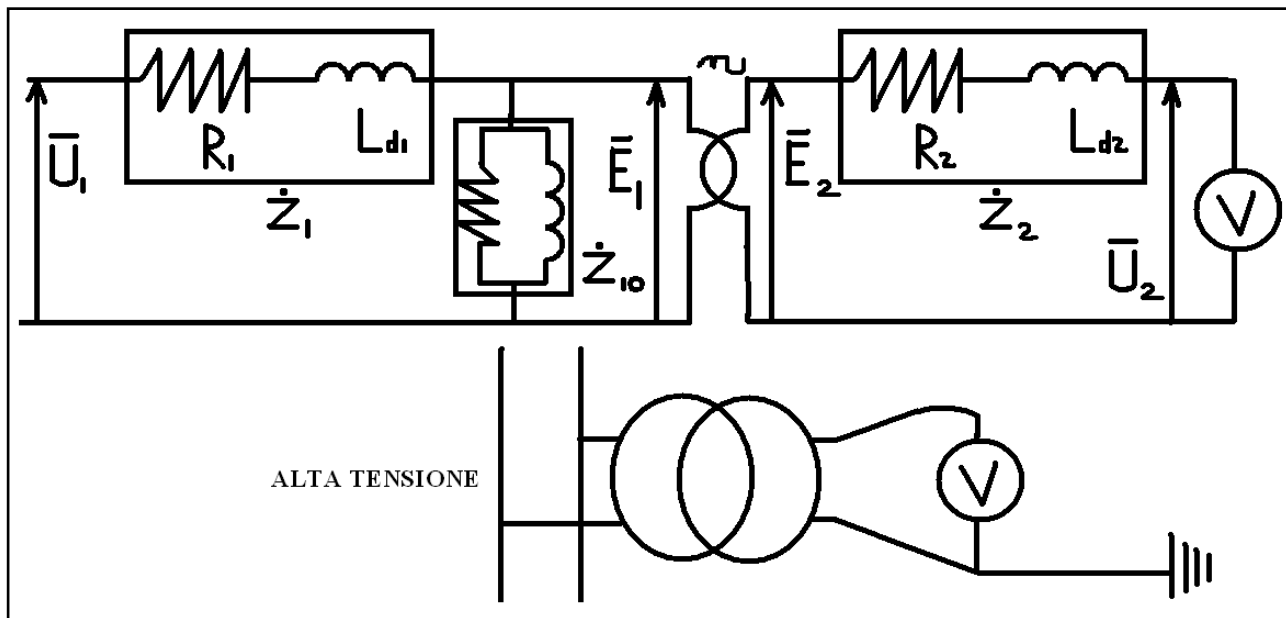
$$\bar{I} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\bar{I}_2 < \bar{I}_2$$

e dunque ciò autorizza a realizzare tali spire con sezione minore rispetto a quelle che si dovrebbero altrimenti adottare, ottenendo così un risparmio di materiale. Si può inoltre preveder di avere minore dissipazione di calore in tali spire.

Di contro tuttavia si deve osservare che nell'autotrasformatore un quasto nel tratto comune dell'avvolgimento (per esempio nel punto P) verifica la pericolosa circostanza di avere a secondario la medesima tensione che a primario.

Gli autotrasformatori trovano impiego nelle reti di distribuzione della energia elettrica sottoforma di trasformatori trifasi. Si trovano anche piccoli autotrasformatori impiegati in laboratorio, detti 'variac'.

TRASFORMATORI DI TENSIONE (TV). La misura di tensione (con voltmetro) nel caso in cui questa grandezza sia elevata, è rischiosa per l'operatore, oltre ad essere spesso problematica per lo strumento di misura. Allora si usa collegare il voltmetro in serie al secondario di un trasformatore il cui primario sia collegato in parallelo alla linea di alta tensione di cui si deve valutare la tensione concatenata. Se il trasformatore presenta un rapporto di trasformazione >1 , la tensione a secondario sarà minore di quella a primario e dalla sua misura, che non presenta problemi, si risalirà al valore



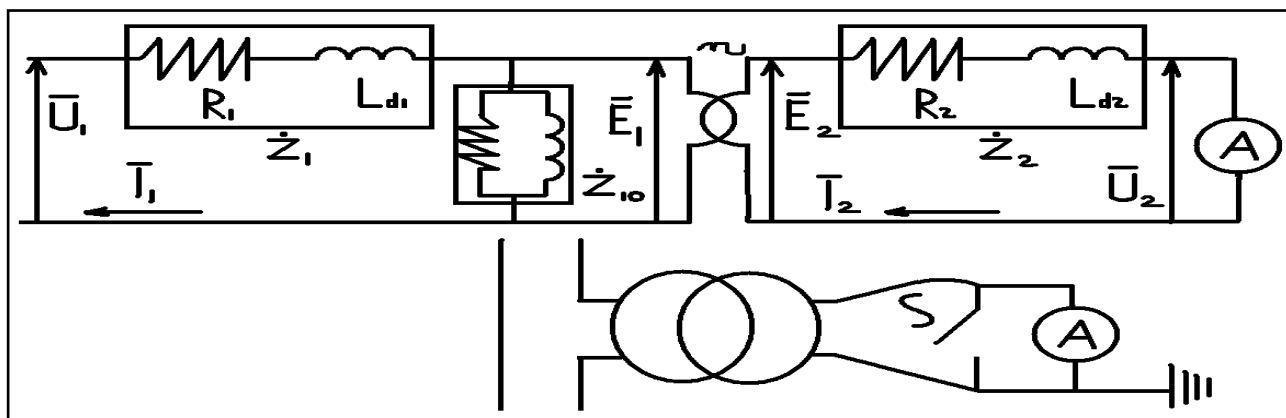
efficace della tensione a primario.

Se il voltmetro ha comportamento prossimo a quello ideale allora la corrente che in esso transita è prossima a zero e dunque il valore efficace di tensione che esso porge è

$$U_2 \approx U_{20} = E_2 = \frac{1}{n} E_1 \approx \frac{1}{n} U_1$$

Si rileva che in genere si collega a terra il morsetto negativo del secondario del trasformatore per evitare che il secondario assuma tensione elevata rispetto a terra costituendo così una fonte di pericolo per l'operatore.

TRASFORMATORI DI CORRENTE (TA). La misura di corrente mediante amperometro nel



caso di elevati valori della corrente stessa, pone dei problemi di sicurezza per l'operatore, oltre che dei problemi per lo strumento. Si ricorre allora a trasformatori con rapporto di trasformazione inferiore all'unità, al cui secondario viene collegato l'amperometro.

Il valore efficace di corrente che misura il nostro amperometro è dato da

$$I_2 \approx I_{2cc} = nI_{12cc} \approx nI_1$$

Si rileva la presenza di un interruttore (S) nella inserzione dell'amperometro. Esso serve per evitare che il secondario del trasformatore sia mai a vuoto (in questo caso a secondario, essere il rapporto di trasformazione minore di uno) si avrebbero tensioni altissime, dunque pericolose. Pertanto, prima di rimuovere lo strumento, si chiude S, mettendo in corto il secondario.

Si rileva inoltre che anche qui il secondario del trasformatore, come nel TV, è collegato a terra. Si tratta di un espediente per evitare alte differenze di potenziale fra il secondario e la terra, pericolose per l'operatore.

CAPITOLO XIV, MACCHINE ELETTRICHE ROTANTI

I) PRINCIPI DI FUNZIONAMENTO

LEGGE DI FARADAY-NEUMANN-LENZ IN FORMA DIFFERENZIALE. All'inizio del capitolo precedente abbiamo ricordato la legge di Faraday-Neumann-Lenz. Ricordiamo ora la sua espressione differenziale (la IV equazione di Maxwell) la quale si scrive

$$\text{rot } \vec{E}_i(P) = - \left(\frac{\partial \vec{B}(P)}{\partial t} - \text{rot} \left(\vec{v}(P) \times \vec{B}(P) \right) \right)$$

dove $\vec{v}(P)$ rappresenta la velocità del supporto materiale delle cariche, del circuito nel quale scorrono.

DEFINIZIONE,

FORZA ELETTROMOTRICE TRASFORMATRICA. Si dice trasformatrice il campo elettrico indotto che si realizza quando non vi siano circuiti in moto. In base alla legge di Faraday-Neumann-Lenz esso si scrive

$$\text{rot } \vec{E}_i(P) = - \frac{\partial \vec{B}(P)}{\partial t}$$

E' su questa legge che si basa, come visto, il funzionamento dei trasformatori, macchine elettriche in cui non si hanno parti in moto relativo.

DEFINIZIONE,

FORZA ELETTROMOTRICE MOZIONALE. Si dice mozionale il campo elettrico indotto che si realizza quando si ha un circuito in moto all'interno di una induzione magnetica costante nel tempo. In base alla legge di Faraday-Neumann-Lenz esso si scrive

$$\text{rot } \vec{E}_i(P) = \text{rot} \left(\vec{v}(P) \times \vec{B}(P) \right) \Rightarrow \vec{E}_i(P) = \vec{v}(P) \times \vec{B}(P)$$

Si vede come questo campo elettrico non è altro che il campo di forze specifiche (cioè su unità di carica) determinato dalla forza di Lorentz.

Nei motori e nei generatori questo campo di forze ha una notevole importanza poiché in tali macchine elettriche si hanno proprio circuiti in moto.

DEFINIZIONE,

MACCHINE ELETTRICHE ROTANTI. Le macchine elettriche rotanti realizzano la conversione elettromeccanica sfruttando l'interazione che si manifesta quando una induzione magnetica ed un conduttore percorso da corrente sono in moto relativo fra di loro.

DEFINIZIONE,

FUNZIONAMENTO DA GENERATORE. Una macchina elettrica rotante si dice funzionare da generatore nel caso in cui converta potenza meccanica in potenza elettrica.

DEFINIZIONE,

FUNZIONAMENTO DA MOTORE. Una macchina elettrica rotante si dice funzionare da motore nel caso in cui converta potenza elettrica in potenza meccanica.

OSSERVAZIONE,

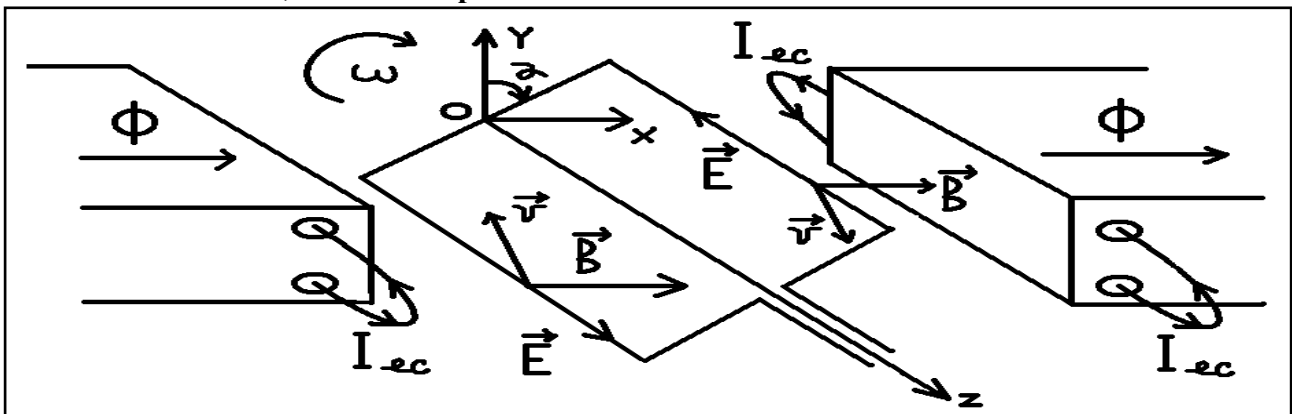
VERSATILITA' DELLE MACCHINE ELETTRICHE ROTANTI. In genere una macchina elettrica rotante può funzionare sia da motore che da generatore.

DEFINIZIONE,

ROTORE E STATORE. Le macchine elettriche rotanti sono costituite da due parti:

- 1) il rotore è la parte mobile, la quale è vincolata a ruotare su un albero;
- 2) lo statore è la parte fissa.

SPIRA ROTANTE. Una corrente continua, detta **corrente di eccitazione**, attraversa delle bobine, dette **bobine di eccitazione**. Tali bobine costituiscono l'**induttore** (in pratica l'induttore può essere realizzato anche con un magnete permanente). L'induttore consta di due **poli** fra i quali transita un flusso di induzione Φ , detto **flusso polare**.



L'interazione fra la rotazione della spira e il flusso polare determina sulla spira, in base alla formula della forza di Lorentz (o, se si vuole, alla quarta equazione di Maxwell) un campo elettrico indotto esprimibile come

$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$$

In questo caso lo statore è costituito dall'induttore e il rotore dalla spira.

INDUZIONE ROTANTE. Le bobine di eccitazione ruotano attorno all'albero mentre la spira è mantenuta ferma. Anche in questo caso la velocità relativa fra la spira e il flusso polare determinano un campo elettrico indotto

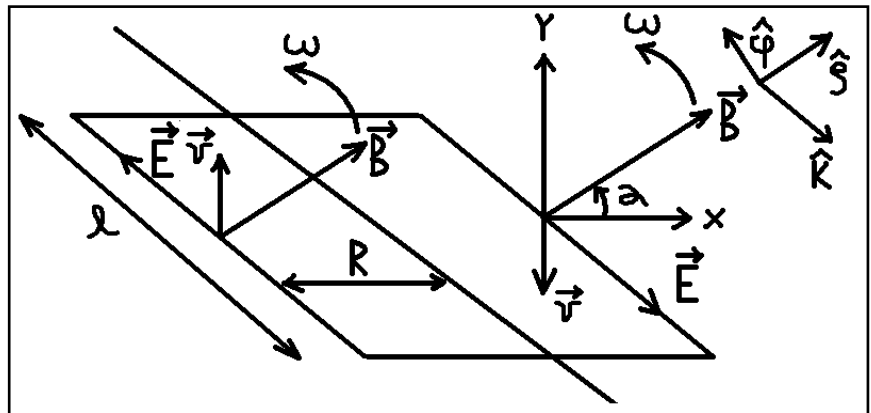
$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$$

Lo statore è costituito in questo caso dalla spira, mentre il rotore è costituito dall'induttore.

FUNZIONAMENTO DA GENERATORE. Entrambe le disposizioni sopra illustrate possono essere ricondotte allo schema qui indicato, dove la spira è fissa e dove in ciascun suo punto è applicato un vettore di induzione magnetica il quale ruota con velocità angolare ω .

I conduttori paralleli all'asse di rotazione sono detti **conduttori di indotto** mentre i due collegamenti fra di essi sono detti **collegamenti di testata** (nei quali la forza elettromotrice indotta è nulla).

Quanto vale il campo elettrico indotto in ciascun conduttore di indotto? Ebbene si osserva intanto che l'induzione magnetica si scrive

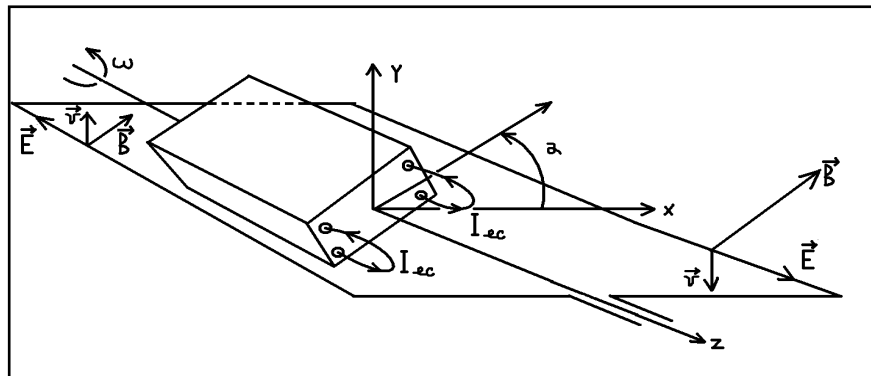


$$\vec{B} = B \hat{\rho}$$

mentre la velocità sul conduttore dx si scrive

$$\vec{v} = -v \sin \alpha \hat{\rho} - v \cos \alpha \hat{\varphi}$$

Dunque il campo elettrico indotto in ciascun punto del conduttore a dx vale



$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= \vec{v} \times \vec{B} = (-v \sin \alpha \hat{\rho} - v \cos \alpha \hat{\varphi}) \times B \hat{\rho} = -v \sin \alpha \hat{\rho} \times B \hat{\rho} - v \cos \alpha \hat{\varphi} \times B \hat{\rho} = -v \cos \alpha \hat{\varphi} \times B \hat{\rho} = \\ &= vB \cos \alpha \hat{k} \end{aligned}$$

Il campo elettrico indotto invece in ciascun punto del conduttore a sx vale

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= \vec{v} \times \vec{B} = (v \sin \alpha \hat{\rho} + v \cos \alpha \hat{\varphi}) \times B \hat{\rho} = v \sin \alpha \hat{\rho} \times B \hat{\rho} + v \cos \alpha \hat{\varphi} \times B \hat{\rho} = v \cos \alpha \hat{\varphi} \times B \hat{\rho} = \\ &= -vB \cos \alpha \hat{k} \end{aligned}$$

La forza elettromotrice lungo ciascun conduttore vale

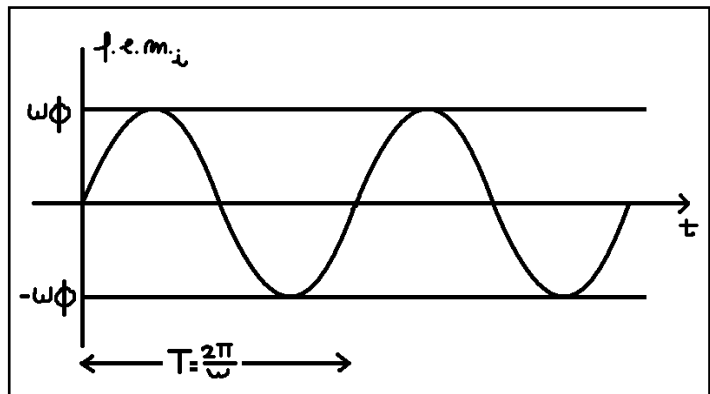
$$\int_0^l \vec{E}_i dz = \int_0^l vB \cos \alpha \hat{k} dz = vB \cos \alpha \hat{k} \int_0^l dz = vBl \cos \alpha$$

Dunque, osservando che i due conduttori di indotto danno luogo a f.e.m. che si sommano e osservato che

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{t} = \omega \Rightarrow \alpha = \omega t \\ v = R\omega \end{cases}$$

si desume che la f.e.m. indotta nella spira vale

$$f.e.m._i = 2\omega RBl \cos(\omega t)$$



ed è detta **f.e.m. di spira**. Essa può esprimersi anche in funzione del valore del flusso polare Φ . Si ha infatti

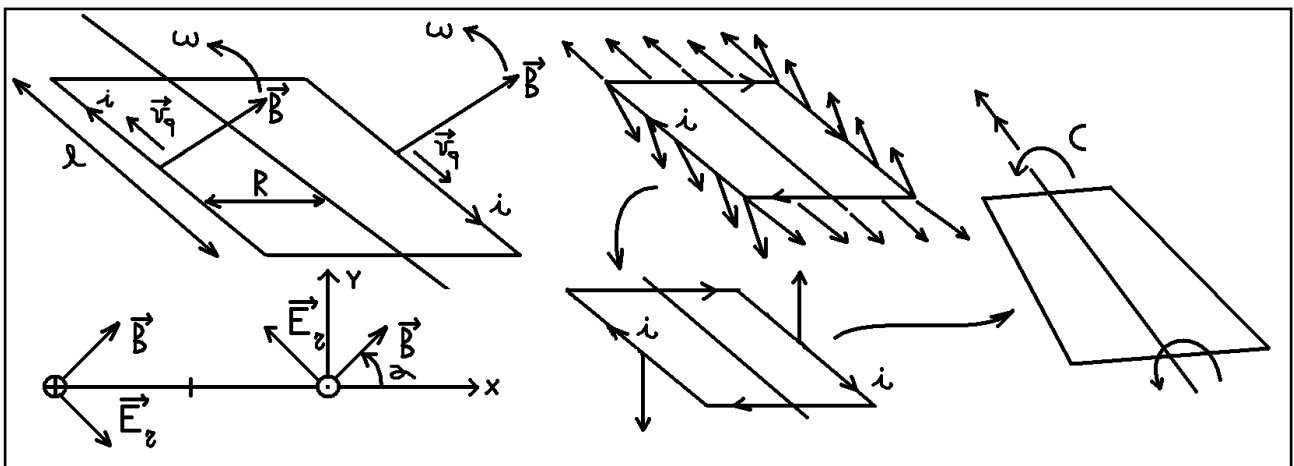
$$\Phi = 2RlB \Rightarrow f.e.m._i = \omega\Phi \cos(\omega t)$$

In genere interessa il valore medio che il valore assoluto della f.e.m. di spira assume. Tale valore è dato da

$$\begin{aligned} \overline{f.e.m._i} &= \frac{1}{T} \int_0^T |\omega\Phi \cos(\omega t)| dt = \frac{\omega\Phi}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos(\omega t)| d(\omega t) = \frac{2\omega\Phi}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\omega t) d(\omega t) = \frac{2\omega\Phi}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d \sin(\omega t) = \\ &= \frac{2\omega\Phi}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d \sin(\omega t) = \frac{2\omega\Phi}{\pi} \sin(\omega t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\omega\Phi}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\omega\Phi}{\pi} = 2 \frac{2\pi\Phi}{T\pi} = 4 \frac{\Phi}{T} = 4\Phi f \end{aligned}$$

dove si è introdotta la frequenza di rotazione della spira (o della induzione magnetica, che è lo stesso). Dunque il valore medio della f.e.m. indotta in ciascuno dei due conduttori della spira è

$$E_{cm} = 2\Phi f$$



e dunque, introducendo, il fattore di forma, il valore efficace della f.e.m. di ciascun conduttore della spira è

$$E_c = k_f E_{cm} = k_f 2\Phi f = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \Phi f$$

La f.e.m. di spira dà luogo ad una corrente attraverso la spira, detta **corrente di indotto**. La corrente di indotto è causa di una sollecitazione agente sulla spira, sollecitazione la quale può esser valutata (ancora una volta) attraverso la legge della forza di Lorentz. Considerando il conduttore di indotto a dx si ha

$$\vec{E}_r = \vec{v}_q(P) \times \vec{B}(P) = v_q \hat{k} \times B \hat{\rho} = v_q B \hat{\varphi} = \frac{J}{\rho} B \hat{\varphi} = \frac{i}{\rho A} B \hat{\varphi}$$

Dunque la forza che agisce sul conduttore di indotto a dx vale

$$\vec{F}_r = l A \rho \left(\frac{i}{\rho A} B \hat{\varphi} \right) = li B \hat{\varphi}$$

dove A è la sezione della spira. Ma una forza uguale ed opposta agisce sull'altro conduttore di indotto. Sui conduttori di testata poi agiscono due sollecitazioni che hanno sollecitazione equivalente nulla. In definitiva dunque sulla spira agisce una sollecitazione equivalente ad una coppia, la coppia di momento

$$\vec{C}_r = 2liBR \cos(\omega t) \hat{k}$$

la quale assorbe una potenza meccanica

$$P_m = C_r \omega = 2liBR \omega \cos(\omega t)$$

La potenza elettrica uscente invece dalla spira, convenzionata da generatore, è

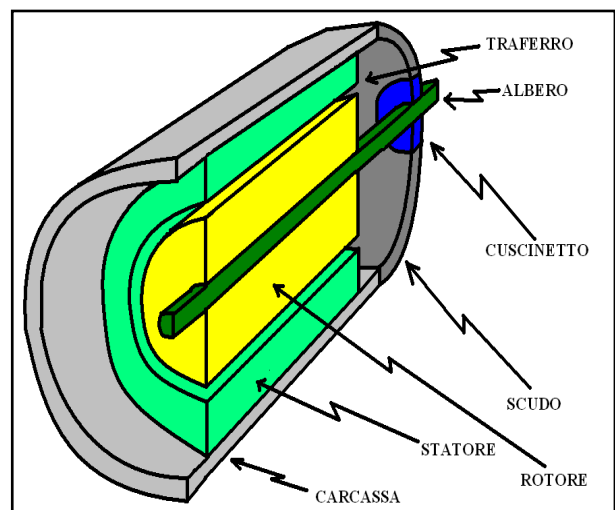
$$P_g = i f.e.m._i = i 2\omega RBl \cos(\omega t)$$

Si sottolinea che la potenza elettrica generata è pari alla potenza elettrica assorbita.

FUNZIONAMENTO DA MOTORE. In questo caso la corrente che attraversa la spira è fornita dall'esterno. Si fornisce cioè potenza elettrica. Questa fa sorgere la coppia agente sulla spira la quale, a sua volta mette in moto la spira generando potenza meccanica. Ad ogni modo il valore della potenza meccanica e della potenza elettrica sono coincidenti con quelli trovati nel precedente caso.

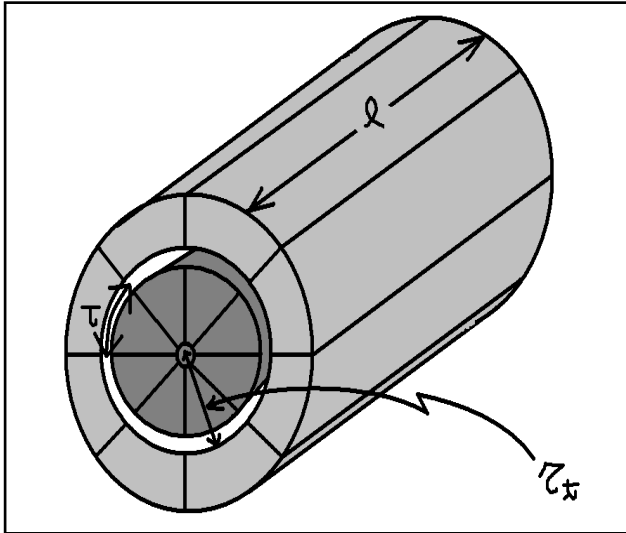
II) STRUTTURA DELLE MACCHINE ROTANTI

MATERIALI. Il rotore e lo statore sono costruiti con ferro ad alta permeabilità per massimizzare il flusso di induzione. Il traferro poi è realizzato il più sottile possibile in modo che, data anche la presenza di aria nel traferro (bassissima permeabilità), la induzione non vada dispersa (vedi a tal proposito il capitolo VII, paragrafo secondo, dei tuoi appunti di Elettromagnetismo). Le parti del circuito magnetico le quali vanno



soggette ad induzione periodica sono realizzate in lamierini simili a quelli usati nei trasformatori (spessore di 0,3-0,5 mm con 2-3% di silicio, isolati reciprocamente). I lamierini sono affastellati longitudinalmente e tenuti insieme da bulloni assiali. Il ricorso ai lamierini è giustificato dalla necessità di ridurre le perdite per correnti parassite.

