

Capitolo 1. Vettori geometrici e momenti

1.1. Prodotto scalare. Assegnati i vettori geometrici \vec{v} e \vec{w} definiamo prodotto scalare di \vec{v} per \vec{w} , lo scalare

$$1.1) \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = vw \cos \theta$$

essendo θ l'angolo convesso fra i due vettori. Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:

1.2)	$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$	<i>proprietà commutativa</i>
1.3)	$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 + \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3$ $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3$	<i>proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto</i>
1.4)	$\lambda(\vec{v} \cdot \vec{w}) = (\lambda\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (\lambda\vec{w})$	<i>proprietà distributiva del prodotto per uno scalare</i>
1.5)	$v = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$ $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = 0$	<i>prodotto scalare e modulo di un vettore</i>
1.6)	$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{w}$	<i>ortogonalità</i>
1.7)	$v_x = \vec{v} \cdot \vec{e}_1$ $v_y = \vec{v} \cdot \vec{e}_2$ $v_z = \vec{v} \cdot \vec{e}_3$	<i>componenti lungo gli assi di riferimento</i>
1.8)	$v_r = \vec{v} \cdot \vec{r}$ con \vec{r} il versore della retta r	<i>componente lungo la retta r</i>
1.9)	$\vec{v}^r = (\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{r}$ con \vec{r} il versore della retta r	<i>vettore proiezione lungo la retta r</i>

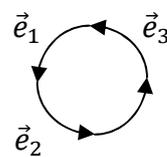
1.10)	$\vec{v}^\pi = (\vec{v} \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_2$ con $(\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2)$ una base ortonormale di π	vettore proiezione sul piano π
1.11)	$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$	prodotto scalare come somma del prodotto delle componenti
1.12)	$ \vec{v} \cdot \vec{w} \leq vw$	diseguaglianza di Cauchy-Schwarz
1.13)	$ \vec{v} + \vec{w} \leq v + w$	diseguaglianza triangolare
1.14)	$ \vec{v} + \vec{w} ^2 = v^2 + w^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w}$	teorema di Carnot
1.15)	$ \vec{v} + \vec{w} ^2 = v^2 + w^2$ $\vec{v} \perp \vec{w}$	teorema di Pitagora
1.16)	$\vec{v} \cdot \vec{w} = \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{w} ^2 - v^2 - w^2)$	prima identità di Polarizzazione
1.17)	$\vec{v} \cdot \vec{w} = \frac{1}{4}(\vec{v} + \vec{w} ^2 - \vec{v} - \vec{w} ^2)$	seconda identità di Polarizzazione
1.18)	$ \vec{v} + \vec{w} ^2 + \vec{v} - \vec{w} ^2 = 2(v^2 + w^2)$	uguaglianza del parallelogramma
1.19)	$area^2 = \begin{vmatrix} \vec{v} \cdot \vec{v} & \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{v} \cdot \vec{w} & \vec{w} \cdot \vec{w} \end{vmatrix}$	area del parallelogramma

1.2. Prodotto vettoriale. \vec{v} e \vec{w} definiamo prodotto vettoriale di \vec{v} per \vec{w} , e lo indichiamo $\vec{v} \times \vec{w}$, il vettore tale che

- 1.20) $|\vec{v} \times \vec{w}| = vwsin\theta$ con θ angolo convesso fra \vec{v} e \vec{w}
1.21) $\vec{v} \times \vec{w} \perp \pi$ con π piano individuato dai due vettori \vec{v} e \vec{w}
1.22) $\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}$ è una terna destra

Il prodotto vettoriale gode delle seguenti proprietà:

1.23)	$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$	proprietà anti-commutativa
-------	--	----------------------------

1.24)	$\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_3$ $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \times \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_3 + \vec{v}_2 \times \vec{v}_3$	proprietà distributiva rispetto alla somma
1.25)	$\vec{v}_1 \times (\lambda \vec{v}_2) = (\lambda \vec{v}_1) \times \vec{v}_2 = \lambda(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$	proprietà distributiva rispetto al prodotto per uno scalare
1.26)	$\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3)\vec{v}_2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_3$ $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_3 = (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3)\vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3)\vec{v}_1$	prodotto vettoriale triplo ¹
1.27)	$area = \vec{v} \times \vec{w} $	area del parallelogramma
1.28)	$\vec{v} \times \vec{w} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}$	prodotto vettoriale come determinante di matrice
1.29)	$\begin{aligned} \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &= \vec{e}_3 & \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 &= -\vec{e}_3 \\ \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 &= -\vec{e}_2 & \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 &= \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 &= \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 &= -\vec{e}_1 \end{aligned}$	prodotto vettoriale di versori di una terna destra ² 

1.3. Prodotto misto. Assegnati tre vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ definisco prodotto misto del primo per il secondo per il terzo, lo scalare

1.30) $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)$

Il prodotto misto gode delle seguenti proprietà:

1.31)	$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 = \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 \times \vec{v}_1$	proprietà commutativa ³
-------	--	------------------------------------

¹ Da un punto di vista mnemonico si ricordi che nel primo prodotto scalare sono presenti il primo e il terzo vettore, nel secondo, che va preceduto da segno meno, sono presenti il vettore fuori parentesi e quello a esso più vicino.

² Il diagramma indicato permette di ottenere il risultato del prodotto: se si va dal primo termine al secondo nel verso delle frecce, allora il prodotto è positivo, altrimenti è negativo.

³ Facendo 'scorrere circolarmente' i tre vettori, il risultato non cambia.

1.32)	$volume = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 $	<i>volume del parallelepipedo avente come spigoli i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$</i>
1.33)	$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ complanari} \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 = 0$	<i>complanarit�</i>
1.34)	$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 \times \vec{v}_4 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 \times \vec{v}_4 + \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 \times \vec{v}_4$ $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) \times \vec{v}_4 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \times \vec{v}_4 + \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 \times \vec{v}_4$ $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \times (\vec{v}_3 + \vec{v}_4) = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 + \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \times \vec{v}_4$	<i>propriet� distributiva rispetto alla somma</i>
1.35)	$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 = \det \begin{pmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \\ v_{3x} & v_{3y} & v_{3z} \end{pmatrix}$	<i>prodotto misto come determinante di matrice</i>

1.4. Equazione con prodotto scalare. Assegnato il vettore \vec{a} e lo scalare k le soluzioni dell'equazione vettoriale

$$1.36) \quad \vec{a} \cdot \vec{x} = k$$

sono tutti e soli i vettori

$$1.37) \quad \vec{x} = \frac{k}{a^2} \vec{a} + \vec{v}^\pi$$

dove \vec{v}^π   un qualunque vettore ortogonale al vettore \vec{a} . Che i vettori **1.37** siano soluzioni della **1.37**   di immediata constatazione. Per provare che non vi siano altre soluzioni diciamo che \vec{v} sia una soluzione della **1.36**. Allora se lo decomponiamo nella somma di un vettore parallelo ad \vec{a} e di un vettore ortogonale ad \vec{a} abbiamo

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = k \Leftrightarrow \vec{a} \cdot (\vec{v}^a + \vec{v}^\pi) = k \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{v}^a = k \Rightarrow v^a = \frac{k}{a} \Rightarrow \vec{v}^a = \frac{k}{a^2} \vec{a} \Rightarrow \vec{v} = \frac{k}{a^2} \vec{a} + \vec{v}^\pi$$

E dunque \vec{v}   uno dei vettori **1.37**. Si intende che v^a   una quantit  algebrica in quanto rappresenta la proiezione di \vec{v} sulla retta orientata da \vec{a} .

1.5. Equazione con prodotto vettoriale. Assegnati i vettori \vec{a}, \vec{b} , con $\vec{a} \perp \vec{b}$, le soluzioni della equazione vettoriale

$$1.38) \quad \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$$

sono date da tutti e soli i vettori

$$1.39) \quad \vec{x} = -\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{a^2} + \vec{v}^a$$

dove \vec{v}^a è un qualunque vettore parallelo ad \vec{a} . Che i vettori **1.39** soddisfino l'equazione **1.38** è di immediata verifica (attenzione al prodotto vettoriale triplo). Resta da provare che non vi siano altre soluzioni oltre le **1.39**. Allora diciamo che \vec{v} sia una soluzione della **1.38** e moltiplichiamo vettorialmente (a sinistra) entrambi i membri dell'equazione per \vec{a} . Scomponendo poi \vec{v} nella somma di un vettore parallelo ad \vec{a} e di uno a esso ortogonale si ha

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{a} \times (\vec{v}^a + \vec{v}^\pi)) &= \vec{a} \times \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{v}^\pi) = \vec{a} \times \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a} \cdot \vec{v}^\pi)\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{v}^\pi = \vec{a} \times \vec{b} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -(\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{v}^\pi = \vec{a} \times \vec{b} \Leftrightarrow \vec{v}^\pi = -\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{a^2} \end{aligned}$$

E dunque appunto

$$\vec{v} = -\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{a^2} + \vec{v}^a$$

e \vec{v} è uno dei vettori contemplati nella **1.39**.

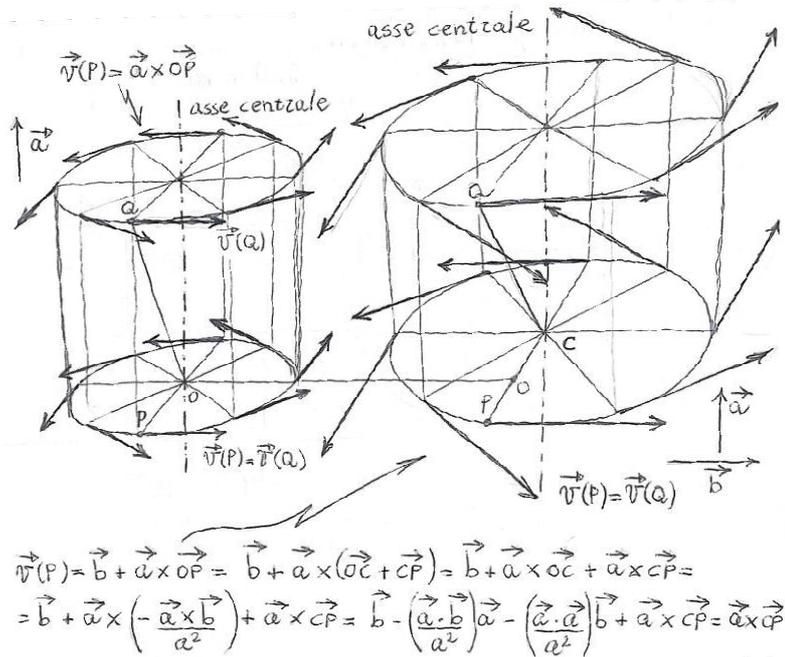
1.6. Proprietà delle funzioni vettoriali. Data le funzioni vettoriali $\vec{v} = \vec{v}(t)$ e $\vec{w} = \vec{w}(t)$, e lo scalare $a = a(t)$ si hanno le seguenti proprietà:

1.40)	$D(a\vec{v}) = D(a)\vec{v} + aD(\vec{v})$	<i>derivata del prodotto per uno scalare</i>
1.41)	$D(\vec{v}) = D(v)\text{versor } \vec{v} + vD(\text{versor } \vec{v})$	<i>corollario</i>
1.42)	$D(\vec{v} \times \vec{w}) = D(\vec{v}) \times \vec{w} + \vec{v} \times D(\vec{w})$	<i>derivata del prodotto vettoriale</i>
1.43)	$D(\vec{v} \cdot \vec{w}) = D(\vec{v}) \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot D(\vec{w})$	<i>derivata del prodotto scalare</i>
1.44)	$D(\vec{v} + \vec{w}) = D(\vec{v}) + D(\vec{w})$	<i>derivata della somma</i>
1.45)	$v = \text{costante} \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} \perp \vec{v}, \forall t$	<i>prima proprietà delle applicazioni vettoriali</i>
1.46)	$\frac{d(\text{versor } \vec{v})}{dt} \perp \vec{v}, \forall t$	<i>corollario</i>
1.47)	$\text{versor } \vec{v} = \text{costante} \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} \parallel \vec{v}, \forall t$	<i>seconda proprietà delle applicazioni vettoriali</i>

1.7. Campo circolare. Una qualunque funzione vettoriale del tipo

$$1.48) \vec{v}(P) = \vec{a} \times \overrightarrow{OP}$$

prende il nome di campo circolare. L'asse passante per il punto O e parallelo al vettore \vec{a} è il suo **asse centrale**.



Le caratteristiche salienti di questo campo vettoriale, immediatamente deducibili dalla **1.48** e schematizzate in figura, sono che

- comunque si scelga P risulta sempre $\vec{v}(P) \perp \vec{a}$;
- comunque si scelga P risulta sempre che $\vec{v}(P)$ è tangente alla circonferenza ortogonale ad \vec{a} e avente centro sull'asse centrale, inoltre $\vec{v}(P)$ indicherà, dal punto di vista di \vec{a} , il senso antiorario di rotazione;
- se P e Q sono due punti equidistanti dall'asse centrale, allora i due vettori $\vec{v}(P), \vec{v}(Q)$ hanno lo stesso modulo;
- il campo può essere anche scritto come

$$1.49) \vec{v}(P) = \vec{v}(Q) + \vec{a} \times \overrightarrow{QP}$$

essendo Q un punto generico dello spazio;

- anche il campo vettoriale

$$1.50) \vec{v}(P) = \vec{b} + \vec{a} \times \overrightarrow{OP} \text{ con } \vec{b} \perp \vec{a}$$

è un campo circolare: rispetto al campo **1.48** presenterà un asse centrale traslato lungo la retta che passa per O ed è \perp a \vec{b} . Per trovare l'asse centrale si imposta (vedi paragrafo **1.5**) l'equazione con prodotto vettoriale

$$1.51) \vec{v}(C) = \vec{b} + \vec{a} \times \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

la quale, in accordo con la **1.39**, individua la retta

$$1.52) \quad \vec{OC} = -\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{a^2} + \vec{v}^a = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{a^2} + \vec{v}^a$$

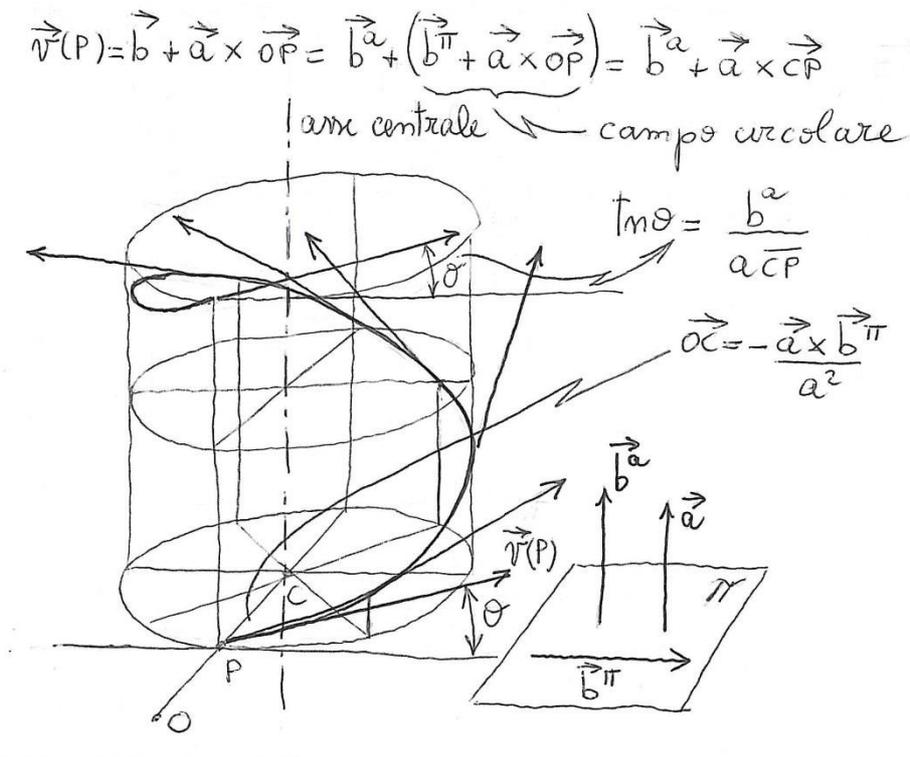
essendo \vec{v}^a il generico vettore parallelo ad \vec{a} .

1.8. Campo elicoidale.

Un qualunque campo vettoriale del tipo

$$1.53) \quad \vec{v}(P) = \vec{b} + \vec{a} \times \vec{OP}$$

prende il nome di campo elicoidale.



Si osserva allora che

- un campo circolare è un particolare campo elicoidale;
- quando il vettore \vec{b} non è \perp ad \vec{a} il campo elicoidale non è un campo circolare ma si può scrivere come

$$1.54) \quad \vec{v}(P) = \vec{b}^a + \vec{b}^\pi + \vec{a} \times \vec{OP}$$

cioè come la somma del campo circolare $\vec{b}^\pi + \vec{a} \times \vec{OP}$ e del vettore $\vec{b}^a \parallel \vec{a}$;

- l'asse centrale del campo elicoidale si trova imponendo

$$1.55) \quad \vec{v}(P) = \vec{b}^a + \vec{b}^\pi + \vec{a} \times \vec{OP} = \vec{b}^a$$

ovvero cercando l'asse centrale del campo circolare $\vec{b}^\pi + \vec{a} \times \vec{OP}$, per cui si trova

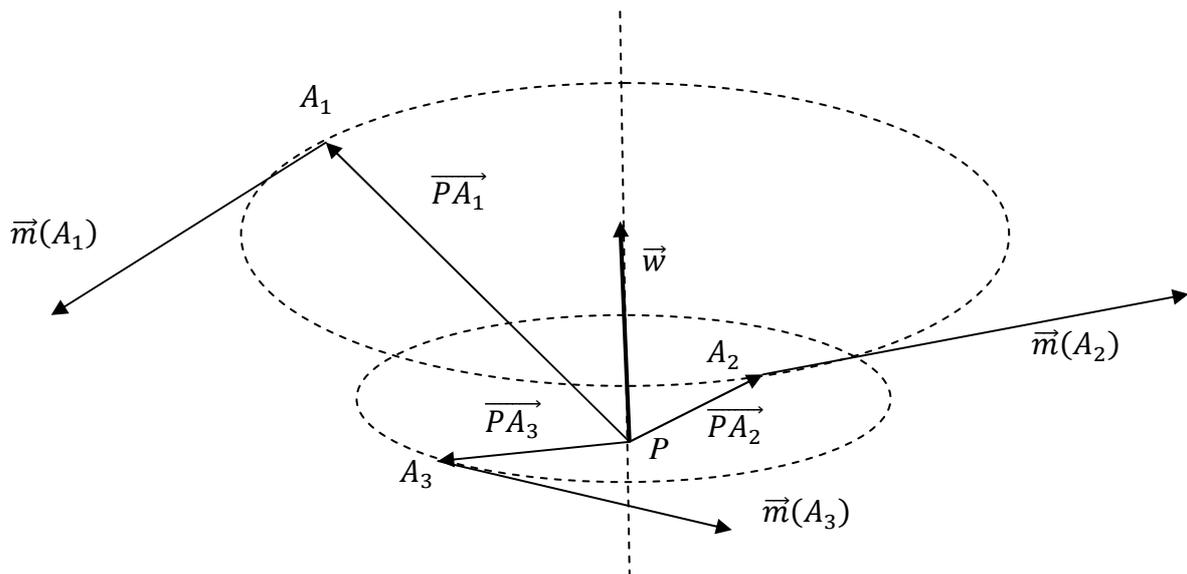
$$1.56) \quad \vec{OC} = -\frac{\vec{a} \times \vec{b}^\pi}{a^2} + \vec{v}^a = \frac{\vec{a} \times \vec{b}^\pi}{a^2} + \vec{v}^a$$

essendo \vec{v}^a il generico vettore parallelo ad \vec{a} .

1.9. Momento polare. Definisco momento polare del vettore \vec{w} , applicato in P , rispetto al punto A il vettore

$$1.57) \quad \vec{m}(A) = \overrightarrow{AP} \times \vec{w} = \vec{w} \times \overrightarrow{PA}$$

Da un punto di vista mnemonico è utile ricordare che il momento così definito ‘vede’ \vec{w} ‘indicare’ una rotazione antioraria intorno al punto A . Confrontando la **1.57** con la **1.48** si riconosce che al variare di A il momento descrive un campo circolare di vettore \vec{w} e asse centrale passante per P (vedi figura).



Supponiamo ora di avere i vettori \vec{w}_i applicati nei punti P_i per $i = 1, 2, \dots, n$. Allora definisco **momento totale** dei suddetti vettori rispetto al polo A il vettore

$$1.58) \quad \vec{M}(A) = \sum_{i=1}^n (\overrightarrow{AP_i} \times \vec{w}_i) = \sum_{i=1}^n (\vec{w}_i \times \overrightarrow{P_iA})$$

Dimostro ora che il momento totale è un campo elicoidale:

$$\begin{aligned} \vec{M}(A) &= \sum_{i=1}^n (\vec{w}_i \times (\overrightarrow{P_iB} + \overrightarrow{BA})) = \sum_{i=1}^n (\vec{w}_i \times \overrightarrow{P_iB}) + \sum_{i=1}^n (\vec{w}_i \times \overrightarrow{BA}) = \\ &= \vec{M}(B) + \left(\sum_{i=1}^n \vec{w}_i \right) \times \overrightarrow{BA} \end{aligned}$$

Confrontando con la definizione **1.10** riconosciamo un campo elicoidale in generale non circolare.

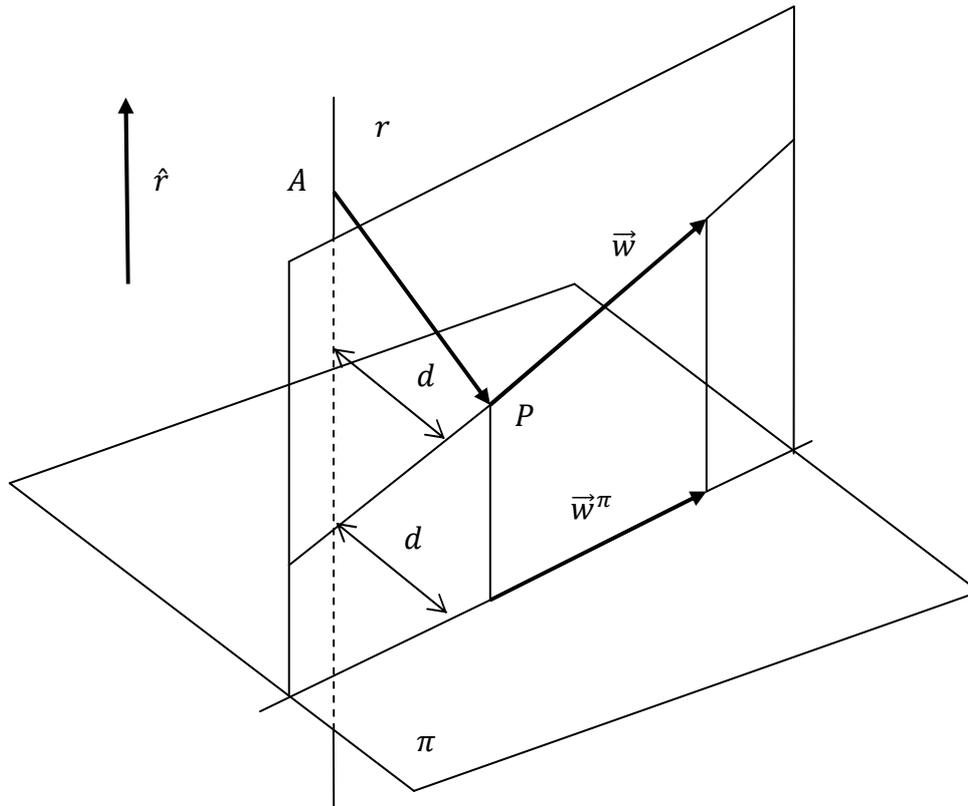
1.10. Momento assiale. Definisco momento assiale del vettore del vettore \vec{w} , applicato in P , rispetto la retta orientata r lo scalare

$$1.59) \quad m_r = \vec{m}(A) \cdot \hat{r}$$

dove A è un qualunque punto della retta r . La definizione è ben posta poiché il valore di tale scalare non varia allo scorrere di A su r . Infatti siano A_1, A_2 due punti di r , allora si ha

$$\begin{aligned} \vec{m}(A_1) \cdot \hat{r} &= \vec{w} \times \overrightarrow{PA_1} \cdot \hat{r} = \vec{w} \times (\overrightarrow{PA_2} + \overrightarrow{A_2A_1}) \cdot \hat{r} = \vec{w} \times \overrightarrow{PA_2} \cdot \hat{r} + \vec{w} \times \overrightarrow{A_2A_1} \cdot \hat{r} = \\ &= \vec{w} \times \overrightarrow{PA_2} \cdot \hat{r} + \vec{w} \times \overrightarrow{A_2A_1} \cdot \hat{r} = \vec{w} \times \overrightarrow{PA_2} \cdot \hat{r} + \overrightarrow{A_2A_1} \times \hat{r} \cdot \vec{w} = \vec{w} \times \overrightarrow{PA_2} \cdot \hat{r} = \vec{m}(A_2) \cdot \hat{r} \end{aligned}$$

dove si sono applicate le proprietà del prodotto misto. Considerando poi la figura si ricava una regola pratica per il calcolo del momento assiale: il modulo è pari alla distanza d della retta di azione di \vec{w} dall'asse r moltiplicato per il modulo del vettore \vec{w}^π (π è ortogonale all'asse r); il segno del momento assiale è positivo se \vec{w}^π indica una rotazione antioraria rispetto al versore \hat{r} , negativo altrimenti.