Le altre parti del nucleo ferromagnetico sono realizzate in ferro massiccio.



PARAMETRI GEOMETRICI. I parametri considerati nelle macchine elettriche rotanti sono

- 1) la lunghezza di statore e rotore, designata l ;
- 2) il raggio al traferro, raggio medio nel caso di poli salienti, designato r_t ;
- 3) il numero di coppie polari, indicato p ;

4) il semipasso polare $\tau = \frac{2\pi r_t}{2p}$ il quale indica l'arco, della circonferenza al traferro, occupato da un polo;

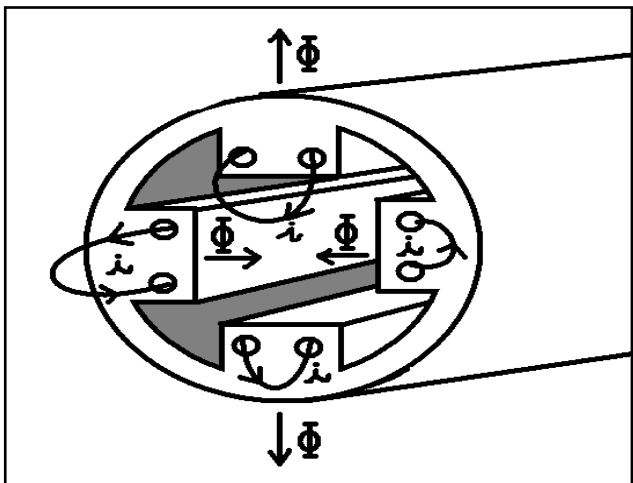
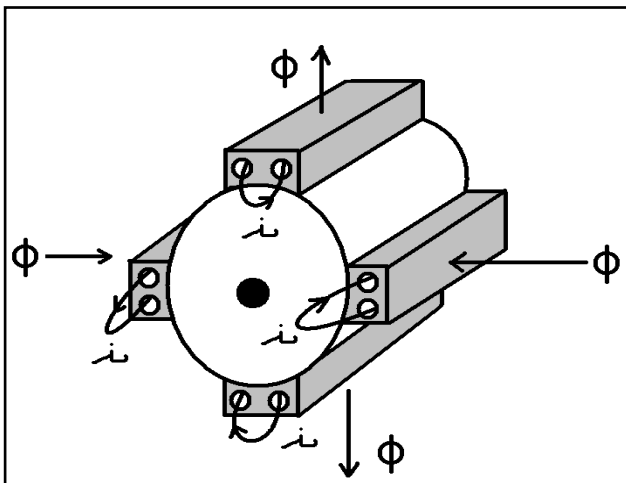
5) il passo polare $2\tau = \frac{2\pi r_t}{p}$ il quale indica l'arco, della circonferenza al traferro, occupato

da due poli.

STRUTTURA DELL'INDUTTORE. L'induttore può essere alloggiato nello statore, nel qual caso l'indotto sarà nel rotore. Se invece l'induttore è nel rotore, allora l'indotto è nello statore. L'induttore è costituito da avvolgimenti (o bobine) di eccitazione, oppure da magneti permanenti. Le bobine (o, eventualmente, i magneti permanenti) sono organizzati in **poli**. Poli adiacenti determinano flussi polari aventi verso opposto. I poli sono presenti sempre in numero pari e dunque possono essere raccolti in **coppie polari**. Il numero di coppie polari si indica p .

In figura (a sx) abbiamo un rotore induttore con due coppie polari. Si rileva che questo induttore è del tipo detto a **poli salienti**. Nella successiva figura si ha invece uno statore induttore, sempre a poli salienti. Il numero di coppie polari è sempre due e dunque $p=4$. In entrambe le figure gli induttori sono realizzati in modo da attribuire verso alterno al flusso polare.

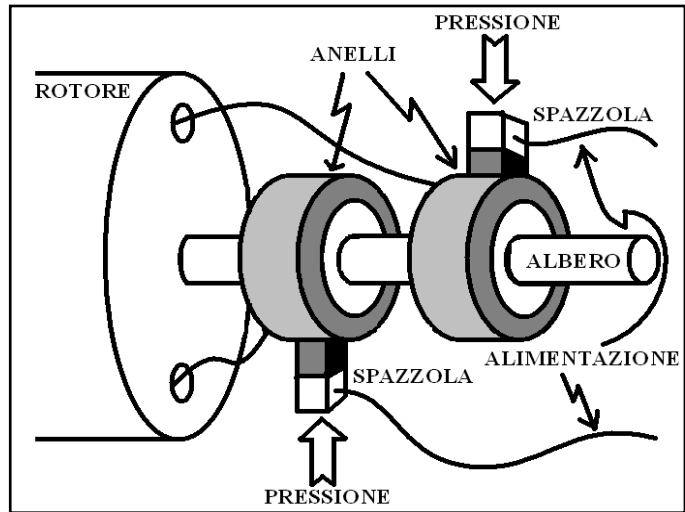
Si consideri che esistono anche **induttori lisci o isotropi** i quali sono tronchi di cilindro pieni (se



rotori) o tronchi di cilindro cavi (se statori). Vedi in proposito il secondo volume del libro di testo a pag. 122. Le bobine di eccitazione nel caso di induttori lisci sono stipate in **cave di induttore**.

STRUTTURA DELL'INDOTTO. L'indotto può trovarsi, come visto, sul rotore o sullo statore. Esso è costituito da cave ricavate sulla superficie del rotore o dello statore prossima al traferro. Queste scanalature, parallele all'asse della macchina, sono dette **cave di indotto**.

CONTATTI STRISCIANTI. Come vengono alimentati gli avvolgimenti (d'induttore o di indotto) presenti sul rotore? Si ricorre al dispositivo illustrato in figura. Si hanno due **anelli** solidali all'albero. A ciascun anello è collegato un terminale degli avvolgimenti del rotore. Gli anelli sono, nella parte più esterna, fatti di materiale conduttore. Sugli anelli sono premute delle **spazzole** realizzate di grafite (materiale conduttore) che sono fisse e strisciano dunque sugli anelli rotanti. Attraverso le spazzole dunque sono alimentati gli avvolgimenti del rotore.



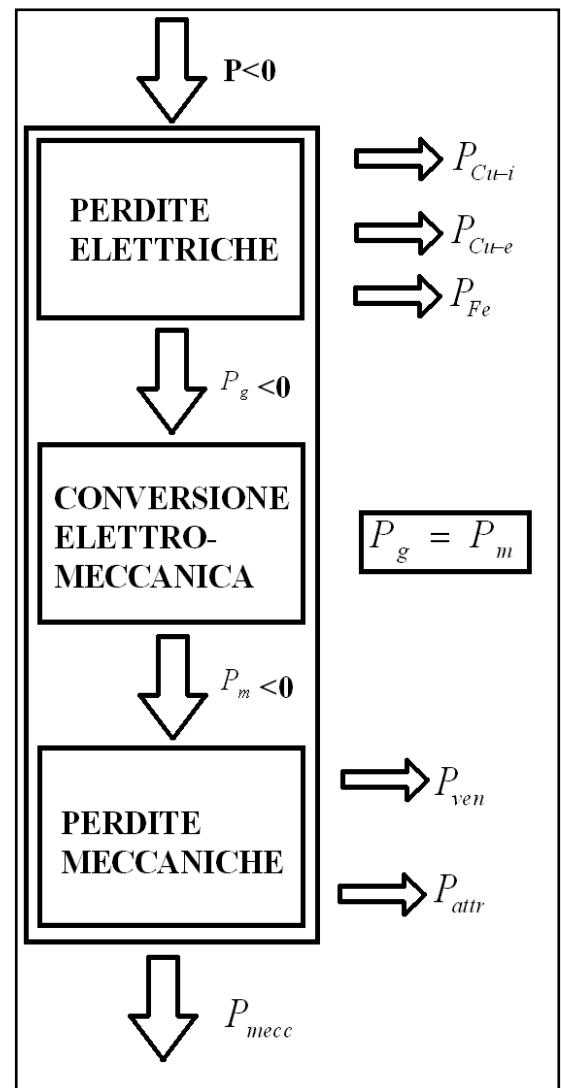
III) POTENZE E PERDITE NELLE MACCHINE ROTANTI

POTENZE E PERDITE. Distinguiamo

- 1) la potenza meccanica scambiata all'albero P_{mecc} ;
- 2) la potenza elettrica attiva scambiata ai morsetti P ;
- 3) la potenza elettrica attiva convertita P_g ;
- 4) la potenza meccanica convertita P_m .

Nel caso di macchine elettriche rotanti alimentate a corrente alternata queste potenze sono variabili. Se ne considerano allora i valori medi sul periodo. Si osserva che $P_g = P_m$ sempre, mentre risulta $P_{mecc} \neq P_m$ e $P \neq P_g$ a causa di perdite di vario tipo. Le perdite di potenza sono classificabili nel modo seguente

- 1) perdite elettriche:
 - a) P_{Cu-i} : perdite per effetto joule negli avvolgimenti dell'indotto;
 - b) P_{Cu-e} : perdite per effetto joule negli avvolgimenti dell'induttore;
 - c) P_{Fe} : perdite per correnti parassite e per isteresi nel materiale ferromagnetico;
- 2) perdite meccaniche:
 - a) P_{attr} : perdite per attrito nei cuscinetti e tra spazzole e dischi;



b) P_{ven} : perdite meccaniche per ventilazione (?)

BILANCIO DELLE POTENZE PER IL MOTORE. Al motore è fornita potenza elettrica P ed esso restituisce potenza meccanica P_{mecc} . I dettagli di questa conversione, con tanto di perdite elettriche e meccaniche, sono forniti nella illustrazione.

Procediamo allora al calcolo del rendimento del motore. Si ha

$$\eta = \frac{P_{mecc}}{P} = \frac{P_{mecc}}{P_{mecc} + (P_{Cu-i} + P_{Cu-e} + P_{Fe}) + (P_{ven} + P_{attr})}$$

BILANCIO DELLE POTENZE PER IL GENERATORE. In questo caso si fornisce potenza meccanica, si hanno le perdite meccaniche, si verifica la conversione in energia elettrica, si hanno le perdite elettriche, ed esce l'energia elettrica P . Il rendimento è dato da

$$\eta = \frac{P}{P_{mecc}} = \frac{P}{P + (P_{Cu-i} + P_{Cu-e} + P_{Fe}) + (P_{ven} + P_{attr})}$$

CAPITOLO XV, MACCHINE SINCRONE

I) GENERALITA'

DEFINIZIONE,

MACCHINA ELETTRICA SINCRONA. Si definisce macchina elettrica sincrona un particolare tipo di macchina elettrica rotante in cui la velocità di rotazione è rigidamente legata alla frequenza delle grandezze elettriche ai morsetti. In genere nelle macchine sincrone l'induttore è situato nel rotore.

DEFINIZIONE,

ALTERNATORE. L'alternatore è una macchina elettrica sincrona in funzione di generatore. Non esistono differenze costruttive fra una macchina elettrica sincrona che funzioni da generatore ed una che funzioni da motore. Ciascuna macchina sincrona può svolgere sia l'una che l'altra funzione.

Si tenga presente che la stragrande maggioranza della energia elettrica che si produce nel mondo è prodotta da macchine elettriche sincrone.

DEFINIZIONE,

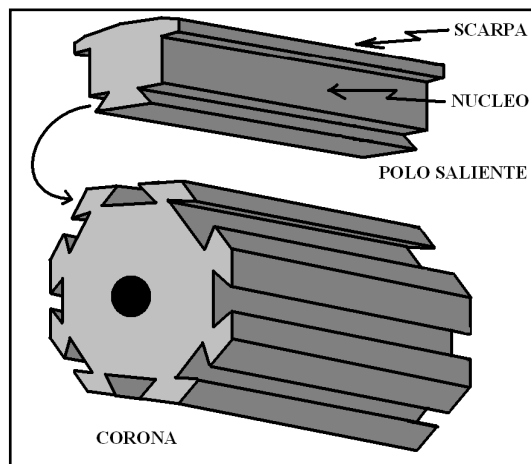
MOTORE SINCRONO. Quando una macchina elettrica sincrona svolge la funzione di motore si parla di motore sincrono.

DEFINIZIONE,

CORONA. Nel caso di rotore a poli salienti si ha una **corona** la quale è la struttura centrale del rotore ed ha forma di un poligono regolare di tanti lati quanti sono i poli. Su ciascun lato della corona vi sono delle scanalature in cui sono inseriti i poli (vedi figura).

DEFINIZIONE,

SCARPA E NUCLEO. Ciascun polo saliente del rotore presenta un nucleo, attorno al quale sono avvolte le bobine di eccitazione, e una scarpa la quale costituisce la parte più esterna del polo, quella più vicina allo statore.



La **corrente di eccitazione** è una corrente continua I_e fornita agli avvolgimenti di eccitazione del rotore (induttore) tramite contatti striscianti costituiti da due anelli, ciascuno dei quali in contatto con una spazzola.

Il rotore può anche essere **liscio** (isotropo) nel qual caso le bobine di eccitazione sono alloggiare in cave ricavate superficialmente sul rotore stesso.

DEFINIZIONE,

BRUSHLESS. In alcuni casi possono aversi macchine sincrone il cui induttore è costruito con magneti permanenti. Allora, non essendo necessarie bobine di eccitazione, non vi saranno nemmeno contatti striscianti e dunque spazzole. Queste macchine, per questo motivo, sono dette brushless.

Lo **statore** (indotto) è una corona cilindrica costruita in materiale ferromagnetico lamellato. Infatti lo statore è sede di una induzione variabile (che ruota solidalmente con il rotore induttore) e dunque è sede di correnti parassite. Lo statore è sede di cave longitudinali, parallele all'asse della macchina, che alloggiano i **conduttori di indotto**. I conduttori di indotto sono collegati fra loro per formare le **matasse di indotto** le quali, unite fra loro, costituiscono uno o tre **avvolgimenti di indotto**, a seconda che la macchina sia collegata ad una rete sinusoidale monofase o trifase.

II) VALORI NOMINALI

I valori nominali sono quei valori delle grandezze elettriche alle quali corrisponde il funzionamento ottimale della macchina. I principali valori nominali delle macchine sincrone sono i seguenti.

P_n	potenza nominale (VA oppure W)
U_n	tensione nominale di indotto (V)
I_n	corrente nominale di indotto (A)
f_n	frequenza nominale (Hz)
I_e	corrente di eccitazione (A)
U_e	tensione di eccitazione (V)
n_n	velocità nominale di rotazione (giri/minuto)
C_n	coppia nominale dell'albero (Nm)

Si deve osservare che nel caso di alternatori la potenza nominale indica una potenza apparente e dunque la sua unità di misura è il VA. Nel caso invece di motori sincroni la potenza nominale sarà la potenza fornita all'albero e la sua unità di misura sarà il W.

Per gli alternatori monofasi si ha

$$P_n = U_n I_n$$

Per gli alternatori trifasi si ha

$$P_n = \sqrt{3} U_n I_n$$

Per i motori sincroni si ha

$$P_n = C_n \frac{2\pi}{60} n_n$$

II) F.E.M. DELLA MACCHINA SINCRONA TRIFASE

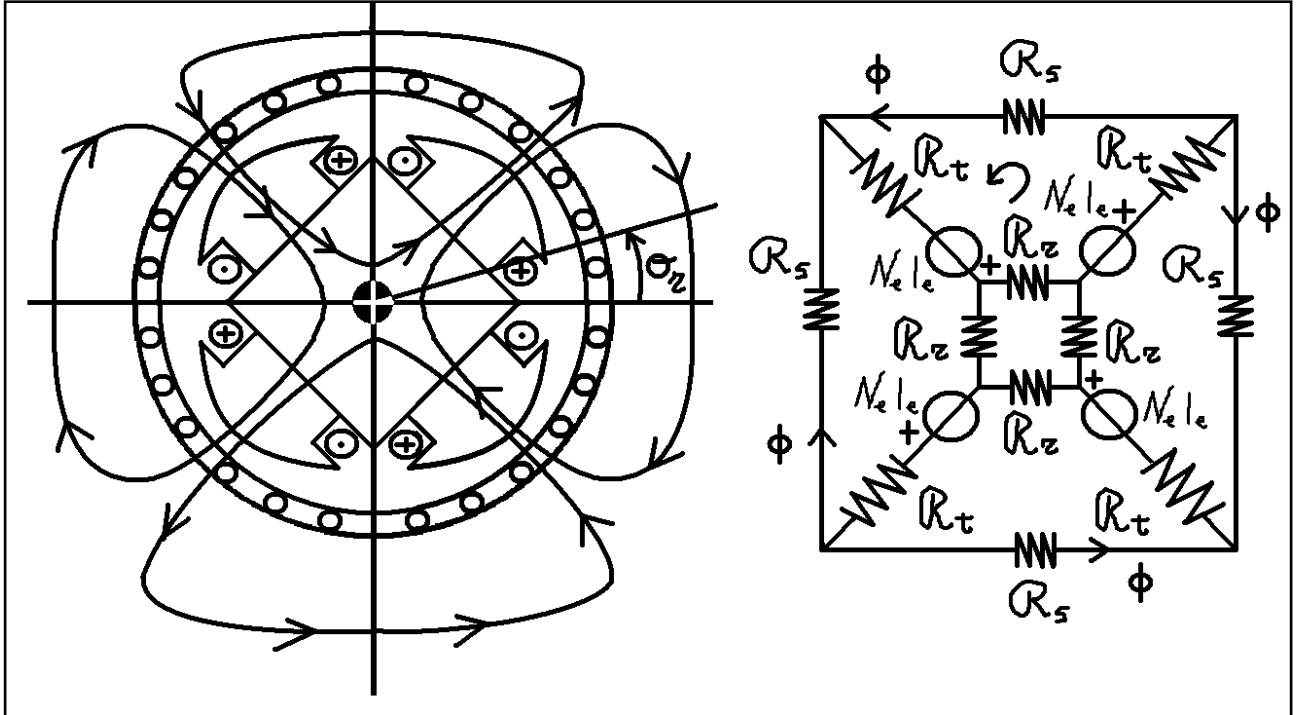
In questo paragrafo si farà riferimento ad una macchina sincrona avente le seguenti caratteristiche:

- 1) alternatore;
- 2) trifase;
- 3) induttore nel rotore;
- 4) induttore a poli salienti;
- 5) due coppie polari ($p=2$).

INDUZIONE MAGNETICA AL TRAFERRO. Le correnti nell'indotto siano nulle mentre l'induttore sia alimentato da una corrente di eccitazione I_e . Ciascuna bobina di eccitazione (ogni polo ha una bobina avvolta attorno al nucleo del polo stesso) abbia N_e spire. Allora ad ogni polo si associa una f.m.m. pari a

$$f.m.m. = I_e N_e$$

ma, essendo, come si dice, le bobine collegate in **antiserie**, le forze magneto motrici avranno verso alterno. Si realizza allora il circuito magnetico equivalente indicato in figura. Si distinguono le riluttanze del traferro, del rotore e dello statore, oltre alle f.m.m..



Consideriamo ora una maglia di tale circuito, quella superiore. La LKT per essa si scrive

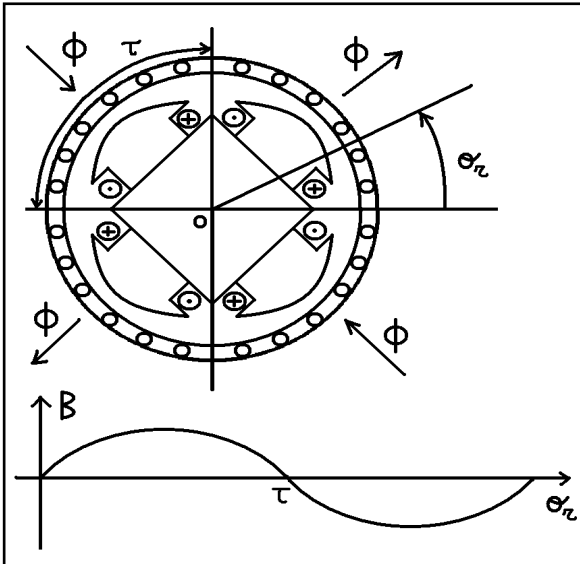
$$2N_e I_e = (\mathfrak{R}_s + \mathfrak{R}_r + 2\mathfrak{R}_t)\Phi$$

Si tenga ora presente che le riluttanze relative al passaggio della induzione magnetica nel rotore e nello statore sono molto piccole rispetto a quella del traferro. E' lecito allora scrivere

$$\begin{aligned} 2N_e I_e = 2\mathfrak{R}_t \Phi &\Rightarrow N_e I_e = \mathfrak{R}_t \Phi \Rightarrow \Phi = \frac{N_e I_e}{\mathfrak{R}_t} = \mu_{aria} \frac{N_e I_e S}{d(\mathcal{G}_r)} \approx \mu_0 \frac{N_e I_e S}{d(\mathcal{G}_r)} \Rightarrow \\ \Rightarrow B(\mathcal{G}_r) S &= \mu_0 \frac{N_e I_e S}{d(\mathcal{G}_r)} \Rightarrow B(\mathcal{G}_r) = \mu_0 \frac{N_e I_e}{d(\mathcal{G}_r)} \end{aligned}$$

dove $d(\mathcal{G}_r)$ è lo spessore del traferro in corrispondenza della coordinata angolare $\mathcal{G}_r$ indicata in figura. Il valore di induzione calcolato è quello della componente radiale il cui andamento dunque dipende dallo spessore del traferro. Ora si tenga presente che il profilo del traferro è disegnato in maniera tale da fare sì che la funzione

$$B(\mathcal{G}_r) = \mu_0 \frac{N_e I_e}{d(\mathcal{G}_r)}$$



caso a variare, nella formula

$$B = \mu_0 \frac{N_e I_e}{d}$$

è il numero di spire concatenate al variare della coordinata angolare. Si ha dunque

$$B(\vartheta_r) = \mu_0 \frac{N_e(\vartheta_r) I_e}{d} = B_M \sin(p \vartheta_r)$$

F.E.M. DI UN CONDUTTORE DI INDOTTO. Nelle cave dello statore sono disposti, come sappiamo, i conduttori di indotto. Essi sono dei fili stesi parallelamente all'asse della macchina, per tutta la sua lunghezza. Se il rotore ruota con velocità angolare costante ω , il campo di induzione prodotto dalle bobine di eccitazione in esso contenute ruoterà solidalmente con esso. Si avrà allora un moto relativo tra il campo di induzione e i conduttori di indotto, ciò che comporta l'insorgere, nei conduttori di indotto stessi, di un campo elettrico indotto.

In figura abbiamo proprio un conduttore di indotto, uno dei conduttori inseriti nelle cave dello statore. Se consideriamo fisso il rotore allora i conduttori di indotto ruotano attorno all'asse della macchina con velocità periferica

$$v = \omega_r r_t$$

dove si è introdotto il raggio medio al traferro. Dunque il campo elettrico indotto nel conduttore di indotto è

$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$$

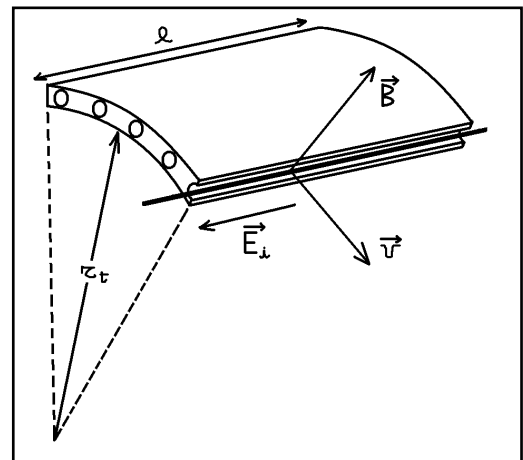
e la f.e.m. che si determina vale

sia con buona approssimazione una sinusoide esprimibile come

$$B(\vartheta_r) = B_M \sin(p \vartheta_r)$$

la quale assume valore massimo (negativo o positivo) in corrispondenza degli assi di simmetria dei poli (**assi polari**) e si annulla in corrispondenza degli assi mediani fra due poli consecutivi (**assi interpolari**).

Anche nel caso di rotore induttore liscio si ha che la componente radiale della induzione è una sinusoide, sebbene in questo caso lo spessore del traferro rimanga costante. Ciò è dovuto al fatto che in questo



$$f.e.m. = l\omega_r r_t B = l\omega_r r_t B_M \sin(p\vartheta_r) = E_M \sin(p\vartheta_r)$$

Adesso si consideri la figura a dx dove sono presenti due sistemi di riferimento dei quali uno, il sistema Oxy, è solidale al rotore (e al campo di induzione), l'altro, il sistema Oξη, è solidale allo statore. Si hanno allora i tre angoli indicati in figura i quali stanno nella relazione seguente

$$\vartheta_r = \vartheta_s - \omega_r t$$

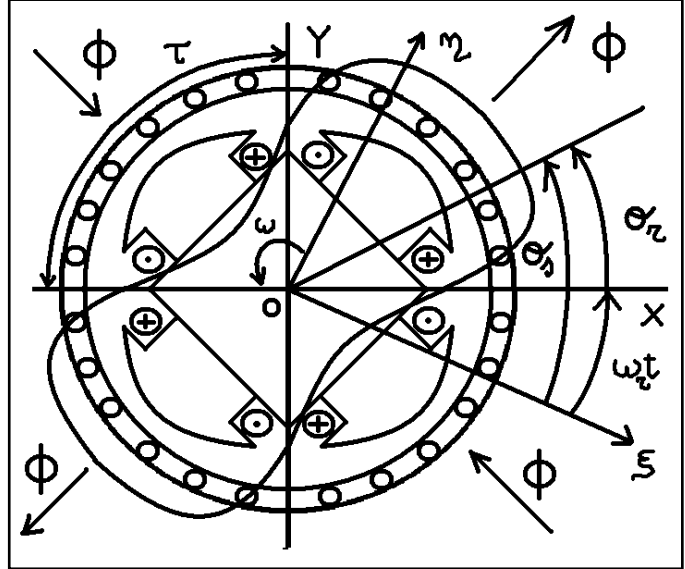
Dunque si ha

$$f.e.m. = E_M \sin(p\vartheta_s - p\omega_r t)$$

Ora si considerino le seguenti due definizioni.

$$\vartheta \overset{\Delta}{=} p\vartheta_s \begin{pmatrix} \text{angolo} \\ \text{elettrico} \end{pmatrix}$$

$$\omega \overset{\Delta}{=} p\omega_r \begin{pmatrix} \text{velocità} \\ \text{angolare} \\ \text{elettrica} \end{pmatrix}$$



L'angolo elettrico vale 2π in corrispondenza di quell'angolo effettivo per il quale si realizza un periodo completo della induzione. Introdotte queste grandezze si ha

$$f.e.m.(\vartheta, t) = E_{cM} \sin(\vartheta - \omega t)$$

Si osserva che la prima variabile, l'angolo elettrico, specifica il conduttore di indotto che si sta considerando, la seconda, il tempo, specifica la posizione della induzione rispetto a quel conduttore, ovvero il valore della induzione. Fissato un qualunque conduttore di indotto, l'induzione varia sinusoidalmente nel tempo e dunque la f.em. di quel conduttore varia anch'essa sinusoidalmente nel tempo.

Volendo ricavare il valore efficace della forza elettromotrice dei conduttori di indotto si ha

$$E_c = \frac{E_{cM}}{\sqrt{2}} = \frac{v l B_M}{\sqrt{2}} = \frac{\omega_r r_t l \pi B_m}{2\sqrt{2}} = \frac{\omega_r r_t l 2\pi p B_m \pi}{4\pi p \sqrt{2}} = \left(r_t \frac{2\pi}{2p} \right) B_m l \left(\frac{\omega_r p}{2\pi} \right) \frac{\pi}{\sqrt{2}} = (\tau B_m l) f \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \Phi f \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

dove si è messo in evidenza il flusso polare

$$\Phi = \tau B_m l = r_t \frac{2\pi}{2p} B_m l$$

e la frequenza della forza elettromotrice (che non è uguale a quella di rotazione), data da

$$f = \frac{\omega_r p}{2\pi} = f_r p$$

Dunque le oscillazioni della f.e.m. di un conduttore di indotto, al secondo, è p volte il numero di giri, al secondo, del rotore.

Si osservi che il valore della forza elettromotrice di un conduttore di indotto qui trovato è uguale a quello trovato nel caso generico e semplice studiato nel precedente capitolo.

FREQUENZA DELLA F.E.M. E VELOCITA' DI ROTAZIONE DEL ROTORE. Intanto la velocità di rotazione del rotore di una macchina sincrona non si esprime in radianti al secondo, bensì in giri al minuto. Dunque la velocità si scrive

$$n = \omega_r \frac{60}{2\pi}$$

Allora il legame tra velocità (in giri al minuto) e frequenza delle f.e.m. dei conduttori di indotto si scrive

$$n = \left(p \frac{\omega_r}{2\pi} \right) 60 \frac{1}{p} = \frac{f 60}{p}$$

Siccome la frequenza è imposta e vale 50Hz, allora la velocità di rotazione del rotore è funzione solo del numero p di coppie polari, essendo

$$n = \frac{50 \cdot 60}{p} = \frac{3000}{p}$$

Sono qui tabulate le velocità di macchine sincrone con frequenza di f.e.m. di indotto di 50 Hz, per valori diversi del numero di coppie polari.

p (numero coppie polari)	1	2	3	4	5
n (giri/minuto)	3000	1500	1000	750	600

Le macchine più veloci sono dunque quelle con poche coppie polari. Questo induce a preferire per esse rotori lisci monoblocco e di piccolo diametro.

F.E.M. DELLE MATASSE DI INDOTTO. Ora che conosciamo la f.e.m. di un conduttore di indotto ci proponiamo di valutare la f.e.m. complessivamente erogata dall'ndotto. A tale scopo riferiamoci al nostro alternatore quadripolare e fissiamo i seguenti parametri:

- 1) numero di coppie polari $p = 2$;
- 2) numero di cave di indotto per polo $q_t = 6$;
- 3) numero di conduttori per cava di indotto $N_c = 2$;

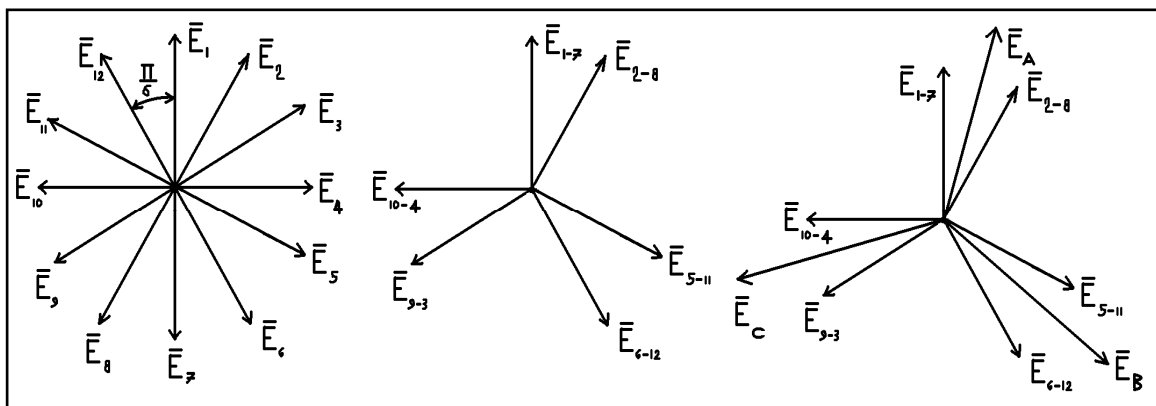
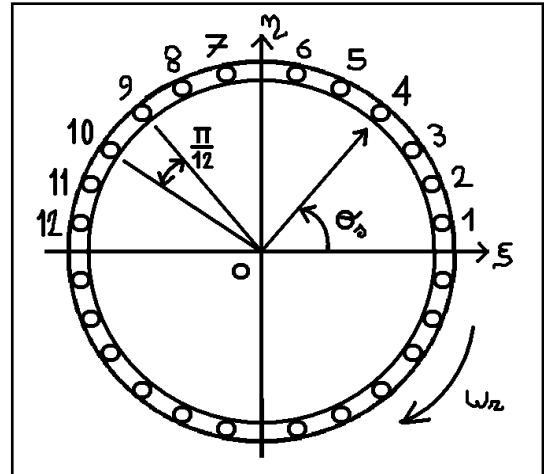
Allora le f.e.m. dei conduttori di indotto relativi ad un passo polare costituiscono un sistema a 12 fasi simmetrico. Ci proponiamo ora di

- 1) collegare i conduttori di indotto di un passo polare (12 cave complessive, per un totale di 24 conduttori) in modo da avere un sistema trifase simmetrico;

- 2) ottenere lo stesso sistema trifase simmetrico dalle restanti 12 cave (altri 24 conduttori di indotto);
- 3) collegare in serie i due sistemi trifase simmetrici ottenuti in modo da avere un unico sistema di forze elettromotrici trifase;
- 4) collegare a stella il sistema trifase ottenuto.

Le forze elettromotrici relative alle dodici cave di un passo polare sono, facendo riferimento alla figura, date da

$$\begin{aligned}
 f.e.m._1 &= E_M \sin(\omega t - p\vartheta_{s1}) = \\
 &= E_M \sin\left(\omega t - 2 \cdot \frac{\pi}{24}\right) \\
 f.e.m._2 &= E_M \sin\left(\omega t - 2 \cdot \left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{12}\right)\right) \\
 f.e.m._3 &= E_M \sin\left(\omega t - 2 \cdot \left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right)\right) \\
 &\dots \\
 f.e.m._{12} &= E_M \sin\left(\omega t - 2 \cdot \left(\frac{\pi}{24} + \frac{11\pi}{12}\right)\right)
 \end{aligned}$$



I relativi fasori sono dunque dodici fasori sfasati di $\pi/6$ fra loro e con il successivo in ritratto sul precedente. Si ricorda che ciascun fasore si riferisce ad una cava e dunque a due conduttori di indotto. Si ha il diagramma fasoriale indicato in figura.

Collegiamo ora un conduttore della cava 1 con un conduttore della cava 7, che colleghiamo a sua volta col secondo conduttore della cava 1, il quale ancora viene collegato con il secondo conduttore della cava 7. Stesso lavoro facciamo tra la cava 2 e la cava 8, tra la cava 3 e la cava 9, tra la cava 4 e la cava 10, tra la cava 5 e la cava 11, tra la cava 6 e la cava 12. Si ottengono così le 6 forze elettromotrici di fasori

$$\begin{aligned}
 \overline{E}_{1-7} &= \overline{E}_1 - \overline{E}_7 + \overline{E}_1 - \overline{E}_7 = \overline{E}_1 + \overline{E}_1 + \overline{E}_1 + \overline{E}_1 = 4\overline{E}_1 \\
 \overline{E}_{2-8} &= \overline{E}_2 - \overline{E}_8 + \overline{E}_2 - \overline{E}_8 = \overline{E}_2 + \overline{E}_2 + \overline{E}_2 + \overline{E}_2 = 4\overline{E}_2 \\
 \overline{E}_{9-3} &= 4\overline{E}_9 \\
 \overline{E}_{10-4} &= 4\overline{E}_{10} \\
 \overline{E}_{5-11} &= 4\overline{E}_5 \\
 \overline{E}_{6-12} &= 4\overline{E}_6
 \end{aligned}$$

il cui diagramma fasoriale è raffigurato a dx. Adesso procediamo collegando fra loro le cave 1,7 alle cave 2,8. Colleghiamo poi le cave 3,4 alle cave 9,10. Poi colleghiamo le cave 5,6 alle cave 11,12. Abbiamo così la terna di fasori

$$\overline{E}_A = \overline{E}_{1-7} + \overline{E}_{2-8} = 4(\overline{E}_1 + \overline{E}_2)$$

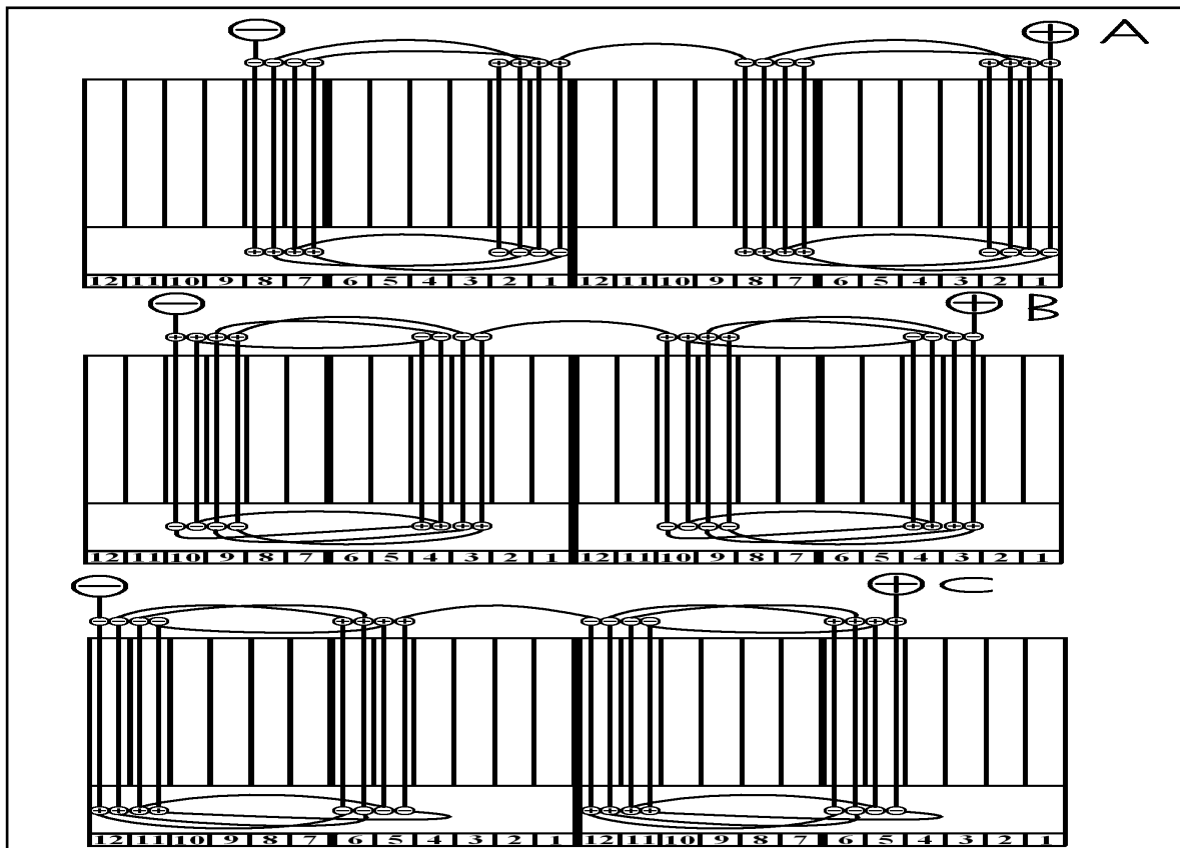
$$\overline{E}_B = \overline{E}_{5-11} + \overline{E}_{6-12} = 4(\overline{E}_5 + \overline{E}_6)$$

$$\overline{E}_C = \overline{E}_{3-9} + \overline{E}_{4-10} = 4(\overline{E}_3 + \overline{E}_4)$$

La terna fasoriale così ottenuta è evidenziata in figura. Trattasi di una terna simmetrica. Gli stessi collegamenti vengono effettuati nella restante coppia polare ottenendo la stessa terna simmetrica. Le due terne vanno quindi sommate in serie ottenendo in fine un'unica terna di tensioni trifase simmetriche.

Si riportano i collegamenti dei conduttori di indotto sullo statore. Per chiarezza di lettura i conduttori che vengono a costituire le tre fasi sono riportati in tre disegni distinti. I tre poli negativi vanno connessi fra loro dando luogo al centro stella.

Il valore efficace della tensione stellata è



$$E = 2 \left(2E_c 2 \cos \frac{\pi}{12} + 2E_c 2 \cos \frac{\pi}{12} \right) = 16E_c \cos \frac{\pi}{12} = 16 \left(\Phi f \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) \cos \frac{\pi}{12}$$

In generale si ha

$$E = p \left(N_m E_c N_c \cos \frac{\pi}{12} + N_m E_c N_c \cos \frac{\pi}{12} \right) = 2p E_c N_c N_m \cos \frac{\pi}{12}$$

dove si è introdotto il numero delle matasse N_m (si intende per matassa il collegamento dei 4 conduttori di due cave). Evidenziando anche il fattore di forma $k_f = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ si scrive

$$E = 2p E_c N_c N_m \cos \frac{\pi}{12} = 2p E_c N_c N_m k_f \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \frac{\pi}{12}$$

Se adesso introduciamo N_i , numero di conduttori per avvolgimento (intendiamo per avvolgimento i conduttori di una fase di una sola coppia polare), allora si ha

$$E = N_i k_f p \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \frac{\pi}{12} E_c = p N_i k_f \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{12} \right) \Phi f = p N_i k_f \left(2 \cos \frac{\pi}{12} \right) \Phi f$$

essendo $N_i = 2N_c N_m$. Introducendo poi il **fattore di avvolgimento**

$$k_a = \cos \frac{\pi}{12}$$

si ottiene infine

$$E = 2p N_i k_f k_a \Phi f$$

Il fattore di avvolgimento, che qui vale 0,966, dipende dal numero di cave per polo. Tuttavia, qualunque sia tale numero, la tensione stellata che si ottiene alla fine è sempre esprimibile come sopra. Per esempio, se non sbaglio, in caso di 12 cave per polo, si trova

$$E = 2p E_c N_c N_m \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{24} = p N_i N_m k_f \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{24} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) \Phi f$$

e dunque

$$E = p N_i N_m k_f \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{24} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) \Phi f = p N_i N_m k_f k_a \Phi f$$

con

$$k_a = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{24} = 0,958$$

III) FUNZIONAMENTO A VUOTO

CARATTERISTICA A VUOTO. Si parla di funzionamento a vuoto quando i due morsetti dell'indotto non sono chiusi su un carico. In questo caso la corrente nell'indotto vale zero. Allora l'induzione della macchina è semplicemente quella generata dall'induttore. Allora il valore efficace della tensione indotta in ciascuna fase dell'indotto vale

$$E_{i0} = p \cdot 4 \cdot N_c \Phi f \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{6}$$

Essa costituisce una funzione del flusso di induzione, il quale è a sua volta una funzione della corrente di eccitazione, se la frequenza è imposta. In genere si considera la funzione

$$U_{i0} = F(I_e)$$

dove $U_{i0} = \sqrt{3}E_{i0}$ la quale ha tipicamente l'andamento qui riportato. Tale curva è definita **caratteristica a vuoto** della macchina. Si devono fare su di essa due osservazioni.

1) Si vede che inizialmente l'aumento della corrente di eccitazione produce un innalzamento proporzionale del valore efficace della tensione concatenata fra i morsetti di indotto. Da un certo punto in poi invece tale incremento non è più proporzionale. Ciò è dovuto al fenomeno di saturazione nel nucleo ferromagnetico della macchina. Si osserva che la tensione nominale è assunta pari al valore della tensione concatenata poco dopo l'abbandono dell'andamento lineare.

2) Se la macchina è stata usata più di una volta, allora il suo nucleo ferromagnetico presenterà un magnetismo proprio anche a corrente di eccitazione nulla. Tale magnetismo residuo farà sì che fra i morsetti di indotto sia presente, anche a corrente di eccitazione nulla, una tensione residua. Questo è evidenziato dalla curva della caratteristica a vuoto, la quale non inizia dall'origine degli assi.

III) FUNZIONAMENTO A CARICO

CORRENTI DI INDOTTO. Abbiamo visto che ai morsetti del nostro alternatore abbiamo una terna simmetrica di tensioni stellate. Precisamente tali tensioni sono

$$e_{0A}(t) = \sqrt{2}E_0 \sin(\omega t)$$

$$e_{0B}(t) = \sqrt{2}E_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$e_{0C}(t) = \sqrt{2}E_0 \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

con

$$E_0 = 16\Phi f \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{6}$$

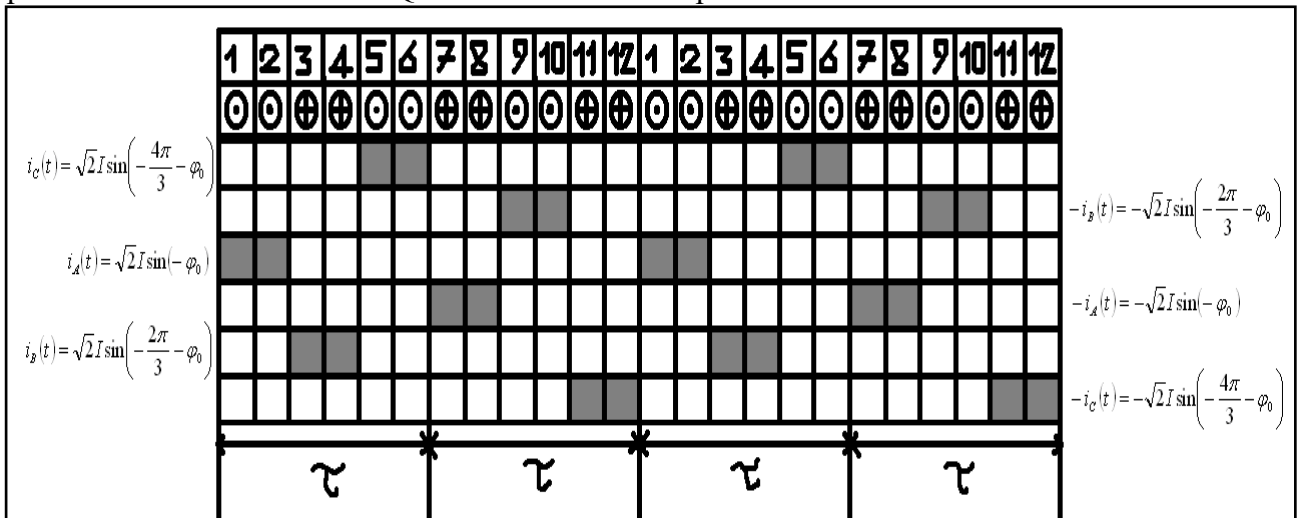
Ora si connetta l'alternatore ad una rete trifase. Si ha allora che lungo i tre avvolgimenti dello statore scorre la terna di correnti

$$i_A(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi_0)$$

$$i_B(t) = \sqrt{2}I \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi_0\right)$$

$$i_C(t) = \sqrt{2}I \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi_0\right)$$

Riporto la distribuzione delle correnti ad istante fissato $t=0$, lungo lo statore rettificato. In questa rappresentazione sono indicate le dodici cave del nostro motore modello. Per ciascuna cava non sono distinti però i due conduttori. Comunque la croce nella cava indica che la corrente entra, mentre il punto indica che la corrente esce. Si vede come le cave abbiano a coppie la stessa corrente. E' rappresentato tutto lo statore. Si sottolinea che questa distribuzione di correnti ruota solidalemente al rotore, ovvero alla induzione della corrente di eccitazione. Questo perché la pulsazione delle correnti è ω . Questo vuol dire che il periodo delle correnti è $T=2\pi/\omega$. Ciò vuol dire



che in tale tempo lo stesso valore di corrente è passato dalla cava uno di una coppia polare alla cava uno di quella successiva, facendo così mezzo giro di statore. Ma allora la velocità angolare di rotazione della distribuzione di corrente vale

$$\frac{\pi}{T} = \frac{\omega}{2} = \frac{\omega_r p}{2} = \omega_r$$

che è quella del rotore.

INDUZIONE DELLE CORRENTI DI INDOTTO. Si è visto che l'induzione dell'induttore, essendo mobile rispetto allo statore, determina nei suoi conduttori dell f.e.m.. Ora si deve considerare che l'induzione prodotta dalle correnti di indotto è variabile nel tempo (perché tali sono le correnti). Dunque anche questa induzione darà luogo a f.e.m. nei conduttori di indotto.

La terna di f.e.m. determinata dalla induzione prodotta dalle correnti di indotto prende il nome di **reazione di indotto**. Per studiare meglio l'interazione fra correnti di indotto, reazione di indotto, e induzione al traferro, conviene distinguere alcuni casi.

1) LA TERNA DELLE CORRENTI DI INDOTTO E' IN FASE CON LA TERNA DI F.E.M. DI INDOTTO. Disegno un passo polare (due poli) riportando sulle cave i riferimenti di corrente. Sullo statore sono riportati i riferimenti di tensione. Nelle cave sono indicati con punto e croce i versi effettivi delle correnti (versi di moto delle cariche positive) che si suppongono in fase con le

forze elettromotrici dei conduttori di cava. L'andamento della forza elettromotrice di tali conduttori è riportato in basso, sotto il rotore ed è indicato e_{ce} . Tale andamento è legato, attraverso la formula della forza di Lorentz, al campo di induzione dovuto dalla corrente di eccitazione (B_e). La corrente di eccitazione è indicata poi sui due poli di statore rettificato riportati in figura.

L'andamento della induzione magnetica dovuta alle correnti di indotto (B_i) è riportato in grigio sovrapposto a quello della induzione dovuta alla corrente di eccitazione. L'andamento della forza elettromotrice da esso generata nei conduttori di indotto è riportato in grigio sovrapposto a quello della forza elettromotrice dovuta alla corrente di eccitazione.

Ecco riassunto il significato dei simboli:

B_e è il campo di induzione prodotto dalla corrente di eccitazione;

B_i è il campo di induzione prodotto dalle correnti di indotto;

e_{ce} è la f.e.m. nei conduttori di indotto dovuta a B_e ;

e_{ci} è la f.e.m. nei conduttori di indotto dovuta a B_i .

Ricaviamo ora l'induzione totale al traferro.