Supponiamo ora di avere i vettori \vec{w}_i applicati nei punti P_i per $i = 1, 2, \dots, n$. Allora definisco **momento assiale totale** dei suddetti vettori rispetto alla retta orientata r lo scalare

$$1.60) \quad M_r = \sum_{i=1}^n (\vec{m}_i(A) \cdot \hat{r}) = (\sum_{i=1}^n \vec{m}_i(A)) \cdot \hat{r} = \vec{M}(A) \cdot \hat{r}$$

E' immediato verificare che anche il momento polare totale non varia allo scorrere del punto A sulla retta r .

1.11. Coppia. E' una sollecitazione costituita da due vettori applicati i quali abbiano

- stessa direzione
- verso opposto
- stesso modulo

Si chiama **braccio della coppia** la distanza fra le rette di applicazione dei due vettori. Si chiama **intensità della coppia** il modulo di ciascuno dei due vettori.

1.12. Momento della coppia. Data la coppia di vettori \vec{w}_1, \vec{w}_2 applicati in P_1, P_2 rispettivamente, definiamo momento della coppia il vettore

$$1.61) \quad \vec{M} = \vec{m}_1(A) + \vec{m}_2(A) = \overrightarrow{AP_1} \times \vec{w}_1 + \overrightarrow{AP_2} \times \vec{w}_2$$

dove A è un qualunque punto dello spazio. La definizione è ben posta poiché il valore del momento della coppia non varia al variare della posizione di A . Infatti siano A, \tilde{A} due punti dello spazio, allora si ha

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{m}_1(A) + \vec{m}_2(A) = \overrightarrow{AP_1} \times \vec{w}_1 + \overrightarrow{AP_2} \times \vec{w}_2 = \\ &= (\overrightarrow{A\tilde{A}} + \overrightarrow{\tilde{A}P_1}) \times \vec{w}_1 + (\overrightarrow{A\tilde{A}} + \overrightarrow{\tilde{A}P_2}) \times \vec{w}_2 = \\ &= \overrightarrow{A\tilde{A}} \times \vec{w}_1 + \overrightarrow{\tilde{A}P_1} \times \vec{w}_1 + \overrightarrow{A\tilde{A}} \times \vec{w}_2 + \overrightarrow{\tilde{A}P_2} \times \vec{w}_2 = \overrightarrow{\tilde{A}P_1} \times \vec{w}_1 + \overrightarrow{\tilde{A}P_2} \times \vec{w}_2 \end{aligned}$$

dove ho considerato che, in accordo con la definizione di coppia, deve essere $\vec{w}_1 = -\vec{w}_2$. Sempre in base a questa relazione la **1.61** può scriversi in modo equivalente

$$1.62) \quad \vec{M} = \overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{w}_1 = \overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{w}_2$$

come è immediato verificare.

Capitolo 2. Spostamenti

2.1. Corpo rigido. Entro certi limiti di sollecitazione ogni materiale può presentare poche o nulle deformazioni. Per descrivere il moto di corpi che presentino deformazioni trascurabili si introduce il modello ideale di **corpo rigido**, definito come segue.

DEF 2.1. CORPO RIGIDO. È quel corpo in cui comunque si scelgono due punti, la distanza fra di essi non varia nel tempo.

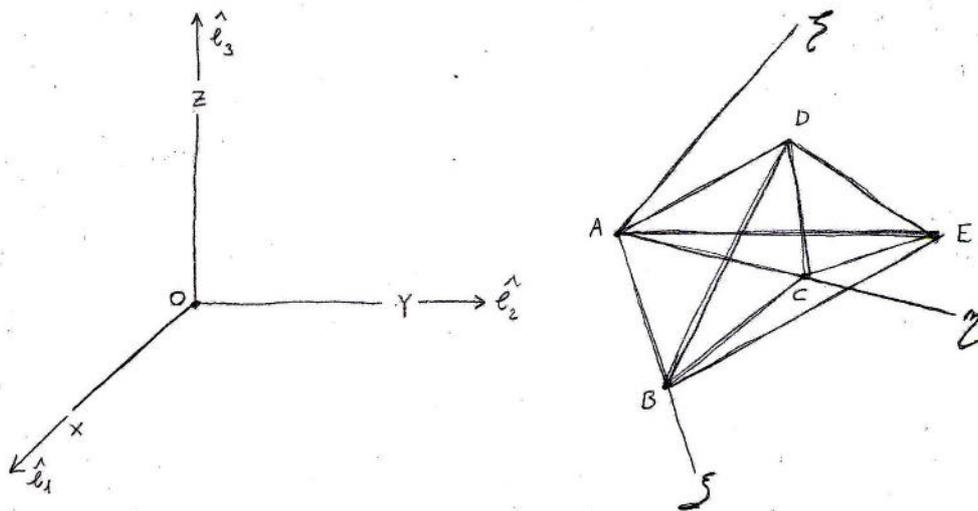
È utile provare una definizione equivalente di corpo rigido, che userò per determinare il numero di parametri scalari indipendenti necessari per definire la posizione nello spazio di un corpo rigido.

TEO 2.1. CORPO RIGIDO. Un corpo in cui

- 1) tre suoi punti non allineati A, B, C non mutano le distanze reciproche
- 2) comunque si prende un altro suo punto le sue distanze dai punti A, B, C non mutano

è un corpo rigido. Viceversa un corpo rigido soddisfa le condizioni 1,2.

DIMOSTRAZIONE. Evidentemente se un corpo è rigido secondo la **DEF 2.1** allora in particolare sono invariabili le distanze di cui ai punti 1,2. Dimostriamo il viceversa, ovvero che se valgono le ipotesi 1,2 allora comunque si prendono due punti D, E che soddisfino l'ipotesi 2, la loro distanza reciproca è invariabile. Si consideri a tale scopo la figura in cui abbiamo il sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O; x, y, z$ di base ortonormale $(\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3)$ e il sistema di riferimento cartesiano non necessariamente ortogonale $A; \xi, \eta, \zeta$ di base non necessariamente ortonormale $(\overline{AB} \overline{AC} \overline{AB} \times \overline{AC})$.



Siano (ξ_D, η_D, ζ_D) le coordinate di D rispetto A, ξ, η, ζ . Allora si ha

$$\overline{AD} = \xi_D \overline{AB} + \eta_D \overline{AC} + \zeta_D (\overline{AB} \times \overline{AC})$$

D'altra parte

$$\overline{AB} = AB_x \hat{e}_1 + AB_y \hat{e}_2 + AB_z \hat{e}_3$$

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= AC_x \hat{e}_1 + AC_y \hat{e}_2 + AC_z \hat{e}_3 \\ \overline{AB} \times \overline{AC} &= \varepsilon_x \hat{e}_1 + \varepsilon_y \hat{e}_2 + \varepsilon_z \hat{e}_3\end{aligned}$$

dove abbiamo adottato la notazione

$$\vec{\varepsilon} = \overline{AB} \times \overline{AC} \leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = AB_y AC_z - AB_z AC_y \\ \varepsilon_y = AB_z AC_x - AB_x AC_z \\ \varepsilon_z = AB_x AC_y - AB_y AC_x \end{cases}$$

Dunque

$$\begin{aligned}\overline{AD} &= \xi_D (AB_x \hat{e}_1 + AB_y \hat{e}_2 + AB_z \hat{e}_3) + \eta_D (AC_x \hat{e}_1 + AC_y \hat{e}_2 + AC_z \hat{e}_3) + \zeta_D (\varepsilon_x \hat{e}_1 + \varepsilon_y \hat{e}_2 + \varepsilon_z \hat{e}_3) = \\ &= (AB_x \xi_D + AC_x \eta_D + \varepsilon_x \zeta_D) \hat{e}_1 + (AB_y \xi_D + AC_y \eta_D + \varepsilon_y \zeta_D) \hat{e}_2 + (AB_z \xi_D + AC_z \eta_D + \varepsilon_z \zeta_D) \hat{e}_3\end{aligned}$$

Considerando poi che

$$\overline{AD} = AD_x \hat{e}_1 + AD_y \hat{e}_2 + AD_z \hat{e}_3$$

e confrontando, si hanno le tre equazioni

$$\begin{aligned}AB_x \xi_D + AC_x \eta_D + \varepsilon_x \zeta_D &= AD_x \\ AB_y \xi_D + AC_y \eta_D + \varepsilon_y \zeta_D &= AD_y \\ AB_z \xi_D + AC_z \eta_D + \varepsilon_z \zeta_D &= AD_z\end{aligned}$$

che in forma matriciale si scrivono

$$2.1) \quad \begin{pmatrix} AB_x & AC_x & \varepsilon_x \\ AB_y & AC_y & \varepsilon_y \\ AB_z & AC_z & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_D \\ \eta_D \\ \zeta_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD_x \\ AD_y \\ AD_z \end{pmatrix}$$

In modo del tutto analogo, considerando i vettori

$$\begin{aligned}\overline{BD} &= \overline{BA} + \overline{AD} = -\overline{AB} + \overline{AD} = (\xi_D - 1)\overline{AB} + \eta_D \overline{AC} + \zeta_D (\overline{AB} \times \overline{AC}) \\ \overline{CD} &= \overline{CA} + \overline{AD} = -\overline{AC} + \overline{AD} = \xi_D \overline{AB} + (\eta_D - 1)\overline{AC} + \zeta_D (\overline{AB} \times \overline{AC})\end{aligned}$$

si ottengono rispettivamente le equazioni

$$2.2) \quad \begin{pmatrix} AB_x & AC_x & \varepsilon_x \\ AB_y & AC_y & \varepsilon_y \\ AB_z & AC_z & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_D - 1 \\ \eta_D \\ \zeta_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BD_x \\ BD_y \\ BD_z \end{pmatrix}$$

$$2.3) \quad \begin{pmatrix} AB_x & AC_x & \varepsilon_x \\ AB_y & AC_y & \varepsilon_y \\ AB_z & AC_z & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_D \\ \eta_D - 1 \\ \zeta_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CD_x \\ CD_y \\ CD_z \end{pmatrix}$$

Dalla 2.1 si deduce l'equazione

$$\left(\begin{pmatrix} AB_x & AC_x & \varepsilon_x \\ AB_y & AC_y & \varepsilon_y \\ AB_z & AC_z & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_D \\ \eta_D \\ \zeta_D \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} AB_x & AC_x & \varepsilon_x \\ AB_y & AC_y & \varepsilon_y \\ AB_z & AC_z & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_D \\ \eta_D \\ \zeta_D \end{pmatrix} = (AD_x \quad AD_y \quad AD_z) \begin{pmatrix} AD_x \\ AD_y \\ AD_z \end{pmatrix}$$

che si scrive

$$(\xi_D \quad \eta_D \quad \zeta_D) \begin{pmatrix} AB_x & AC_x & \varepsilon_x \\ AB_y & AC_y & \varepsilon_y \\ AB_z & AC_z & \varepsilon_z \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} AB_x & AC_x & \varepsilon_x \\ AB_y & AC_y & \varepsilon_y \\ AB_z & AC_z & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_D \\ \eta_D \\ \zeta_D \end{pmatrix} = \overline{AD}^2$$

la quale, moltiplicando le due matrici trasposte, si scrive

$$\begin{aligned} (\xi_D \quad \eta_D \quad \zeta_D) \begin{pmatrix} \overline{AB}^2 & \overline{AB} \cdot \overline{AC} & 0 \\ \overline{AC} \cdot \overline{AB} & \overline{AC}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_D \\ \eta_D \\ \zeta_D \end{pmatrix} &= \overline{AD}^2 \Leftrightarrow \\ (\xi_D \overline{AB}^2 + \eta_D \overline{AC} \cdot \overline{AB} & \xi_D \overline{AB} \cdot \overline{AC} + \eta_D \overline{AC}^2 & \zeta_D \varepsilon^2) \begin{pmatrix} \xi_D \\ \eta_D \\ \zeta_D \end{pmatrix} &= \overline{AD}^2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

e in definitiva

$$2.4) \quad \xi_D^2 \overline{AB}^2 + 2\xi_D \eta_D \overline{AC} \cdot \overline{AB} + \eta_D^2 \overline{AC}^2 + \zeta_D^2 \varepsilon^2 = \overline{AD}^2$$

Analogamente le **2.2** e **2.3** porgono

$$2.5) \quad (\xi_D - 1)^2 \overline{AB}^2 + 2(\xi_D - 1)\eta_D \overline{AC} \cdot \overline{AB} + \eta_D^2 \overline{AC}^2 + \zeta_D^2 \varepsilon^2 = \overline{BD}^2$$

$$2.6) \quad \xi_D^2 \overline{AB}^2 + 2\xi_D(\eta_D - 1)\overline{AC} \cdot \overline{AB} + (\eta_D - 1)^2 \overline{AC}^2 + \zeta_D^2 \varepsilon^2 = \overline{CD}^2$$

Mettendo a sistema le **2.4**, **2.5** e **2.6** abbiamo

$$\begin{cases} \xi_D^2 \overline{AB}^2 + 2\xi_D \eta_D \overline{AC} \cdot \overline{AB} + \eta_D^2 \overline{AC}^2 + \zeta_D^2 \varepsilon^2 = \overline{AD}^2 \\ \xi_D^2 \overline{AB}^2 + 2\xi_D \eta_D \overline{AC} \cdot \overline{AB} + \eta_D^2 \overline{AC}^2 + \zeta_D^2 \varepsilon^2 + \overline{AB}^2 - 2\xi_D \overline{AB}^2 - 2\eta_D \overline{AC} \cdot \overline{AB} = \overline{BD}^2 \\ \xi_D^2 \overline{AB}^2 + 2\xi_D \eta_D \overline{AC} \cdot \overline{AB} + \eta_D^2 \overline{AC}^2 + \zeta_D^2 \varepsilon^2 - 2\xi_D \overline{AC} \cdot \overline{AB} + \overline{AC}^2 - 2\eta_D \overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \xi_D^2 \overline{AB}^2 + 2\xi_D \eta_D \overline{AC} \cdot \overline{AB} + \eta_D^2 \overline{AC}^2 + \zeta_D^2 \varepsilon^2 = \overline{AD}^2 \\ \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 - 2\xi_D \overline{AB}^2 - 2\eta_D \overline{AC} \cdot \overline{AB} = \overline{BD}^2 \\ \overline{AD}^2 - 2\xi_D \overline{AC} \cdot \overline{AB} + \overline{AC}^2 - 2\eta_D \overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 \end{cases}$$

Considerando poi, in virtù del teorema del coseno, che

$$\begin{cases} \overline{AC} \cdot \overline{AB} = \overline{ACAB} \cos \theta \\ \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{ACAB} \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{AB} = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{2}$$

e inoltre che

$$\begin{aligned}\varepsilon &= |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \overline{ABAC} \sin \theta = \overline{ABAC} \sqrt{1 - (\cos \theta)^2} = \overline{ABAC} \sqrt{1 - \left(\frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB}}{\overline{ABAC}} \right)^2} = \\ &= \overline{ABAC} \sqrt{1 - \left(\frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{2\overline{ABAC}} \right)^2}\end{aligned}$$

abbiamo il sistema

$$2.7) \quad \begin{cases} \xi_D^2 \overline{AB}^2 + \xi_D \eta_D (\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2) + \eta_D^2 \overline{AC}^2 + \zeta_D^2 \overline{AB}^2 \overline{AC}^2 \left(1 - \left(\frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{2\overline{ABAC}} \right)^2 \right)^2 = \overline{AD}^2 \\ \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 - 2\xi_D \overline{AB}^2 - \eta_D (\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2) = \overline{BD}^2 \\ \overline{AD}^2 - \xi_D (\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2) + \overline{AC}^2 - 2\eta_D \overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ha

$$2.8) \quad \xi_D = \frac{\overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 - \eta_D (\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2)}{2\overline{AB}^2}$$

che sostituita nella terza porge

$$2.9) \quad \eta_D = \frac{-\overline{AB}^2 \overline{AD}^2 + 2\overline{AB}^2 \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 \overline{BC}^2 + \overline{AB}^4 - \overline{AB}^2 \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2 \overline{AC}^2 - \overline{BD}^2 \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 \overline{AC}^2}{\overline{AC}^4 + \overline{AB}^4 + \overline{BC}^4 - 2\overline{AC}^2 \overline{AB}^2 - 2\overline{AC}^2 \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}^2 \overline{BC}^2}$$

Sostituendo la **2.9** nella **2.8** si ricava poi ξ_D ; sostituendo ξ_D, η_D nella prima delle **2.7** si ricava in fine ζ_D . In questo modo si trovano le coordinate di D rispetto A, ξ, η, ζ in funzione esclusivamente delle distanze fisse $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BD}, \overline{CD}$; allo stesso modo si ricavano le coordinate di un qualunque altro punto E rispetto A, ξ, η, ζ in funzione delle distanze fisse $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AE}, \overline{BE}, \overline{CE}$. In definitiva la distanza

$$\overline{DE} = \sqrt{(\xi_D - \xi_E)^2 + (\eta_D - \eta_E)^2 + (\zeta_D - \zeta_E)^2}$$

è funzione solo delle distanze $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BD}, \overline{CD}, \overline{AE}, \overline{BE}, \overline{CE}$ le quali sono fisse per ipotesi; dunque è anch'essa una distanza fissa. E data la genericità dei punti D, E si ha che il corpo è rigido, secondo la **DEF 2.1** ■

2.2. Posizione. Le coordinate di un punto rispetto a un sistema di riferimento si dicono definirne la posizione, rispetto a quel sistema di riferimento.

DEF 2.2. POSIZIONE. La **posizione di un corpo rigido** è l'insieme delle posizioni di ogni suo punto.

In genere il termine **configurazione**, che esprime un concetto analogo a quello di posizione, lo si riserva a corpi deformabili: corpi elastici e fluidi.

Dato un corpo rigido e un sistema di riferimento, i parametri scalari indipendenti necessari e sufficienti a definirne la posizione, rispetto al sistema di riferimento stesso, sono detti **gradi di libertà**.

DEF 2.3. GRADI DI LIBERTA'. Sono i parametri scalari indipendenti necessari e sufficienti a definire la posizione di un corpo rigido rispetto a un sistema di riferimento.

Evidentemente per un corpo costituito da un solo punto i gradi di libertà sono tre, sono sei per un corpo costituito da due punti svincolati fra loro; in generale un corpo costituito da N punti non vincolati reciprocamente avrà $3N$ gradi di libertà. Quanti sono i gradi di libertà di un corpo rigido?

TEO 2.2. GRADI DI LIBERTA'. Un corpo rigido presenta sei gradi di libertà.

DIMOSTRAZIONE. Si assume come definizione di corpo rigido quella introdotta nel **TEO 2.1**. Consideriamo un corpo rigido costituito da N elementi. Allora vincolandone 3 a non variare le proprie distanze reciproche ottengo 3 equazioni scalari; imponendo poi che ciascuno dei restanti $N - 3$ elementi non vari la propria distanza dai primi tre ottengo altre 3 equazioni scalari per ciascuno, ovvero $3(N - 3)$ ulteriori equazioni. Quindi, poiché N elementi non vincolati avrebbero $3N$ gradi di libertà nello spazio, il numero di gradi di libertà del nostro corpo rigido è

$$g = 3N - (3 + 3(N - 3)) = 3N - (3 + 3N - 9) = 6$$

E la tesi è dimostrata ■

Per dimostrare questo stesso risultato si sarebbe tentati di attenersi alla **DEF 2.1** e dunque di calcolare i gradi di vincolo come pari al numero di combinazioni di classe due, non ordinate, di N elementi dati. In questo modo si otterrebbe però la formula

$$g = 3N - \frac{N!}{2(N-2)!} = 3N - \frac{N(N-1)(N-2)!}{2(N-2)!} = 3N - \frac{N(N-1)}{2} = \frac{7N - N^2}{2}$$

che dà il risultato corretto solo per $N \leq 4$ (per $N = 5$ fornisce ad esempio il risultato $g = 5$). Questo risultato difforme al momento non lo so giustificare.

2.3. Moto rigido. Il moto di un punto nello spazio è quella funzione che associa a ogni istante la sua posizione.

DEF 2.4. MOTO RIGIDO. Il moto di un corpo rigido è quella funzione che associa a ogni istante la posizione del corpo rigido stesso, ovvero (per la **DEF 2.2**) la posizione di ciascuno dei suoi punti.

Il moto rigido si può anche pensare come il moto di un sistema di riferimento solidale al corpo rigido, rispetto a un sistema di riferimento fisso. Se, con riferimento alla figura, consideriamo fisso il sistema di riferimento $RC(O; x, y, z)$ di versori $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$, e consideriamo solidale al corpo rigido il sistema di riferimento $R\Gamma(O; \xi, \eta, \zeta)$ di versori $\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3$, allora il moto del corpo rigido, rispetto RC , risulta descritto dal sistema di 4 equazioni vettoriali seguente

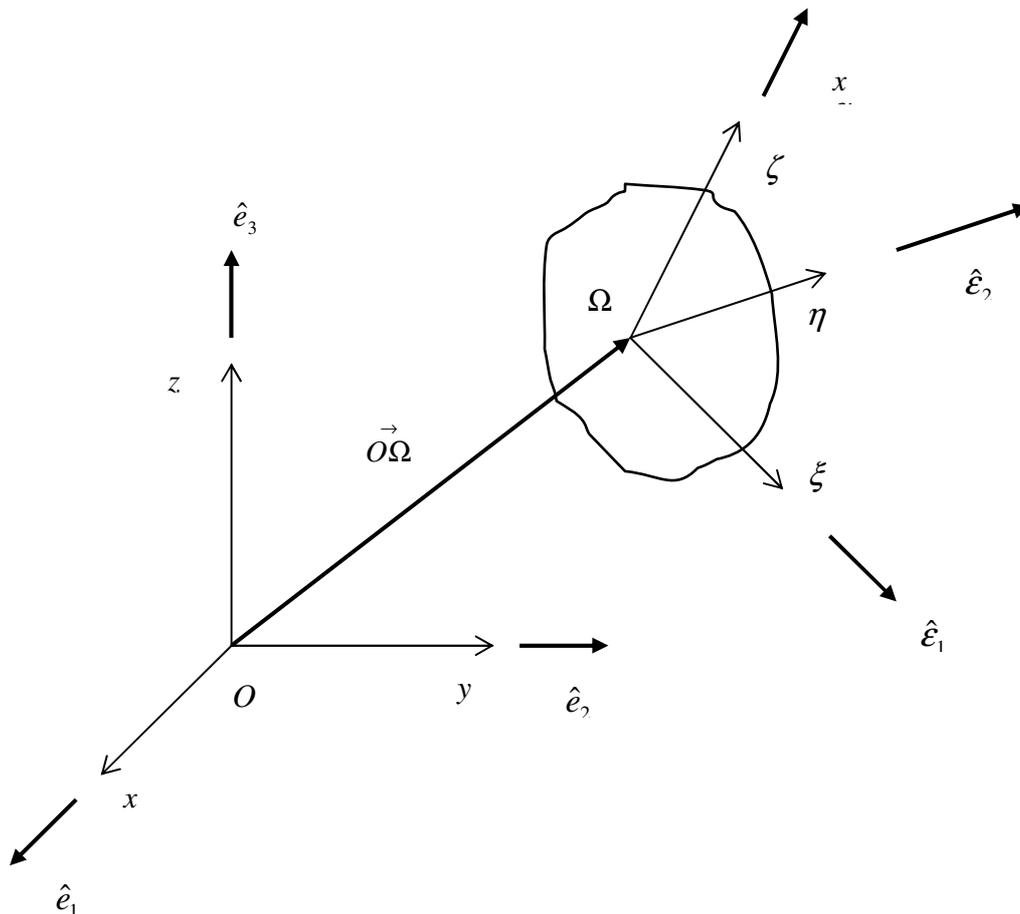
$$\begin{cases} \overrightarrow{O\Omega} = \overrightarrow{O\Omega}(t) \\ \hat{e}_1 = \hat{\xi}_1(t) \\ \hat{e}_2 = \hat{\xi}_2(t) \\ \hat{e}_3 = \hat{\xi}_3(t) \end{cases}$$

ovvero dal sistema di 12 equazioni scalari seguente

$$2.10) \begin{cases} O\Omega_x = O\Omega_x(t) \\ O\Omega_y = O\Omega_y(t) \\ O\Omega_z = O\Omega_z(t) \\ \varepsilon_{1x} = \varepsilon_{1x}(t) \\ \varepsilon_{1y} = \varepsilon_{1y}(t) \\ \varepsilon_{1z} = \varepsilon_{1z}(t) \\ \varepsilon_{2x} = \varepsilon_{2x}(t) \\ \varepsilon_{2y} = \varepsilon_{2y}(t) \\ \varepsilon_{2z} = \varepsilon_{2z}(t) \\ \varepsilon_{3x} = \varepsilon_{3x}(t) \\ \varepsilon_{3y} = \varepsilon_{3y}(t) \\ \varepsilon_{3z} = \varepsilon_{3z}(t) \end{cases}$$

dove si intende che le coordinate dei vettori sono tutte valutate rispetto RC . Si osserva che la condizione che la terna $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ sia ortogonale si traduce nelle 3 equazioni scalari

$$2.11) \begin{cases} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0 \\ \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = 0 \\ \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_{1x}\varepsilon_{2x} + \varepsilon_{1y}\varepsilon_{2y} + \varepsilon_{1z}\varepsilon_{2z} = 0 \\ \varepsilon_{2x}\varepsilon_{3x} + \varepsilon_{2y}\varepsilon_{3y} + \varepsilon_{2z}\varepsilon_{3z} = 0 \\ \varepsilon_{1x}\varepsilon_{3x} + \varepsilon_{1y}\varepsilon_{3y} + \varepsilon_{1z}\varepsilon_{3z} = 0 \end{cases}$$



mentre la condizione di normalità (ovvero di lunghezza unitaria dei tre vettori $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$) si traduce nelle tre equazioni scalari

$$2.12) \begin{cases} \hat{\varepsilon}_1 \cdot \hat{\varepsilon}_1 = 1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \cdot \hat{\varepsilon}_2 = 1 \\ \hat{\varepsilon}_3 \cdot \hat{\varepsilon}_3 = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_{1x}^2 + \varepsilon_{1y}^2 + \varepsilon_{1z}^2 = 1 \\ \varepsilon_{2x}^2 + \varepsilon_{2y}^2 + \varepsilon_{2z}^2 = 1 \\ \varepsilon_{3x}^2 + \varepsilon_{3y}^2 + \varepsilon_{3z}^2 = 1 \end{cases}$$

Dunque il moto di un corpo rigido è descritto, in base al sistema **2.10**, da 12 parametri, i quali sono però vincolati dalle 6 equazioni **2.11**, **2.12**. In conclusione si ritrova la tesi del **TEO 2.2** secondo il quale la posizione di un corpo rigido è definita da 6 parametri scalari indipendenti.