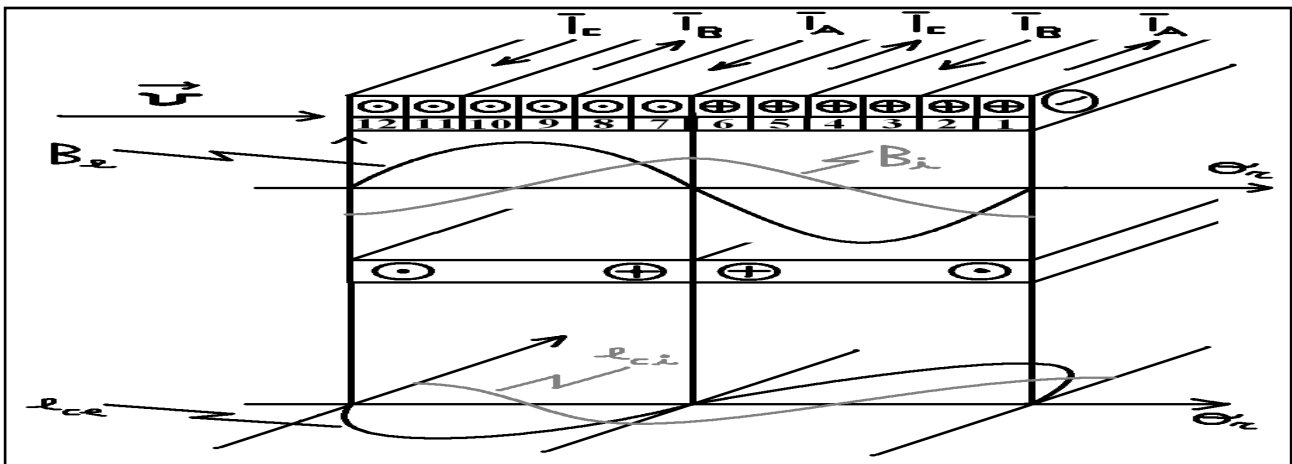
$$\begin{aligned} B(\vartheta_r) &= B_i(\vartheta_r) + B_e(\vartheta_r) = -B_{iM} \cos(p\vartheta_r) + B_{eM} \sin(p\vartheta_r) = -B_M \sin \alpha \cos(p\vartheta_r) + B_M \cos \alpha \sin(p\vartheta_r) = \\ &= -B_M \sin \alpha \cos(p\vartheta_r) + B_M \cos \alpha \sin(p\vartheta_r) = B_M \sin(p\vartheta_r - \alpha) \end{aligned}$$

Si è posto

$$\begin{cases} B_{iM} = B_M \sin \alpha \\ B_{eM} = B_M \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_M = \sqrt{B_{iM}^2 + B_{eM}^2} \\ \tan \alpha = \frac{B_{iM}}{B_{eM}} \end{cases}$$

Si avrà dunque anche

$$e_c(\vartheta_r) = e_{ci}(\vartheta_r) + e_{ce}(\vartheta_r) = E_M \sin(p\vartheta_r - \alpha)$$



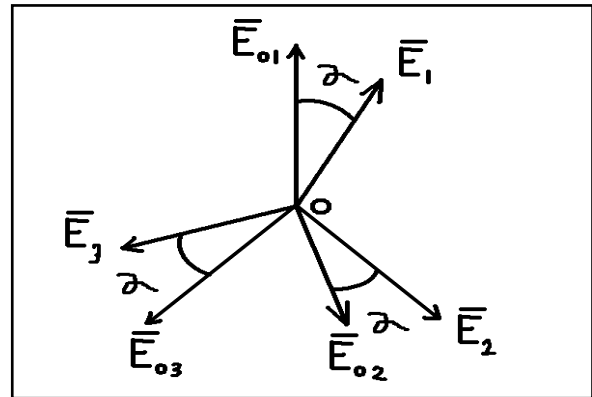
Questo ci fa affermare che la nuova terna di tensioni stellate ai morsetti dell'alternatore è in ritardo di un angolo α rispetto alla terna di tensioni stellate a vuoto, rispetto alla coordinata angolare ϑ_r . Per quanto riguarda poi il nuovo valore efficace della tensione delle tre fasi si che la formula

$$E_0 = 16\Phi_0 f \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{6}$$

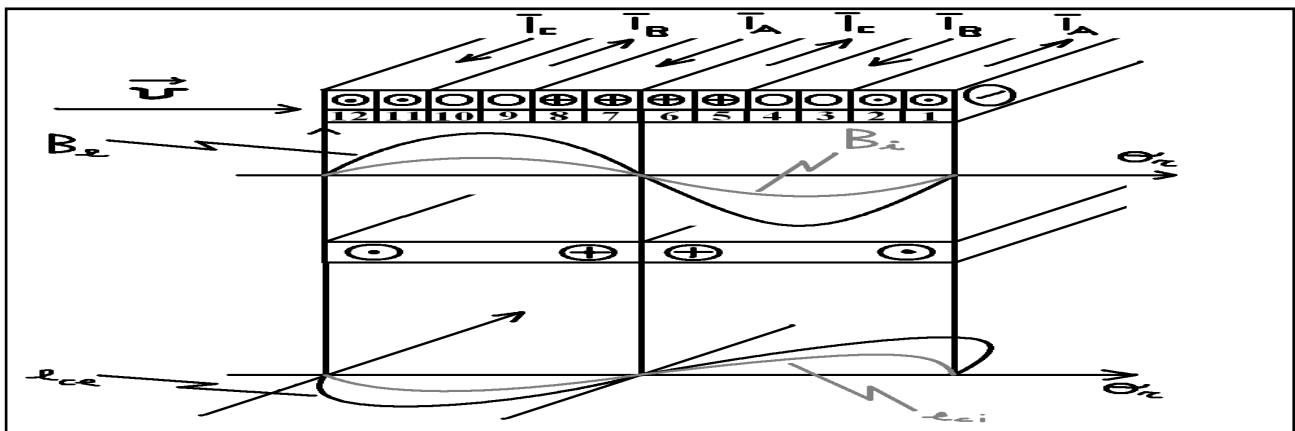
può essere scritta

$$E = 16\Phi f \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{6}$$

In termini fasoriali dovrebbe dunque aversi il diagramma indicato in figura.

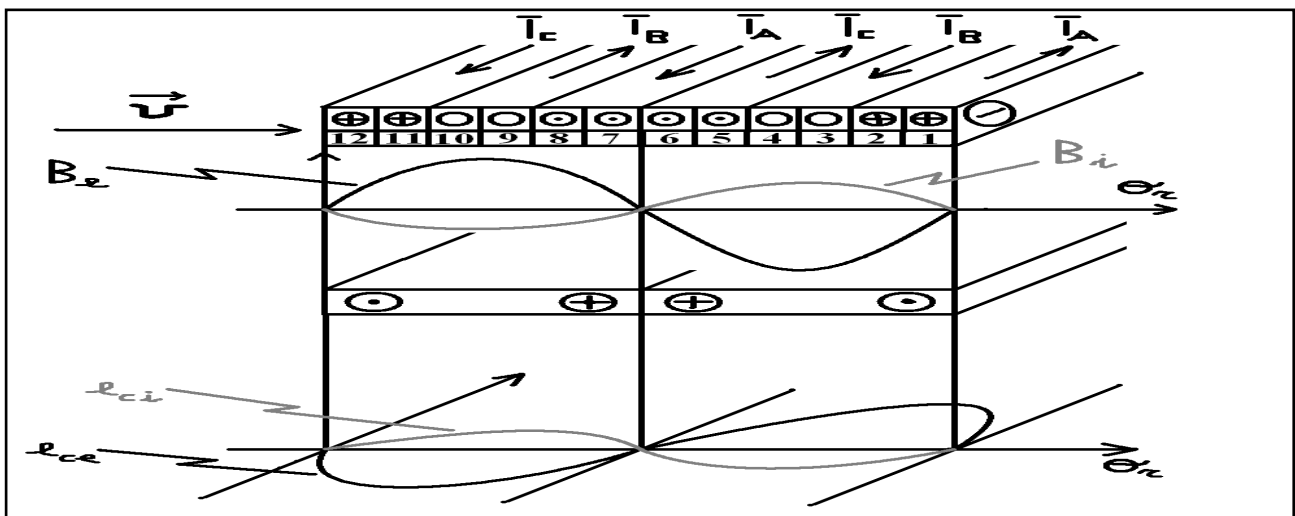


2) LA TERNA DELLE CORRENTI DI INDOTTO E' IN QUADRATURA IN ANTICIPO RISPETTO LA TERNA DI F.E.M. DI INDOTTO. In questo caso l'induzione magnetica che si



deve alle correnti di indotto amplifica quella delle correnti di eccitazione. Amplificate risultano dunque anche le f.e.m.. Nella figura seguente sono riportati gli andamenti delle principali grandezze in gioco.

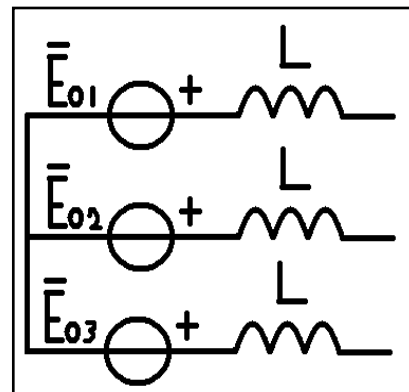
3) LA TERNA DELLE CORRENTI DI INDOTTO E' QUADRATURA IN RITARDO RISPETTO LA TERNA DI F.E.M. DI INDOTTO. In questo caso l'induzione magnetica dovuta alla corrente di eccitazione è indebolita e dunque la f.e.m. de conduttori di indotto risulta anch'essa



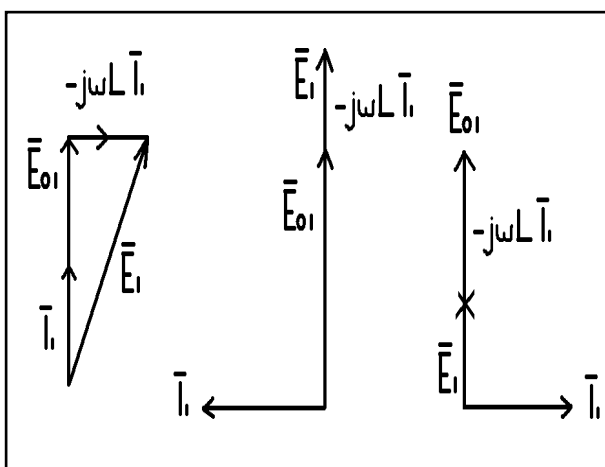
indebolita. Nella figura sono riportati gli andamenti delle principali grandezze in gioco.

REATTANZA EQUIVALENTE DI REAZIONI DI INDOTTO. I fenomeni precedentemente illustrati possono essere descritti attraverso una reattanza induttiva che prende il nome di **reattanza equivalente di reazione di indotto**. Se infatti consideriamo il modello circuitale di un alternatore trifase rappresentato in figura, si ha che la terna delle tensioni stellate a valle delle tre reattanze induttive vale

$$\begin{cases} \bar{E}_A = \bar{E}_{0A} - \bar{I}_A(j\omega L) \\ \bar{E}_B = \bar{E}_{0B} - \bar{I}_B(j\omega L) \\ \bar{E}_C = \bar{E}_{0C} - \bar{I}_C(j\omega L) \end{cases}$$



Per mostrare come questo schema renda i tre casi precedentemente illustrati riconsideriamoli uno ad uno.



1) Diciamo che la terna delle correnti sia in fase con la terna delle tensioni stellate. Allora il diagramma fasoriale della sola prima fase è quello indicato a sx, in figura.

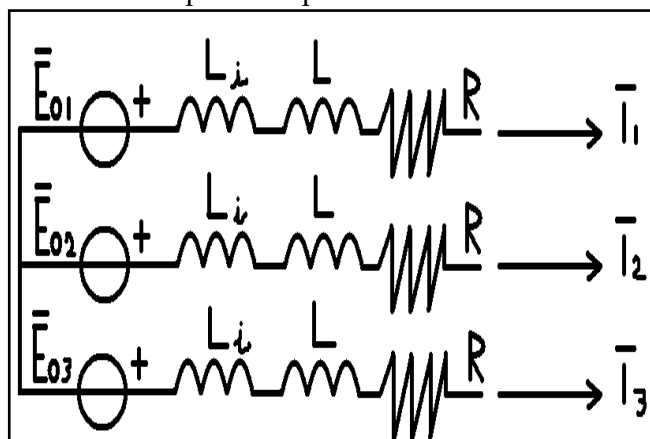
2) Se la terna delle correnti è in quadratura in anticipo sulla terna stellata delle tensioni a vuoto, allora la reattanza equivalente di reazione di indotto permette, come si vede al centro, di predire il valore delle tensioni stellate a carico.

3) Anche nel caso di correnti di fase in quadratura in ritardo rispetto le tensioni stellate a vuoto la reattanza equivalente dà un risultato in accordo con quanto precedentemente visto.

RESISTENZA DI INDOTTO. Quando l'indotto è messo in collegamento con un carico ed in esso transita corrente, allora si avrà una perdita di potenza dovuta a dissipazione di calore per effetto Joule. In altri termini dovremo attribuire a ciascuno dei tre avvolgimenti di indotto del nostro alternatore una resistenza R .

REATTANZA DI DISPERSIONE. L'induzione prodotta dalle correnti di indotto non sarà tutta autoconcatenata con l'indotto stesso e dunque non avrà il solo effetto di modificare la f.e.m. di ciascuno conduttore di indotto, effetto già messo in conto in quanto sopra. Vi sarà infatti anche del flusso disperso per la cui produzione però va spesa dell'energia da parte delle tensioni di indotto. Come valutare questa energia? Ovvero quale caduta di tensione attribuire a questa perdita di energia? Si attribuisce a ciascuno dei tre avvolgimenti di indotto una reattanza induttiva X .

MODELLO SEMPLIFICATO DELLA TENSIONE DI INDOTTO. Quando si collegano ad un carico le tre bobine di indotto del nostro alternatore trifase si ha in esse passaggio di corrente e questo porta a sua volta a delle necessarie correzioni sul valore da attribuire alla tensione stellata dei tre avvolgimenti di indotto. Abbiamo effettuato in particolare tre correzioni, che riassumiamo nel seguito.



- 1) L'effetto della induzione prodotta dalle correnti di indotto e autoconcatenata con l'indotto stesso è stato valutato attraverso tre reattanze induttive dette reattanze equivalenti di indotto che indichiamo da qui in poi X_i .
- 2) L'effetto del riscaldamento delle tre bobine di indotto lo abbiamo tenuto in conto introducendo tre resistenze R.
- 3) La perdita di energia dovuta al flusso disperso prodotto dai tre conduttori di indotto lo abbiamo rappresentato attraverso tre reattanze induttive che indichiamo X.

Si ottiene allora il circuito equivalente indicato in figura per il nostro alternatore trifase. Le relative equazioni che forniscono le tensioni trifase a valle delle correzioni apportate sono le seguenti.

$$\begin{cases} \overline{E}_A = \overline{E}_{0A} - \overline{I}_A(j\omega L_i + j\omega L + R) \\ \overline{E}_B = \overline{E}_{0B} - \overline{I}_B(j\omega L_i + j\omega L + R) \\ \overline{E}_C = \overline{E}_{0C} - \overline{I}_C(j\omega L_i + j\omega L + R) \end{cases}$$

In pratica si introduce poi la così detta **impedenza sincrona**

$$\dot{\overline{Z}}_s = R + j(\omega L_i + \omega L) = R + jX_s$$

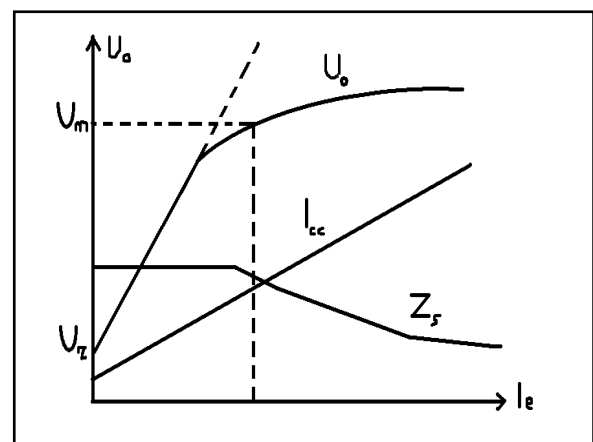
dove è stata anche indicata quella che prende il nome di **reattanza sincrona**. In genere si verifica che la resistenza è trascurabile rispetto alla reattanza sincrona, per cui solitamente si ha

$$\dot{\overline{Z}}_s \cong jX_s$$

IV) FUNZIONAMENTO IN CORTOCIRCUITO

Prendiamo i tre morsetti del nostro alternatore e colleghiamoli fra loro. In questo modo si hanno nei tre avvolgimenti di indotto le tre correnti di cortocircuito

$$\begin{cases} \overline{I}_{Acc} = \frac{\overline{E}_{0A}}{\dot{\overline{Z}}_s} \cong -j \frac{\overline{E}_{0A}}{X_s} \\ \overline{I}_{Bcc} = \frac{\overline{E}_{0B}}{\dot{\overline{Z}}_s} \cong -j \frac{\overline{E}_{0B}}{X_s} \\ \overline{I}_{Ccc} = \frac{\overline{E}_{0C}}{\dot{\overline{Z}}_s} \cong -j \frac{\overline{E}_{0C}}{X_s} \end{cases}$$



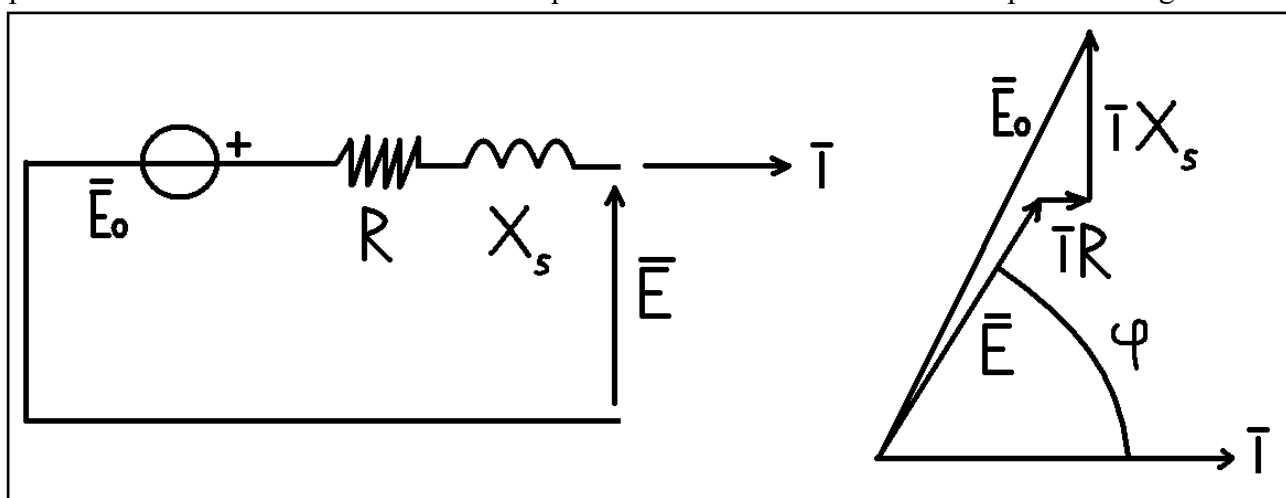
Si deve osservare che ciascuna corrente di cortocircuito risulta in quadratura in ritardo rispetto alla corrispondente tensione a vuoto. Questo significa che, come visto, il flusso polare della induzione risulta indebolito dal contributo dovuto alla induzione generata dalle correnti di indotto.

CARATTERISTICA DI CORTOCIRCUITO. A frequenza imposta la corrente di cortocircuito è funzione della sola corrente di eccitazione. Risulta allora possibile tracciare l'andamento del valore efficace della corrente di cortocircuito in funzione del valore della corrente di eccitazione. Tale diagramma viene detto **caratteristica di cortocircuito**. Dalla sua conoscenza risulta poi possibile ricavare anche il diagramma della funzione

$$\dot{Z}_s = \dot{Z}_s(I_e)$$

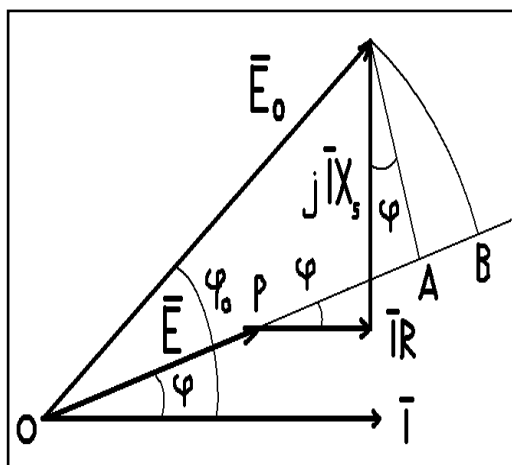
V) COMPORTAMENTO ELETTRICO

SCHEMA EQUIVALENTE MONOFASE. Diciamo che il nostro alternatore fornisca una terna di f.e.m. simmetrica e diciamo anche che il carico a cui si collega sia equilibrato. In questo caso potremo considerare lo schema elettrico equivalente monofase. Ad esso corrisponde il diagramma

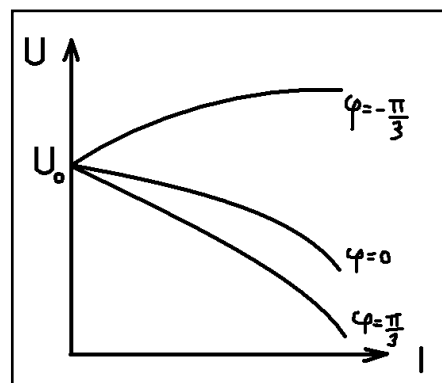


fasoriale illustrato.

CARATTERISTICHE ESTERNE. Si definiscono caratteristiche esterne della macchina sincrona i diagrammi in cui il valore efficace della tensione concatenata dell'alternatore è riportato in funzione del valore efficace della corrente di linea per vari angoli di sfasamento φ fra la corrente di linea e la



tensione a carico della fase corrispondente. Il tutto tenendo costante la velocità di rotazione della macchina e la corrente di eccitazione dell'induttore. Ebbene si trovano gli andamenti illustrati in figura.



COEFFICIENTE DI REGOLAZIONE. Diciamo coefficiente di regolazione ΔE la differenza fra i valori efficaci della tensione a vuoto e della tensione a carico di

una fase dell'alternatore. In realtà il coefficiente di regolazione dà una misura approssimata di tale differenza.

Si consideri a tal proposito il diagramma fasoriale nella illustrazione. Se si ammette che la differenza fra le due tensioni, a vuoto e a carico, è piccola, allora si ha che

$$E_0 = \overline{OB} \approx \overline{OA} = \overline{OP} + \overline{PA} = E + (IR \cos \varphi + IX_s \sin \varphi)$$

Ma allora

$$\Delta E = E_0 - E = IR \cos \varphi + IX_s \sin \varphi$$

In realtà poi il coefficiente di regolazione prende in considerazione i valori delle tensioni concatenate ed è un valore percentuale. Per cui il vero coefficiente di regolazione, quello normalmente usato, è il seguente

$$\Delta u \% = \frac{\Delta U}{U} 100 = \frac{\sqrt{3}(IR \cos \varphi + IX_s \sin \varphi)}{U} 100$$

VI) COMPORTAMENTO ELETTROMECCANICO

CALCOLO DELLE POTENZE CONVERTITE. Intanto si riporta il grafico complessivo delle potenze che competono ad una macchina elettrica rotante (nel caso del funzionamento da motore). In questa sede è di nostro interesse esaminare in dettaglio la conversione elettromeccanica tra

1) la potenza elettrica uscente dai morsetti, a monte di ogni tipo di perdita, P_g

2) e la potenza meccanica P_m , depurata da tutte le perdite di tipo meccanico.

La prima potenza è il valore medio della potenza istantanea elettrica. Cioè è in pratica la potenza attiva uscente dai morsetti. Quindi, nel caso di sistema simmetrico ed equilibrato si scrive

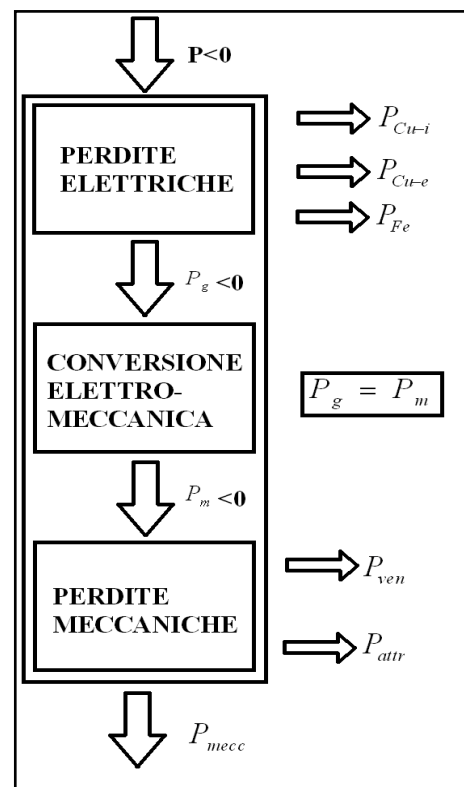
$$P_g = 3E_0 I \cos \varphi_0 = \sqrt{3} U_0 I \cos \varphi_0$$

dove si è introdotto lo sfasamento fra la terna delle correnti di linea e quella delle tensioni stellate a vuoto.

La seconda potenza è data invece da

$$P_m = M \omega_r$$

dove compaiono le componenti della coppia applicata all'albero (dall'esterno) $\vec{M}$ e della velocità angolare $\vec{\omega}_r$ rispetto ad un asse parallelo all'albero, con verso arbitrario.



Ciò posto è possibile distinguere allora le seguenti tre situazioni.

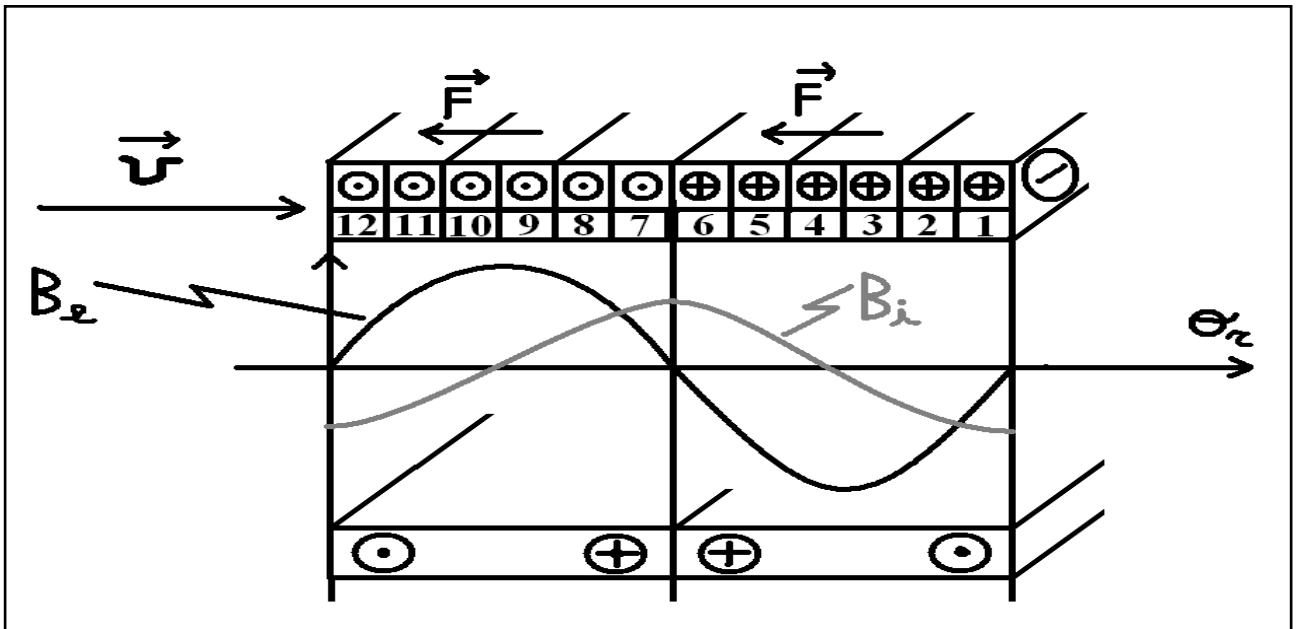
1) FUNZIONAMENTO DA GENERATORE. Nel caso in cui risulti

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$$

allora si ha

$$\cos \varphi_0 > 0 \Rightarrow P_g = P_m > 0$$

dunque la macchina eroga potenza elettrica e assorbe potenza meccanica (si ricorda che la macchina è convenzionata da generatore rispetto alla potenza elettrica, e convenzionata da utilizzatore rispetto alla potenza meccanica).



In effetti nel caso di fase nulla, cioè di correnti di linea e tensioni stellate in fase, allora le forze ponderomotrici dovute alla interazione fra la induzione al traferro e le correnti di indotto, si oppongono alla rotazione della macchina, come si evince dalla figura.

In questo caso risulta altresì che

$$P_m = M\omega_r > 0$$

cioè i due vettori $\vec{M}$ e $\vec{\omega}_r$ hanno lo stesso verso. Ed infatti è necessario, per far ruotare il rotore, che venga applicata ad esso, dall'esterno una coppia equiversa alla velocità di rotazione.

2) FUNZIONAMENTO DA MOTORE. Nel caso in cui risulti

$$\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \frac{3\pi}{2}$$

allora si ha

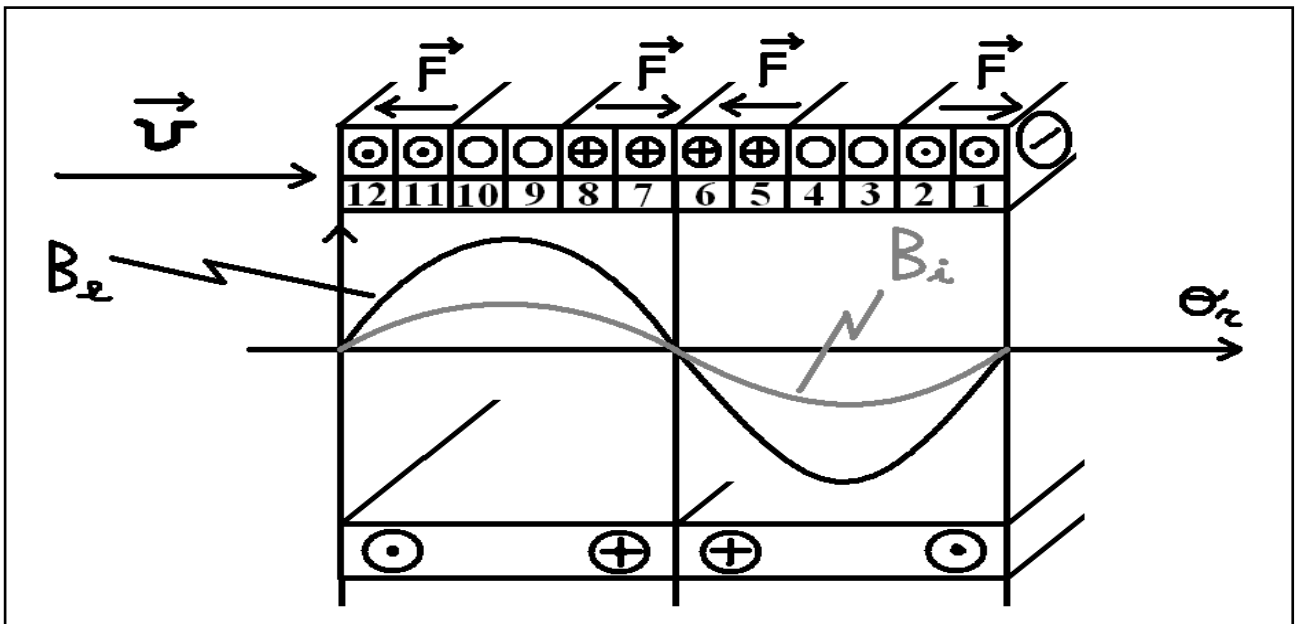
$$\cos \varphi_0 < 0 \Rightarrow P_g = P_m < 0$$

Dunque la macchina assorbe potenza elettrica e genera potenza meccanica. Si vede come essendo

$$P_m = M\omega_r < 0$$

si ha che in questa condizione la coppia applicata dall'esterno ha verso opposto alla velocità di rotazione. Si tratta infatti di una coppia resistente, quella contro la quale lavora la macchina che, in questo caso, si comporta da motore.

3) FUNZIONAMENTO A COPPIA NULLA. Abbiamo fin qui trascurato due casi limite, ovvero



$$\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$$

nei quali si ha

$$\cos \varphi_0 = 0 \Rightarrow P_g = P_m = 0$$

In questo caso la macchina non scambia potenza elettrica né meccanica con l'esterno e la coppia agente sul suo albero risulta nulla. Nella illustrazione è rappresentato il caso in cui $\varphi_0 = -\pi/2$, cioè in cui la corrente è in quadratura in anticipo rispetto alla tensione. In effetti si vede come in questa situazione la sollecitazione ponderomotrice complessivamente applicata dal rotore allo statore è nulla.

CALCOLO DELLA POTENZA ELETTRICA USCENTE. Indichiamo con $\dot{S}$ la potenza elettrica complessa erogata dall'alternatore a valle delle impedenze sincrone. Allora abbiamo

$$\dot{S} = P + jQ = 3EI \cos \varphi + 3EI \sin \varphi = \sqrt{3}UI(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

dove E è il valore efficace della terna di tensioni stellate a valle delle impedenze sincrone e U è il valore delle tensioni concatenate a valle delle impedenze sincrone. Ovviamente qui φ indica lo sfasamento della terna delle correnti di linea rispetto alla terna di tensioni stellate (quella a valle delle impedenze sincrone).

Nel funzionamento da generatore si ha

$$P_g > P > 0$$

In quello da motore si ha invece

$$P < P_g < 0$$

VII) COMPORTAMENTO DINAMICO

SFASAMENTO TRA LA TERNA DELLE TENSIONI STELLATE A VUOTO E LA TERNA DELLE TENSIONI STELLATE A CARICO. Distinguiamo due casi.

1) COMPORTAMENTO DA GENERATORE. Sappiamo che in questo caso

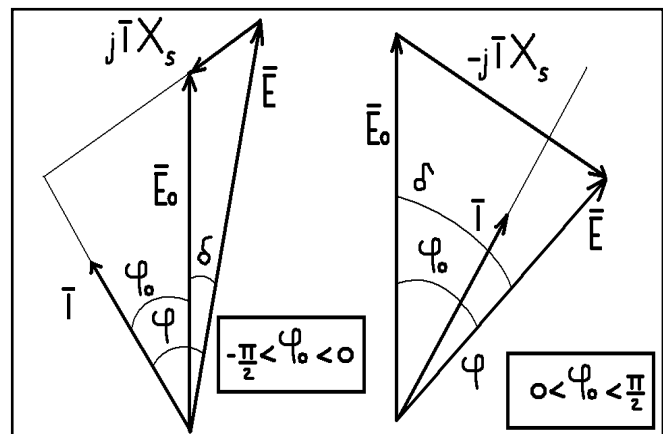
$$-\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$$

Sappiamo inoltre che in generale

$$\bar{E}_0 - \bar{E} = \bar{I}R + \bar{I}jX_s \approx \bar{I}jX_s \Rightarrow \bar{E} = \bar{E}_0 - j\bar{I}X_s$$

Disegniamo allora il diagramma fasoriale per

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < 0 \text{ e quello per } 0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}.$$



Si vede dunque come, in ogni caso, nel generatore la tensione a vuoto è in anticipo su quella a carico.

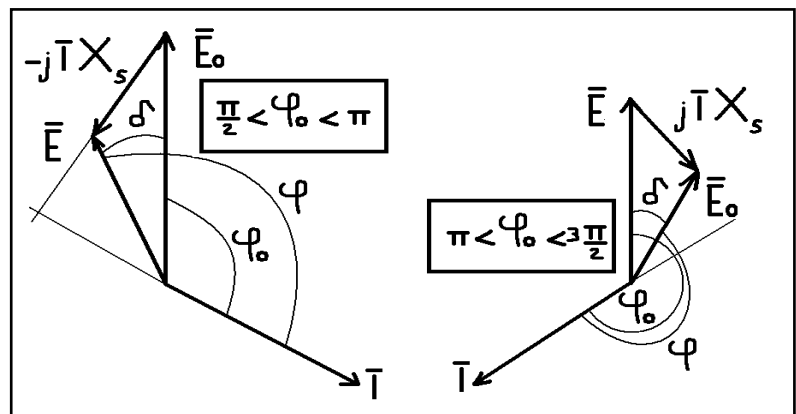
2) COMPORTAMENTO DA MOTORE. In questo caso, come sappiamo, si ha

$$\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \frac{3\pi}{2}$$

Disegniamo allora il diagramma

fasoriale per $\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \pi$ e quello

per $\pi < \varphi_0 < \frac{3\pi}{2}$. Si vede dunque



come, in ogni caso, nel comportamento da motore la tensione a vuoto è in ritardo su quella a carico.

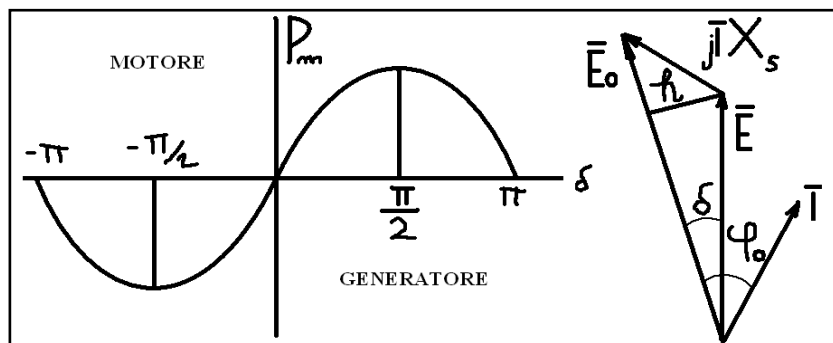
LEGAME TRA LO SFASAMENTO δ E LA POTENZA MECCANICA ENTRANTE.
Consideriamo il generico diagramma fasoriale della macchina sincrona. Sappiamo che

$$\bar{E}_0 - \bar{E} = \bar{I} \dot{Z}_s \approx j\bar{I}X_s$$

dunque si ha

$$IX_s \cos \varphi_0 = h = E \sin \delta$$

si ricava allora



$$\begin{cases} P_m = \vec{M} \cdot \vec{\omega}_r = 3E_0 I \cos \varphi_0 \\ I \cos \varphi_0 = \frac{E \sin \delta}{X_s} \end{cases} \Rightarrow P_m = \frac{3E_0 E \sin \delta}{X_s}$$

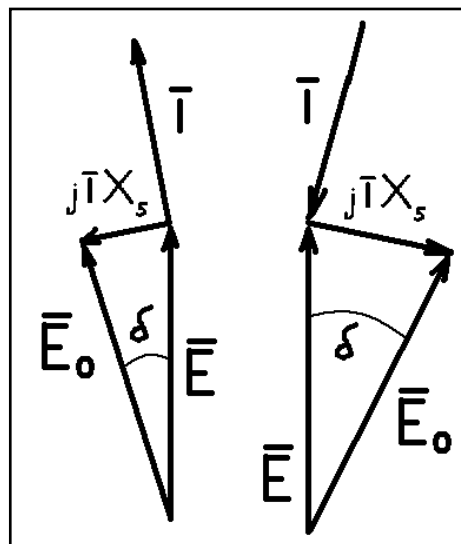
Da questa formula è possibile risalire ad un legame fra lo sfasamento δ e il comportamento della macchina sincrona. In particolare si ha il grafico indicato in figura.

VARIAZIONE DELL'EQUILIBRIO MECCANICO.

Consideriamo una macchina sincrona collegata ad una rete trifase che impone una terna di tensioni stellate coincidente con la terna stellata delle tensioni a vuoto della macchina. In tal caso si ha

- 1) $I=0$
- 2) $\delta=0$
- 3) $P_m = P_g = 0$

Il rotore ruoti alla velocità di sincronismo ω_r . Esaminiamo allora i due casi seguenti.



1)Interveniamo fornendo potenza meccanica al rotore attraverso un motore primo. Allora si ha

$$P_m = P_g > 0 \Rightarrow \delta > 0$$

e la macchina comincia ad erogare potenza elettrica. La corrente di linea risulterà quasi in quadratura con la tensione stellata ai morsetti della rete (vedi figura). Si verifica in pratica che la velocità di rotazione del rotore aumenta inizialmente per tornare poi alla velocità fissata.

2)Interveniamo assorbendo potenza meccanica, offrendo resistenza alla rotazione del rotore. In questo caso si ha

$$P_m = P_g < 0 \Rightarrow \delta < 0$$

cioè la macchina assorbe potenza elettrica dalla rete e comincia a funzionare da motore. La corrente è in questo caso quasi in opposizione di fase con la tensione ai morsetti.

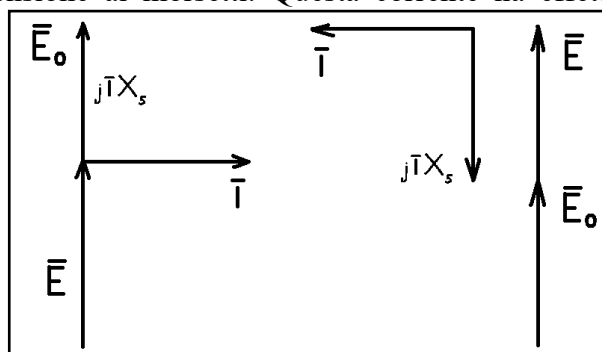
Si conclude che

la macchina sincrona reagisce ad una variazione della velocità di rotazione ripristinando la velocità di rotazione iniziale.

VARIAZIONE DELL'EQUILIBRIO ELETTRICO. Consideriamo la stessa condizione iniziale descritta nel precedente paragrafo. Esaminiamo i due casi seguenti.

1) Aumentiamo la corrente di eccitazione. In questo caso aumenta il valore efficace della tensione a vuoto rispetto alla tensione ai morsetti, mentre delta continua a restare nullo. Si genera allora una corrente di linea in quadratura in ritardo sulla tensione ai morsetti. Questa corrente ha effetto smagnetizzante e dunque si oppone all'aumento della induzione al traferro dovuto all'aumento della corrente di eccitazione. Determina tuttavia forze ponedromotrici nulle.

In questo caso la macchina produce potenza reattiva positiva e potenza attiva nulla. Si comporta cioè da induttore puro.



2) Diminuiamo la corrente di eccitazione. Allora la tensione a vuoto diminuisce rispetto alla tensione della rete ai morsetti, senza tuttavia che si sfasi rispetto ad essa. Nell'induttore allora circola una corrente in quadratura in anticipo rispetto alla tensione ai morsetti e la macchina si comporta dunque da condensatore, producendo potenza reattiva negativa e potenza attiva nulla. Questa corrente rafforza l'induzione al traferro ma determina forze ponedromotrici nulle.

Si conclude allora che

la macchina sincrona reagisce ad una variazione della corrente di eccitazione sviluppando una corrente di indotto che ripristini il valore iniziale della induzione al traferro.

REGOLAZIONE DELLA MACCHINA SINCRONA. Riprendiamo le condizioni iniziali considerate nei due precedenti paragrafi. Abbiamo visto che fornendo potenza meccanica all'albero della macchina si aumenta la potenza attiva fornita dalla stessa (la potenza reattiva resta nulla). Viceversa, offrendo resistenza alla rotazione dell'albero della macchina si ottiene un'assorbimento di potenza attiva dalla rete, senza assorbimento di potenza reattiva.

Abbiamo poi visto che l'aumento della corrente di eccitazione determina una corrente di indotto (una terna di correnti di indotto) la quale determina uno sviluppo di potenza reattiva positiva (comportamento da induttore). Viceversa una riduzione della corrente di eccitazione determina lo sviluppo di una corrente di indotto che determina a sua volta uno sviluppo di potenza reattiva negativa (comportamento da condensatore). Da queste osservazioni ne discende la seguente tabella.

REGOLAZIONE DELL'ALTERNATORE	
ESIGENZA	RISPOSTA
MAGGIORE POTENZA ATTIVA AI MORSETTI	Si aumenta la potenza meccanica ceduta all'albero della macchina.
MAGGIORE POTENZA MECCANICA RICHIESTA AL MOTORE	Si aumenta la coppia resistente all'albero della macchina.
MAGGIORE POTENZA REATTIVA POSITIVA AI MORSETTI	Si aumenta la corrente di eccitazione.

VIII) AVVIAMENTO DELLA MACCHINA SINCRONA

INTRODUZIONE. La velocità della macchina sincrona è legata alla frequenza della rete dalla relazione

$$n = 60f / p$$

dunque, prima di connetterla ad una rete elettrica è necessario portarla a tale velocità, detta velocità di sincronismo. Vediamo allora le strategie adottate per realizzare questa operazione nel caso di alternatori e motori.

ALTERNATORE. L'alternatore è meccanicamente connesso ad un motore primo (ad esempio una turbina) il quale fornisce ad essa la potenza meccanica da convertire in potenza elettrica. Ora tale motore può essere usato anche per avviare l'alternatore, cioè per portarlo alla velocità di sincronismo.

MOTORE. Il motore ha bisogno di essere avviato mediante una connessione meccanica ad un altro motore il quale prende il nome di motore di lancio.

INVERTER. L'inverter è un dispositivo il quale consente di variare la frequenza della rete. Grazie ad esso dunque è possibile far aumentare la velocità della macchina sincrona (motore o alternatore) da zero fino alla velocità di sincronismo.

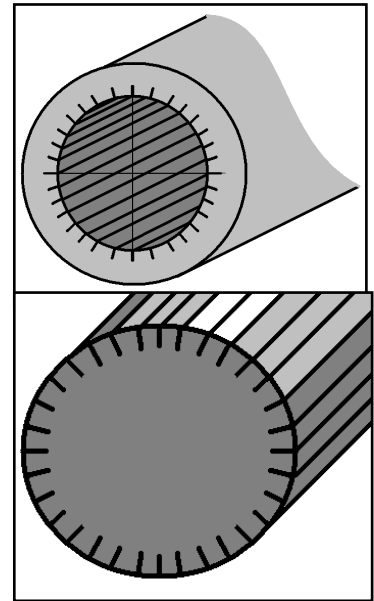
CAPITOLO XVI, MACCHINE ASINCRONE

I) GENERALITA'

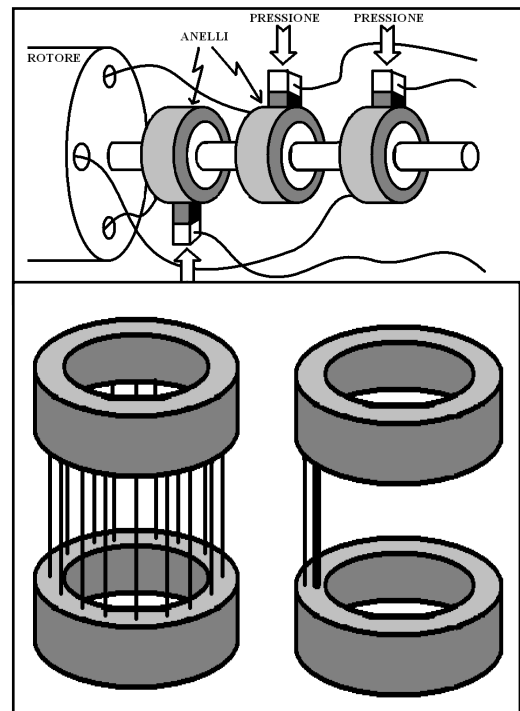
INTRODUZIONE. La macchina elettrica asincrona, o a induzione, è una macchina elettrica rotante usata sia come generatore che come motore. In pratica l'uso da motore è prevalente su quello da generatore. Le macchine asincrone possono essere tanto monofasi quanto trifasi. In quanto segue ci riferiremo in particolare a motori trifasi.

CENNI COSTRUTTIVI. Le macchine asincrone presentano un rotore il quale ha in genere funzione di indotto ed uno statore il quale ha invece funzione di induttore. L'induttore statore presenta delle cave sulla superficie interna le quali alloggiavano i conduttori di statore. Tali conduttori sono parte di bobine la cui disposizione permette di identificare sullo statore dei poli distribuiti in p coppie polari per un totale di $2p$ poli. I poli dello statore non sono per il resto visibili, essendo lo statore liscio ed essendo le cave tutte uguali fra loro.

Il rotore può presentare due tipologie, la tipologia a rotore avvolto e quella a gabbia di scoiattolo (singola o doppia). Esaminiamole una ad una.



1) Il rotore avvolto, detto anche ad anelli, è un rotore liscio con cave sulla sua superficie esterna. Nelle cave sono alloggiati i conduttori di indotto i quali sono avvolti in modo da determinare un numero di poli uguale a quello dei poli presenti sullo statore induttore. Anche qui i poli non sono per il resto visibili, essendo le cave tutte uguali ed essendo il rotore liscio. Gli avvolgimenti di rotore sono collegati in modo da formare tre matasse le quali sono collegate ciascuna ad un anello calettato sull'albero. Ogni anello è poi collegato ad una spazzola. Le tre spazzole sono poi collegate al reostato di avviamento, che esaminiamo nel seguito.



2-a) Nel rotore a gabbia di scoiattolo singola abbiamo ancora la struttura precedentemente illustrata, ovvero un rotore liscio con cave sulla superficie esterna. Qui tuttavia ogni cava alloggia un solo conduttore, e non si tratta di un conduttore flessibile (un filo), ma di una sbarra in rame (o alluminio, o bronzo). Inoltre tutte le sbarre sono saldate alle due estremità ad un anello conduttore che le mette in cortocircuito (e che è detto anello di cortocircuito).

2-b) Il rotore a gabbia di scoiattolo doppia presenta due gabbie concentriche unite fra loro al livello degli anelli di cortocircuito. Si osserva che la gabbia più interna presenta sbarre di raggio molto maggiore rispetto a quello delle sbarre della gabbia esterna.

In figura si vede una gabbia singola e una gabbia doppia con solo una coppia di sbarre (esterna, quella sottile, interna quella spessa).

Le macchine con rotore a gabbia sono semplici da costruire e robuste. Sono preferite, negli impieghi a bassa potenza, alle macchine a rotore avvolto.

II) VALORI NOMINALI

I valori nominali sono quei valori delle grandezze elettriche alle quali corrisponde il funzionamento ottimale della macchina. I principali valori nominali delle macchine asincrone sono i seguenti.

P_n	potenza nominale (W)
U_n	tensione nominale di indotto (V)
I_n	corrente nominale di indotto (A)
$\cos \varphi_n$	fattore di potenza nominale
f_n	frequenza nominale (Hz)
n_n	velocità nominale di rotazione (giri/minuto)
C_n	coppia nominale dell'albero (Nm)
s_n	scorrimento nominale (%)

Tensione e corrente nominale sono da intendere come valori efficaci. La potenza nominale indica la potenza fornita all'albero e la sua unità di misura sarà il W.

Per le macchine asincrone monofasi si ha

$$P_n = U_n I_n \cos \varphi_n = C_n \frac{2\pi}{60} n_n$$

Per le macchine asincrone trifasi si ha

$$P_n = \sqrt{3} U_n I_n \cos \varphi_n = C_n \frac{2\pi}{60} n_n$$

Lo scorrimento, grandezza caratteristica delle macchine asincrone, dà conto della differenza della velocità del rotore rispetto a quella del campo magnetico rotante, come si vedrà nel seguito.

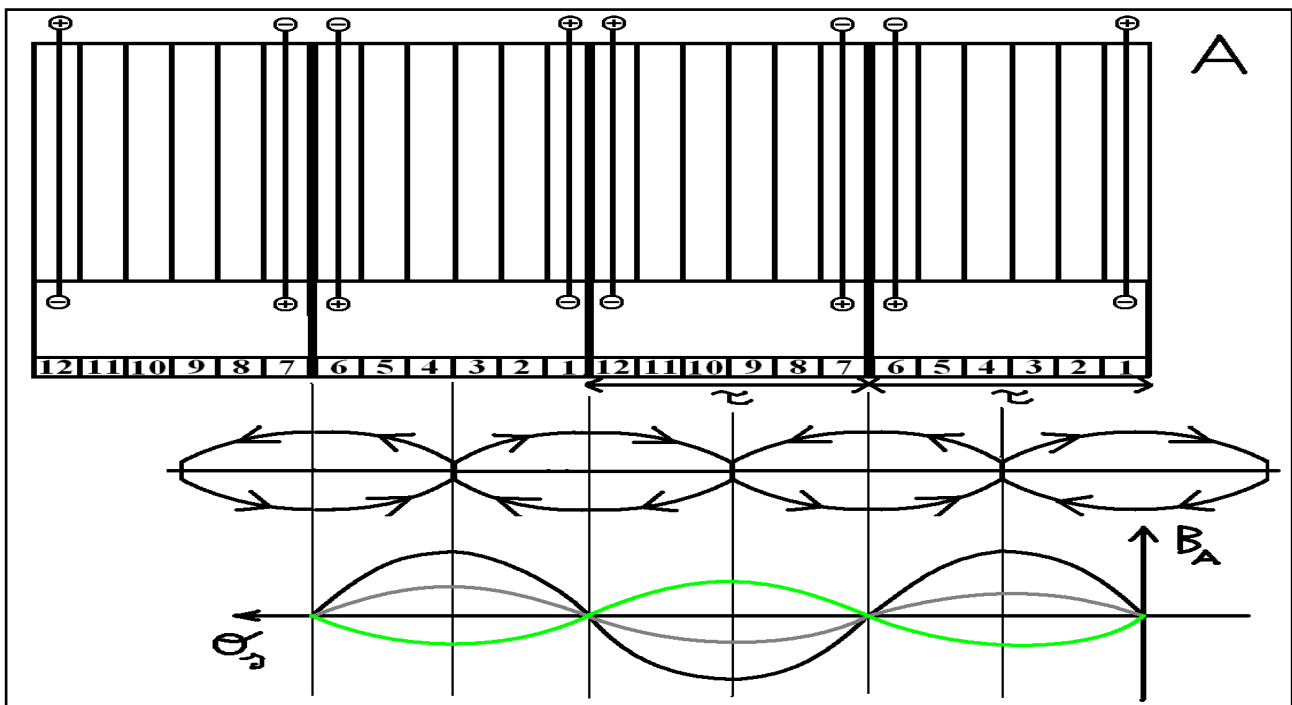
II) INDUZIONE AL TRAFERRO

CAMPO MAGNETICO ROTANTE. In questo paragrafo si farà riferimento ad una macchina asincrona avente le seguenti caratteristiche:

- 1) trifase;
- 3) induttore nello statore;
- 4) indotto nel rotore;
- 5) due coppie polari ($p=2$).