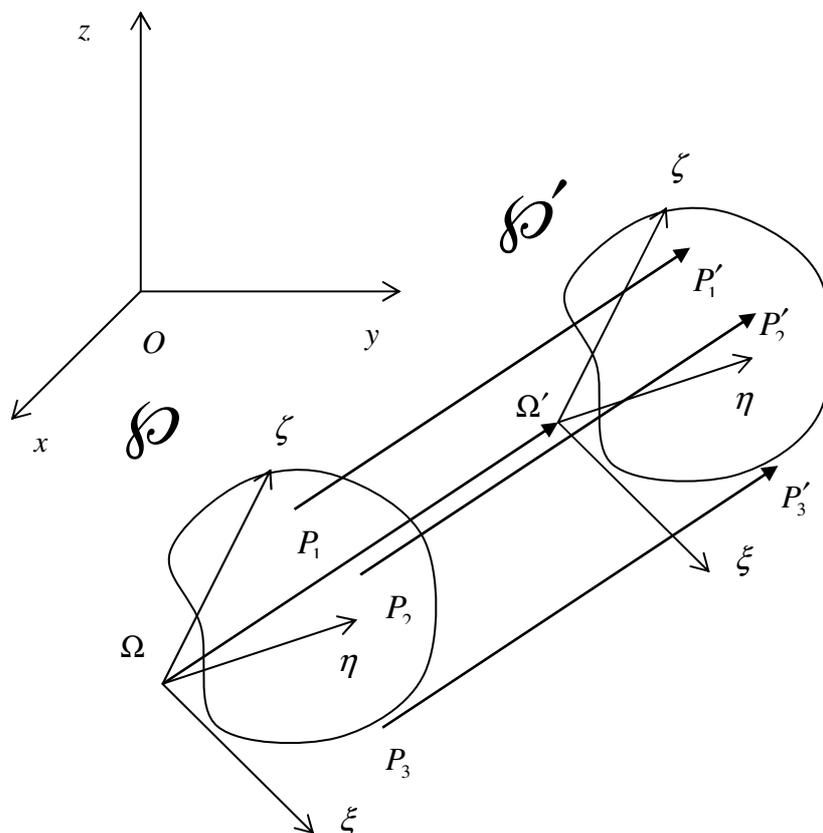
2.4. Spostamenti. Un punto che passi da una posizione A a una posizione B , rispetto a un sistema di riferimento, si dice descrivere, rispetto a quel sistema di riferimento, lo spostamento \overline{AB} .

DEF 2.5. SPOSTAMENTO. Si definisce **spostamento di un corpo rigido** l'insieme di tutti gli spostamenti dei suoi punti. In pratica lo spostamento di un corpo rigido è un campo vettoriale che associa a ogni punto del corpo rigido il relativo spostamento.

DEF 2.6. SPOSTAMENTO TRASLATORIO. Si parla di **spostamento traslatorio di un corpo rigido** quando lo spostamento lascia invariati gli orientamenti di qualsivoglia retta dello spazio solidale al corpo rigido.

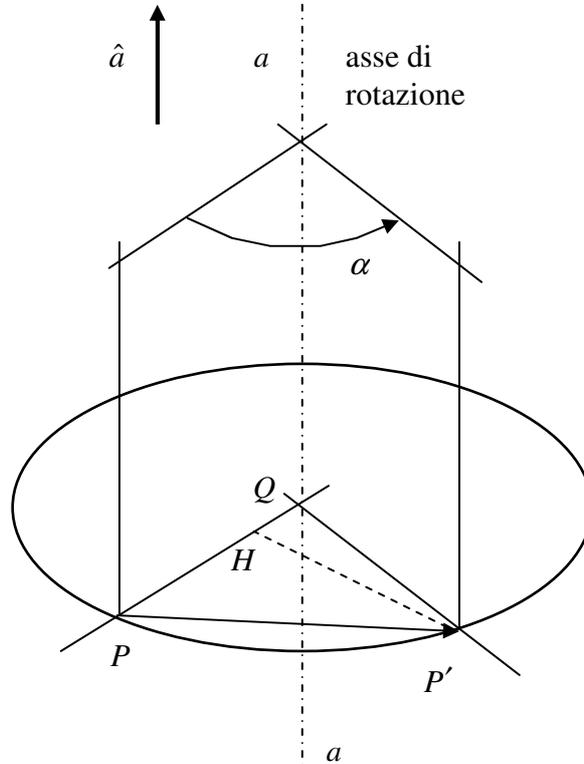
In uno spostamento traslatorio, lo spostamento di ciascun punto del sistema di riferimento mobile è rappresentato dallo stesso vettore. Allora si definisce **vettore della traslazione** lo spostamento dell'origine del sistema di riferimento mobile, per cui, con riferimento alla figura, il vettore della traslazione che porta dalla posizione \wp alla posizione \wp' è dato da

$$2.13) \overline{\Omega\Omega'} = \overline{P_1P_1'} = \overline{P_2P_2'} = \overline{P_3P_3'} = \dots$$



DEF 2.7. SPOSTAMENTO ROTATORIO. Si parla di **spostamento rotatorio di un corpo rigido** quando lo spostamento lascia invariate le posizioni di tutti i punti di una retta a del sistema di riferimento $R\Gamma$ solidale al corpo rigido.

La retta a prende il nome di **asse di rotazione**. Diciamo \hat{a} il versore dell'asse di rotazione, preso con verso tale da vedere la rotazione avvenire in senso antiorario.



Ricaviamo allora lo spostamento del generico punto P dello spazio mobile. Con riferimento alla figura si ha

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PP'} &= \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HP'} = (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QH}) + (\hat{a} \times \overrightarrow{QP}) \sin \alpha = (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QH}) + (\hat{a} \times \overrightarrow{QP}) \sin \alpha = \\ &= (\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PQ} \cos \alpha) + (\hat{a} \times \overrightarrow{QP}) \sin \alpha = \overrightarrow{PQ}(1 - \cos \alpha) + (\hat{a} \times \overrightarrow{QP}) \sin \alpha \end{aligned}$$

che si preferisce scrivere

$$2.14) \quad \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QP}(\cos \alpha - 1) + (\hat{a} \times \overrightarrow{QP}) \sin \alpha$$

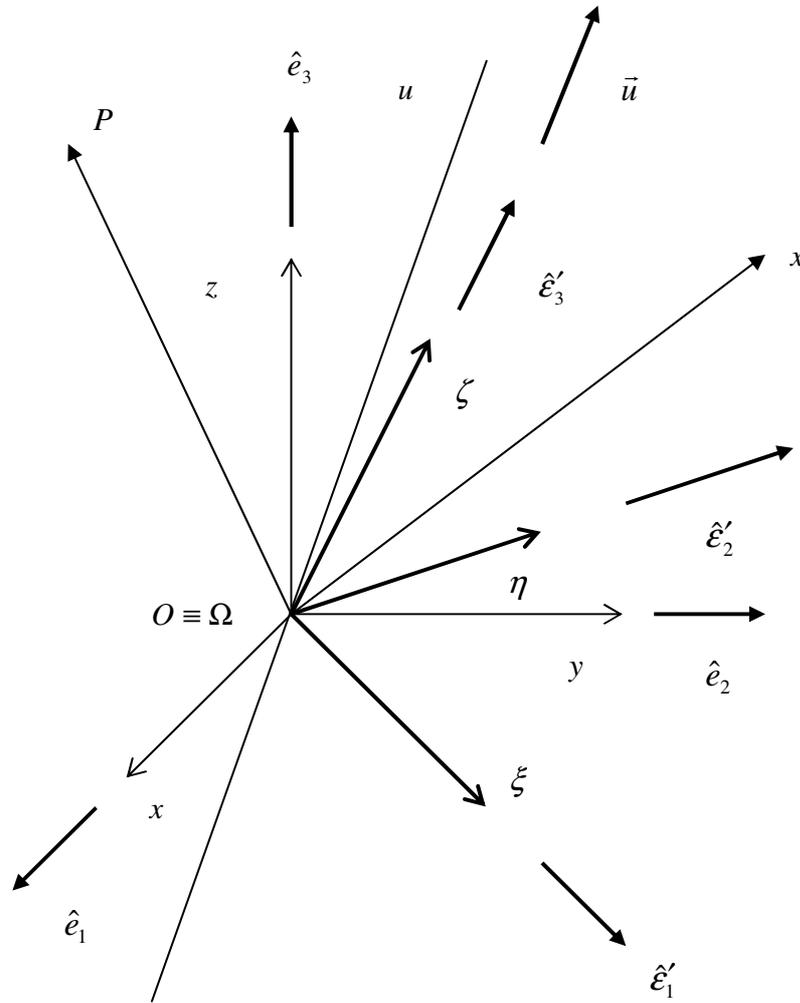
Si può osservare che, nel secondo addendo, al posto di Q si può usare un qualunque punto di a senza cambiarne il valore (ciò non vale per il primo addendo). Uno spostamento rotatorio rigido è completamente definito in termini di ampiezza della rotazione, di asse di rotazione e di verso di rotazione, dal vettore

$$2.15) \quad \vec{r} = \hat{a}\alpha$$

detto appunto **vettore di rotazione**.

DEF 2.8. SPOSTAMENTO SFERICO. Si parla di **spostamento sferico di un corpo rigido** quando lo spostamento lascia invariata la posizione di un punto Ω del sistema di riferimento mobile $R\Gamma$.

Il punto Ω prende il nome di **centro dello spostamento sferico**.



TEO 2.2. DI EULERO. Ogni spostamento sferico di centro Ω è uno spostamento rotatorio con asse passate per Ω .

DIMOSTRAZIONE. Diciamo che il sistema di riferimento $RC(O; x, y, z)$ e il sistema di riferimento $RG(O; \xi, \eta, \zeta)$ siano inizialmente sovrapposti e che, a seguito di uno spostamento sferico (vedi figura) di centro $O \equiv \Omega$, il secondo sistema di riferimento abbia assunto la posizione individuata dai suoi versori

$$2.16) \quad \hat{e}'_1 = (\varepsilon'_{1x} \quad \varepsilon'_{1y} \quad \varepsilon'_{1z}) \quad \hat{e}'_2 = (\varepsilon'_{2x} \quad \varepsilon'_{2y} \quad \varepsilon'_{2z}) \quad \hat{e}'_3 = (\varepsilon'_{3x} \quad \varepsilon'_{3y} \quad \varepsilon'_{3z})$$

dove le componenti sono rispetto $RC(O; x, y, z)$. In quanto versori le loro componenti devono soddisfare alle condizioni di ortogonalità reciproca

$$2.17) \quad \hat{e}'_1 \cdot \hat{e}'_2 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon'_{1x}\varepsilon'_{2x} + \varepsilon'_{1y}\varepsilon'_{2y} + \varepsilon'_{1z}\varepsilon'_{2z} = 0$$

$$2.18) \quad \hat{e}'_3 = \hat{e}'_1 \times \hat{e}'_2 = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \varepsilon'_{1x} & \varepsilon'_{1y} & \varepsilon'_{1z} \\ \varepsilon'_{2x} & \varepsilon'_{2y} & \varepsilon'_{2z} \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon'_{3x} = \varepsilon'_{1y}\varepsilon'_{2z} - \varepsilon'_{1z}\varepsilon'_{2y} \\ \varepsilon'_{3y} = \varepsilon'_{1z}\varepsilon'_{2x} - \varepsilon'_{1x}\varepsilon'_{2z} \\ \varepsilon'_{3z} = \varepsilon'_{1x}\varepsilon'_{2y} - \varepsilon'_{1y}\varepsilon'_{2x} \end{cases}$$

e alle condizioni di normalità, ovvero di modulo unitario

$$2.19) \quad |\hat{\varepsilon}'_1| = 1 \Leftrightarrow \hat{\varepsilon}'_1 \cdot \hat{\varepsilon}'_1 = 1 \Leftrightarrow \varepsilon'_{1x}{}^2 + \varepsilon'_{1y}{}^2 + \varepsilon'_{1z}{}^2 = 1$$

$$2.20) \quad |\hat{\varepsilon}'_2| = 1 \Leftrightarrow \hat{\varepsilon}'_2 \cdot \hat{\varepsilon}'_2 = 1 \Leftrightarrow \varepsilon'_{2x}{}^2 + \varepsilon'_{2y}{}^2 + \varepsilon'_{2z}{}^2 = 1$$

$$2.21) \quad |\hat{\varepsilon}'_3| = 1 \Leftrightarrow \hat{\varepsilon}'_3 \cdot \hat{\varepsilon}'_3 = 1 \Leftrightarrow \varepsilon'_{3x}{}^2 + \varepsilon'_{3y}{}^2 + \varepsilon'_{3z}{}^2 = 1$$

In realtà la **2.21** è ridondante, poiché tale condizione risulta già soddisfatta quando lo siano le **2.19**, **2.20**, **2.18**. Ora, per dimostrare che lo spostamento sferico è uno spostamento rotatorio, dobbiamo provare l'esistenza di un versore \hat{u} tale che risulti

$$2.22) \quad \overline{OP} \cdot \hat{u} = \overline{OP'} \cdot \hat{u}$$

comunque si scelga il punto P , ed essendo P' la posizione da esso assunta dopo lo spostamento. Si osserva che se le coordinate di P sono (x, y, z) , la **2.22** si scrive

$$(x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3) \cdot \hat{u} = (x\hat{\varepsilon}'_1 + y\hat{\varepsilon}'_2 + z\hat{\varepsilon}'_3) \cdot \hat{u} \Leftrightarrow \\ x\hat{e}_1 \cdot \hat{u} + y\hat{e}_2 \cdot \hat{u} + z\hat{e}_3 \cdot \hat{u} = x\hat{\varepsilon}'_1 \cdot \hat{u} + y\hat{\varepsilon}'_2 \cdot \hat{u} + z\hat{\varepsilon}'_3 \cdot \hat{u}$$

Dovendo questa eguaglianza valere per ogni terna (x, y, z) , essa equivale alla tre eguaglianze

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{u} = \hat{\varepsilon}'_1 \cdot \hat{u} \quad \hat{e}_2 \cdot \hat{u} = \hat{\varepsilon}'_2 \cdot \hat{u} \quad \hat{e}_3 \cdot \hat{u} = \hat{\varepsilon}'_3 \cdot \hat{u}$$

ovvero al sistema

$$\begin{cases} u_1 = \varepsilon'_{1x}u_1 + \varepsilon'_{1y}u_2 + \varepsilon'_{1z}u_3 \\ u_2 = \varepsilon'_{2x}u_1 + \varepsilon'_{2y}u_2 + \varepsilon'_{2z}u_3 \\ u_3 = \varepsilon'_{3x}u_1 + \varepsilon'_{3y}u_2 + \varepsilon'_{3z}u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\varepsilon'_{1x} - 1)u_1 + \varepsilon'_{1y}u_2 + \varepsilon'_{1z}u_3 = 0 \\ \varepsilon'_{2x}u_1 + (\varepsilon'_{2y} - 1)u_2 + \varepsilon'_{2z}u_3 = 0 \\ \varepsilon'_{3x}u_1 + \varepsilon'_{3y}u_2 + (\varepsilon'_{3z} - 1)u_3 = 0 \end{cases}$$

che in forma matriciale si scrive

$$2.23) \quad \begin{pmatrix} \varepsilon'_{1x} - 1 & \varepsilon'_{1y} & \varepsilon'_{1z} \\ \varepsilon'_{2x} & \varepsilon'_{2y} - 1 & \varepsilon'_{2z} \\ \varepsilon'_{3x} & \varepsilon'_{3y} & \varepsilon'_{3z} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è nullo, infatti

$$\begin{vmatrix} \varepsilon'_{1x} - 1 & \varepsilon'_{1y} & \varepsilon'_{1z} \\ \varepsilon'_{2x} & \varepsilon'_{2y} - 1 & \varepsilon'_{2z} \\ \varepsilon'_{3x} & \varepsilon'_{3y} & \varepsilon'_{3z} - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \varepsilon'_{2x} & \varepsilon'_{2y} - 1 & \varepsilon'_{2z} \\ \varepsilon'_{3x} & \varepsilon'_{3y} & \varepsilon'_{3z} - 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon'_{1x} & \varepsilon'_{1y} & \varepsilon'_{1z} \\ \varepsilon'_{2x} & \varepsilon'_{2y} - 1 & \varepsilon'_{2z} \\ \varepsilon'_{3x} & \varepsilon'_{3y} & \varepsilon'_{3z} - 1 \end{vmatrix} = \\ = - \begin{vmatrix} \varepsilon'_{2y} - 1 & \varepsilon'_{2z} \\ \varepsilon'_{3y} & \varepsilon'_{3z} - 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon'_{1x} & \varepsilon'_{1y} & \varepsilon'_{1z} \\ 0 & -1 & 0 \\ \varepsilon'_{3x} & \varepsilon'_{3y} & \varepsilon'_{3z} - 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon'_{1x} & \varepsilon'_{1y} & \varepsilon'_{1z} \\ \varepsilon'_{2x} & \varepsilon'_{2y} & \varepsilon'_{2z} \\ \varepsilon'_{3x} & \varepsilon'_{3y} & \varepsilon'_{3z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon'_{1x} & \varepsilon'_{1y} & \varepsilon'_{1z} \\ \varepsilon'_{2x} & \varepsilon'_{2y} & \varepsilon'_{2z} \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \\ = - \begin{vmatrix} \varepsilon'_{2y} & \varepsilon'_{2z} \\ \varepsilon'_{3y} & \varepsilon'_{3z} - 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \varepsilon'_{3y} & \varepsilon'_{3z} - 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varepsilon'_{1x} & \varepsilon'_{1z} \\ \varepsilon'_{3x} & \varepsilon'_{3z} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varepsilon'_{1x} & \varepsilon'_{1z} \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon'_{1x} & \varepsilon'_{1y} & \varepsilon'_{1z} \\ \varepsilon'_{2x} & \varepsilon'_{2y} & \varepsilon'_{2z} \\ \varepsilon'_{3x} & \varepsilon'_{3y} & \varepsilon'_{3z} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varepsilon'_{1x} & \varepsilon'_{1y} \\ \varepsilon'_{2x} & \varepsilon'_{2y} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= - \begin{vmatrix} \varepsilon'_{2y} & \varepsilon'_{2z} \\ \varepsilon'_{3y} & \varepsilon'_{3z} - 1 \end{vmatrix} + \varepsilon'_{3z} - 1 - \begin{vmatrix} \varepsilon'_{1x} & \varepsilon'_{1z} \\ \varepsilon'_{3x} & \varepsilon'_{3z} \end{vmatrix} + \varepsilon'_{1x} + \begin{vmatrix} \varepsilon'_{1x} & \varepsilon'_{1y} & \varepsilon'_{1z} \\ \varepsilon'_{2x} & \varepsilon'_{2y} & \varepsilon'_{2z} \\ \varepsilon'_{3x} & \varepsilon'_{3y} & \varepsilon'_{3z} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varepsilon'_{1x} & \varepsilon'_{1y} \\ \varepsilon'_{2x} & \varepsilon'_{2y} \end{vmatrix} = \\
&= - \left(\begin{vmatrix} \varepsilon'_{2y} & \varepsilon'_{2z} \\ \varepsilon'_{3y} & \varepsilon'_{3z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon'_{2y} & \varepsilon'_{2z} \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \right) + \varepsilon'_{3z} - 1 - \begin{vmatrix} \varepsilon'_{1x} & \varepsilon'_{1z} \\ \varepsilon'_{3x} & \varepsilon'_{3z} \end{vmatrix} + \varepsilon'_{1x} + \begin{vmatrix} \varepsilon'_{1x} & \varepsilon'_{1y} & \varepsilon'_{1z} \\ \varepsilon'_{2x} & \varepsilon'_{2y} & \varepsilon'_{2z} \\ \varepsilon'_{3x} & \varepsilon'_{3y} & \varepsilon'_{3z} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varepsilon'_{1x} & \varepsilon'_{1y} \\ \varepsilon'_{2x} & \varepsilon'_{2y} \end{vmatrix} = \\
&= - \begin{vmatrix} \varepsilon'_{2y} & \varepsilon'_{2z} \\ \varepsilon'_{3y} & \varepsilon'_{3z} \end{vmatrix} + \varepsilon'_{2y} + \varepsilon'_{3z} - 1 - \begin{vmatrix} \varepsilon'_{1x} & \varepsilon'_{1z} \\ \varepsilon'_{3x} & \varepsilon'_{3z} \end{vmatrix} + \varepsilon'_{1x} + 1 - \begin{vmatrix} \varepsilon'_{1x} & \varepsilon'_{1y} \\ \varepsilon'_{2x} & \varepsilon'_{2y} \end{vmatrix} = \\
&= -(\varepsilon'_{2y}\varepsilon'_{3z} - \varepsilon'_{2z}\varepsilon'_{3y}) + \varepsilon'_{2y} + \varepsilon'_{3z} - (\varepsilon'_{1x}\varepsilon'_{3z} - \varepsilon'_{1z}\varepsilon'_{3x}) + \varepsilon'_{1x} - (\varepsilon'_{1x}\varepsilon'_{2y} - \varepsilon'_{1y}\varepsilon'_{2x}) = \\
&= -\varepsilon'_{1x} + \varepsilon'_{2y} + \varepsilon'_{3z} - \varepsilon'_{2y} + \varepsilon'_{1x} - \varepsilon'_{3z} = 0
\end{aligned}$$

avendo considerato, nell'ultimo passaggio, che $\hat{\varepsilon}'_1 = \hat{\varepsilon}'_2 \times \hat{\varepsilon}'_3$, $\hat{\varepsilon}'_2 = \hat{\varepsilon}'_3 \times \hat{\varepsilon}'_1$, $\hat{\varepsilon}'_3 = \hat{\varepsilon}'_1 \times \hat{\varepsilon}'_2$ e dunque che

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_{2y}\varepsilon'_{3z} - \varepsilon'_{2z}\varepsilon'_{3y} &= \varepsilon'_{1x} \\
\varepsilon'_{1x}\varepsilon'_{3z} - \varepsilon'_{1z}\varepsilon'_{3x} &= \varepsilon'_{2y} \\
\varepsilon'_{1x}\varepsilon'_{2y} - \varepsilon'_{1y}\varepsilon'_{2x} &= \varepsilon'_{3z}
\end{aligned}$$

Quindi la matrice dei coefficienti del **2.23** ha rango uno oppure rango due. D'altra parte se avesse rango uno le sue colonne dovrebbero essere a due a due linearmente dipendenti, cioè dovrebbero esistere tre valori reali α, β, γ tali da verificare le tre condizioni vettoriali

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \hat{\varepsilon}'_1 - \hat{e}_1 = \alpha(\hat{\varepsilon}'_2 - \hat{e}_2) \\ \hat{\varepsilon}'_1 - \hat{e}_1 = \beta(\hat{\varepsilon}'_3 - \hat{e}_3) \\ \hat{\varepsilon}'_2 - \hat{e}_2 = \gamma(\hat{\varepsilon}'_3 - \hat{e}_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\varepsilon}'_1 - \alpha\hat{\varepsilon}'_2 = \hat{e}_1 - \alpha\hat{e}_2 \\ \hat{\varepsilon}'_1 - \beta\hat{\varepsilon}'_3 = \hat{e}_1 - \beta\hat{e}_3 \\ \hat{\varepsilon}'_2 - \gamma\hat{\varepsilon}'_3 = \hat{e}_2 - \gamma\hat{e}_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon'_{1x}\hat{e}_1 + \varepsilon'_{1y}\hat{e}_2 + \varepsilon'_{1z}\hat{e}_3 - \alpha(\varepsilon'_{2x}\hat{e}_1 + \varepsilon'_{2y}\hat{e}_2 + \varepsilon'_{2z}\hat{e}_3) = \hat{e}_1 - \alpha\hat{e}_2 \\ \varepsilon'_{1x}\hat{e}_1 + \varepsilon'_{1y}\hat{e}_2 + \varepsilon'_{1z}\hat{e}_3 - \beta(\varepsilon'_{3x}\hat{e}_1 + \varepsilon'_{3y}\hat{e}_2 + \varepsilon'_{3z}\hat{e}_3) = \hat{e}_1 - \beta\hat{e}_3 \\ \varepsilon'_{2x}\hat{e}_1 + \varepsilon'_{2y}\hat{e}_2 + \varepsilon'_{2z}\hat{e}_3 - \gamma(\varepsilon'_{3x}\hat{e}_1 + \varepsilon'_{3y}\hat{e}_2 + \varepsilon'_{3z}\hat{e}_3) = \hat{e}_2 - \gamma\hat{e}_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

le quali si traducono nelle nove condizioni scalari

$$2.24) \begin{cases} \varepsilon'_{1x} - \alpha\varepsilon'_{2x} = 1 \\ \varepsilon'_{1y} - \alpha\varepsilon'_{2y} = -\alpha \\ \varepsilon'_{1z} - \alpha\varepsilon'_{2z} = 0 \\ \varepsilon'_{1x} - \beta\varepsilon'_{3x} = 1 \\ \varepsilon'_{1y} - \beta\varepsilon'_{3y} = 0 \\ \varepsilon'_{1z} - \beta\varepsilon'_{3z} = -\beta \\ \varepsilon'_{2x} - \gamma\varepsilon'_{3x} = 0 \\ \varepsilon'_{2y} - \gamma\varepsilon'_{3y} = 1 \\ \varepsilon'_{2z} - \gamma\varepsilon'_{3z} = -\gamma \end{cases}$$

Mettendo a sistema le equazioni 3,6,9 del sistema **2.24** si ottiene $\varepsilon'_{3z} = 1$ e $\varepsilon'_{2z} = 0$; mettendo a sistema le equazioni 5,2,8 si ottiene $\varepsilon'_{3y} = 0$ e $\varepsilon'_{2y} = 1$. Considerando questi risultati e le condizioni **2.20** e **2.21** e **2.18** otteniamo

$$2.25) \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} \varepsilon'_{2x} = 0 \\ \varepsilon'_{2y} = 1 \Leftrightarrow \hat{\varepsilon}'_2 = \hat{e}_2 \\ \varepsilon'_{2z} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \varepsilon'_{3x} = 0 \\ \varepsilon'_{3y} = 1 \Leftrightarrow \hat{\varepsilon}'_3 = \hat{e}_3 \\ \varepsilon'_{3z} = 0 \end{cases} \\ \hat{\varepsilon}'_1 = \hat{\varepsilon}'_2 \times \hat{\varepsilon}'_3 = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{e}_1 \end{array} \right.$$

dove si è considerato che la **2.18** porge

$$\hat{\varepsilon}'_3 = \hat{\varepsilon}'_1 \times \hat{\varepsilon}'_2 \Rightarrow \hat{\varepsilon}'_2 \times \hat{\varepsilon}'_3 = \hat{\varepsilon}'_2 \times (\hat{\varepsilon}'_1 \times \hat{\varepsilon}'_2) = (\hat{\varepsilon}'_2 \cdot \hat{\varepsilon}'_2)\hat{\varepsilon}'_1 - (\hat{\varepsilon}'_2 \cdot \hat{\varepsilon}'_1)\hat{\varepsilon}'_2 = \hat{\varepsilon}'_1$$

Il sistema **2.25** ci dice che la matrice dei coefficienti del sistema **2.23** presenta rango < 2 nel caso di spostamento nullo: ora lo spostamento nullo non rientra nella nostra indagine, dunque per quanto ci riguarda la matrice ha rango 2. Questo significa, in base alla teoria dei sistemi lineari, che il sistema **2.15** ammette ∞^1 soluzioni, ovvero tutti vettori proporzionali fra loro i quali individuano una ben precisa retta, appunto l'asse di rotazione. Resta così verificato che lo spostamento sferico è sempre uno spostamento rotatorio ■

TEO 2.3. ASSE DI ROTAZIONE. Dato il generico spostamento sferico individuato dai versori **2.16** allora si trova che l'asse di rotazione del moto stesso è individuata dalla retta di equazione vettoriale

$$2.26) \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{\varepsilon'_{3x} + \varepsilon'_{1z}}{\varepsilon'_{3z} - \varepsilon'_{1x} - \varepsilon'_{2y} + 1} k \\ u_2 = \frac{\varepsilon'_{3y} + \varepsilon'_{2z}}{\varepsilon'_{3z} - \varepsilon'_{1x} - \varepsilon'_{2y} + 1} k \\ u_3 = k \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{R}$$

DIMOSTRAZIONE. Si parte dal sistema **2.23** che abbiamo visto avere, per spostamento non nullo, rango 2; si elimina ad esempio la terza equazione, e si attribuisce valore arbitrario k ad esempio a u_3 . Si ottiene così il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon'_{1x} - 1)u_1 + \varepsilon'_{1y}u_2 = -\varepsilon'_{1z}k \\ \varepsilon'_{2x}u_1 + (\varepsilon'_{2y} - 1)u_2 = -\varepsilon'_{2z}k \\ u_3 = k \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1 = -\frac{\varepsilon'_{1y}u_2 + \varepsilon'_{1z}k}{\varepsilon'_{1x} - 1} \\ -\frac{\varepsilon'_{1y}\varepsilon'_{2x}u_2 + \varepsilon'_{1z}\varepsilon'_{2x}k}{\varepsilon'_{1x} - 1} + (\varepsilon'_{2y} - 1)u_2 = -\varepsilon'_{2z}k \\ u_3 = k \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -\frac{\varepsilon'_{1y}u_2 + \varepsilon'_{1z}k}{\varepsilon'_{1x} - 1} \\ \frac{(\varepsilon'_{1y}\varepsilon'_{2x} - (\varepsilon'_{1x} - 1)(\varepsilon'_{2y} - 1))u_2 + \varepsilon'_{1z}\varepsilon'_{2x}k}{\varepsilon'_{1x} - 1} = \varepsilon'_{2z}k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_3 = k \\ u_1 = -\frac{\varepsilon'_{1y}u_2 + \varepsilon'_{1z}k}{\varepsilon'_{1x} - 1} \\ (\varepsilon'_{1y}\varepsilon'_{2x} - \varepsilon'_{1x}\varepsilon'_{2y} + \varepsilon'_{1x} + \varepsilon'_{2y} - 1)u_2 + \varepsilon'_{1z}\varepsilon'_{2x}k = \varepsilon'_{1x}\varepsilon'_{2z}k - \varepsilon'_{2z}k \\ u_3 = k \end{cases}$$

Considerando poi, secondo la 3° delle **2.18**, che

$$\varepsilon'_{3z} = \varepsilon'_{1x}\varepsilon'_{2y} - \varepsilon'_{1y}\varepsilon'_{2x} \Leftrightarrow -\varepsilon'_{3z} = \varepsilon'_{1y}\varepsilon'_{2x} - \varepsilon'_{1x}\varepsilon'_{2y}$$

il sistema si scrive

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{\varepsilon'_{1y}u_2 + \varepsilon'_{1z}k}{\varepsilon'_{1x} - 1} \\ (-\varepsilon'_{3z} + \varepsilon'_{1x} + \varepsilon'_{2y} - 1)u_2 = (\varepsilon'_{1x}\varepsilon'_{2z} - \varepsilon'_{1z}\varepsilon'_{2x} - \varepsilon'_{2z})k \\ u_3 = k \end{cases}$$

e tendo conto della 2° delle **2.18** in base alla quale

$$\varepsilon'_{3y} = \varepsilon'_{1z}\varepsilon'_{2x} - \varepsilon'_{1x}\varepsilon'_{2z} \Leftrightarrow -\varepsilon'_{3y} = \varepsilon'_{1x}\varepsilon'_{2z} - \varepsilon'_{1z}\varepsilon'_{2x}$$

il sistema si scrive ancora

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{\varepsilon'_{1y}u_2 + \varepsilon'_{1z}k}{\varepsilon'_{1x} - 1} \\ (-\varepsilon'_{3z} + \varepsilon'_{1x} + \varepsilon'_{2y} - 1)u_2 = (-\varepsilon'_{3y} - \varepsilon'_{2z})k \\ u_3 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -\frac{\varepsilon'_{1y}u_2 + \varepsilon'_{1z}k}{\varepsilon'_{1x} - 1} \\ u_2 = \frac{\varepsilon'_{3y} + \varepsilon'_{2z}}{\varepsilon'_{3z} - \varepsilon'_{1x} - \varepsilon'_{2y} + 1}k \\ u_3 = k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -\frac{\frac{\varepsilon'_{3y} + \varepsilon'_{2z}}{\varepsilon'_{3z} - \varepsilon'_{1x} - \varepsilon'_{2y} + 1} \varepsilon'_{1y} + \varepsilon'_{1z}}{\varepsilon'_{1x} - 1}k \\ u_2 = \frac{\varepsilon'_{3y} + \varepsilon'_{2z}}{\varepsilon'_{3z} - \varepsilon'_{1x} - \varepsilon'_{2y} + 1}k \\ u_3 = k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -\frac{\varepsilon'_{3y}\varepsilon'_{1y} + \varepsilon'_{2z}\varepsilon'_{1y} + \varepsilon'_{3z}\varepsilon'_{1z} - \varepsilon'_{1x}\varepsilon'_{1z} - \varepsilon'_{2y}\varepsilon'_{1z} + \varepsilon'_{1z}}{(\varepsilon'_{3z} - \varepsilon'_{1x} - \varepsilon'_{2y} + 1)(\varepsilon'_{1x} - 1)}k \\ u_2 = \frac{\varepsilon'_{3y} + \varepsilon'_{2z}}{\varepsilon'_{3z} - \varepsilon'_{1x} - \varepsilon'_{2y} + 1}k \\ u_3 = k \end{cases}$$

Considerando la prima delle **2.18** si ha

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{\varepsilon'_{3y}\varepsilon'_{1y} + \varepsilon'_{3x} + \varepsilon'_{3z}\varepsilon'_{1z} - \varepsilon'_{1x}\varepsilon'_{1z} + \varepsilon'_{1z}}{(\varepsilon'_{3z} - \varepsilon'_{1x} - \varepsilon'_{2y} + 1)(\varepsilon'_{1x} - 1)} k \\ u_2 = \frac{\varepsilon'_{3y} + \varepsilon'_{2z}}{\varepsilon'_{3z} - \varepsilon'_{1x} - \varepsilon'_{2y} + 1} k \\ u_3 = k \end{cases}$$

e tenendo presente che, sempre per la **2.18**, risulta

$$\hat{\varepsilon}'_3 \cdot \hat{\varepsilon}'_1 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon'_{3x}\varepsilon'_{1x} + \varepsilon'_{3y}\varepsilon'_{1y} + \varepsilon'_{3z}\varepsilon'_{1z} = 0 \Leftrightarrow \varepsilon'_{3y}\varepsilon'_{1y} + \varepsilon'_{3z}\varepsilon'_{1z} = -\varepsilon'_{3x}\varepsilon'_{1x}$$

il sistema si scrive

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{\varepsilon'_{3x} - \varepsilon'_{3x}\varepsilon'_{1x} - \varepsilon'_{1x}\varepsilon'_{1z} + \varepsilon'_{1z}}{(\varepsilon'_{3z} - \varepsilon'_{1x} - \varepsilon'_{2y} + 1)(\varepsilon'_{1x} - 1)} k \\ u_2 = \frac{\varepsilon'_{3y} + \varepsilon'_{2z}}{\varepsilon'_{3z} - \varepsilon'_{1x} - \varepsilon'_{2y} + 1} k \\ u_3 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{\varepsilon'_{3x} + \varepsilon'_{1z}}{\varepsilon'_{3z} - \varepsilon'_{1x} - \varepsilon'_{2y} + 1} k \\ u_2 = \frac{\varepsilon'_{3y} + \varepsilon'_{2z}}{\varepsilon'_{3z} - \varepsilon'_{1x} - \varepsilon'_{2y} + 1} k \\ u_3 = k \end{cases}$$

E la tesi è dimostrata ■

La seguente dimostrazione non è essenziale all'economia della discussione, comunque prova che un corpo rigido presenta tre soli gradi di libertà nel momento in cui sia vincolato a spostamenti sferici.

TEO 2.4. COMPONENTI DEI VERSORI. È possibile esprimere la terna **2.16** in funzione di solo 3 delle 9 componenti dei suoi versori, sfruttando le condizioni **2.17**, **2.18**, **2.19**.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione consiste nell'esprimere sei componenti in funzione degli altri tre. Per semplicità di scrittura in questa dimostrazione scrivo le componenti dei versori nel modo seguente

$$\hat{\varepsilon}'_1 = (a_1 \quad a_2 \quad a_3) \quad \hat{\varepsilon}'_2 = (b_1 \quad b_2 \quad b_3) \quad \hat{\varepsilon}'_3 = (c_1 \quad c_2 \quad c_3)$$

Mettendo a sistema la 3° delle **2.18** e la **2.17** si ha

$$\begin{cases} c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{a_1 b_2 - c_3}{a_2} \\ a_1 \frac{a_1 b_2 - c_3}{a_2} + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{a_1 b_2 - c_3}{a_2} \\ a_1^2 b_2 - a_1 c_3 + a_2^2 b_2 + a_2 a_3 b_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{a_1 b_2 - c_3}{a_2} \\ b_2 = \frac{a_1 c_3 - a_2 a_3 b_3}{a_1^2 + a_2^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{a_1^2 c_3 - a_1 a_2 a_3 b_3 - a_1^2 c_3 - a_2^2 c_3}{(a_1^2 + a_2^2) a_2} \\ b_2 = \frac{a_1 c_3 - a_2 a_3 b_3}{a_1^2 + a_2^2} \end{cases}$$

E dunque

$$2.26) \begin{cases} b_1 = -\frac{a_1 a_3 b_3 + a_2 c_3}{a_1^2 + a_2^2} \\ b_2 = \frac{a_1 c_3 - a_2 a_3 b_3}{a_1^2 + a_2^2} \end{cases}$$

Sostituendo le **2.27** nelle prime due della **2.18** si ha

$$\begin{cases} c_1 = a_2 b_3 - a_3 \frac{a_1 c_3 - a_2 a_3 b_3}{a_1^2 + a_2^2} \\ c_2 = -a_3 \frac{a_1 a_3 b_3 + a_2 c_3}{a_1^2 + a_2^2} - a_1 b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{a_1^2 a_2 b_3 + a_2^3 b_3 - a_1 a_3 c_3 + a_2 a_3^2 b_3}{a_1^2 + a_2^2} \\ c_2 = -\frac{a_1 a_3^2 b_3 + a_2 a_3 c_3 + a_1^3 b_3 + a_1 a_2^2 b_3}{a_1^2 + a_2^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) a_2 b_3 - a_1 a_3 c_3}{a_1^2 + a_2^2} \\ c_2 = -\frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) a_1 b_3 + a_2 a_3 c_3}{a_1^2 + a_2^2} \end{cases}$$

E dunque, considerando la **2.19**, abbiamo trovato anche

$$2.27) \begin{cases} c_1 = \frac{a_2 b_3 - a_1 a_3 c_3}{a_1^2 + a_2^2} \\ c_2 = -\frac{a_1 b_3 + a_2 a_3 c_3}{a_1^2 + a_2^2} \end{cases}$$

Imponiamo la condizione **2.20**: sostituendo in essa le **2.27** si ha

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_1 a_3 b_3 + a_2 c_3}{a_1^2 + a_2^2} \right)^2 + \left(\frac{a_1 c_3 - a_2 a_3 b_3}{a_1^2 + a_2^2} \right)^2 + b_3^2 = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \frac{a_1^2 a_3^2 b_3^2 + a_2^2 c_3^2 + 2 a_1 a_2 a_3 b_3 c_3 + a_1^2 c_3^2 + a_2^2 a_3^2 b_3^2 - 2 a_1 a_2 a_3 b_3 c_3}{(a_1^2 + a_2^2)^2} + b_3^2 = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \frac{(a_1^2 + a_2^2) c_3^2 + (a_1^2 + a_2^2) a_3^2 b_3^2}{(a_1^2 + a_2^2)^2} + b_3^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{c_3^2 + a_3^2 b_3^2}{a_1^2 + a_2^2} + b_3^2 = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \frac{c_3^2 + a_3^2 b_3^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_3^2}{a_1^2 + a_2^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{c_3^2 + (a_3^2 + a_1^2 + a_2^2) b_3^2}{a_1^2 + a_2^2} = 1 \end{aligned}$$

e tendo presente la **2.19** si ha

$$2.28) \quad b_3^2 = a_1^2 + a_2^2 - c_3^2$$

Il segno di b_3 può essere scelto arbitrariamente: infatti, fissato completamente ad esempio il versore \hat{e}'_1 , le terne compatibili con le condizioni **2.17**, **2.18**, **2.19**, **2.20** sono quattro, il che corrisponde

appunto alla indeterminazione di segno per due componenti. Scegliendo nella **2.28** il segno positivo abbiamo

$$2.29) \quad b_3 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - c_3^2}$$

Imponendo nuovamente la **2.19** abbiamo poi

$$2.30) \quad a_3 = \sqrt{1 - a_1^2 - a_2^2}$$

dove ho arbitrariamente scelto il segno positivo. In definitiva le **2.26**, **2.27**, **2.29**, **2.30** individuano il sistema

$$2.31) \quad \begin{cases} b_1 = -\frac{a_1 a_3 b_3 + a_2 c_3}{a_1^2 + a_2^2} \\ b_2 = \frac{a_1 c_3 - a_2 a_3 b_3}{a_1^2 + a_2^2} \\ c_1 = \frac{a_2 b_3 - a_1 a_3 c_3}{a_1^2 + a_2^2} \\ c_2 = -\frac{a_1 b_3 + a_2 a_3 c_3}{a_1^2 + a_2^2} \\ b_3 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - c_3^2} \\ a_3 = \sqrt{1 - a_1^2 - a_2^2} \end{cases}$$

Sostituendo le ultime due equazioni nelle altre quattro si ottiene l'espressione della terna **2.16** in funzione dei soli tre parametri indipendenti a_1, a_2, c_3 :

$$2.32) \quad \begin{aligned} \hat{\varepsilon}'_1 &= (a_1 \quad a_2 \quad \sqrt{1 - a_1^2 - a_2^2}) \\ \hat{\varepsilon}'_2 &= \left(-\frac{a_1 \sqrt{1 - a_1^2 - a_2^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - c_3^2} + a_2 c_3}{a_1^2 + a_2^2} \quad \frac{a_1 c_3 - a_2 \sqrt{1 - a_1^2 - a_2^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - c_3^2}}{a_1^2 + a_2^2} \quad \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - c_3^2} \right) \\ \hat{\varepsilon}'_3 &= \left(\frac{a_2 \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - c_3^2} - a_1 c_3 \sqrt{1 - a_1^2 - a_2^2}}{a_1^2 + a_2^2} \quad -\frac{a_1 \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - c_3^2} + a_2 c_3 \sqrt{1 - a_1^2 - a_2^2}}{a_1^2 + a_2^2} \quad c_3 \right) \end{aligned}$$

Quindi i versori della terna sono funzione dei soli tre parametri scalari a_1, a_2, c_3 , e la tesi è provata ■

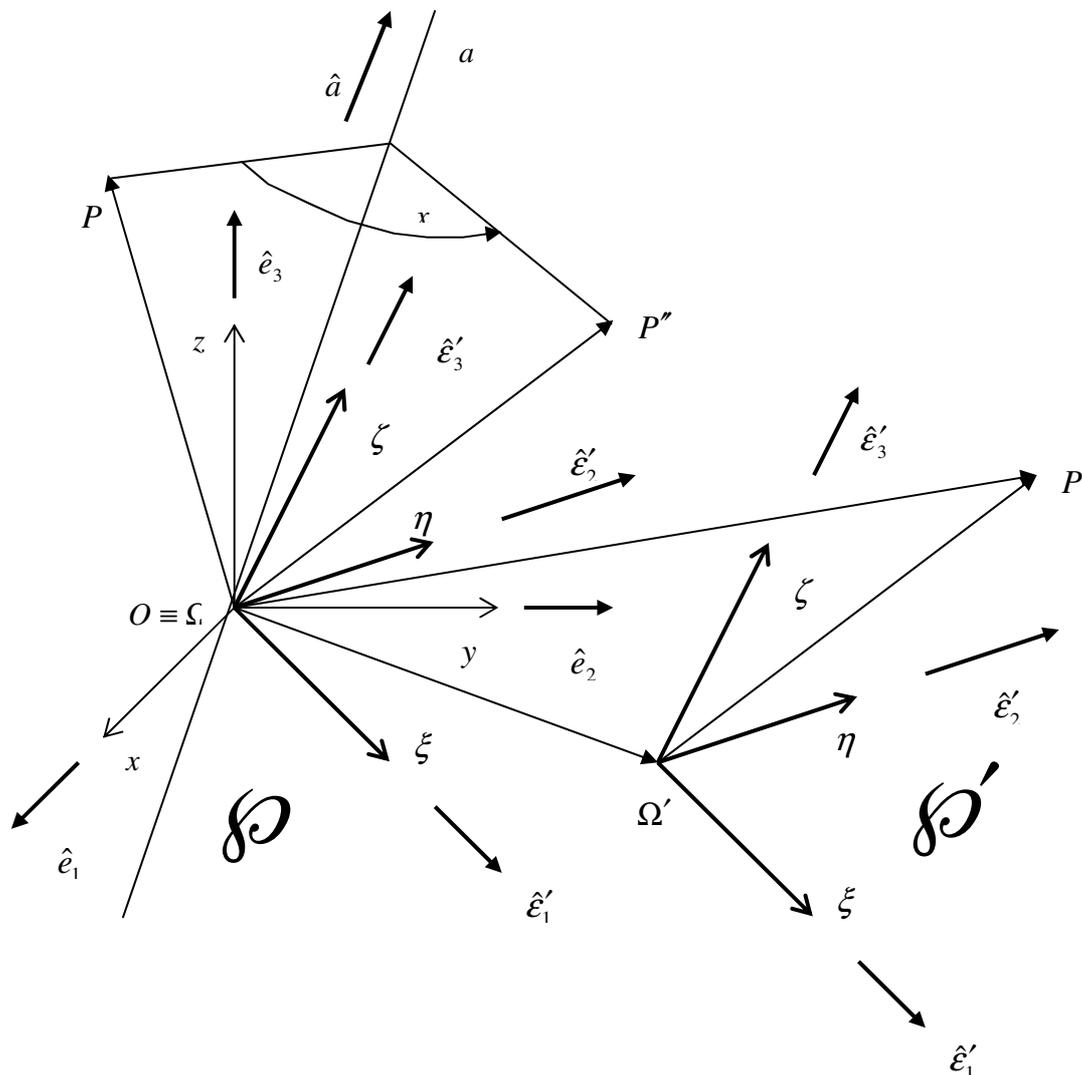
TEO 2.5. SPOSTAMENTO GENERICO. Qualunque spostamento rigido è la somma di uno spostamento traslatorio e di uno spostamento rotatorio. In base alle **2.13**, **2.14** lo spostamento generico di $(\Omega, \xi\eta\zeta)$ rispetto (O, xyz) è descritto da una funzione vettoriale del tipo

$$2.33) \quad \overline{PP'} = \overline{\Omega\Omega'} + \overline{QP}(\cos \alpha - 1) + (\hat{a} \times \overline{QP}) \sin \alpha$$

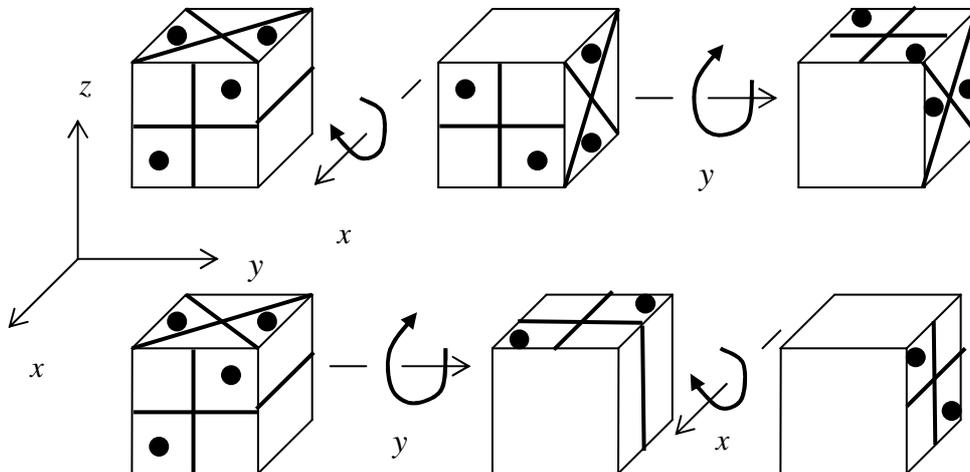
che associa a ogni punto P il suo spostamento $\overline{PP'}$, dove $\overline{\Omega\Omega'}$ è lo spostamento dell'origine del sistema di riferimento mobile e \hat{a} è il versore di rotazione.