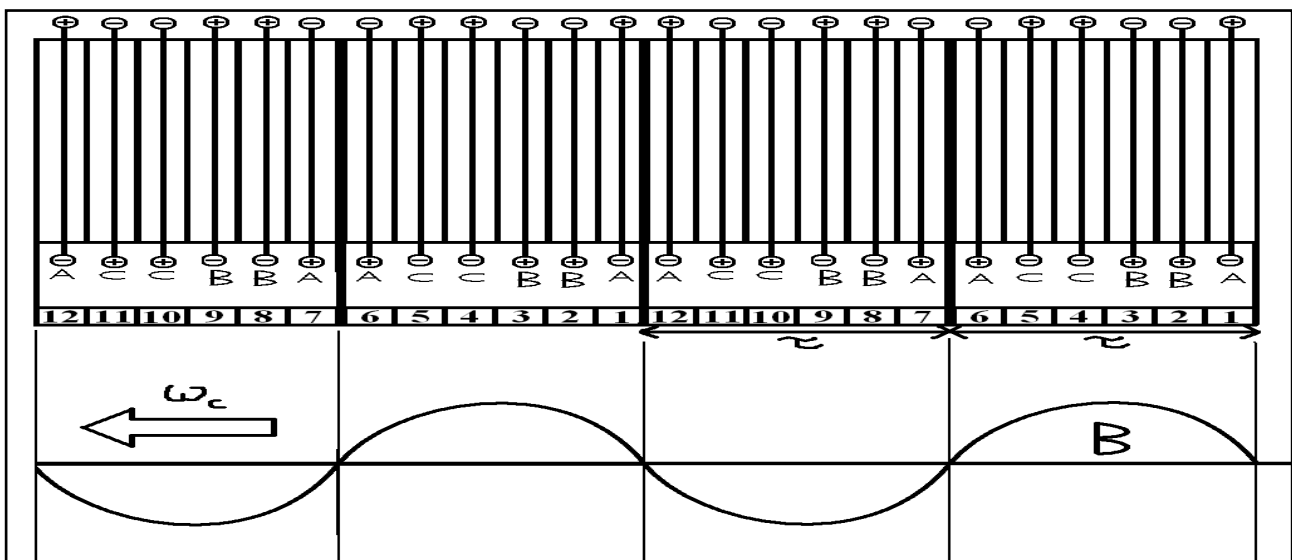
Consideriamo allora lo statore induttore di questa macchina. Se consideriamo solo la fase A e mettiamo un conduttore per cava abbiamo la situazione illustrata in figura. Si riporta l'andamento

della induzione al traferro rispetto alla coordinata angolare ϑ_s la quale si considera valutata rispetto



ad un sistema di riferimento solidale con lo statore. L'induzione determinata dai conduttori di induttore dell'avvolgimento della fase A varia nel tempo (in colore diverso sono riportati andamenti relativi ad istanti diversi) poiché variabile nel tempo è la corrente di eccitazione (qui si noti la differenza con le macchine sincrone, nelle quali la corrente di eccitazione, oltre ad essere monofase, è anche continua). Tuttavia i conduttori sono disposti in maniera tale che ad ogni istante si abbia un andamento sinusoidale. Inoltre i punti in cui l'induzione si annulla sono gli stessi istante per istante. La somma delle induzioni determinate dagli avvolgimenti delle tre fasi determina una induzione ad andamento sinusoidale di periodo 2τ che ruota rispetto allo statore con velocità angolare

$$\omega_c = \frac{\omega}{p}$$



dove ω è la pulsazione della corrente di eccitazione. Pertanto si ottiene una induzione rotante la cui velocità di rotazione è legata alla pulsazione della terna di correnti eccitazione dallo stesso legame

che, nelle macchine sincrone, lega la velocità di rotazione del rotore (nonché dell'induzione) alla pulsazione della terna di correnti dell'indotto.

Nella figura sono disposti i conduttori di cava di tutti e tre gli avvolgimenti. Sotto è riportato il senso di marcia della induzione complessiva, rispetto allo statore. Si vuole osservare che l'avvolgimento della fase C è uguale a quello della fase A ma traslato di $\tau/3$ rispetto a questo. Analogamente l'avvolgimento della fase B è uguale agli altri due ma traslato di $\tau/3$ rispetto all'avvolgimento della fase C.

VELOCITA' DI SINCRONISMO. La velocità di rotazione del campo magnetico è detta velocità di sincronismo, per analogia con le macchine elettriche sincrone nelle quali tale nome è attribuito alla velocità di rotazione del campo magnetico e dunque, in quel caso, anche del rotore, che se lo trascina.

Anche nel caso delle macchine asincrone è usuale esprimere la velocità di sincronismo in giri al minuto, anziché in radianti al secondo. Si ha dunque

$$n_c = \frac{\text{giri}}{\text{min}} = \frac{\text{radianti}}{2\pi} \cdot \frac{60}{\text{sec}} = \frac{60}{2\pi} \cdot \frac{\text{rad}}{\text{sec}} = \frac{60}{2\pi} \cdot \omega_c = \frac{60}{2\pi} \cdot \frac{\omega}{p} = \frac{60}{2\pi} \cdot \frac{2\pi f}{p} = \frac{60f}{p}$$

Tenendo presente per la frequenza il valore della corrente industriale (50Hz) allora la più alta velocità di rotazione possibile, in una macchina asincrona, per il campo magnetico, vale

$$n_c = \frac{60 \cdot 50}{1} = 3000 \frac{\text{giri}}{\text{min}}$$

III) ROTORE FERMO

ROTORE FERMO E INDOTTO APERTO. Quando abbiamo studiato le macchine sincrone abbiamo iniziato considerando aperto l'indotto, considerando cioè le tensioni a vuoto ai morsetti dell'indotto. Anche qui consideriamo l'indotto a vuoto. Inoltre, per semplificare la trattazione, consideriamo al momento bloccato il rotore. Allora il campo magnetico rotante determina f.e.m. sinusoidali con frequenza f sia negli avvolgimenti di statore che di rotore. Il valore efficace della tensione indotta negli avvolgimenti di rotore si può esprimere

$$E_{ar} = 2pk_{ar}k_fN_r\Phi f$$

mentre quello della tensione indotta negli avvolgimenti di statore si può esprimere

$$E_{as} = 2pk_{as}k_fN_s\Phi f$$

dove

f è la frequenza della corrente di alimentazione dell'induttore

Φ è il flusso polare

k_f è il fattore di forma del flusso polare

k_{as} è il fattore di avvolgimento di statore (che non so bene cosa sia)

k_{ar} è il fattore di avvolgimento di rotore (che non so bene cosa sia)

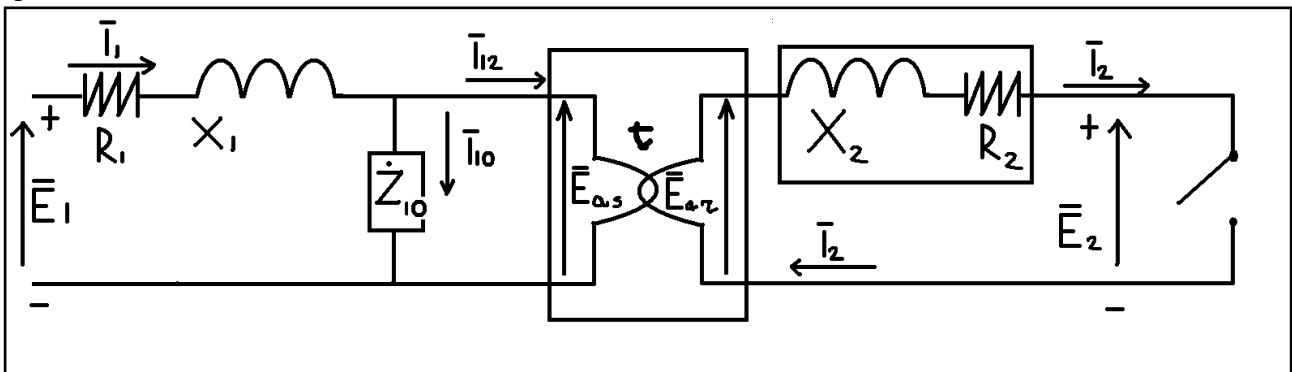
N_s numero di conduttori per fase di statore

N_r numero di conduttori per fase di rotore

Poiché il rapporto fra queste due tensioni risulta costante si ha che la macchina asincrona a rotore bloccato si comporta come un trasformatore trifase in cui l'induttore è il circuito primario e l'indotto è il secondario, in cui cioè le bobine dello statore fungono da primario e quelle del rotore da secondario. La differenza tuttavia con il trasformatore statico (chiamiamolo così) sta nel fatto che in questo caso il flusso concatenato con i due avvolgimenti non varia per via della oscillazione temporale, ma per il fatto che l'induzione ruota, sia rispetto allo statore che rispetto al rotore, entrambi fermi. Spesso si dice, a ragione per quanto detto, che la macchina asincrona costituisce un trasformatore a campo rotante. Definiamo allora il rapporto di trasformazione del motore asincrono come

$$t = \frac{E_{as}}{E_{ar}} = \frac{k_{as} N_s}{k_{ar} N_r}$$

Passiamo poi a definire lo schema equivalente monofase della macchina asincrona sul modello di quello del trasformatore statico.



Si distinguono le due reattanze di dispersione e l'impedenza a vuoto a primario. Si riconoscono inoltre le resistenze dei due avvolgimenti. Si evidenzia come l'avvolgimento secondario sia aperto e dunque in esso non transiti corrente.

La corrente di statore, detta qui corrente a vuoto, vale

$$\bar{I}_{10} = \frac{\bar{E}_{as}}{\bar{Z}_{10}}$$

La tensione stellata ai morsetti dello statore dunque è

$$\bar{E}_1 - \bar{I}_{10}(R_1 + jX_1) = \bar{E}_1 - \bar{I}_{10}(R_1 + jX_1)$$

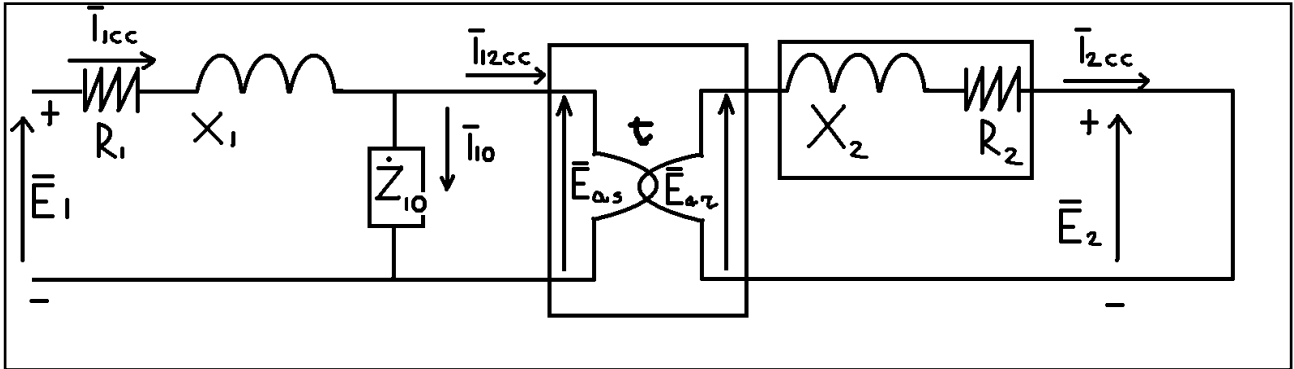
ROTORE FERMO E INDOTTO IN CORTOCIRCUITO. Adesso colleghiamo fra loro i tre avvolgimenti dell'indotto (gli avvolgimenti del rotore). Lo schema equivalente della macchina asincrona diviene in questo caso quello seguente. La corrente di corto circuito del secondario risulta pertanto

$$\bar{I}_{2cc} = \frac{\bar{E}_{ar}}{R_2 + jX_2}$$

La corrente di cortocircuito della statore sarà invece

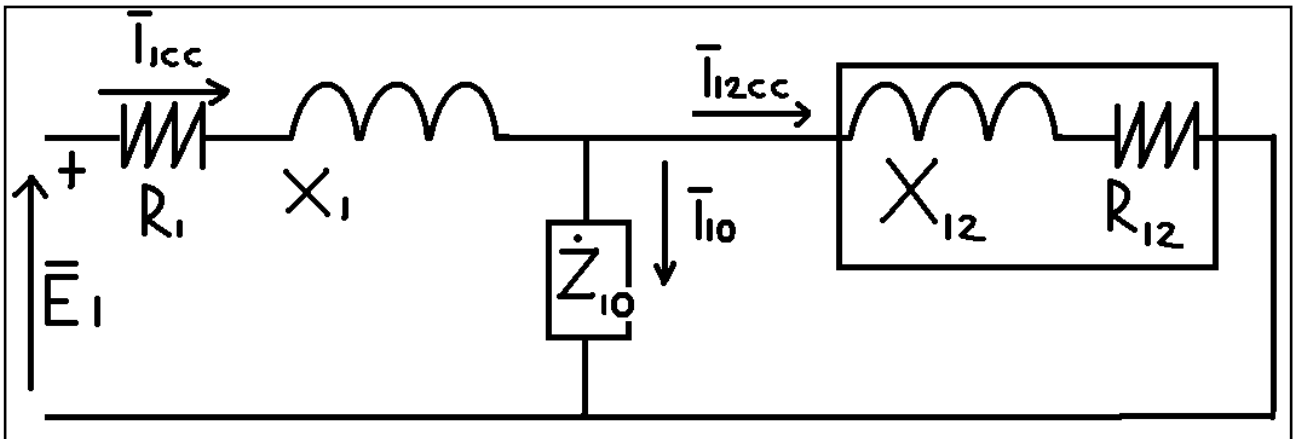
$$\bar{I}_{1cc} = \bar{I}_{12cc} + \bar{I}_{10} = \frac{1}{t} \bar{I}_{2cc} + \bar{I}_{10} = \frac{1}{t} \frac{\bar{E}_{ar}}{R_2 + jX_2} + \frac{\bar{E}_{as}}{\dot{Z}_{10}}$$

Naturalmente si può riportare a primario l'impedenza posta nell'avvolgimento secondario effettuando la trasformazione



$$\begin{cases} R_{12} = t^2 R_2 \\ X_{12} = t^2 X_2 \end{cases}$$

ottenendo così lo schema equivalente seguente



che porge l'equazione

$$\bar{I}_{1cc} = \bar{I}_{12cc} + \bar{I}_{10} = \frac{1}{t} \bar{I}_{2cc} + \bar{I}_{10} = t \frac{\bar{E}_{ar}}{R_{12} + jX_{12}} + \frac{\bar{E}_{as}}{\dot{Z}_{10}}$$

IV) ROTORE LIBERO

SCORRIMENTO. A differenza del caso della macchina sincrona, in cui il campo magnetico generato dal rotore non può che essere fisso rispetto al rotore stesso, essendo generato da una corrente continua, nel caso della macchina asincrona il campo magnetico generato dal rotore ruota rispetto al rotore essendo dovuto a corrente alternata trifase.

Dunque mentre nel caso della macchina sincrona era sufficiente una sola velocità per descrivere i fenomeni, ovvero la velocità di rotazione del rotore rispetto allo statore, nel caso della macchina asincrona si devono introdurre ben tre velocità, ovvero

- 1) la velocità di rotazione del campo magnetico rotante rispetto allo statore $n_c = \frac{60}{2\pi} \omega_c$,
- 2) la velocità di rotazione del rotore rispetto allo statore $n_r = \frac{60}{2\pi} \omega_r$,
- 3) la velocità di rotazione del campo magnetico rotante rispetto al rotore.

Quest'ultima velocità è espressa attraverso la grandezza seguente

$$s = \frac{n_c - n_r}{n_c} = \frac{\omega_c - \omega_r}{\omega_c}$$

Essa, più esattamente, indica la velocità relativa tra rotore e campo magnetico rotante, divisa per la velocità del campo magnetico rotante.

FREQUENZA DELLA INDUZIONE NEL ROTORE. I conduttori del rotore, nel caso in cui questo sia in moto, vedono una induzione la cui frequenza non è quella della corrente di eccitazione dello statore. La frequenza con la quale l'induzione oscilla rispetto al rotore sarà data da

$$f_s = \frac{1}{T_s} = \frac{\omega_c - \omega_r}{2\pi} = \frac{s\omega_c}{2\pi} = sf$$

ROTORE SBLOCCATO E INDOTTO IN CORTOCIRCUITO. COMPORTAMENTO A CARICO. Come visto, nel momento in cui il rotore può muoversi le grandezze elettriche del suo avvolgimento sono ad una frequenza diversa da quelle dell'avvolgimento di statore (avvolgimento primario). Tuttavia, pur non essendo le grandezze dei due avvolgimenti del trasformatore rotante alla stessa frequenza, esse vengono ancora considerate tali (forse si tratta di una accettabile approssimazione?) anche se vengono apportate le modifiche relative alla variazione del valore efficace della tensione dell'avvolgimento dell'indotto e della reattanza induttiva di dispersione. Infatti si pone

$$\begin{cases} \bar{E}_{ars} = s\bar{E}_{ar} \\ X_{2s} = sX_2 \end{cases}$$

Ciò posto la corrente rotorica diventa

$$\bar{I}_2 = \frac{s\bar{E}_{ar}}{R_2 + jsX_2} = \frac{\bar{E}_{ar}}{\frac{R_2}{s} + jX_2}$$

La corrente di indotto produce un campo magnetico rotante la cui velocità, rispetto al rotore, vale

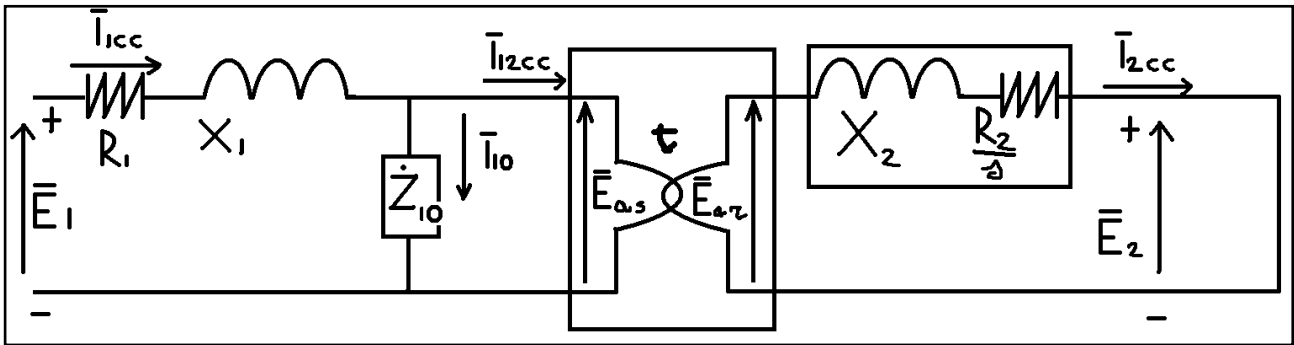
$$\frac{2\pi f_s}{p} = s \frac{2\pi f}{p} = s\omega_c$$

La velocità rispetto allo statore varrà dunque

$$s\omega_c + \omega_r = \frac{\omega_c - \omega_r}{\omega_c} \omega_c + \omega_r = \omega_c - \omega_r + \omega_r = \omega_c$$

Cioè si trova che il campo magnetico rotante determinato dalle correnti del rotore, non isofrequenziali rispetto a quelle di statore, è sincrono rispetto alla induzione rotante prodotta dallo statore.

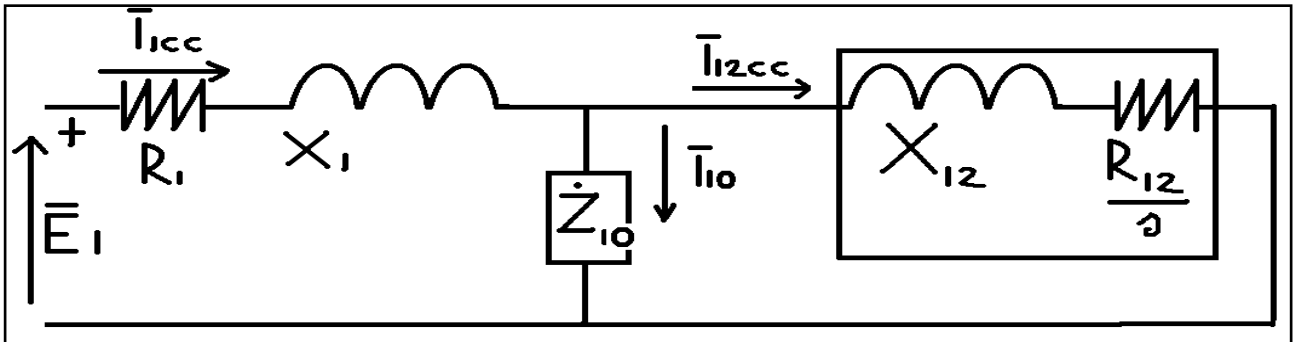
Lo schema equivalente della macchina asincrona in cortocircuito a secondario e con rotore sbloccato è allora il seguente.



Riportando a primario l'impedenza di secondario, con le trasformazioni

$$\begin{cases} \frac{R_{12}}{s} = t^2 \frac{R_2}{s} \\ X_{12} = t^2 X_2 \end{cases}$$

si ottiene lo schema equivalente seguente.



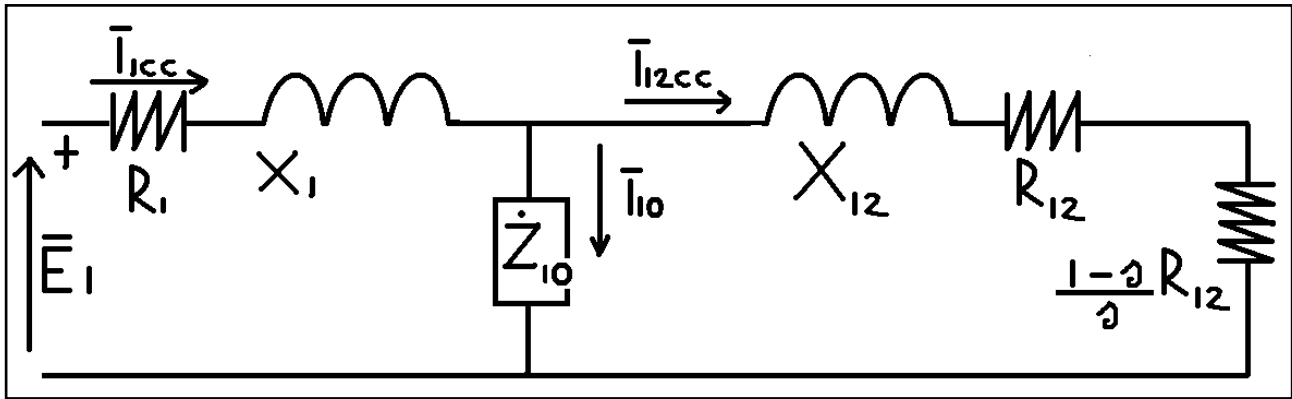
Si osservi adesso che è possibile scrivere

$$\frac{R_{12}}{s} = R_{12} + \frac{1-s}{s} R_{12} = R_{12} + R_{12}s$$

Si può allora dire che i due addendi della resistenza di secondario riportata a primario hanno il seguente significato:

- 1) il primo rappresenta la resistenza dell'avvolgimento rotorico, riportata a primario;
- 2) il secondo si presenta solo in caso di rotazione del rotore e permette di esprimere, come si vedrà, la potenza elettrica convertita in potenza meccanica.

Lo schema equivalente può essere allora ulteriormente ridisegnato. Si ha quanto segue.



Dallo schema si deduce anche il perché della definizione di comportamento a carico per la macchina asincrona con rotore sbloccato. In effetti sbloccare il rotore è equivalente a chiudere i tre avvolgimenti di indotto su una resistenza

$$\frac{1-s}{s} R_{12}$$

resistenza il cui valore dipende dallo scorrimento e dunque dalla velocità del rotore.

V) POTENZA, COPPIA E RENDIMENTO

POTENZA. La potenza attiva trasferita al rotore, in base allo schema equivalente, è data da

$$P = 3I_{12}^2 \frac{R_{12}}{s} = 3I_{12}^2 \left(R_{12} + R_{12} \frac{1-s}{s} \right)$$

Si vede dunque che essa presenta due addendi. Il primo rappresenta la potenza elettrica attiva convertita in calore per effetto Joule dalle resistenze dei tre avvolgimenti di rotore. Il secondo addendo è la potenza elettrica convertita in potenza meccanica. Si ha cioè

$$P_m = 3I_{12}^2 R_{12} \frac{1-s}{s} = 3I_{12}^2 R_{12} \frac{1-s}{s}$$

COPPIA. Ricordando che la potenza meccanica è data da

$$P_m = C\omega_r$$

si ha per la coppia l'espressione

$$C = \frac{P_m}{\omega_r} = \frac{3I_{12}^2 R_{12} \frac{1}{s}}{\frac{\omega}{p}} = \frac{3pI_{12}^2 R_{12}}{s\omega} = \frac{p}{\omega} P$$

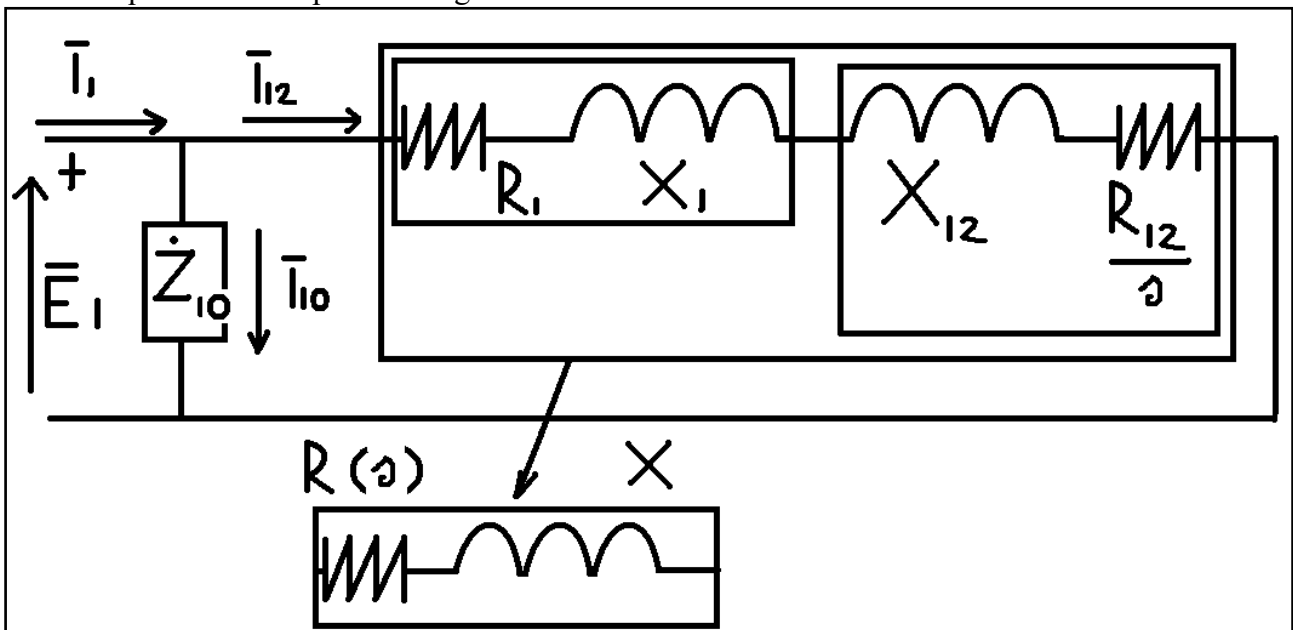
Si trova che la coppia è proporzionale alla potenza attiva totale ceduta al rotore.

RENDIMENTO. In base ai simboli introdotti il rendimento è esprimibile nel seguente modo

$$\eta = \frac{P_m}{P_m + \sum P_{diss}}$$

VI) SCHEMA EQUIVALENTE SEMPLIFICATO E DETERMINAZIONE DEI PARAMETRI

SCHEMA EQUIVALENTE SEMPLIFICATO. Anche nel caso del trasformatore rotante, ovvero delle macchine asincrone, lo schema equivalente a carico (che in questo caso vuol dire in condizione di rotore sbloccato e di indotto in cortocircuito) si può semplificare portando l'impedenza a vuoto a monte della impedenza dell'avvolgimento a primario. Pertanto otteniamo lo schema equivalente semplificato seguente.



Si osservi, in figura, la simbologia adottata per la impedenza serie che si viene ad avere con lo spostamento della impedenza a vuoto.

SEMPLIFICAZIONE ACCETTABILE? Ricordiamo il significato della impedenza a vuoto. Essa è il parallelo di una resistenza (che permette di tenere conto del riscaldamento del nucleo per isteresi e correnti parassite) e della autoinduttanza dell'avvolgimento primario. Si ha cioè

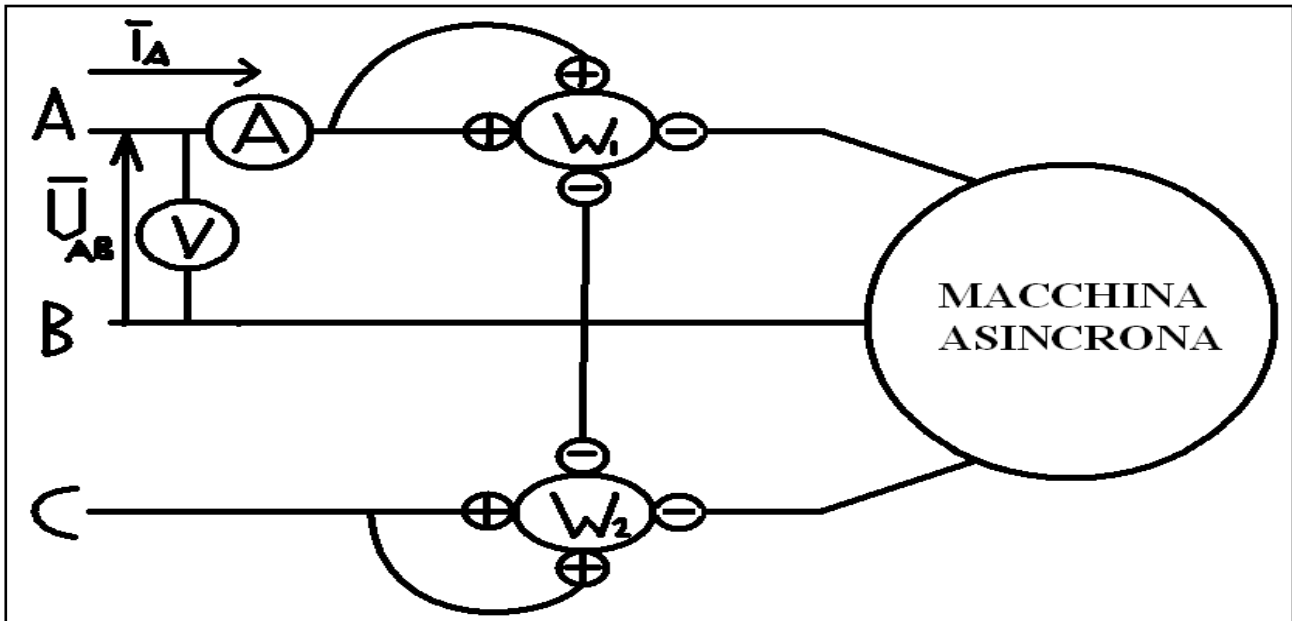
$$\dot{Z}_{10} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L_1} \right)^{-1}$$

Ora si ricordi che l'autoinduttanza del primario è legata alla riluttanza del nucleo ferromagnetico dalla relazione

$$\Re = \frac{N_1^2}{L_1}$$

Dunque, nel trasformatore rotante, essendo la riluttanza molto consistente, a causa della presenza del traferro, l'autoinduzione del primario sarà piccola e piccola risulterà anche l'impedenza a vuoto. Pertanto, in questo caso la semplificazione fatta è meno giustificata che nel caso del trasformatore statico. Tuttavia normalmente la si considera accettabile.

DETERMINAZIONE DEI PARAMETRI. STRUMENTI DI MISURA. Per ricavare i parametri dello schema equivalente del trasformatore rotante, si adottano le seguenti inserzioni degli strumenti



di misura. Si osservi in particolare l'inserzione Aron dei due wattmetri, la quale, come si sa, permette di avere la potenza attiva totale entrante nel motore, come somma delle letture dei due wattmetri.

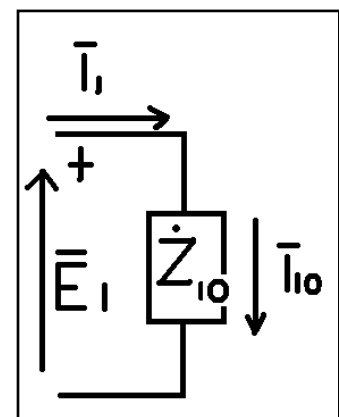
DETERMINAZIONE DEI PARAMETRI. PROVA A VUOTO. La prova a vuoto viene effettuata facendo ruotare il rotore alla velocità di sincronismo. In questo modo si ha

$$R(s=0) = R_1 + \frac{R_{12}}{0} = \infty \Rightarrow \bar{I}_{12} = 0$$

Lo schema equivalente semplificato monofase si riduce dunque a quello indicato in figura. In questo caso la misura di voltmetro e amperometro consente di valutare il valore assoluto dell'impedenza a vuoto, mentre la misura della inserzione Aron consente di valutare il fattore di potenza e dunque l'argomento della impedenza a vuoto stessa che così risulta del tutto identificata. In particolare si ha

$$U_{AB} I_A = \frac{E_A}{\sqrt{3}} I_A = Z_{10} / \sqrt{3}$$

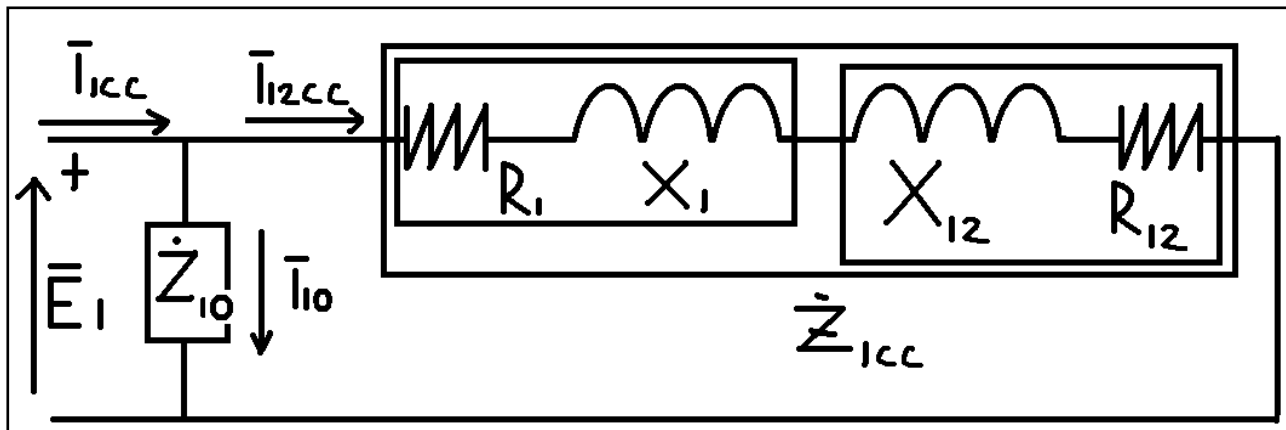
$$W_1 + W_2 = 3 E_A I_A \cos \varphi \Rightarrow \varphi = \arccos \left(\frac{W_1 + W_2}{3 E_A I_A} \right)$$



Si osservi che la potenza attiva fornita dalla inserzione Aron è con buona approssimazione pari alle perdite per isteresi e correnti parassite, se si esclude la potenza che si perde, per attrito, nella rotazione del rotore.

Si osservi inoltre che il nome di prova a vuoto non deriva dall'aver messo a vuoto il secondario. In realtà il fatto che il secondario sia sede di corrente nulla discende dal tenere il rotore alla velocità di sincronismo.

DETERMINAZIONE DEI PARAMETRI. PROVA IN CORTOCIRCUITO. Se si tiene il rotore bloccato lo scorrimento vale uno e lo schema equivalente semplificato monofase si disegna come in figura. L'impedenza che si misura in questo caso è il parallelo tra l'impedenza a vuoto e



l'impedenza di cortocircuito, entrambe a primario.

VII) DIAGRAMMA CIRCOLARE

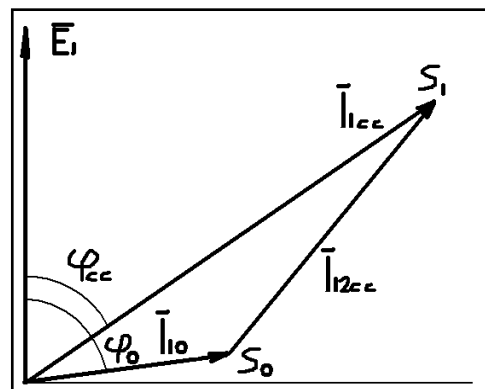
INTRODUZIONE. Il diagramma circolare è un grafico che si traccia a partire dai parametri dello schema equivalente semplificato monofase. Esso permette di conoscere le prestazioni della macchina asincrona in ogni condizione di funzionamento.

TRACCIAMENTO DEL DIAGRAMMA CIRCOLARE. Nel piano complesso si riporti la tensione stellata a primario, parallelamente all'asse immaginario. Supponiamo che tale tensione resti costante in ciascuna condizione di funzionamento. Riportiamo poi la corrente a vuoto data da

$$\bar{I}_{10} = \frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}_{10}}$$

Riportiamo inoltre la corrente di corto circuito a primario data da

$$\bar{I}_{1cc} = \frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}_{1c}}$$



Riportiamo anche la corrente di cortocircuito a secondario riportata a primario, data da

$$\bar{I}_{12cc} = \bar{I}_{1cc} - \bar{I}_{10}$$

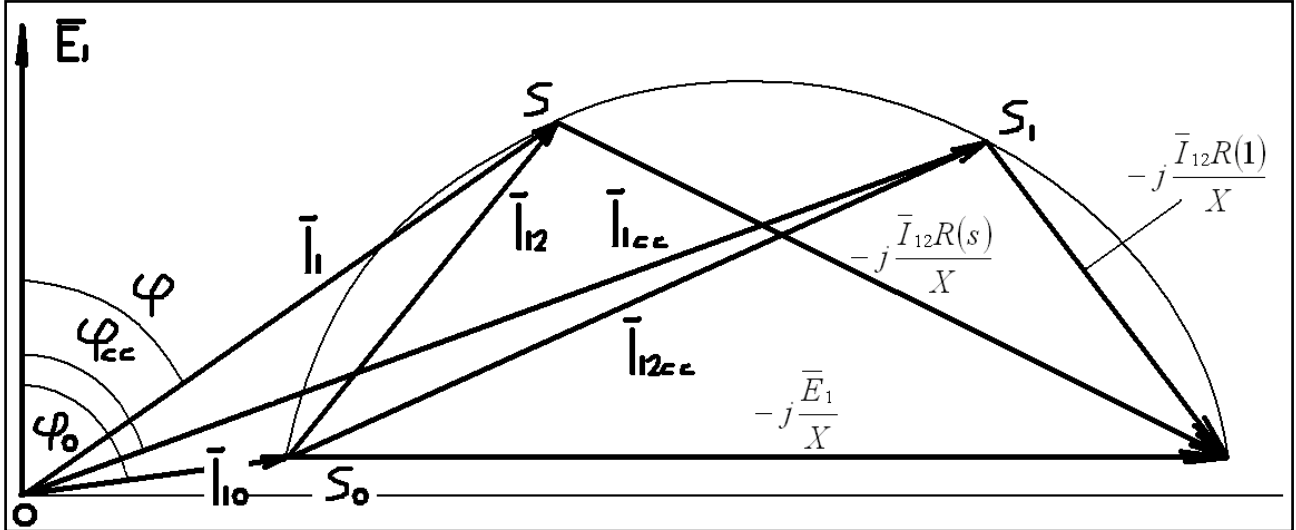
Otteniamo così il diagramma in figura. Il punto S0 indica il funzionamento a scorrimento nullo (rotore alla velocità di sincronismo ovvero funzionamento a vuoto), mentre il punto S1 indica il funzionamento a scorrimento unitario (rotore fermo ovvero cortocircuito).

Esaminiamo ora la condizione di funzionamento generico. Consideriamo lo schema semplificato. In base alla LKT si ha

$$\bar{E}_1 = \bar{I}_{12}R(s) + \bar{I}_{12}jX \Rightarrow \frac{\bar{E}_1}{jX} = \frac{\bar{I}_{12}R(s)}{jX} + \bar{I}_{12} \Rightarrow -j\frac{\bar{E}_1}{X} = -j\frac{\bar{I}_{12}R(s)}{X} + \bar{I}_{12} \Rightarrow$$

$$\bar{I}_{12} = -j\frac{\bar{E}_1}{X} + j\frac{\bar{I}_{12}R(s)}{X}$$

I tre fasori che appaiono sopra costituiscono un triangolo rettangolo con ipotenusa parallela all'asse reale. Riportando dunque la corrente secondaria riportata a primario con origine nel punto S0 si ha il diagramma seguente.



Al variare dello scorrimento fra 1 (rotore fermo) e zero (velocità del rotore pari a quella del campo magnetico rotante) il punto S scorre lungo la semicirconferenza dal punto S1 al punto S0.

Il valore efficace delle correnti si ottiene direttamente dalla lunghezza dei segmenti che le rappresentano moltiplicati per un opportuno fattore metrico di scala, detto **fattore metrico di scala delle correnti** ed indicato m_i . Per cui si ha ad esempio

$$I_1 = m_i OS$$

DEDUZIONE DELLA POTENZA A VUOTO ED IN CORTOCIRCUITO. Il diagramma circolare consente di valutare anche le potenze attraverso la misura di segmenti. Si consideri infatti quanto segue.

La potenza a vuoto (cioè con rotore a velocità di sincronismo, cioè con $s=0$) è data da

$$P_0 = 3E_1 I_{10} \cos \varphi_0 = 3E_1 m_i OS0 \cos \varphi_0 = 3E_1 m_i AOS0 = m_p AOS0$$

dove si è introdotto il **fattore metrico di scala delle correnti**. Analogamente la potenza in cortocircuito (cioè con rotore fermo, ovvero con $s=1$) è data da

$$P_{cc} = 3E_1 I_{1cc} \cos \varphi_{cc} = 3E_1 m_i OS1 \cos \varphi_{cc} = 3E_1 m_i A1S1 = m_p A1S1$$

Si osservi ora che la potenza persa nel nucleo per isteresi e correnti parassite, ovvero la potenza a vuoto, è una componente anche della potenza in cortocircuito e anche in cortocircuito conserva lo stesso valore. Ne segue che la potenza dissipata nel rame di primario e secondario è data da

$$P_{cu} = m_p B1S1$$

Ora quanta di questa potenza è dissipata nel primario e quanta è dissipata nel secondario? Supponendo di conoscere il valore della resistenza del primo avvolgimento, allora la potenza dissipata a primario vale

$$P_{cu1} = I_{12}^2 R_1 = m_p B_1 C_1$$

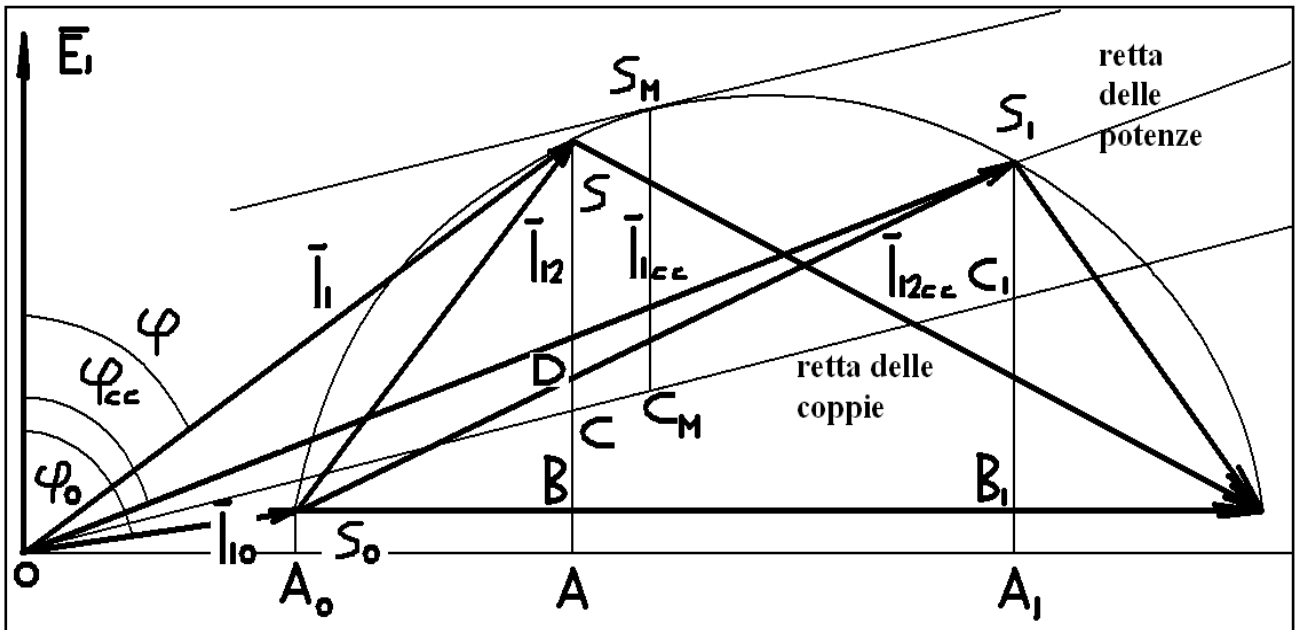
E' possibile così fissare la posizione di un punto, che diciamo C1, sul segmento A1S1, in modo tale da poter avere anche la potenza dissipata a secondario per effetto Joule. Essa sarà infatti necessariamente

$$P_{cu2} = m_p C_1 S_1$$

DEDUZIONE DELLA POTENZA IN CONDIZIONI GENERICHE. La potenza complessa che entra, in condizioni generiche, al primario della macchina asincrona è data da

$$\begin{aligned} \dot{S} &= 3(E_1 I_1 \cos \varphi + j E_1 I_1 \sin \varphi) = 3(E_1 m_i OS \cos \varphi + j E_1 m_i OS \sin \varphi) = \\ &= (m_p OS \cos \varphi + j m_p OS \sin \varphi) = m_p OA + j m_p AS \end{aligned}$$

Dunque dal diagramma circolare si ricavano la potenza attiva e la potenza attiva entranti a primario essendo



$$\begin{cases} P = m_p OA \\ Q = m_p AS \end{cases}$$

Della potenza attiva quella perduta nel nucleo per correnti parassite ed isteresi sarà

$$P_{Fe} = P_0 = m_p AB$$

Le perdite per effetto joule nell'avvolgimento primario ed in quello secondario sono invece rispettivamente

$$P_{cu1} = m_p BC$$

$$P_{cu2} = m_p CD$$

Dunque è anche possibile valutare la potenza attiva convertita in potenza meccanica. Deve essere infatti

$$P_m = m_p DS$$

La retta per S0 e per D, consentendo di individuare il valore della potenza convertita (in quanto individua D) prende il nome di **retta delle potenze**.

DEDUZIONE DEL RENDIMENTO. Se trascuriamo le perdite di potenza per attrito e per ventilazione allora il rendimento è dato da

$$\eta = \frac{P_m}{P} = \frac{DS}{AS}$$

DEDUZIONE DELLO SCORRIMENTO. La potenza che viene ceduta a secondario e convertita in potenza meccanica e calore è data, in base allo schema equivalente semplificato, da

$$3I_{12}^2 \frac{R_{12}}{s} = m_p CS$$

La potenza invece che viene dissipata in calore dall'avvolgimento del secondario è invece

$$3I_{12}^2 R_{12} = m_p CD$$

Lo scorrimento allora si scrive

$$s = \frac{3I_{12}^2 R_{12}}{3I_{12}^2 \frac{R_{12}}{s}} = \frac{CD}{CS}$$

DEDUZIONE DELLA COPPIA. La potenza meccanica si esprime in funzione della coppia e della velocità di rotazione dell'albero come

$$P_m = C\omega_r$$

Dunque si ha

$$C = \frac{P_m}{\omega_r} = \frac{p}{\omega} P = \frac{p}{\omega} P_r = \frac{p}{\omega} CS = m_c CS$$

dove

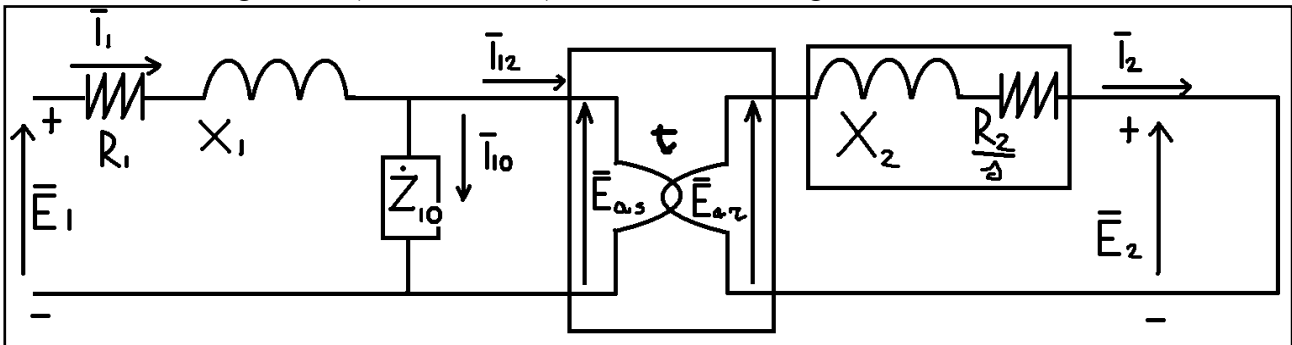
m_c è il **fattore metrico di scala** delle coppie;

P_r è la potenza complessiva ceduta al rotore.

CARATTERISTICA MECCANICA. Si definisce caratteristica meccanica l'andamento del valore della coppia in funzione della velocità del rotore. Si ha

$$C = 3 \frac{P}{\omega} P_r = 3 \frac{P}{\omega} I_2^2 \frac{R_2}{s}$$

Ora, per ottenere una espressione in funzione dello scorrimento (e dunque della velocità di rotazione del rotore), consideriamo lo schema elettrico semplificato in cui si riporti a secondario l'impedenza del secondo avvolgimento (del rotore cioè). Si ha lo schema seguente.