DIMOSTRAZIONE. Omettendo la dimostrazione rigorosa, facendo riferimento alla figura, uno spostamento generico si può pensare come la sequenza di uno spostamento sferico e di uno spostamento traslatorio ovvero, per il teorema di Eulero, di uno spostamento rotatorio e di uno spostamento traslatorio: con il primo $R\Gamma$ ruota in modo che i versori $\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \hat{\varepsilon}_3$ si sovrappongano alle

loro rispettive posizioni finali $\hat{\varepsilon}'_1, \hat{\varepsilon}'_2, \hat{\varepsilon}'_3$, con il secondo $R\Gamma$ trasla in modo che Ω raggiunga la sua posizione finale Ω' .



DEF 2.9. PRODOTTO DI SPOSTAMENTI. La sequenza di piú spostamenti, come può essere appunto la sequenza di uno spostamento rotatorio e di uno traslatorio, è detta **prodotto di spostamenti**. Dunque, con riferimento alla figura, lo spostamento complessivo che porta $R\Gamma$ dalla posizione \wp alla posizione \wp' è il prodotto di una rotazione e di una traslazione.



TEO 2.6. PROPRIETA' COMMUTATIVA. Il prodotto di spostamenti, inteso come una sequenza di più spostamenti, in generale non gode della proprietà commutativa, nel senso che modificando l'ordine con il quale si effettuano gli spostamenti, non è detto che si ottenga la stessa posizione finale.

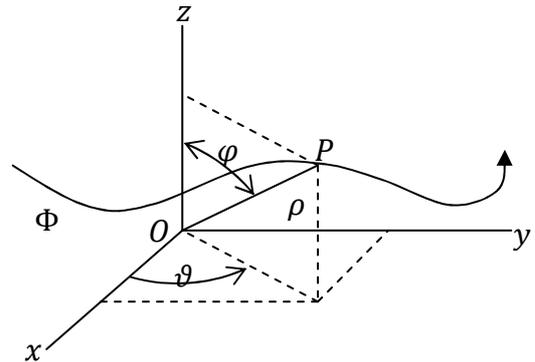
DIMOSTRAZIONE. Per questa dimostrazione basta fornire un esempio in cui variando l'ordine degli spostamenti, varia la posizione finale del corpo rigido. Si consideri allora la figura: se effettuiamo prima una rotazione del corpo di 90° intorno all'asse x e poi di altri 90° intorno all'asse y ottengo una posizione diversa da quella che ottengo invertendo l'ordine delle rotazioni ■

Resta comunque vero per il generico spostamento, scomposto nel prodotto di uno spostamento di traslazione e di uno di rotazione, che non ha importanza quale dei due spostamenti avvenga prima: in questo caso cioè il prodotto degli spostamenti è commutativo.

Capitolo 3. Cinematica dell'elemento e dei sistemi

3.1. Traiettoria e versore tangente. Si definisce traiettoria la curva che l'elemento descrive nello spazio al passare del tempo. Se la posizione dell'elemento è individuata dal punto $P = (x, y, z)$ la traiettoria ha equazioni parametriche

$$3.1) \quad \phi: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \rho(t) \sin \varphi(t) \cos \vartheta(t) \\ y = \rho(t) \sin \varphi(t) \sin \vartheta(t) \\ z = \rho(t) \cos \varphi(t) \end{cases}$$



dove il parametro t rappresenta il tempo. Il versore tangente alla traiettoria avente verso concorde a quello del moto dell'elemento si scrive

$$3.2) \quad \vec{T}(t) = \left(\frac{\frac{dx(t)}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2}} \quad \frac{\frac{dy(t)}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2}} \quad \frac{\frac{dz(t)}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2}} \right)$$

3.2. Ascissa curvilinea. Si fissa sulla curva che descrive la traiettoria dell'elemento l'origine Ω delle ascisse curvilinee e un verso di percorrenza positivo, il quale può coincidere o meno con quello dell'elemento. Allora l'ascissa curvilinea corrispondente al generico istante t , ovvero la distanza dell'elemento in tale istante dall'origine Ω (misurata lungo la curva), è data da

$$3.3) \quad s(t) = \pm \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx(\tau)}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy(\tau)}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz(\tau)}{d\tau}\right)^2} d\tau$$

dove t_0 è l'istante in cui l'elemento si trova nell'origine dell'ascissa curvilinea. Il segno + vale se il verso scelto come positivo coincide con quello del moto dell'elemento, il segno - in caso contrario. Utile è anche scrivere la derivata della ascissa curvilinea:

$$3.4) \quad \frac{ds(t)}{dt} = \pm \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2}$$

3.3. Riparametrizzazione della curva. L'ascissa curvilinea definisce una funzione monotona in t (crescente o decrescente a seconda della coincidenza o meno del verso positivo della ascissa con il moto dell'elemento). Invertendo allora tale funzione¹ si possono considerare le tre funzioni composte

$$3.5) \quad \begin{cases} x = x(t = s^{-1}(s)) = \xi(s) \\ y = y(t = s^{-1}(s)) = \eta(s) \\ z = z(t = s^{-1}(s)) = \zeta(s) \end{cases}$$

Sostituendo le 3.5 nella espressione 3.2 del versore tangente si ha

¹ La funzione inversa della $s = s(t)$ esiste essendo quest'ultima, come visto, continua e monotona.

$$\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d\xi(s)}{ds} \frac{ds(t)}{dt} & \frac{d\eta(s)}{ds} \frac{ds(t)}{dt} & \frac{d\zeta(s)}{ds} \frac{ds(t)}{dt} \\ \pm \frac{ds(t)}{dt} & \pm \frac{ds(t)}{dt} & \pm \frac{ds(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

Si trova allora per il versore tangente l'espressione

$$3.6) \quad \vec{T}(s) = \pm \left(\frac{d\xi(s)}{ds} \quad \frac{d\eta(s)}{ds} \quad \frac{d\zeta(s)}{ds} \right)$$

Anche qui il segno + vale se il verso positivo dell'ascissa curvilinea coincide con il verso del moto dell'elemento, il segno - in caso contrario.

Tuttavia è utile ridefinire il versore tangente come avente verso concorde con quello delle ascisse crescenti², a prescindere dal fatto che tale verso sia concorde o meno al moto dell'elemento. In tal caso si ha sempre

$$3.7) \quad \vec{T}(s) = \left(\frac{d\xi(s)}{ds} \quad \frac{d\eta(s)}{ds} \quad \frac{d\zeta(s)}{ds} \right)$$

Con abuso di linguaggio si scriverà di qui in poi $x(s)$ al posto di $\xi(s)$. Altrettanto dicasi per le altre componenti.

3.4. Versore normale. Si definisce versore normale alla traiettoria nel punto di ascissa curvilinea s il versore

$$3.8) \quad \vec{N}(s) = \frac{d\vec{T}(s)/ds}{|d\vec{T}(s)/ds|}$$

Per il corollario alla prima proprietà delle funzioni vettoriali (paragrafo 1.6) intanto si ha che il versore normale è ortogonale punto per punto al versore tangente. Considerando poi il significato di derivata (limite di un rapporto incrementale) si capisce come il versore normale spiccato dal punto P stia dalla parte della concavità della traiettoria, qualunque sia il verso positivo scelto per l'ascissa curvilinea.

Vediamo ora come si esprime il versore normale rispetto al tempo. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{T}(s)}{ds} &= \frac{d\vec{T}(t)}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \quad \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \quad \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \\ &= \left(\frac{\ddot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} - \frac{\dot{x}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{3/2}} \quad \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} - \frac{\dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{3/2}} \quad \frac{\ddot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} - \frac{\dot{z}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{3/2}} \right) \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \\ &= \left(\frac{\ddot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - \frac{\dot{x}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} \quad \frac{\ddot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - \frac{\dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} \quad \frac{\ddot{z}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - \frac{\dot{z}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} \right) = \\ &= \left(\frac{\ddot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - \frac{\dot{x}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} \quad \frac{\ddot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - \frac{\dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} \quad \frac{\ddot{z}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - \frac{\dot{z}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} \right) = \\ &= \left(\frac{\ddot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \dot{x}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} \quad \frac{\ddot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} \quad \frac{\ddot{z}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \dot{z}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} \right) = \\ &= \left(\frac{\dot{y}^2\ddot{x} + \dot{z}^2\ddot{x} - \dot{x}\dot{y}\ddot{y} - \dot{x}\dot{z}\ddot{z}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} \quad \frac{\dot{x}^2\ddot{y} + \dot{z}^2\ddot{y} - \dot{x}\dot{y}\ddot{x} - \dot{y}\dot{z}\ddot{z}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} \quad \frac{\dot{x}^2\ddot{z} + \dot{y}^2\ddot{z} - \dot{x}\dot{z}\ddot{x} - \dot{y}\dot{z}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} \right) \end{aligned}$$

² Questo permette di avere una espressione unica per la velocità, senza bisogno di distinguere il caso di moto concorde al verso della ascissa da quello di moto discorde. Lo stesso dicasi per l'espressione della accelerazione.

Si ha allora che

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \right| &= \\
 &= \frac{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2)^2 + (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)(\ddot{x}\ddot{y} + \ddot{y}\ddot{z})^2 - 2(\ddot{x}\ddot{x} + \ddot{y}\ddot{y} + \ddot{z}\ddot{z})(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)(\ddot{x}\ddot{x} + \ddot{y}\ddot{y} + \ddot{z}\ddot{z})}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} = \\
 &= \frac{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2)^2 + (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)(\ddot{x}\ddot{y} + \ddot{y}\ddot{z})^2 - 2(\ddot{x}\ddot{x} + \ddot{y}\ddot{y} + \ddot{z}\ddot{z})(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} = \\
 &= \frac{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)(\ddot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)(\ddot{x}\ddot{y} + \ddot{y}\ddot{z})^2}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} = \\
 &= \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)} \frac{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)(\ddot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - (\ddot{x}\ddot{y} + \ddot{y}\ddot{z})^2}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} = \frac{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)(\ddot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - (\ddot{x}\ddot{y} + \ddot{y}\ddot{z})^2}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{3/2}} = \\
 &= \frac{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)(\ddot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - (\ddot{x}\ddot{y} + \ddot{y}\ddot{z})^2}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

Si consideri ora che

$$\begin{cases}
 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)(\ddot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \dot{x}^2\ddot{x}^2 + \dot{y}^2\ddot{x}^2 + \dot{z}^2\ddot{x}^2 + \dot{x}^2\dot{y}^2 + \dot{y}^2\dot{y}^2 + \dot{z}^2\dot{y}^2 + \dot{x}^2\dot{z}^2 + \dot{y}^2\dot{z}^2 + \dot{z}^2\dot{z}^2 \\
 (\ddot{x}\ddot{y} + \ddot{y}\ddot{z})^2 = \dot{x}^2\ddot{x}^2 + \dot{y}^2\dot{y}^2 + \dot{z}^2\dot{z}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\ddot{y}\ddot{z} + 2\dot{x}\dot{z}\ddot{z}\ddot{z} + 2\dot{y}\dot{y}\ddot{z}\ddot{z}
 \end{cases}$$

Dunque abbiamo che

$$\begin{aligned}
 &(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)(\ddot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - (\ddot{x}\ddot{y} + \ddot{y}\ddot{z})^2 = \\
 &= \dot{y}^2\ddot{x}^2 + \dot{z}^2\ddot{x}^2 + \dot{x}^2\dot{y}^2 + \dot{z}^2\dot{y}^2 + \dot{x}^2\dot{z}^2 + \dot{y}^2\dot{z}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\ddot{y}\ddot{z} - 2\dot{x}\dot{z}\ddot{z}\ddot{z} - 2\dot{y}\dot{y}\ddot{z}\ddot{z}
 \end{aligned}$$

In definitiva abbiamo provato che

$$\begin{cases}
 \frac{d\vec{T}(s)}{ds} = \left(\frac{\dot{y}^2\ddot{x} + \dot{z}^2\ddot{x} - \dot{x}\dot{y}\ddot{y} - \dot{x}\dot{z}\ddot{z}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} \quad \frac{\dot{x}^2\dot{y} + \dot{z}^2\dot{y} - \dot{x}\dot{y}\ddot{x} - \dot{y}\dot{z}\ddot{z}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} \quad \frac{\dot{x}^2\dot{z} + \dot{y}^2\dot{z} - \dot{x}\dot{z}\ddot{x} - \dot{y}\dot{z}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} \right) \\
 \left| \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \right| = \frac{\sqrt{\dot{y}^2\ddot{x}^2 + \dot{z}^2\ddot{x}^2 + \dot{x}^2\dot{y}^2 + \dot{z}^2\dot{y}^2 + \dot{x}^2\dot{z}^2 + \dot{y}^2\dot{z}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\ddot{y}\ddot{z} - 2\dot{x}\dot{z}\ddot{z}\ddot{z} - 2\dot{y}\dot{y}\ddot{z}\ddot{z}}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{3/2}}
 \end{cases}$$

Sostituendo quanto trovato nella 3.8, si ha per il versore normale l'espressione alternativa

$$\begin{aligned}
 \vec{N}(s) &= \\
 &= \frac{\left(\frac{\dot{y}^2\ddot{x} + \dot{z}^2\ddot{x} - \dot{x}\dot{y}\ddot{y} - \dot{x}\dot{z}\ddot{z}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} \quad \frac{\dot{x}^2\dot{y} + \dot{z}^2\dot{y} - \dot{x}\dot{y}\ddot{x} - \dot{y}\dot{z}\ddot{z}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} \quad \frac{\dot{x}^2\dot{z} + \dot{y}^2\dot{z} - \dot{x}\dot{z}\ddot{x} - \dot{y}\dot{z}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} \right)}{\sqrt{\dot{y}^2\ddot{x}^2 + \dot{z}^2\ddot{x}^2 + \dot{x}^2\dot{y}^2 + \dot{z}^2\dot{y}^2 + \dot{x}^2\dot{z}^2 + \dot{y}^2\dot{z}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\ddot{y}\ddot{z} - 2\dot{x}\dot{z}\ddot{z}\ddot{z} - 2\dot{y}\dot{y}\ddot{z}\ddot{z}}} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{3/2} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$3.8.b) \quad \vec{N}(t) = \frac{\left(\frac{\dot{y}^2\ddot{x} + \dot{z}^2\ddot{x} - \dot{x}\dot{y}\ddot{y} - \dot{x}\dot{z}\ddot{z}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} \quad \frac{\dot{x}^2\dot{y} + \dot{z}^2\dot{y} - \dot{x}\dot{y}\ddot{x} - \dot{y}\dot{z}\ddot{z}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} \quad \frac{\dot{x}^2\dot{z} + \dot{y}^2\dot{z} - \dot{x}\dot{z}\ddot{x} - \dot{y}\dot{z}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} \right)}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \sqrt{\dot{y}^2\ddot{x}^2 + \dot{z}^2\ddot{x}^2 + \dot{x}^2\dot{y}^2 + \dot{z}^2\dot{y}^2 + \dot{x}^2\dot{z}^2 + \dot{y}^2\dot{z}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\ddot{y}\ddot{z} - 2\dot{x}\dot{z}\ddot{z}\ddot{z} - 2\dot{y}\dot{y}\ddot{z}\ddot{z}}}$$

Si può inoltre scrivere

$$3.8.c) \quad \vec{N}(t) = \frac{d\vec{T}(t)}{dt} / \left| \frac{d\vec{T}(t)}{dt} \right|$$

Infattisi ha

$$3.8.d) \quad \vec{N} = \frac{\frac{d\vec{T}(s)}{ds}}{\left| \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \right|} = \frac{\frac{d\vec{T}(t)dt}{dt ds}}{\left| \frac{d\vec{T}(t)dt}{dt ds} \right|} = \frac{\frac{d\vec{T}(t)}{dt}}{\left| \frac{d\vec{T}(t)}{dt} \right|}$$

3.5. Raggio di curvatura. Definisco raggio di curvatura della traiettoria nel punto di ascissa curvilinea s la funzione scalare

$$3.9) \quad R(s) = \frac{1}{\left| d\vec{T}(s)/ds \right|}$$

Si capisce che il raggio di curvatura è tanto più piccolo quanto più pronunciata la curva descritta dalla traiettoria nell'intorno del punto di ascissa s . Ma il significato geometrico del raggio di curvatura è ancora più pregnante, come si vede nel prossimo paragrafo. Intanto si consideri che il raggio di curvatura può essere espresso in funzione della rappresentazione parametrica riparametrizzata **3.5**, essendo

$$3.10) \quad R(s) = \frac{1}{\left| d\vec{T}(s)/ds \right|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x(s)}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y(s)}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z(s)}{ds^2}\right)^2}}$$

Se invece della rappresentazione parametrica riparametrizzata abbiamo quella in funzione del tempo, cioè la **3.1**, allora si ha

$$3.11) \quad R(t) = \frac{\left| \dot{\vec{O}}\vec{P}(t) \right|^3}{\left| \vec{O}\vec{P}(t) \times \ddot{\vec{O}}\vec{P}(t) \right|}$$

Infatti considerando la rappresentazione riparametrizzata $\vec{O}\vec{P} = \vec{O}\vec{P}(t(s))$ e sostituendola nella **3.10** abbiamo

$$\begin{aligned} R(t(s)) &= \frac{\left| \dot{\vec{O}}\vec{P}(s)\dot{s}(t) \right|^3}{\left| \dot{\vec{O}}\vec{P}(s)\dot{s}(t) \times \left(\ddot{\vec{O}}\vec{P}(s)\dot{s}^2(t) + \dot{\vec{O}}\vec{P}(s)\ddot{s}(t) \right) \right|} = \\ &= \frac{\left| \dot{\vec{O}}\vec{P}(s)\dot{s}(t) \right|^3}{\left| \dot{\vec{O}}\vec{P}(s)\dot{s}^3(t) \times \ddot{\vec{O}}\vec{P}(s) + \dot{\vec{O}}\vec{P}(s)\dot{s}(t) \times \dot{\vec{O}}\vec{P}(s)\ddot{s}(t) \right|} = \frac{\left| \dot{\vec{O}}\vec{P}(s)\dot{s}(t) \right|^3}{\left| \dot{\vec{O}}\vec{P}(s)\dot{s}^3(t) \times \ddot{\vec{O}}\vec{P}(s) \right|} = \\ &= \frac{\left| \dot{\vec{O}}\vec{P}(s) \right|^3}{\left| \dot{\vec{O}}\vec{P}(s) \times \ddot{\vec{O}}\vec{P}(s) \right|} = \frac{\left| \dot{\vec{O}}\vec{P}(s) \right|^3}{\left| \dot{\vec{O}}\vec{P}(s) \right| \left| \ddot{\vec{O}}\vec{P}(s) \right|} = \frac{\left| \vec{T}(s) \right|^3}{\left| \vec{T}(s) \right| \left| \ddot{\vec{T}}(s) \right|} = \frac{1}{\left| \ddot{\vec{T}}(s) \right|} \end{aligned}$$

che è appunto la definizione **3.10** di raggio di curvatura. Si aggiunge che l'inverso del raggio di curvatura prende il nome di **curvatura**. Indicando la curvatura con una kappa abbiamo cioè

$$3.12) \quad K(s) = \left| d\vec{T}(s)/ds \right|$$

3.6. Piano osculatore e versore normale. Il piano osculatore (vedi figura) alla curva nel punto P è la posizione limite, per $P' \rightarrow P$, del piano descritto dai punti Q che soddisfano l'equazione

$$3.13) \quad \overline{PP'} \cdot \vec{T} \times \overline{PQ} = 0$$

Per individuare la posizione limite del piano **3.8** sviluppo il primo dei tre vettori in serie di Taylor, fermandomi al secondo ordine. Si ha

$$\begin{aligned} \overline{PP'} \cdot \vec{T} \times \overline{PQ} &= \left(\frac{d\overline{PP'}}{ds} ds + \frac{d^2\overline{PP'}}{ds^2} \frac{ds^2}{2} + o(ds^2) \right) \cdot \vec{T} \times \overline{PQ} = \\ &= \left(\vec{T} ds + \frac{d\vec{T}}{ds} \frac{ds^2}{2} + o(ds^2) \right) \cdot \vec{T} \times \overline{PQ} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{d\vec{T}}{ds} \frac{ds^2}{2} + o(ds^2) \right) \cdot \vec{T} \times \overline{PQ} = 0 \end{aligned}$$

Adesso divido per $\frac{ds^2}{2}$ e ottengo

$$\left(\frac{d\vec{T}}{ds} + 2 \frac{o(ds^2)}{ds^2} \right) \cdot \vec{T} \times \overline{PQ} = 0$$

Mandando al limite per $P' \rightarrow P$ ovvero per $s' \rightarrow s$ si ottiene il piano osculatore

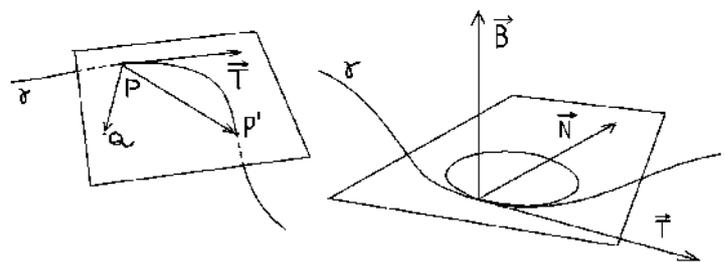
$$3.14) \quad \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{T} \times \overline{PQ} = 0$$

Ci sarà utile ricavare anche l'equazione cartesiana del piano osculatore sviluppando il prodotto misto. Posto

$$P \equiv (x(s_p), y(s_p), z(s_p)) \quad Q \equiv (x, y, z)$$

la **3.13** si scrive

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}(s_p) \\ \ddot{y}(s_p) \\ \ddot{z}(s_p) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(s_p) \\ \dot{y}(s_p) \\ \dot{z}(s_p) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x - x(s_p) \\ y - y(s_p) \\ z - z(s_p) \end{pmatrix} = 0$$



e sviluppando il prodotto misto si ha

$$\begin{vmatrix} \ddot{x}(s_p) & \ddot{y}(s_p) & \ddot{z}(s_p) \\ \dot{x}(s_p) & \dot{y}(s_p) & \dot{z}(s_p) \\ x - x(s_p) & y - y(s_p) & z - z(s_p) \end{vmatrix} = 0$$

Calcolando il determinante e riordinando si ha per il piano osculatore l'equazione cartesiana

$$3.15) (\ddot{y}(s_P)\dot{z}(s_P) - \ddot{z}(s_P)\dot{y}(s_P))(x - x(s_P)) + (\ddot{z}(s_P)\dot{x}(s_P) - \ddot{x}(s_P)\dot{z}(s_P))(y - y(s_P)) + (\ddot{x}(s_P)\dot{y}(s_P) - \ddot{y}(s_P)\dot{x}(s_P))(z - z(s_P)) = 0$$

Dimostro ora che **il vettore normale alla curva in P è contenuto nel piano osculatore** alla curva in tale punto. Il vettore normale, in base alla 3.8 si scrive

$$\vec{N}(s_P) = \frac{1}{|\dot{T}(s)|} \begin{pmatrix} \ddot{x}(s_P) \\ \ddot{y}(s_P) \\ \ddot{z}(s_P) \end{pmatrix}$$

Dalla geometria analitica sappiamo che il vettore

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \ddot{y}(s_P)\dot{z}(s_P) - \ddot{z}(s_P)\dot{y}(s_P) \\ \ddot{z}(s_P)\dot{x}(s_P) - \ddot{x}(s_P)\dot{z}(s_P) \\ \ddot{x}(s_P)\dot{y}(s_P) - \ddot{y}(s_P)\dot{x}(s_P) \end{pmatrix}$$

detto vettore giacitura, è ortogonale al piano 3.15. Dunque è sufficiente provare che $\vec{N}(s_P) \cdot \vec{v} = 0$. Si ha

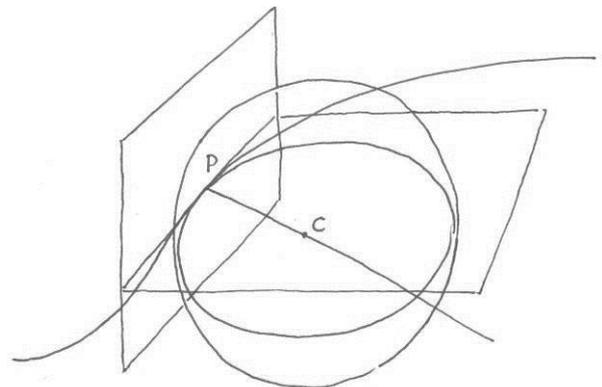
$$\begin{pmatrix} \ddot{x}(s_P) \\ \ddot{y}(s_P) \\ \ddot{z}(s_P) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{y}(s_P)\dot{z}(s_P) - \ddot{z}(s_P)\dot{y}(s_P) \\ \ddot{z}(s_P)\dot{x}(s_P) - \ddot{x}(s_P)\dot{z}(s_P) \\ \ddot{x}(s_P)\dot{y}(s_P) - \ddot{y}(s_P)\dot{x}(s_P) \end{pmatrix} = \\ = \ddot{x}(s_P)\ddot{y}(s_P)\dot{z}(s_P) - \ddot{x}(s_P)\dot{y}(s_P)\ddot{z}(s_P) + \dot{x}(s_P)\ddot{y}(s_P)\ddot{z}(s_P) - \ddot{x}(s_P)\ddot{y}(s_P)\dot{z}(s_P) \\ + \ddot{x}(s_P)\dot{y}(s_P)\ddot{z}(s_P) - \dot{x}(s_P)\ddot{y}(s_P)\ddot{z}(s_P) = 0$$

Ciò che prova la tesi.

3.7. Cerchio osculatore e piano osculatore. Il cerchio osculatore in un punto P della curva è quel cerchio che

- passa per quel punto;
- ha centro sul semiasse normale positivo;
- ha raggio pari al raggio di curvatura relativo a quel punto.

Si dimostra che **il cerchio osculatore condivide con la curva la tangente**. Per dimostrare questo dobbiamo ricavare l'equazione del cerchio osculatore. Sappiamo che l'equazione di una circonferenza nello spazio è data dall'intersezione di una sfera con un piano. Nel nostro caso la sfera sarà quella avente centro sul semiasse normale positivo, raggio pari al raggio di curvatura e che passi per P; il piano è il piano osculatore in P. Ricavo allora l'equazione del semiasse normale positivo. In base alla 3.8 l'equazione parametrica di tale semiasse è



$$3.16) \begin{cases} x(\tau) = \left(\frac{\ddot{x}(s_p)}{|\dot{T}(s_p)|} \right) \tau + x(s_p) \\ y(\tau) = \left(\frac{\ddot{y}(s_p)}{|\dot{T}(s_p)|} \right) \tau + y(s_p), \quad \tau \in [0, +\infty] \\ z(\tau) = \left(\frac{\ddot{z}(s_p)}{|\dot{T}(s_p)|} \right) \tau + z(s_p) \end{cases}$$

Cerchiamo adesso il valore del parametro che individua un punto che abbia distanza dalla curva pari al raggio di curvatura.

$$\frac{\sqrt{\ddot{x}^2(s_p) + \ddot{y}^2(s_p) + \ddot{z}^2(s_p)}}{|\dot{T}(s_p)|} \tau = R(s_p) \Leftrightarrow \tau = \frac{R(s_p) |\dot{T}(s_p)|}{\sqrt{\ddot{x}^2(s_p) + \ddot{y}^2(s_p) + \ddot{z}^2(s_p)}}$$

Tenendo presente la **3.10e** indicando τ_c il valore cercato abbiamo allora

$$\tau_c = \frac{1}{\sqrt{\ddot{x}^2(s_p) + \ddot{y}^2(s_p) + \ddot{z}^2(s_p)}} = \frac{1}{|\dot{T}(s_p)|}$$

Allora, in base alla **3.16**, le coordinate del centro della sfera sono

$$C(s_p) \equiv \left(\frac{\ddot{x}(s_p)}{|\dot{T}(s_p)|^2} + x(s_p) \quad \frac{\ddot{y}(s_p)}{|\dot{T}(s_p)|^2} + y(s_p) \quad \frac{\ddot{z}(s_p)}{|\dot{T}(s_p)|^2} + z(s_p) \right)$$

La sfera di centro $C(s_p)$ e di raggio $R(s_p)$ è quella sfera di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

i cui coefficienti soddisfano, a conti fatti, le condizioni

$$a = -2 \left(\frac{\ddot{x}(s_p)}{|\dot{T}(s_p)|^2} + x(s_p) \right) \quad b = -2 \left(\frac{\ddot{y}(s_p)}{|\dot{T}(s_p)|^2} + y(s_p) \right) \quad c = -2 \left(\frac{\ddot{z}(s_p)}{|\dot{T}(s_p)|^2} + z(s_p) \right)$$

$$d = 2 \frac{\ddot{x}(s_p)x(s_p) + \ddot{y}(s_p)y(s_p) + \ddot{z}(s_p)z(s_p)}{|\dot{T}(s_p)|^2} + (x^2(s_p) + y^2(s_p) + z^2(s_p))$$

Dunque la circonferenza osculatrice è l'intersezione di questa sfera con il piano osculatore. Quindi la tangente alla circonferenza osculatrice nel punto P risulta essere l'intersezione tra il piano che tangente la sfera in quel punto e il piano osculatore. Il piano tangente suddetto si scrive

$$(2x(s_p) + a)(x - x(s_p)) + (2y(s_p) + b)(y - y(s_p)) + (2z(s_p) + c)(z - z(s_p)) = 0$$

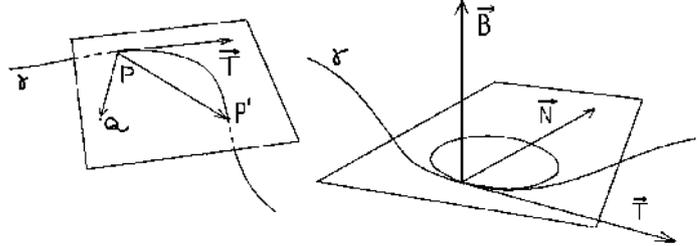
Ovvero, sostituendo i valori dei coefficienti:

$$3.17) \quad \ddot{x}(s_p)(x - x(s_p)) + \ddot{y}(s_p)(y - y(s_p)) + \ddot{z}(s_p)(z - z(s_p)) = 0$$

Dunque la tangente alla circonferenza osculatrice in P ha equazioni cartesiane

$$3.18) \quad \begin{cases} \ddot{x}(s_p)(x - x(s_p)) + \ddot{y}(s_p)(y - y(s_p)) + \ddot{z}(s_p)(z - z(s_p)) = 0 \\ ((\ddot{y}(s_p)\dot{z}(s_p) - \ddot{z}(s_p)\dot{y}(s_p))(x - x(s_p)) + (\ddot{z}(s_p)\dot{x}(s_p) - \ddot{x}(s_p)\dot{z}(s_p))(y - y(s_p)) + (\ddot{x}(s_p)\dot{y}(s_p) - \ddot{y}(s_p)\dot{x}(s_p))(z - z(s_p))) = 0 \end{cases}$$

dove abbiamo intersecato il piano tangente alla sfera (equazione 3.17) con il piano osculatore (equazione 3.15), relativi al punto P . Ora dobbiamo dimostrare che questa retta è anche la tangente alla curva in P . Un modo per fare ciò è verificare che l'estremo libero del vettore tangente alla curva in P , applicato in P , sia un punto della retta 3.18. Detto T tale punto abbiamo intanto



$$T \equiv (\dot{x}(s_p) + x(s_p) \quad \dot{y}(s_p) + y(s_p) \quad \dot{z}(s_p) + z(s_p))$$

Sostituendo le sue coordinate nell'equazione 3.18 della retta che tange il cerchio osculatore si ha

$$\begin{cases} \ddot{x}(s_p)\dot{x}(s_p) + \ddot{y}(s_p)\dot{y}(s_p) + \ddot{z}(s_p)\dot{z}(s_p) = 0 \\ ((\ddot{y}(s_p)\dot{z}(s_p) - \ddot{z}(s_p)\dot{y}(s_p))\dot{x}(s_p) + (\ddot{z}(s_p)\dot{x}(s_p) - \ddot{x}(s_p)\dot{z}(s_p))\dot{y}(s_p) + (\ddot{x}(s_p)\dot{y}(s_p) - \ddot{y}(s_p)\dot{x}(s_p))\dot{z}(s_p)) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione è senz'altro soddisfatta, essendo $\dot{\vec{T}} \cdot \vec{T} = 0$ per la prima proprietà delle applicazioni vettoriali. Per la seconda sviluppando si ha

$$\dot{x}(s_p)\dot{y}(s_p)\dot{z}(s_p) - \dot{x}(s_p)\dot{y}(s_p)\dot{z}(s_p) + \dot{x}(s_p)\dot{y}(s_p)\dot{z}(s_p) - \dot{x}(s_p)\dot{y}(s_p)\dot{z}(s_p) + \dot{x}(s_p)\dot{y}(s_p)\dot{z}(s_p) - \dot{x}(s_p)\dot{y}(s_p)\dot{z}(s_p) = 0$$

Dunque il punto T soddisfa entrambe le equazioni cartesiane della retta tangente la circonferenza osculatrice e dunque soddisfa la retta stessa. Poiché quest'ultima passa per P e, come visto, anche per T , non può che coincidere con la tangente alla curva in P .

3.8. Versore binormale e terna intrinseca. Il versore binormale è definito come

$$3.19) \quad \vec{B}(s) \triangleq \frac{\vec{T}(s) \times \vec{N}(s)}{|\vec{T}(s) \times \vec{N}(s)|}$$

e costituisce con il versore tangente e il versore normale la così detta terna intrinseca. Si rileva immediatamente che il versore binormale è ortogonale al piano osculatore e ha verso tale da vedere una rotazione antioraria del versore tangente quando questo si voglia sovrapporre al versore normale descrivendo un angolo retto.

3.9. Velocità e velocità scalare. La velocità dell'elemento si definisce come il vettore

$$3.20) \quad \vec{v}(t) \triangleq \frac{d\vec{OP}(t)}{dt} = \frac{d\vec{OP}(s)}{ds} \frac{ds(t)}{dt} = \frac{ds(t)}{dt} \vec{T}(s)$$

Lo scalare $ds(t)/dt$ è detto **velocità scalare**, e il suo valore assoluto coincide con il modulo della velocità. Si osserva che la velocità ha sempre il verso concorde con quello del moto dell'elemento,

qualunque sia il verso positivo dell'ascissa curvilinea: infatti se l'elemento si muove con verso discorde rispetto a quello positivo dell'ascissa curvilinea, la velocità scalare è negativa mentre il versore tangente ha verso opposto a quello del moto; dunque la velocità ha verso concorde a quello del moto. Stesso discorso nel caso in cui il moto avvenga con verso concorde a quello delle ascisse positive.

3.10. Accelerazione. L'accelerazione dell'elemento si definisce come

$$3.21) \quad \vec{a}(t) \triangleq \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{OP}(t)}{dt^2} = \frac{d^2s(t)}{dt^2} \vec{T}(s) + \frac{ds(t)}{dt} \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d^2s(t)}{dt^2} \vec{T}(s) + \left(\frac{ds(t)}{dt}\right)^2 \frac{\vec{N}(s)}{R(s)}$$

Si osserva che l'accelerazione

- 1) ha una componente tangente alla traiettoria, detta **accelerazione tangenziale**;
- 2) ha una componente ortogonale alla traiettoria, avente verso che punta la concavità della traiettoria stessa, detta **accelerazione normale**;
- 3) giace sempre nel piano osculatore;
- 4) è sempre deviata verso la concavità della traiettoria.

3.11. Fasi di moto. Si usa porre le seguenti definizioni:

- 1) $\frac{ds(t)}{dt} \geq 0$: **fase di moto progressivo**. L'elemento si muove con verso concorde a quello delle ascisse positive;
- 2) $\frac{ds(t)}{dt} \leq 0$: **fase di moto retrogrado**. L'elemento si muove con verso discorde a quello delle ascisse positive;
- 3) $\left|\frac{ds(t)}{dt}\right|$ non decrescente: **fase di moto accelerato**. Aumenta il modulo della velocità dell'elemento;
- 4) $\left|\frac{ds(t)}{dt}\right|$ non crescente: **fase di moto ritardato**. Diminuisce il modulo della velocità dell'elemento.

Si dimostra che una fase di moto è accelerata se e solo se

$$3.22) \quad \frac{ds(t)}{dt} \frac{d^2s(t)}{dt^2} \geq 0$$

Infatti se questa diseguaglianza è verificata si ha uno dei seguenti due casi:

- a) $\frac{ds(t)}{dt} \geq 0$ AND $\frac{d^2s(t)}{dt^2} \geq 0$
- b) $\frac{ds(t)}{dt} \leq 0$ AND $\frac{d^2s(t)}{dt^2} \leq 0$

Nel primo caso abbiamo che la velocità scalare è non negativa e che non decresce: dunque il suo modulo non decresce; nel secondo caso abbiamo che la velocità scalare è non positiva e che non cresce: dunque il suo modulo non decresce. In entrambi i casi si verifica la condizione 3 e dunque il moto è accelerato. Viceversa se vale la condizione tre deve verificarsi o il caso **a** o il caso **b**: infatti se si verificasse il caso

$$c) \frac{ds(t)}{dt} \geq 0 \text{ AND } \frac{d^2s(t)}{dt^2} \leq 0$$

avremmo una velocità scalare non negativa e non crescente, ovvero con modulo non crescente; se si verificasse poi l'ultimo caso possibile, ovvero

$$a) \frac{ds(t)}{dt} \leq 0 \text{ AND } \frac{d^2s(t)}{dt^2} \geq 0$$

avremmo una velocità scalare non positiva e crescente, ovvero con modulo decrescente. Dunque se il moto è accelerato non può che verificarsi o il caso **a** o il caso **b**, ovvero la **3.22**.

3.12. Moto uniforme. Si parla di moto uniforme quando la velocità scalare è costante. In tal caso si ha che l'**accelerazione è puramente normale** e inoltre

$$3.23) \quad s(t) = \frac{ds(t_0)}{dt} (t - t_0) + s(t_0)$$

Infatti se la velocità scalare è costante risulta

$$\begin{aligned} & \frac{ds(t)}{dt} = C_1 \Rightarrow s(t) = C_1 t + C_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow & \begin{cases} s(t) = C_1 t + C_2 \\ \frac{ds(t_0)}{dt} = C_1 \\ s(t_0) = C_1 t_0 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s(t) = C_1 t + C_2 \\ \frac{ds(t_0)}{dt} = C_1 \\ C_2 = s(t_0) - \frac{ds(t_0)}{dt} t_0 \end{cases} \Rightarrow s(t) = \frac{ds(t_0)}{dt} t + s(t_0) - \frac{ds(t_0)}{dt} t_0 \end{aligned}$$

e l'accelerazione, per la **3.21**, si riduce all'accelerazione normale

$$\vec{a}(t) = \left(\frac{ds(t)}{dt} \right)^2 \frac{\vec{N}(s)}{R(s)}$$

3.13. Moto uniformemente vario. Si parla di moto uniformemente vario quando la velocità scalare ha derivata costante. Per la legge del moto si ha

$$3.24) \quad s(t) = \frac{1}{2} \frac{d^2s(t_0)}{dt^2} (t - t_0)^2 + \frac{ds(t_0)}{dt} (t - t_0) + s(t_0)$$

Infatti

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} = C_1 \Rightarrow \frac{ds(t)}{dt} = C_1 t + C_2 \Rightarrow s(t) = \frac{C_1}{2} t^2 + C_2 t + C_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s(t) = \frac{C_1}{2}t^2 + C_2t + C_3 \\ \frac{d^2s(t_0)}{dt^2} = C_1 \\ \frac{ds(t_0)}{dt} = C_1t_0 + C_2 \\ s(t_0) = \frac{C_1}{2}t_0^2 + C_2t_0 + C_3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s(t) = \frac{C_1}{2}t^2 + C_2t + C_3 \\ C_1 = \frac{d^2s(t_0)}{dt^2} \\ C_2 = \frac{ds(t_0)}{dt} - \frac{d^2s(t_0)}{dt^2}t_0 \\ C_3 = -\frac{1}{2}\frac{d^2s(t_0)}{dt^2}t_0^2 - \left(\frac{ds(t_0)}{dt}t_0 - \frac{d^2s(t_0)}{dt^2}t_0^2\right) + s(t_0) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{1}{2}\frac{d^2s(t_0)}{dt^2}(t^2 - t_0^2) + \frac{ds(t_0)}{dt}(t - t_0) + \frac{d^2s(t_0)}{dt^2}(t_0^2 - tt_0) + s(t_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{1}{2}\frac{d^2s(t_0)}{dt^2}(t^2 + t_0^2 - 2tt_0) + \frac{ds(t_0)}{dt}(t - t_0) + s(t_0)$$

3.14. Cinematica dell'elemento in coordinate polari. Consideriamo un sistema di riferimento polare di coordinate (ρ, θ, φ) e introduciamo la terna ortogonale di versori $\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ indicati in figura. Il legame fra questi versori e la terna fissa $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ si ricava, con un po' di pazienza, osservando la figura

$$3.25) \left\{ \begin{array}{l} \hat{\rho} = \hat{e}_1 \sin \varphi \cos \vartheta + \hat{e}_2 \sin \varphi \sin \vartheta + \hat{e}_3 \cos \varphi \\ \hat{\varphi} = \hat{e}_1 \cos \varphi \cos \vartheta + \hat{e}_2 \cos \varphi \sin \vartheta - \hat{e}_3 \sin \varphi \\ \hat{\vartheta} = -\hat{e}_1 \sin \vartheta + \hat{e}_2 \cos \vartheta \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{\rho}} = \dot{\varphi} \hat{\varphi} + \dot{\vartheta} \sin \varphi \hat{\vartheta} \\ \dot{\hat{\varphi}} = -\dot{\varphi} \hat{\rho} + \dot{\vartheta} \cos \varphi \hat{\vartheta} \\ \dot{\hat{\vartheta}} = -\dot{\vartheta} \sin \varphi \hat{\rho} - \dot{\vartheta} \cos \varphi \hat{\vartheta} \end{array} \right.$$

La traiettoria Φ dell'elemento ha equazioni parametriche

$$3.26) \Phi: \begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

Il vettore posizione si scrive

$$3.27) \overrightarrow{OP}(t) = \rho(t)\hat{\rho}(t)$$

Derivando si ottiene la velocità in coordinate polari

$$3.28) \vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OP}(t)}{dt} = \frac{d\rho(t)}{dt}\hat{\rho}(t) + \rho(t)\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt}$$

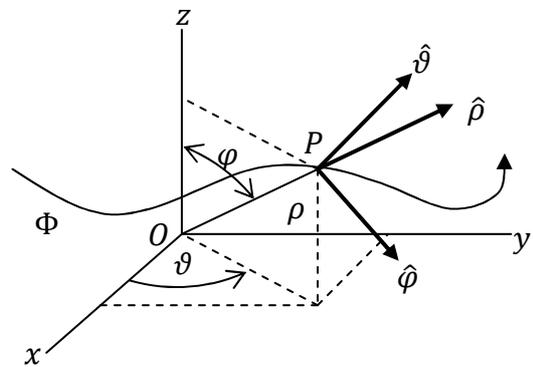
Sostituendo le **3.25** nella espressione della velocità si ricava

$$3.29) \vec{v}(t) = \frac{d\rho(t)}{dt}\hat{\rho}(t) + \rho(t)\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \rho(t)\dot{\vartheta}\sin\varphi\hat{\vartheta}$$

Derivando questa espressione si ricava l'accelerazione

$$3.30) \vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 - \rho\dot{\vartheta}^2\sin^2\varphi)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} - \rho\dot{\vartheta}^2\sin\varphi\cos\varphi)\hat{\varphi} + (2\dot{\rho}\dot{\vartheta}\sin\varphi + 2\rho\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos\varphi + \rho\ddot{\vartheta}\sin\varphi)\hat{\vartheta}$$

Nel caso particolare di un moto piano le relazioni di cui sopra si semplificano nelle



$$3.31) \quad \vec{v}(t) = \frac{d\rho(t)}{dt} \hat{\rho}(t) + \rho(t) \dot{\vartheta} \hat{\vartheta}$$

$$3.32) \quad \vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\vartheta}^2) \hat{\rho} + (2\dot{\rho} \dot{\vartheta} + \rho \ddot{\vartheta}) \hat{\vartheta}$$

mentre i legami **3.25** fra i versori si riducono ai seguenti

$$3.33) \quad \begin{cases} \hat{\rho} = \hat{e}_1 \cos \vartheta + \hat{e}_2 \sin \vartheta \\ \hat{\varphi} = -\hat{e}_3 \\ \hat{\vartheta} = -\hat{e}_1 \sin \vartheta + \hat{e}_2 \cos \vartheta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{\rho}} = \dot{\vartheta} \hat{\vartheta} \\ \dot{\hat{\varphi}} = 0 \\ \dot{\hat{\vartheta}} = -\dot{\vartheta} \hat{\rho} \end{cases}$$

3.15. Moto piano e velocità areolare. Quando un elemento si muove sempre sullo stesso piano si parla di moto piano. Per il moto piano si definisce la velocità areolare come la velocità con la quale aumenta l'area spazzata dal raggio vettore. Dall'Analisi sappiamo che l'area spazzata dal raggio vettore $\vec{\rho} = \vec{\rho}(\vartheta(t))$, con ϑ coordinata polare, è data da

$$3.34) \quad S = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \rho^2(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \rho^2(\vartheta(\tau)) \frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} d\tau$$

Dunque la velocità areolare si ottiene derivando nel tempo la **3.34** e si scrive

$$3.35) \quad \dot{S}(t) = \frac{1}{2} \rho^2(\vartheta(t)) \frac{d\vartheta(t)}{dt}$$

In genere alla velocità areolare si dà una connotazione vettoriale moltiplicandola per il versore ortogonale al piano del moto che 'vede' il moto avvenire in senso antiorario. Per cui si ha

$$3.36) \quad \vec{S}(t) = \frac{1}{2} \rho^2(\vartheta(t)) \frac{d\vartheta(t)}{dt} \hat{e}_3$$

E' facile dimostrare che la **3.36** può scriversi anche come prodotto misto nella forma

$$3.37) \quad \vec{S}(t) = \frac{1}{2} (\overline{OP}(t) \times \vec{v}(t))$$

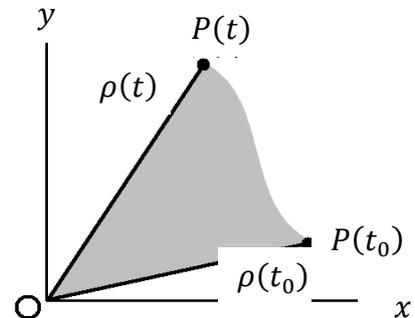
Infatti si ha

$$\overline{OP} \times \vec{v} = \rho \hat{\rho} \times \left(\frac{d\rho}{dt} \hat{\rho} + \rho \frac{d\vartheta}{dt} \hat{\vartheta} \right) = \rho \hat{\rho} \times \rho \frac{d\vartheta}{dt} \hat{\vartheta} = \rho^2 \frac{d\vartheta}{dt} \hat{e}_3$$

Sviluppando il prodotto vettoriale nella **3.37** (in coordinate cartesiane) si verifica anche l'espressione alternativa

$$3.38) \quad \vec{S}(t) = \frac{1}{2} (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)) \hat{e}_3$$

3.16. Moto centrale. Si dice che un elemento si muove di moto centrale di centro O se la sua accelerazione è istante per istante parallela al vettore \overline{OP} , essendo P la posizione dell'elemento. **Un moto centrale è un moto piano e la sua velocità areolare è costante.** Infatti se il moto è centrale deve aversi



$$3.39) \quad \vec{a}(t) \times \overline{OP}(t) = \vec{0}$$

Ma essendo

$$\vec{a}(t) \times \overline{OP}(t) = \frac{d(\vec{v}(t) \times \overline{OP}(t))}{dt}$$

ne consegue che

$$\vec{v}(t) \times \overline{OP}(t) = \text{vettore costante}$$

Questo da un lato comporta che il piano nel quale avviene il moto sia lo stesso istante per istante (moto piano) e dall'altro comporta che la velocità areolare sia costante (basta considerare la **3.37**).