In base ad esso ricaviamo

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_{ar}}{\frac{R_2}{s} + jX_2} \Rightarrow I_2 = \frac{E_{ar}}{\sqrt{\left(\frac{R_2}{s}\right)^2 + X_2^2}} = \frac{sE_{ar}}{\sqrt{R_2^2 + s^2 X_2^2}} \Rightarrow$$

$$I_2^2 \frac{R_2}{s} = \frac{s^2 E_{ar}^2 R_2}{(R_2^2 + s^2 X_2^2)s} = \frac{s E_{ar}^2 R_2}{R_2^2 + s^2 X_2^2}$$

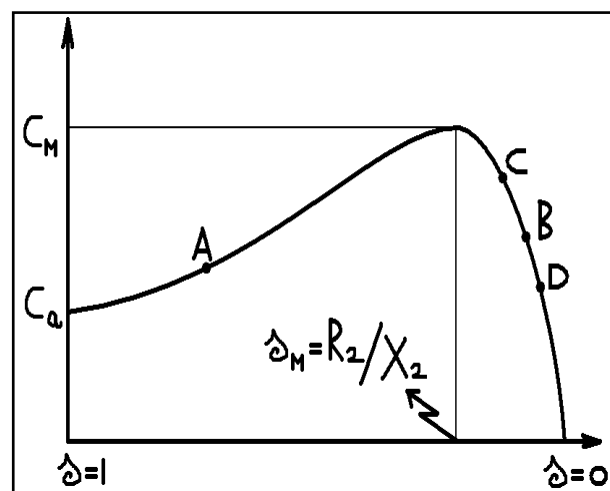
Allora la coppia in funzione dello scorrimento si scrive

$$C(s) = 3 \frac{P}{\omega} \frac{E_{ar}^2 R_2}{R_2^2 + s^2 X_2^2} s$$

L'andamento di questa funzione è indicato in figura. Si rileva in particolare il valore della coppia in corrispondenza della velocità nulla del rotore, ovvero di uno scorrimento unitario. Tale coppia è detta **coppia di spunto** o **coppia di avviamento**. Essa vale

$$C(s=1) = 3 \frac{P}{\omega} \frac{E_{ar}^2 R_2}{R_2^2 + X_2^2} = C_a$$

Il valore massimo della coppia è invece



$$C\left(s = \frac{R_2}{X_2}\right) = 3 \frac{p}{\omega} \frac{E_{ar}^2}{2 X_2} = C_M$$

Nel diagramma circolare la coppia massima è individuata dal segmento $S_M C_M$. Si consideri che il punto S_M è il punto di tangenza fra una delle rette parallele alla retta delle coppie e la semicirconferenza.

Si osserva che la coppia massima si realizza ad una velocità che si avvicina a quella di sincronismo, quella per la quale $s=0$ e la coppia è nulla.

VIII) STABILITA' E AVVIAMENTO

STABILITA'. Si consideri il grafico dell'andamento della caratteristica meccanica. Distinguiamo due situazioni.

1) Supponiamo che il funzionamento della macchina si trovi ad essere rappresentato dal punto B del diagramma, cioè da un punto del tratto decrescente del diagramma della caratteristica meccanica. Inizialmente la coppia resistente applicata all'albero dall'esterno, sia pari a quella applicata all'albero dalla macchina (coppia motrice).

Se ora aumentiamo la coppia resistente la macchina rallenta, aumentando contemporaneamente la sua coppia motrice, fino a che questa non raggiunge di nuovo il valore della coppia resistente. Nel diagramma si passa dal punto B al punto C.

Se invece di aumentare la coppia resistente la diminuiamo, allora la macchina aumenta la velocità di rotazione, diminuendo la coppia motrice fino a che questa non raggiunga il nuovo valore della coppia resistente. Nel diagramma si passa dal punto B al punto D.

In definitiva si rileva che in corrispondenza del tratto decrescente della caratteristica meccanica, il comportamento del motore asincrono è stabile.

2) Supponiamo che il funzionamento della macchina si trovi ad essere rappresentato dal punto A del diagramma, cioè da un punto del tratto crescente del diagramma della caratteristica meccanica. Inizialmente la coppia resistente applicata all'albero dall'esterno, sia pari a quella applicata all'albero dalla macchina (coppia motrice).

Se ora aumentiamo la coppia resistente la macchina rallenta e diminuisce la coppia motrice. Il rallentamento procede fino al blocco del rotore.

Se invece di aumentare la coppia resistente la diminuiamo allora la macchina accelera aumentando la coppia motrice fino al valore massimo della coppia motrice. Poi accelera diminuendo la coppia motrice fino a che questa non sia pari alla coppia resistente. Ci si ritrova in fine in un punto del tipo B.

In definitiva si osserva che nel tratto crescente del diagramma della caratteristica meccanica il comportamento della macchina è instabile.

FUNZIONAMENTO NOMINALE. Il funzionamento nominale si realizza in corrispondenza del tratto decrescente della caratteristica meccanica, in corrispondenza di una coppia nominale pari a circa la metà della coppia massima. La corrente assorbita dalla macchina in queste condizioni (corrente nominale) è circa 1/8 della corrente di spunto (ovvero della corrente di cortocircuito a rotore bloccato, detta semplicemente corrente di cortocircuito). Lo scorrimento corrispondente (lo scorrimento nominale) è invece prossimo a zero, essendo la velocità del rotore, in questo caso, prossima a quella di sincronismo.

AVVIAMENTO DEL MOTORE ASINCRONO. Distinguiamo due casi.

1) La coppia resistente è minore della coppia di avviamento. In questo caso il motore può essere collegato direttamente al carico meccanico. Esso partirà da fermo ed accelererà fino a portarsi in un punto di equilibrio stabile.

2) La coppia resistente è maggiore della coppia di avviamento (e minore della coppia massima). In questo caso non è possibile collegare direttamente il motore al carico meccanico. Esso non sarà in grado di accelerare. Si dovrà allora far raggiungere al carico meccanico, disconnesso dal motore, una velocità prossima a quella di sincronismo del motore, quindi lo si collegherà al motore stesso tramite una frizione.

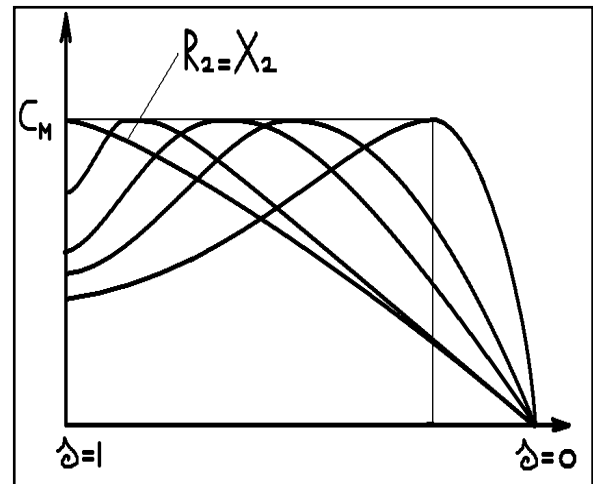
REOSTATO DI AVVIAMENTO. Abbiamo visto che se la coppia resistente è maggiore di quella di avviamento esistono dei problemi per far accelerare il motore asincrono. Si osservi allora che

$$s_M = \frac{R_2}{X_2}$$

$$C_a = C(s=1) = 3 \frac{p}{\omega} \frac{E_{ar}^2 R_2}{R_2^2 + X_2^2} = 3 \frac{p}{\omega} \frac{E_{ar}^2}{1 + \left(\frac{X_2}{R_2}\right)^2}$$

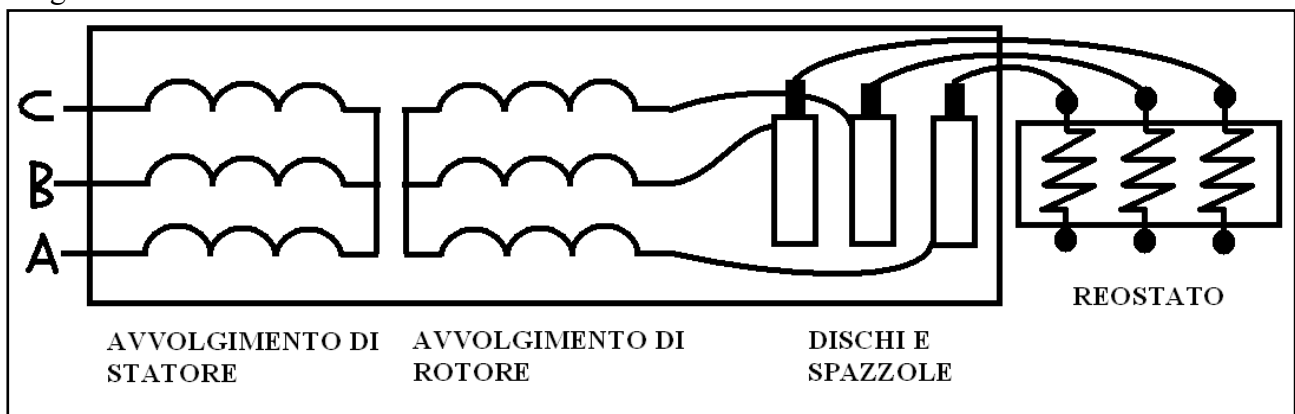
$$C_M = C(s=s_M) = \frac{3p}{\omega} \frac{E_{ar}^2}{2X_2}$$

$$\bar{I}_{1cc} = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_{10}} + \frac{\bar{E}_1}{(R_1 + t^2 R_2) + j(X_1 + X_{12})}$$



Se dunque fossimo in grado di aumentare la resistenza degli avvolgimenti del rotore potremmo far aumentare la coppia di avviamento senza alterare la coppia massima e facendo anche ridurre la corrente di avviamento.

Aumentando R_2 via via, fino a portarla al valore di X_2 si ottengono le caratteristiche meccaniche indicate in figura. Si osserva che per $R_2 = X_2$ si realizza la condizione della coppia massima di avviamento, ovvero la condizione per cui la coppia di avviamento coincide con la coppia massima erogabile dalla macchina.



L'aumento di R_2 dunque permette di portare la coppia di spunto sopra il valore della coppia resistente in modo che il motore sia in grado di accelerare fino alla condizione di funzionamento stabile. Ma dopo che tale condizione è raggiunta il fatto di avere resistenze a secondario elevate rende minore il rendimento della macchina che dissiperà molta potenza in calore. Inoltre si vede dal grafico della caratteristica meccanica che aumentare R_2 comporta rendere la macchina più lenta a parità di coppia motrice.

Sarebbe allora auspicabile aumentare R_2 inizialmente, per far accelerare la macchina, e poi diminuire R_2 per farle avere maggiore rendimento e maggiore velocità. Per realizzare questo processo si usa un dispositivo, detto **reostato di avviamento**, il quale collega in serie ai tre

avvolgimento del rotore delle resistenze che possono essere aumentate o diminuite a piacimento. Il reostato di avviamento viene inserito a valle delle spazzole, come indicato in figura.

Il reostato è usato esclusivamente per i rotor avvolti. Nel caso di rotore a gabbia vi sono altri accorgimenti per l'avviamento. Vedi in proposito il secondo volume del Guarnieri Stella a pag. 194.

AVVIAMENTO STELLA-TRIANGOLO. Diciamo di avere un motore con gli avvolgimenti del primario (statore) connessi a stella, alimentati alla tensione U . Diciamo adesso di avviare questo motore connettendo i suoi avvolgimenti a stella, mediante un'opportuno **commutatore**. Cosa succede allora? Succede che i singoli avvolgimenti sono ora alimentati alla tensione $U/\sqrt{3}$. Di conseguenza la coppia di spunto sarà inferiore (tre volte inferiore) rispetto a quella attribuita alla macchina con collegamento a triangolo degli avvolgimenti, tuttavia sarà minore anche la corrente di spunto (di un fattore $1/\sqrt{3}$). Infatti si ha

$$C_{aY} = 3 \frac{p}{\omega} \frac{E_{ar}^2 R_2}{R_2^2 + X_2^2} = 3 \frac{p}{\omega} \frac{\left(\frac{U}{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2} \right)^2}{1 + \left(\frac{X_2}{R_2} \right)^2} = 3 \frac{p}{\omega} \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{U}{t^2} \right)^2}{1 + \left(\frac{X_2}{R_2} \right)^2} = \frac{p}{\omega} \frac{\left(\frac{U}{t^2} \right)^2}{1 + \left(\frac{X_2}{R_2} \right)^2} = \frac{1}{3} C_{a\Delta}$$

$$\bar{I}_{lccY} = \frac{\bar{U}_1/\sqrt{3}}{\dot{Z}_{10}} + \frac{\bar{U}_1/\sqrt{3}}{(R_1 + t^2 R_2) + j(X_1 + X_{12})} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\bar{U}_1}{\dot{Z}_{10}} + \frac{\bar{U}_1}{(R_1 + t^2 R_2) + j(X_1 + X_{12})} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{I}_{lcc\Delta}$$

Dunque si usa questo genere di stratagemma per l'avviamento quando non si ha bisogno di una coppia di spunto molto elevata ma si ha necessità di avere una corrente di spunto bassa. Quando la macchina è stata avviata e dunque la corrente a primario si riduce, allora si può ripristinare, sempre attraverso il commutatore, il collegamento a triangolo degli avvolgimenti in modo da avere la disponibilità di una coppia motrice maggiore.

IX) REGOLAZIONE DELLA VELOCITA'

INTRODUZIONE. Si è detto che il motore asincrono viene fatto lavorare a velocità prossima a quella di sincronismo in quanto è in tale condizione che esso presenta la maggiore stabilità di funzionamento. Tuttavia in alcuni casi è necessario variare la velocità di rotazione del rotore, velocità che risulta esprimibile come funzione di frequenza, scorrimento e numero di coppie polari.

$$s = \frac{n_c - n_r}{n_c} \Rightarrow n_r = -s n_c + n_c = n_c (1 - s) = \omega_c \frac{60}{2\pi} (1 - s) = \frac{\omega}{p} \frac{60}{2\pi} (1 - s) = f \frac{60}{p} (1 - s)$$

Nei paragrafi seguenti esaminiamo i quattro principali modi per variare la velocità del rotore.

VARIAZIONE DELLA RESISTENZA DI ROTORE. Nel paragrafo sul reostato si è visto che aumentando il valore della resistenza in serie con i tre avvolgimenti di rotore si ottiene una nuova caratteristica meccanica in cui, a parità di coppia motrice, si ha una velocità di rotazione minore. Dunque il reostato è usato non solo per avere una coppia di spunto più elevata, ma anche per ottenere una macchina più lenta, al pari di coppia motrice erogata.

Il problema connesso con l'uso di un reostato per la regolazione della velocità sta nel fatto che il reostato disperde potenza in calore, per effetto joule.

VARIAZIONE DELLA FREQUENZA. Abbiamo visto, nell'introduzione di questo paragrafo, come la velocità di rotazione sia legata alla frequenza da una relazione di diretta proporzionalità. Dunque si può intervenire sulla velocità di rotore con una variazione della frequenza della corrente di alimentazione. Tale variazione può essere effettuata per mezzo di un dispositivo detto **inverter**. Per la descrizione del quale si veda il Guarnieri Stella.

Tra l'altro l'inverter consente anche una variazione della tensione a primario la quale influisce sulla caratteristica meccanica della macchina. Si parla allora di **regolazione tensione/frequenza o regolazione U/f**.

VARIAZIONE DEL NUMERO DI POLI. La velocità di rotazione risulta, come si è visto, inversamente proporzionale al numero di poli. In effetti si usano dei commutatori che variano la lunghezza del semipasso polare e dunque il numero complessivo di coppie polari. Queste commutazioni permettono così di ottenere delle variazioni discrete della velocità di rotore.

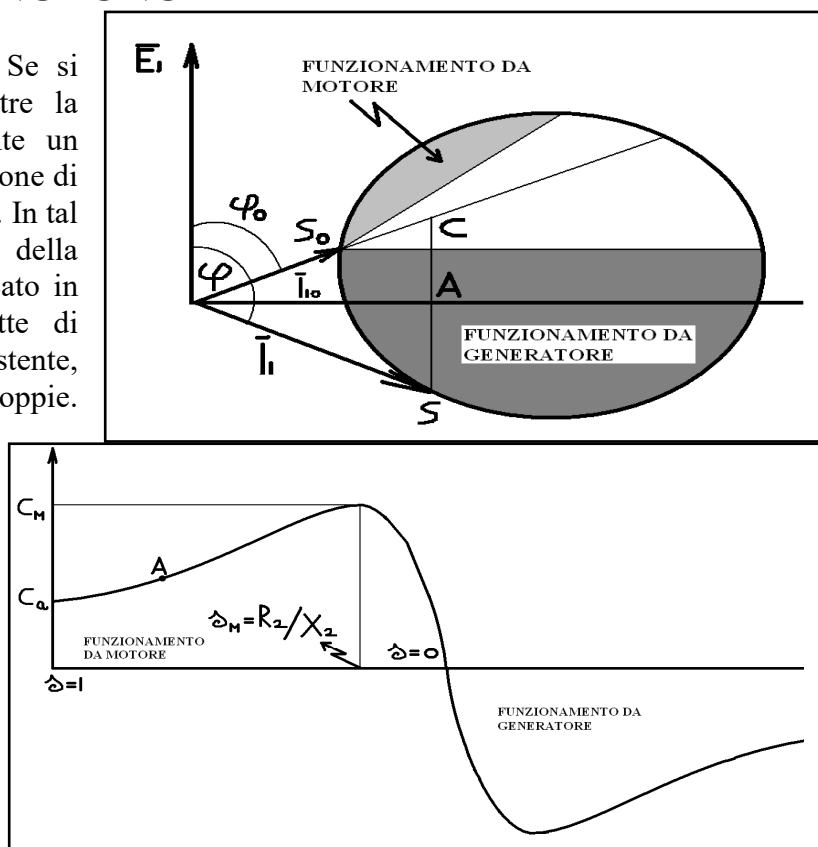
INVERSIONE DEI CONTATTI DI ALIMENTAZIONE. Se scambiamo di posto fra loro due dei tre contatti con cui l'avvolgimento primario è collegato alla rete di alimentazione, allora è possibile invertire il senso di rotazione della macchina. Questa variazione dunque è una variazione di verso della velocità, anziché di modulo.

X) GENERATORE ASINCRONO

DIAGRAMMA CIRCOLARE. Se si porta la macchina asincrona oltre la velocità di sincronismo, mediante un motore primo, si ottiene la generazione di potenza attiva ai morsetti di rotore. In tal caso il diagramma circolare della macchina si completa come indicato in figura. Il segmento CS permette di valutare l'entità della coppia resistente, attraverso il fattore di scala delle coppie. La potenza elettrica attiva fornita ai morsetti di secondario è data invece dal segmento AS moltiplicato per il fattore di scala delle potenze.

CARATTERISTICA

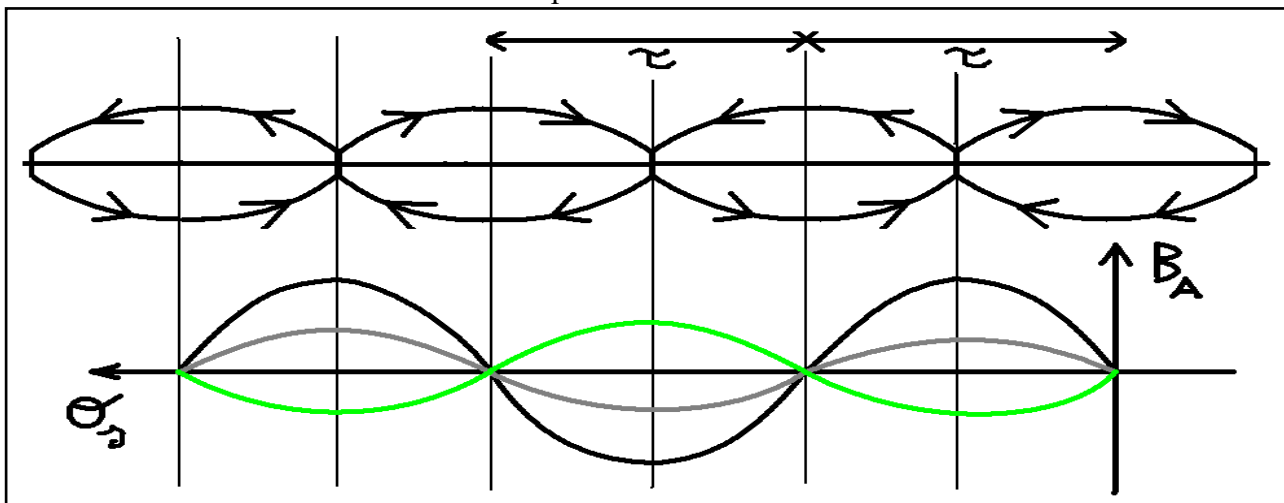
MECCANICA. Proseguendo il tracciamento della caratteristica meccanica oltre la velocità di sincronismo si ottiene il grafico indicato in figura.



XI) MOTORE ASINCRONO MONOFASE

CENNI COSTRUTTIVI. Lo statore induttore è costituito da un singolo avvolgimento. Il rotore indotto è un rotore a gabbia di scoiattolo singola.

INDUZIONE AL TRAFERRO. L'andamento della induzione al traferro è simile a quello visto per il motore trifase, quando abbiamo considerato attivo un solo avvolgimento dei tre avvolgimenti di statore. Si tratta di una induzione i cui punti di zero sono fissi e il cui modulo oscilla in ciascun



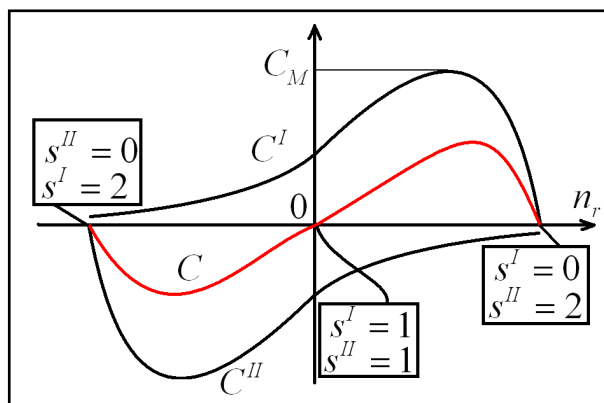
punto da un valore al suo opposto, come si vede in figura.

E' possibile dimostrare che questo genere di induzione si può considerare la somma di due campi magnetici rotanti che hanno velocità opposte e ampiezze uguali fra loro ed uguali alla metà della ampiezza della induzione magnetica risultante. Per le due velocità e i due scoriimenti si ha

$$n_c^I = -n_c^{II} = n_c$$

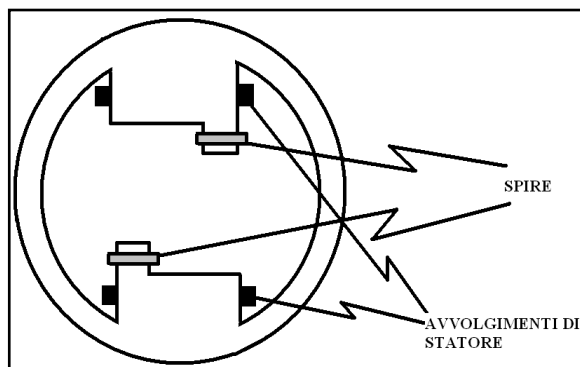
$$s^I = \frac{n_c^I - n_r}{n_c^I} = 1 - \frac{n_r}{n_c} = s$$

$$s^{II} = \frac{n_c^{II} - n_r}{n_c^{II}} = 1 - \frac{n_r}{n_c} = s$$



CARATTERISTICA MECCANICA. Ora il rotore presenterà velocità relative diverse rispetto ai due campi magnetici che ruotano in verso opposto con velocità che risulta, in modulo, uguale. Questo permette di ricavare la caratteristica meccanica del motore asincrono monofase come somma di due caratteristiche meccaniche qualitativamente simili a quelle viste per il motore trifase, ma ribaltate l'una rispetto all'altra.

AVVIAMENTO. Dalla caratteristica meccanica emerge come il motore monofase abbia coppia di spunto nulla. Questo vuol dire che, se non facciamo qualche modifica al suo funzionamento, allora tale motore non può avviarsi spontaneamente. Resta comunque il fatto che se gli si fornisce uno spunto meccanico alla rotazione, in uno dei due versi, esso comincia ad accelerare in tale verso e ad aumentare la coppia motrice, fino al raggiungimento di una condizione di equilibrio. Occorre dunque una coppia di spunto ausiliaria. Come ottenerla? In genere si determina una induzione magnetica alternata ausiliaria che, sommata a quella dell'avvolgimento di statore, dia luogo ad una induzione magnetica rotante, anche piccola, che fornisca una coppia di spunto. Per la generazione di una induzione magnetica ruotante si



usano due sistemi, analizzati nel seguito.

MOTORE A CONDENSATORE. Si consideri un motore asincrono trifase con gli avvolgimenti primari collegati a triangolo. Due fasi le colleghiamo ai due morsetti di una rete monofase alternata. Lungo il terzo avvolgimento inseriamo un condensatore ed un interruttore. Si ha lo schema elettrico disegnato in figura, dove è rappresentato solo lo statore. La corrente dell'avvolgimento ausiliario risulta sfasata di 90° rispetto a quella dell'avvolgimento primario e dunque genera un campo magnetico che, sommato a quello dell'avvolgimento primario, è in grado di generare un campo magnetico rotante in grado di fornire la coppia di spunto.

MOTORE A POLI SCHERMATI. Ciascun polo di statore presenta una spira non attraversata da corrente. Poiché essa è attraversata da un flusso variabile determinato dagli avvolgimenti di statore, lungo di essa si genera una corrente che determina un flusso la cui somma col flusso determinato dal primario dà luogo ad un campo magnetico rotante in grado di fornire una modesta coppia di spunto.