3.17. Moto del baricentro di un sistema di punti materiali. Nello studio del moto di due o più punti materiali, cioè di un sistema di punti materiali assume particolare importanza il moto del baricentro del sistema stesso. Ricordando che il vettore posizione del baricentro G è definito dalla espressione

$$3.40) \quad \overline{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \overline{OP}_i}{M}$$

dove M rappresenta la massa totale del sistema e m_i è la massa dell'elemento i -mo, allora per la velocità del baricentro si ricava immediatamente l'espressione

$$3.41) \quad \vec{v}_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{M}$$

derivando la quale si ottiene l'accelerazione del baricentro

$$3.42) \quad \vec{a}_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i}{M}$$

3.18. Moto relativo al baricentro. Dato un sistema di punti materiali definiamo moto relativo al baricentro il moto rispetto a un sistema di riferimento RC_G il quale abbia origine nel baricentro e abbia assi invariabilmente orientati come quelli del sistema di riferimento fisso RC . Ricordando che si definisce **momento della quantità di moto rispetto al punto A** di un elemento di massa m e posizione P che si sposti con velocità \vec{v} il vettore

$$3.43) \quad \vec{k}_A = m\vec{v} \times \overline{PA}$$

allora il momento totale della quantità di moto del sistema di elementi, rispetto a un punto A , è

$$3.44) \quad \vec{K}_A = \sum_{i=1}^n \vec{k}_A^i = \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i \times \overline{P_i A})$$

Nel caso si consideri il moto relativo al baricentro il vettore di cui sopra si scrive

$$3.45) \quad \vec{K}_A^G = \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i^G \times \overline{P_i A})$$

dove l'apice individua le grandezze cinematiche del moto relativo al baricentro. Ora dimostro che il momento totale della quantità di moto, del moto relativo al baricentro, è indipendente dal polo rispetto al quale lo si calcola. Infatti

$$\begin{aligned}\vec{K}_A^G &= \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i^G \times \overline{P_i A}) = \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i^G \times (\overline{P_i G} + \overline{GA})) = \\ &= \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i^G \times \overline{P_i G}) + \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i^G \times \overline{GA}) = \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i^G \times \overline{P_i G}) + \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i^G \right) \times \overline{GA} = \\ &= \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i^G \times \overline{P_i G}) + M \vec{v}_G^G \times \overline{GA}\end{aligned}$$

Ora si osservi che il secondo addendo è nullo, essendo nulla la velocità del baricentro rispetto al baricentro stesso. Dunque abbiamo dimostrato che

$$3.46) \quad \vec{K}_A^G = \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i^G \times \overline{P_i G}) \quad \forall A$$

espressione che è appunto indipendente dal polo scelto. Allora indicheremo il momento totale della quantità di moto del moto rispetto al baricentro semplicemente con \vec{K}^G . Dunque

$$3.47) \quad \vec{K}^G = \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i^G \times \overline{P_i G})$$

Si dimostra anche che

$$3.48) \quad \vec{K}^G = \vec{K}_G$$

dove il secondo vettore rappresenta il momento totale della quantità di moto, del moto rispetto al sistema di riferimento fisso, calcolato rispetto al polo G . Infatti si ha

$$\begin{aligned}\vec{K}^G &= \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i^G \times \overline{P_i G}) = \sum_{i=1}^n (m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_G) \times \overline{P_i G}) = \\ &= \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i \times \overline{P_i G}) - \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_G \times \overline{P_i G}) = \\ &= \vec{K}_G - \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_G \times \overline{P_i G}) = \vec{K}_G - \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_G \times \overline{P_i O}) - \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_G \times \overline{OG}) = \\ &= \vec{K}_G + \vec{v}_G \times \sum_{i=1}^n (m_i \overline{OP_i}) - \vec{v}_G \times \sum_{j=1}^n (m_j \overline{OG}) = \\ &= \vec{K}_G + \vec{v}_G \times M \overline{OG} - \vec{v}_G \times M \overline{OG} = \vec{K}_G\end{aligned}$$

3.19. Jerk. Nell'ambito della cinematica dell'elemento può essere di interesse lo studio di una ulteriore grandezza cinematica, la quale fornisce indicazione su quanto rapidamente vari l'accelerazione nel tempo. Si tratta del jerk \vec{j}_E , il quale è definito come la derivata nel tempo dell'accelerazione. Dalla 3.21 si calcola che:

$$\begin{aligned}\vec{j}_E &\triangleq \frac{d\vec{a}}{dt} = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\ddot{s}(t) \vec{T}(t) + \dot{s}^2(t) \frac{\vec{N}(t)}{R(t)} \right) = \ddot{\ddot{s}}(t) \vec{T}(t) + \dot{\ddot{s}}(t) \frac{d\vec{T}(t)}{dt} + 2\dot{s}(t) \ddot{s}(t) \frac{\vec{N}(t)}{R(t)} + \dot{s}^2(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{N}(t)}{R(t)} \right) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ddot{s}(t)\vec{T}(t) + \dot{s}(t)\vec{N}(t) \left| \frac{d\vec{T}(t)}{dt} \right| + 2\dot{s}(t)\ddot{s}(t) \frac{\vec{N}(t)}{R(t)} + \dot{s}^2(t) \left(\frac{1}{R(t)} \frac{d\vec{N}(t)}{dt} - \frac{\vec{N}(t)}{R^2(t)} \right) = \\
&= \ddot{s}(t)\vec{T}(t) + \dot{s}(t)\vec{N}(t) \left| \frac{d\vec{T}(t)}{dt} \right| + \frac{2\dot{s}(t)\ddot{s}(t)}{R(t)} \vec{N}(t) + \frac{\dot{s}^2(t)}{R(t)} \frac{d\vec{N}(t)}{dt} - \frac{\dot{s}^2(t)}{R^2(t)} \vec{N}(t) = \\
&= \ddot{s}(t)\vec{T}(t) + \frac{\dot{s}^2(t)}{R(t)} \frac{d\vec{N}(t)}{dt} + \left(\dot{s}(t) \left| \frac{d\vec{T}(t)}{dt} \right| + \frac{2\dot{s}(t)\ddot{s}(t)}{R(t)} - \frac{\dot{s}^2(t)}{R^2(t)} \right) \vec{N}(t)
\end{aligned}$$

Dalla 3.9 si ha poi

$$3.49) \quad R = \frac{1}{\left| \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \right|} = \frac{1}{\left| \frac{d\vec{T}(t)dt}{dt ds} \right|} = \frac{\dot{s}}{\left| \frac{d\vec{T}(t)}{dt} \right|} \Rightarrow \left| \frac{d\vec{T}(t)}{dt} \right| = \frac{\dot{s}}{R(t)}$$

Dunque abbiamo trovato sin qui

$$3.50) \quad \vec{j}_E = \ddot{s}\vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R} \frac{d\vec{N}}{dt} + \left(\frac{\dot{s}\ddot{s}}{R} + \frac{2\dot{s}\ddot{s}}{R} - \frac{\dot{s}^2}{R^2} \right) \vec{N}$$

Rimane da calcolare la derivata nel tempo del versore normale. Si consideri a tal proposito che

$$3.51) \quad \frac{d\vec{N}}{dt} = \frac{d\vec{N}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\vec{T}}{ds} / \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| \right) \dot{s} = \left[\frac{\frac{d^2\vec{T}}{ds^2}}{\left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|} - \frac{\frac{d\vec{T}}{ds} \left(\frac{d}{ds} \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| \right)}{\left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|^2} \right] \dot{s}$$

Sostituendo nella 3.51 la definizione 3.8 di versore normale, allora si ha

$$3.52) \quad \frac{d\vec{N}}{dt} = \left[\frac{\frac{d^2\vec{T}}{ds^2}}{\left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|} - \vec{N} \frac{\left(\frac{d}{ds} \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| \right)}{\left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|} \right] \dot{s}$$

Si consideri ora che $\frac{d\vec{N}}{ds}$ è ortogonale a \vec{N} , essendo la derivata di un versore. Quindi si deduce che

$$3.53) \quad \frac{d\vec{N}}{dt} = \frac{\frac{d^2\vec{T}}{ds^2}}{\left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|} \dot{s} \Leftrightarrow \frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{\frac{d^2\vec{T}}{ds^2}}{\left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|}$$

Esplicitando la 3.53 si ha

$$3.54) \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = \left(\frac{d^3x}{ds^3} \quad \frac{d^3y}{ds^3} \quad \frac{d^3z}{ds^3} \right) \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2}}$$

Moltiplicando il versore normale per il versore tangente si ha

$$\vec{T} \cdot \vec{N} = \frac{\left(\frac{dx}{ds} \quad \frac{dy}{ds} \quad \frac{dz}{ds} \right) \cdot \left(\frac{d^2x}{ds^2} \quad \frac{d^2y}{ds^2} \quad \frac{d^2z}{ds^2} \right)}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$3.54) \frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \frac{d^2z}{ds^2} = 0$$

Derivando la 3.54 si ha ancora

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \frac{d^2z}{ds^2} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3.55) \left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2 = -\frac{dx}{ds} \frac{d^3x}{ds^3} - \frac{dy}{ds} \frac{d^3y}{ds^3} - \frac{dz}{ds} \frac{d^3z}{ds^3}$$

Moltiplico ora invece $\frac{d\vec{N}}{ds}$ per il versore tangente:

$$3.56) \frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{T} = \frac{\left(\frac{d^3x}{ds^3} \frac{dx}{ds} + \frac{d^3y}{ds^3} \frac{dy}{ds} + \frac{d^3z}{ds^3} \frac{dz}{ds} \right)}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2}} = \frac{\frac{d^3x dx}{ds^3 ds} + \frac{d^3y dy}{ds^3 ds} + \frac{d^3z dz}{ds^3 ds}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2}}$$

Sostituendo la 3.55 nella 3.56 abbiamo allora

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{T} &= -\frac{\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2}} = -R \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2 \right] = \\ &= -R \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2 \right] = -\frac{R}{R^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$3.57) \frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{T} = -\frac{1}{R}$$

Assumendo come dimostrato che il versore $\frac{d\vec{N}}{ds}$ è parallelo a \vec{T} , abbiamo in definitiva che

$$3.58) \frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{1}{R} \vec{T} \Rightarrow \frac{d\vec{N}}{dt} = -\frac{\dot{s}}{R} \vec{T}$$

Sostituendo la 3.58 nella 3.50, abbiamo in conclusione

$$3.59) \vec{J}_E = \left(\ddot{s} - \frac{\dot{s}^3}{R^2} \right) \vec{T} + \frac{\dot{s}}{R} \left(3\ddot{s} - \frac{\dot{s}}{R^2} \right) \vec{N}$$

Capitolo 4. Cinematica degli spazi

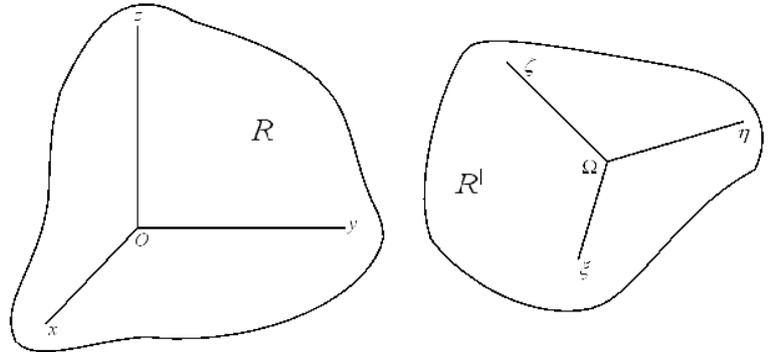
4.1. Spazi e immagini. Si consideri uno spazio R in cui sia fissato un sistema di riferimento

$$RC(O, xyz) = RC(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

e uno spazio R^l in cui sia fissato un sistema di riferimento

$$R\Gamma(\Omega, \xi\eta\zeta) = R\Gamma(\Omega, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$$

Qui si descrive il moto di uno spazio rispetto all'altro¹.



In questa trattazione sar  utile introdurre la nozione di **immagine di un vettore**, la quale appesantisce la notazione, ma permette una maggiore chiarezza espositiva. Se considero per esempio un vettore \vec{u} solidale allo spazio R^l e ne voglio calcolare la derivata rispetto al tempo, tale derivata varier  se la si calcola rispetto a RC piuttosto che rispetto a $R\Gamma$; nel primo caso infatti sar  in generale non nulla (a causa del moto di R^l rispetto a R), nel secondo sar  nulla. Allora per evitare ambiguit  diremo che il vettore \vec{u} (solidale allo spazio R^l) visto dallo spazio R   l'immagine di \vec{u} e lo indichiamo \vec{u} .

4.2. Atto di moto e velocit  angolare. Vogliamo conoscere la velocit  con la quale si sposta il generico punto P di R^l , rispetto R . A tale scopo   sufficiente dividere la 2.33 per l'intervallo di tempo $\Delta t = t - t^l$ nel quale   avvenuto lo spostamento, mandando poi a zero tale intervallo. Si deve calcolare cio 

$$4.1) \quad \dot{\vec{P}P'} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\overline{\Omega\Omega'}}{\Delta t} + \frac{\overline{QP}(\cos \alpha - 1)}{\Delta t} + \frac{\hat{a} \times \overline{QP}}{\Delta t} \sin \alpha \right)$$

Per quanto riguarda il primo addendo c'  poco da dire: si tratta della velocit  dell'origine di $R\Gamma$. Per calcolare il secondo addendo moltiplico e divido per α (che $\forall t' > t$   non nullo) e ho

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\overline{QP} \frac{\alpha \cos \alpha - 1}{\Delta t \alpha} \right) = \overline{QP} \dot{\alpha} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha - 1}{\alpha} = \overline{QP} \dot{\alpha} \frac{-\dot{\alpha} \sin \alpha}{\dot{\alpha}} = \overline{QP} \dot{\alpha} \cdot 0 = 0$$

dove si   applicato il teorema di De L'Hospital e si   considerato anche che $\alpha = \alpha(\Delta t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow t'$. Per il terzo addendo procediamo allo stesso modo:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\hat{a} \times \overline{QP}}{\Delta t} \sin \alpha \right) &= \hat{a} \times \overline{QP} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha \sin \alpha}{\Delta t \alpha} \right) = \hat{a} \times \overline{QP} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{\Delta t} \dot{\alpha} \frac{\cos \alpha}{\dot{\alpha}} \right) = \\ &= \hat{a} \times \overline{QP} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{\Delta t} \cos \alpha \right) = \dot{\alpha} \hat{a} \times \overline{QP} \end{aligned}$$

¹ Questo tipo di moto   detto moto rigido riferendosi al fatto che presi comunque tre punti di uno spazio essi non cambiano le loro posizioni relative durante il moto. Questa analisi cinematica si adotta indifferentemente anche per il moto di corpi rigidi.

Sostituendo quanto trovato nella **4.1** otteniamo

$$4.2) \quad \dot{\overrightarrow{PP'}} = \dot{\overrightarrow{\Omega\Omega'}} + \dot{\alpha}\hat{a} \times \overrightarrow{\Omega P}$$

Definendo la **velocità angolare** come il vettore²

$$4.3) \quad \vec{\omega} = \dot{\alpha}\hat{a}$$

e introducendo i simboli $\vec{v}_P, \vec{v}_\Omega$ dall'ovvio significato, la **4.2** si scrive

$$4.4) \quad \vec{v}_P(t) = \vec{v}_\Omega(t) + \vec{\omega}(t) \times \overrightarrow{\Omega P}$$

e rappresenta l'**atto di moto**, ovvero quella funzione vettoriale la quale associa a ogni punto di R' la sua velocità rispetto allo spazio R . Si osserva immediatamente che l'**atto di moto è un campo elicoidale**, con tutte le proprietà che ne derivano. Nella **4.4** si è introdotta la notazione di immagine, che useremo di qui in avanti.

4.3. Formule di Poisson. Adesso diciamo che il punto P di $R\Gamma$ sia tale che il vettore $\overrightarrow{\Omega P}$ abbia lunghezza unitaria e che sia orientato secondo l'asse ξ . Questo vuol dire in pratica che esso coincide con il versore $\tilde{\xi}_1$. In questo caso particolare la **4.4** si scrive

$$\begin{aligned} \frac{d(\overrightarrow{OP})}{dt} &= \frac{d(\overrightarrow{O\Omega})}{dt} + \vec{\omega} \times \tilde{\xi}_1 \Leftrightarrow \frac{d(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{O\Omega})}{dt} = \vec{\omega} \times \tilde{\xi}_1 \Leftrightarrow \frac{d(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{\Omega O})}{dt} = \vec{\omega} \times \tilde{\xi}_1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{d\overrightarrow{\Omega P}}{dt} = \vec{\omega} \times \tilde{\xi}_1 \Leftrightarrow \frac{d\tilde{\xi}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \tilde{\xi}_1 \end{aligned}$$

Operando allo stesso modo con gli altri due assi di $R\Gamma$ ottengo altre due formule analoghe. Esse sono dette **formule di Poisson**. Le riporto tutte e tre:

$$4.5) \quad \frac{d\tilde{\xi}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \tilde{\xi}_1 \quad \frac{d\tilde{\xi}_2}{dt} = \vec{\omega} \times \tilde{\xi}_2 \quad \frac{d\tilde{\xi}_3}{dt} = \vec{\omega} \times \tilde{\xi}_3$$

Se prendo ora un generico vettore \vec{u} solidale a $R\Gamma$ (cioè 'fermo' rispetto $R\Gamma$) e ne calcolo la derivata della immagine ottengo

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d(u_1\tilde{\xi}_1 + u_2\tilde{\xi}_2 + u_3\tilde{\xi}_3)}{dt} = u_1 \frac{d(\tilde{\xi}_1)}{dt} + u_2 \frac{d(\tilde{\xi}_2)}{dt} + u_3 \frac{d(\tilde{\xi}_3)}{dt}$$

Sostituendo le **4.5** in quanto ottenuto si ha

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = u_1(\vec{\omega} \times \tilde{\xi}_1) + u_2(\vec{\omega} \times \tilde{\xi}_2) + u_3(\vec{\omega} \times \tilde{\xi}_3)$$

ovvero la così detta **formula di Poisson generalizzata**:

$$4.6) \quad \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}$$

² È la derivata rispetto al tempo del vettore rotazione, definito nella **2.14**.

Ma dalle **4.5** è anche possibile ricavare l'espressione delle componenti della velocità angolare in funzione delle derivate dei versori di $R\Gamma$. Prendiamo ad esempio la prima delle tre e moltiplichiamone scalarmente ambo i membri per $\tilde{\varepsilon}_2$:

$$\tilde{\varepsilon}_2 \cdot \frac{d\tilde{\varepsilon}_1}{dt} = \tilde{\varepsilon}_2 \cdot \vec{\omega} \times \tilde{\varepsilon}_1 = \tilde{\varepsilon}_1 \cdot \tilde{\varepsilon}_2 \times \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \tilde{\varepsilon}_1 \times \tilde{\varepsilon}_2 = \vec{\omega} \cdot \tilde{\varepsilon}_3 = \omega_3$$

Moltiplicando la seconda delle **4.5** per $\tilde{\varepsilon}_3$ ottengo

$$\tilde{\varepsilon}_3 \cdot \frac{d\tilde{\varepsilon}_2}{dt} = \tilde{\varepsilon}_3 \cdot \vec{\omega} \times \tilde{\varepsilon}_2 = \tilde{\varepsilon}_2 \cdot \tilde{\varepsilon}_3 \times \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \tilde{\varepsilon}_2 \times \tilde{\varepsilon}_3 = \vec{\omega} \cdot \tilde{\varepsilon}_1 = \omega_1$$

Moltiplicando infine la terza delle **4.5** per $\tilde{\varepsilon}_1$ ottengo

$$\tilde{\varepsilon}_1 \cdot \frac{d\tilde{\varepsilon}_3}{dt} = \tilde{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\omega} \times \tilde{\varepsilon}_3 = \tilde{\varepsilon}_3 \cdot \tilde{\varepsilon}_1 \times \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \tilde{\varepsilon}_3 \times \tilde{\varepsilon}_1 = \vec{\omega} \cdot \tilde{\varepsilon}_2 = \omega_2$$

Per cui in definitiva abbiamo

$$4.7) \quad \vec{\omega} = \left(\tilde{\varepsilon}_3 \cdot \frac{d\tilde{\varepsilon}_1}{dt} \right) \tilde{\varepsilon}_1 + \left(\tilde{\varepsilon}_1 \cdot \frac{d\tilde{\varepsilon}_2}{dt} \right) \tilde{\varepsilon}_2 + \left(\tilde{\varepsilon}_2 \cdot \frac{d\tilde{\varepsilon}_3}{dt} \right) \tilde{\varepsilon}_3$$

4.4. Derivata dell'immagine. Se $\vec{u} = \vec{u}(t)$ è un vettore mobile di R^l allora la sua derivata temporale rispetto allo spazio fisso R , cioè la derivata della sua immagine, risulta data da

$$4.8) \quad \frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \frac{d\vec{u}(t)}{dt} + \vec{\omega}(t) \times \vec{u}(t)$$

che si riduce alla formula di Poisson generalizzata **4.6** nel caso in cui \vec{u} sia solidale a R^l . Per dimostrare questa relazione basta ricorrere alle tre formule di Poisson **4.5** le quali permettono di scrivere

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}(t)}{dt} &= \frac{d(u_1(t)\tilde{\varepsilon}_1(t))}{dt} + \frac{d(u_2(t)\tilde{\varepsilon}_2(t))}{dt} + \frac{d(u_3(t)\tilde{\varepsilon}_3(t))}{dt} = \\ &= \frac{du_1(t)}{dt} \tilde{\varepsilon}_1(t) + \frac{du_2(t)}{dt} \tilde{\varepsilon}_2(t) + \frac{du_3(t)}{dt} \tilde{\varepsilon}_3(t) + u_1(t) \frac{d\tilde{\varepsilon}_1(t)}{dt} + u_2(t) \frac{d\tilde{\varepsilon}_2(t)}{dt} + u_3(t) \frac{d\tilde{\varepsilon}_3(t)}{dt} = \\ &= \frac{d\vec{u}(t)}{dt} + u_1(t)(\vec{\omega} \times \tilde{\varepsilon}_1) + u_2(t)(\vec{\omega} \times \tilde{\varepsilon}_2) + u_3(t)(\vec{\omega} \times \tilde{\varepsilon}_3) = \\ &= \frac{d\vec{u}(t)}{dt} + \vec{\omega} \times (u_1(t)\tilde{\varepsilon}_1 + u_2(t)\tilde{\varepsilon}_2 + u_3(t)\tilde{\varepsilon}_3) = \frac{d\vec{u}(t)}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{u}(t) \end{aligned}$$

4.5. Derivata seconda dell'immagine. Se $\vec{u} = \vec{u}(t)$ è un vettore mobile di R^l allora la sua derivata temporale seconda rispetto allo spazio fisso R , cioè la derivata seconda della sua immagine, risulta data da

$$4.9) \quad \frac{d^2\vec{u}(t)}{dt^2} = \frac{d^2\vec{u}(t)}{dt^2} + 2\vec{\omega}(t) \times \frac{d\vec{u}(t)}{dt} + \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} \times \vec{u}(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{u}(t))$$

Per dimostrare la **4.9** deriviamo la **4.8** ottenendo:

$$\frac{d^2 \tilde{\mathbf{u}}(t)}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{d\tilde{\mathbf{u}}(t)}{dt}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{d\tilde{\mathbf{u}}(t)}{dt} + \vec{\omega}(t) \times \tilde{\mathbf{u}}(t)\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{d\tilde{\mathbf{u}}(t)}{dt}\right)}{dt} + \frac{d\left(\vec{\omega}(t) \times \tilde{\mathbf{u}}(t)\right)}{dt}$$

Adesso applichiamo la stessa **4.8** al vettore $\frac{d\tilde{\mathbf{u}}(t)}{dt}$ ottenendo

$$\frac{d^2 \tilde{\mathbf{u}}(t)}{dt^2} = \left(\frac{d^2 \tilde{\mathbf{u}}(t)}{dt^2} + \vec{\omega}(t) \times \frac{d\tilde{\mathbf{u}}(t)}{dt} \right) + \frac{d\left(\vec{\omega}(t) \times \tilde{\mathbf{u}}(t)\right)}{dt}$$

Sviluppando la derivata del prodotto vettoriale abbiamo poi

$$\frac{d^2 \tilde{\mathbf{u}}(t)}{dt^2} = \frac{d^2 \tilde{\mathbf{u}}(t)}{dt^2} + \vec{\omega}(t) \times \frac{d\tilde{\mathbf{u}}(t)}{dt} + \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} \times \tilde{\mathbf{u}}(t) + \vec{\omega}(t) \times \frac{d\tilde{\mathbf{u}}(t)}{dt}$$

Ora sostituiamo la **4.8** nel terzo prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{\mathbf{u}}(t)}{dt^2} &= \frac{d^2 \tilde{\mathbf{u}}(t)}{dt^2} + \vec{\omega}(t) \times \frac{d\tilde{\mathbf{u}}(t)}{dt} + \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} \times \tilde{\mathbf{u}}(t) + \vec{\omega}(t) \times \left(\frac{d\tilde{\mathbf{u}}(t)}{dt} + \vec{\omega}(t) \times \tilde{\mathbf{u}}(t) \right) = \\ &= \frac{d^2 \tilde{\mathbf{u}}(t)}{dt^2} + \vec{\omega}(t) \times \frac{d\tilde{\mathbf{u}}(t)}{dt} + \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} \times \tilde{\mathbf{u}}(t) + \vec{\omega}(t) \times \frac{d\tilde{\mathbf{u}}(t)}{dt} + \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \tilde{\mathbf{u}}(t)) = \\ &= \frac{d^2 \tilde{\mathbf{u}}(t)}{dt^2} + \vec{\omega}(t) \times \frac{d\tilde{\mathbf{u}}(t)}{dt} + \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} \times \tilde{\mathbf{u}}(t) + \vec{\omega}(t) \times \frac{d\tilde{\mathbf{u}}(t)}{dt} + \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \tilde{\mathbf{u}}(t)) \end{aligned}$$

Sommando i due addendi uguali si ha appunto la **4.9**.

4.6. Primo teorema dei moti rigidi. Atto di moto. Preso il generico punto Π di R' si ha che la sua velocità rispetto allo spazio R è data da

$$4.10) \quad \vec{v}_{\Pi}(t) = \vec{v}_{\Omega}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{\Omega\Pi}(t)$$

Infatti considerando la formula di Poisson generalizzata **4.6** si ha

$$4.11) \quad \frac{d\vec{\Omega\Pi}(t)}{dt} = \frac{d(\vec{\omega}\Omega(t) + \vec{\Omega\Pi}(t))}{dt} = \frac{d\vec{\omega}\Omega(t)}{dt} + \frac{d\vec{\Omega\Pi}(t)}{dt} = \frac{d\vec{\omega}\Omega(t)}{dt} + \vec{\omega}(t) \times \vec{\Omega\Pi}(t)$$

Dalla **4.10** emerge che un atto di moto risulta essere sempre un campo elicoidale, che può o meno degenerare in un campo circolare. Si puntualizza inoltre che la distribuzione delle velocità dei punti dello spazio R' rispetto allo spazio R è comunemente detta **atto di moto** dello spazio R' rispetto allo spazio R .

4.7. Secondo teorema dei moti rigidi. Preso il generico punto Π di R' si ha che la sua accelerazione rispetto allo spazio R è data da

$$4.12) \quad \vec{a}_\Pi(t) = \vec{a}_\Omega(t) + \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} \times \vec{\Omega\Pi}(t) + \vec{\omega}(t) \times \left(\vec{\omega}(t) \times \vec{\Omega\Pi}(t) \right)$$

Dimostriamo la **4.12** derivando la **4.11** e tenendo presente la **4.6**. Si ha

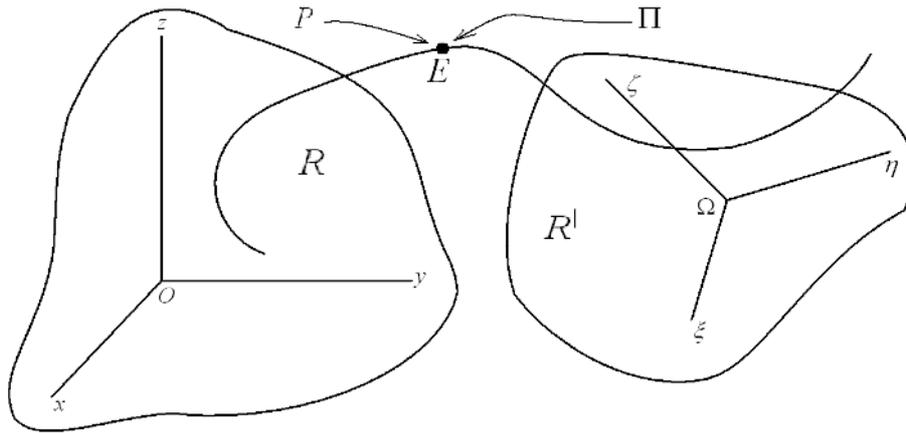
$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{\Omega\Pi}(t)}{dt^2} &= \frac{d \left(\frac{d\vec{\Omega}(t)}{dt} + \vec{\omega}(t) \times \vec{\Omega\Pi}(t) \right)}{dt} = \frac{d^2 \vec{\Omega}(t)}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} \times \vec{\Omega\Pi}(t) + \vec{\omega}(t) \times \frac{d\vec{\Omega\Pi}(t)}{dt} = \\ &= \frac{d^2 \vec{\Omega}(t)}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} \times \vec{\Omega\Pi}(t) + \vec{\omega}(t) \times \frac{d\vec{\Omega\Pi}(t)}{dt} = \\ &= \frac{d^2 \vec{\Omega}(t)}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} \times \vec{\Omega\Pi}(t) + \vec{\omega}(t) \times \left(\vec{\omega}(t) \times \vec{\Omega\Pi}(t) \right) \end{aligned}$$

Tabella riassuntiva dei moti rigidi	
Velocità angolare	$\vec{\omega} = \left(\vec{\tilde{\epsilon}}_3 \cdot \frac{d\vec{\tilde{\epsilon}}_2}{dt} \right) \vec{\tilde{\epsilon}}_1 + \left(\vec{\tilde{\epsilon}}_1 \cdot \frac{d\vec{\tilde{\epsilon}}_3}{dt} \right) \vec{\tilde{\epsilon}}_2 + \left(\vec{\tilde{\epsilon}}_2 \cdot \frac{d\vec{\tilde{\epsilon}}_1}{dt} \right) \vec{\tilde{\epsilon}}_3$
Distribuzione delle velocità	$\vec{v}_\Pi(t) = \vec{v}_\Omega(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{\Omega\Pi}(t)$
Distribuzione delle accelerazioni	$\vec{a}_\Pi(t) = \vec{a}_\Omega(t) + \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} \times \vec{\Omega\Pi}(t) + \vec{\omega}(t) \times \left(\vec{\omega}(t) \times \vec{\Omega\Pi}(t) \right)$
Derivata dell'immagine	$\frac{d\vec{\tilde{u}}(t)}{dt} = \frac{d\vec{u}(t)}{dt} + \vec{\omega}(t) \times \vec{\tilde{u}}(t)$
Derivata seconda dell'immagine	$\frac{d^2 \vec{\tilde{u}}(t)}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{u}(t)}{dt^2} + 2\vec{\omega}(t) \times \frac{d\vec{u}(t)}{dt} + \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} \times \vec{\tilde{u}}(t) + \vec{\omega}(t) \times \left(\vec{\omega}(t) \times \vec{\tilde{u}}(t) \right)$

Capitolo 5. Cinematica relativa

5.1. Moto relativo di un elemento. Consideriamo un elemento E il quale si muova rispetto a uno spazio R , in cui sia fissato un sistema di riferimento $RC(Oxyz)$ di versori principali $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ e rispetto a uno spazio R^I , nel quale sia fissato un sistema di riferimento $R^I(\Omega\xi\eta\zeta)$ di versori principali $\vec{e}_1^I, \vec{e}_2^I, \vec{e}_3^I$.

La velocità angolare dello spazio R^I rispetto allo spazio R è detta **velocità angolare di trascinamento** e viene indicata con la notazione $\vec{\omega}_\tau$. La posizione dell'elemento E sia il punto Π dello spazio R^I , coincidente con il punto P dello spazio R .



La **velocità relativa** dell'elemento E è la velocità dello stesso rispetto allo spazio R^I ; si indica \vec{v}_r . La **velocità assoluta** dell'elemento E è la velocità dello stesso rispetto allo spazio R ; si indica \vec{v}_a . Si trova la relazione

$$5.1) \quad \vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_\Omega + \vec{\omega}_\tau \times \widetilde{\Omega\Pi}$$

Infatti si ha

$$\vec{v}_a = \frac{d\overline{OP}}{dt} = \frac{d\overline{O\Omega}}{dt} + \frac{d\widetilde{\Omega\Pi}}{dt}$$

Applicando la formula dimostrata per la derivata dell'immagine, ovvero la **4.8**, si ha in fine la **5.1**

$$\vec{v}_a = \frac{d\overline{O\Omega}}{dt} + \frac{d\widetilde{\Omega\Pi}}{dt} = \frac{d\overline{O\Omega}}{dt} + \frac{d\widetilde{\Omega\Pi}}{dt} + \vec{\omega}_\tau \times \widetilde{\Omega\Pi}$$

La **velocità di trascinamento** è la velocità del punto dello spazio R^I occupato dall'elemento, rispetto allo spazio R , istante per istante; ovvero coincide con il valore dell'atto di moto di R^I valutato nel punto occupato dall'elemento. Si indica \vec{v}_τ . Dunque, ricordando l'espressione **4.4** dell'atto di moto si ha

$$5.2) \quad \vec{v}_\tau(t) = \vec{v}_\Omega(t) + \vec{\omega}_\tau(t) \times \widetilde{\Omega\Pi}$$

Dunque la **5.1** può essere scritta in forma compatta come

$$5.3) \quad \vec{v}_a = \vec{v}_\tau + \vec{v}_r$$

La **accelerazione relativa** dell'elemento E è la accelerazione dello stesso rispetto allo spazio R^I ; si indica \vec{a}_r . La **accelerazione assoluta** dell'elemento E è la accelerazione dello stesso rispetto allo spazio R ; si indica \vec{a}_a . Applicando la **4.9** alla **5.1** si trova la relazione

$$5.4) \quad \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_\Omega + 2\vec{\omega}_\tau \times \vec{v}_r + \frac{d\vec{\omega}_\tau}{dt} \times \vec{\Omega\Pi} + \vec{\omega}_\tau \times (\vec{\omega}_r \times \vec{\Omega\Pi})$$

La **accelerazione di trascinamento** è la accelerazione del punto dello spazio R^I occupato dall'elemento, rispetto allo spazio R , istante per istante; ovvero coincide con il valore della distribuzione delle accelerazioni di R^I valutato nel punto occupato dall'elemento. Si indica \vec{a}_τ . Dunque, ricordando l'espressione **4.12** della distribuzione delle accelerazioni si ha

$$5.5) \quad \vec{a}_\tau = \vec{a}_\Omega + \frac{d\vec{\omega}_\tau(t)}{dt} \times \vec{\Omega\Pi} + \vec{\omega}_\tau \times (\vec{\omega}_\tau \times \vec{\Omega\Pi})$$

Sostituendo questa nella **5.4** otteniamo per l'accelerazione assoluta una espressione compatta

$$5.6) \quad \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_\tau + 2\vec{\omega}_\tau \times \vec{v}_r$$

La **accelerazione di Coriolis** **accelerazione complementare** è l'addendo

$$5.6.b) \quad \vec{a}_c = 2\vec{\omega}_\tau \times \vec{v}_r$$

della accelerazione assoluta, che viene indicato \vec{a}_c . Con questa notazione l'accelerazione assoluta si scrive in modo compatto

$$5.7) \quad \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_\tau + \vec{a}_c$$

Il significato fisico della accelerazione di Coriolis al momento mi sfugge.

5.2. Moto relativo di un corpo rigido. Qui prendiamo in considerazione tre spazi rigidi:

- lo spazio R , che diciamo fisso, al quale associamo la terna $RC(Oxyz)$;
- lo spazio R^I , che diciamo relativo, al quale associamo la terna $R\Gamma(\Omega\xi\eta\zeta)$;
- lo spazio R^{II} , lo spazio di cui si vuole studiare il moto, al quale associamo la terna $R\Gamma^I(\Omega^I\xi^I\eta^I\zeta^I)$

Diciamo poi

- moto assoluto quello di R^{II} rispetto ad R ;
- moto relativo quello di R^{II} rispetto ad R^I ;
- moto di trascinamento quello di R^I rispetto ad R .

Sulla scia di queste definizioni seguono le altre tre definizioni seguenti

- indichiamo $\vec{\omega}_a$ la velocità angolare del moto assoluto;

- indichiamo $\vec{\omega}_r$ la velocità angolare del moto relativo;
- indichiamo $\vec{\omega}_\tau$ la velocità angolare del moto di trascinamento.

Si trova allora che la velocità angolare assoluta è data da

$$5.8) \quad \vec{\omega}_a = \vec{\omega}_\tau + \vec{\omega}_r$$

Per dimostrarlo consideriamo i punti materiali E_1, E_2 solidali allo spazio R^{\parallel} le cui posizioni coincidono rispettivamente con i punti

- P_1, P_2 di R ;
- Π_1, Π_2 di R^{\perp} ;
- $\Pi_1^{\parallel}, \Pi_2^{\parallel}$ di R^{\parallel} .

Considerando il moto relativo dei due punti materiali rispetto allo spazio fisso R e allo spazio mobile R^{\perp} , in base alla **5.1** si ha

$$5.9) \quad \begin{cases} \vec{v}_{aE_1} = \vec{v}_{rE_1} + \vec{v}_{\Omega} + \vec{\omega}_\tau \times \vec{\Omega\Pi_1} \\ \vec{v}_{aE_2} = \vec{v}_{rE_2} + \vec{v}_{\Omega} + \vec{\omega}_\tau \times \vec{\Omega\Pi_2} \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro abbiamo

$$5.10) \quad \vec{v}_{aE_1} - \vec{v}_{aE_2} = \vec{v}_{rE_1} - \vec{v}_{rE_2} + \vec{\omega}_\tau \times (\vec{\Omega\Pi_1} - \vec{\Omega\Pi_2})$$

Adesso invece consideriamo la velocità dei punti $\Pi_1^{\parallel}, \Pi_2^{\parallel}$ di R^{\parallel} rispetto a R^{\perp} . In base alla **4.10** si ha

$$5.10) \quad \begin{cases} \frac{d(\overline{\Omega\Pi_1^{\parallel}})}{dt} = \vec{v}_{rE_1} = \vec{v}_{\Omega^{\perp}} + \vec{\omega}_r \times \overline{\Omega\Pi_1^{\parallel}} \\ \frac{d(\overline{\Omega\Pi_2^{\parallel}})}{dt} = \vec{v}_{rE_2} = \vec{v}_{\Omega^{\perp}} + \vec{\omega}_r \times \overline{\Omega\Pi_2^{\parallel}} \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro abbiamo

$$5.11) \quad \vec{v}_{rE_1} - \vec{v}_{rE_2} = \vec{\omega}_r \times (\overline{\Omega\Pi_1^{\parallel}} - \overline{\Omega\Pi_2^{\parallel}})$$

Sostituendo la **5.11** nella **5.10** abbiamo

$$5.12) \quad \vec{v}_{aE_1} - \vec{v}_{aE_2} = \vec{\omega}_r \times (\overline{\Omega\Pi_1^{\parallel}} - \overline{\Omega\Pi_2^{\parallel}}) + \vec{\omega}_\tau \times (\vec{\Omega\Pi_1} - \vec{\Omega\Pi_2})$$

dove ho opportunamente introdotto la notazione di immagine per avere tutti vettori di R . consideriamo la velocità dei punti $\Pi_1^{\parallel}, \Pi_2^{\parallel}$ di R^{\parallel} rispetto a R . In base alla **4.10** si ha

$$5.13) \begin{cases} \frac{d(\overrightarrow{\Omega\Pi_1})}{dt} = \vec{v}_{aE_1} = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega}_a \times \overrightarrow{\Omega\Pi_1} \\ \frac{d(\overrightarrow{\Omega\Pi_2})}{dt} = \vec{v}_{aE_2} = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega}_a \times \overrightarrow{\Omega\Pi_2} \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro abbiamo

$$5.14) \vec{v}_{aE_1} - \vec{v}_{aE_2} = \vec{\omega}_a \times (\overrightarrow{\Omega\Pi_1} - \overrightarrow{\Omega\Pi_2})$$

Sostituendo la **5.14** nella **5.12** abbiamo allora

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_a \times (\overrightarrow{\Omega\Pi_1} - \overrightarrow{\Omega\Pi_2}) &= \vec{\omega}_r \times (\overrightarrow{\Omega^I\Pi_1^I} - \overrightarrow{\Omega^I\Pi_2^I}) + \vec{\omega}_\tau \times (\overrightarrow{\Omega\Pi_1} - \overrightarrow{\Omega\Pi_2}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \vec{\omega}_a \times (-\overrightarrow{\Pi_1\Omega} - \overrightarrow{\Omega\Pi_2}) &= \vec{\omega}_r \times (-\overrightarrow{\Pi_1^I\Omega^I} - \overrightarrow{\Omega^I\Pi_2^I}) + \vec{\omega}_\tau \times (-\overrightarrow{\Pi_1\Omega} - \overrightarrow{\Omega\Pi_2}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \vec{\omega}_a \times \overrightarrow{\Pi_1\Pi_2} &= \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{\Pi_1^I\Pi_2^I} + \vec{\omega}_\tau \times \overrightarrow{\Pi_1\Pi_2} \end{aligned}$$

Poiché poi evidentemente $\overrightarrow{\Pi_1^I\Pi_2^I} = \overrightarrow{\Pi_1\Pi_2}$ si ha in fine

$$(\vec{\omega}_a - \vec{\omega}_r - \vec{\omega}_\tau) \times \overrightarrow{\Pi_1\Pi_2} = 0 \quad \forall \Pi_1, \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{\omega}_a - \vec{\omega}_r - \vec{\omega}_\tau = 0$$

Tabella riassuntiva dei moti relativi		
5.3)	velocità assoluta dell'elemento	$\vec{v}_a = \vec{v}_\tau + \vec{v}_r$
5.2)	velocità di trascinamento	$\vec{v}_\tau = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega}_\tau \times \overrightarrow{\Omega\Pi}$
5.7)	accelerazione assoluta dell'elemento	$\vec{a}_a = \vec{a}_\tau + \vec{a}_r + \vec{a}_c$
5.5)	accelerazione di trascinamento	$\vec{a}_\tau = \vec{a}_\Omega + \frac{d\vec{\omega}_\tau(t)}{dt} \times \overrightarrow{\Omega\Pi} + \vec{\omega}_\tau \times (\vec{\omega}_\tau \times \overrightarrow{\Omega\Pi})$
5.6.b)	accelerazione di Coriolis	$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_\tau \times \vec{v}_r$
5.8)	velocità angolare assoluta di uno spazio	$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_\tau + \vec{\omega}_r$

Capitolo 6. Cinematica di moti rigidi notevoli

MOTO TRASLATORIO		
6.1)	definizione	Le tre funzioni $\tilde{\hat{e}}_1, \tilde{\hat{e}}_2, \tilde{\hat{e}}_3$ sono costanti
6.2)	velocità angolare	La velocità angolare di R^l rispetto a R è nulla
6.3)	atto di moto	$\vec{v}_\Pi(t) = \vec{v}_\Omega(t)$
6.4)	distribuzione delle accelerazioni	$\vec{a}_\Pi(t) = \vec{a}_\Omega(t)$
6.5)	moto relativo	$\vec{OP} = \vec{O\Omega} + \vec{\Omega\Pi}$ $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_\Omega$ $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_\Omega$
6.6)		

MOTO PIANO		
6.7)	definizione	Esiste un piano di R^l sempre sovrapposto a un piano di R . Tale piano è detto piano del moto.
6.8)	velocità angolare	La velocità angolare di R^l rispetto ad R è data da $\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_3$
6.9)	atto di moto	$\vec{v}_\Pi = \vec{v}_\Omega + \dot{\theta} \hat{e}_3 \times \vec{\Omega\Pi}$
6.10)	distribuzione delle accelerazioni	$\vec{a}_\Pi = \vec{a}_\Omega + \ddot{\theta} \hat{e}_3 \times \vec{\Omega\Pi} - \dot{\theta}^2 \vec{Q\Pi}$
6.11)	moto relativo	$\begin{cases} x = x_\Omega + \xi \cos \theta - \eta \sin \theta \\ y = y_\Omega + \xi \sin \theta + \eta \cos \theta \\ z = \zeta \end{cases}$ $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_\Omega + \dot{\theta} \hat{e}_3 \times \vec{\Omega\Pi}$ $\vec{a}_a = \vec{a}_\Omega + \vec{a}_r + 2\dot{\theta} \hat{e}_3 \times \vec{v}_r + \ddot{\theta} \hat{e}_3 \times \vec{\Omega\Pi} - \dot{\theta}^2 \vec{Q\Pi}$

6.12)	centro di istantanea rotazione	$\vec{0} = \vec{v}_\Omega + \dot{\theta} \hat{e}_3 \times \widetilde{\Omega C} \Rightarrow \overline{OC} = \overline{O\Omega} + \frac{\dot{\theta} \hat{e}_3 \times \vec{v}_\Omega}{\dot{\theta}^2}$
6.13)		

MOTO ROTATORIO		
6.14)	definizione	Esistono due punti di R^l in quiete rispetto R . L'asse passante per essi è detto asse di rotazione. E' un particolare moto piano.
6.15)	velocità angolare	La velocità angolare di R^l rispetto ad R è data da $\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_3$
6.16)	atto di moto	$\vec{v}_\Pi = \dot{\theta} \hat{e}_3 \times \widetilde{\Omega \Pi}$
6.17)	distribuzione delle accelerazioni	$\vec{a}_\Pi = \ddot{\theta} \hat{e}_3 \times \widetilde{\Omega \Pi} - \dot{\theta}^2 \widetilde{Q \Pi}$
6.18)	moto relativo	$\begin{cases} x = \xi \cos \theta - \eta \sin \theta \\ y = \xi \sin \theta + \eta \cos \theta \\ z = \zeta \end{cases}$ $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \dot{\theta} \hat{e}_3 \times \widetilde{\Omega \Pi}$ $\vec{a}_a = \vec{a}_a + 2\dot{\theta} \hat{e}_3 \times \vec{v}_r + \ddot{\theta} \hat{e}_3 \times \widetilde{\Omega \Pi} - \dot{\theta}^2 \widetilde{Q \Pi}$
6.19)		

MOTO SFERICO		
6.20)	definizione	Esiste un punto di R^1 sempre sovrapposto a un punto di R .
6.21)	sistema di riferimento	La posizione del sistema di riferimento mobile rispetto al sistema di riferimento fisso è individuata dalle due anomalie φ, ψ e dall'angolo θ^1
6.22)	relazioni fra i versori ²	$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{e}}_1 &= (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi) \mathbf{e}_1 + \\ &\quad + (\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \theta \cos \psi) \mathbf{e}_2 + \\ &\quad + (\sin \varphi \sin \theta) \mathbf{e}_3 \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 &= (-\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \cos \theta \sin \psi) \mathbf{e}_1 + \\ &\quad + (-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi) \mathbf{e}_2 + \\ &\quad + (\cos \varphi \sin \theta) \mathbf{e}_3 \\ \tilde{\mathbf{e}}_3 &= (\sin \theta \sin \psi) \mathbf{e}_1 + \\ &\quad + (-\sin \theta \cos \psi) \mathbf{e}_2 + (\cos \theta) \mathbf{e}_3\end{aligned}$
6.23)	velocità angolare nel sistema di riferimento mobile ³	$\begin{cases} \omega_\xi = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \\ \omega_\eta = -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \\ \omega_\zeta = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{cases}$
6.24)	velocità angolare nel sistema di riferimento fisso ⁴	$\begin{cases} \omega_x = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi \\ \omega_y = \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \\ \omega_z = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases}$
6.25)	atto di moto	$\vec{v}_\Pi = \vec{\omega} \times \widetilde{\Omega\Pi}$
6.26)	distribuzione delle accelerazioni	$\vec{a}_\Pi = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \widetilde{\Omega\Pi} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \widetilde{\Omega\Pi})$
6.27)	moto relativo	$\begin{aligned}\vec{v}_a &= \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \widetilde{\Omega\Pi} \\ \vec{a}_a &= \vec{a}_r + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \widetilde{\Omega\Pi} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \widetilde{\Omega\Pi}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r\end{aligned}$

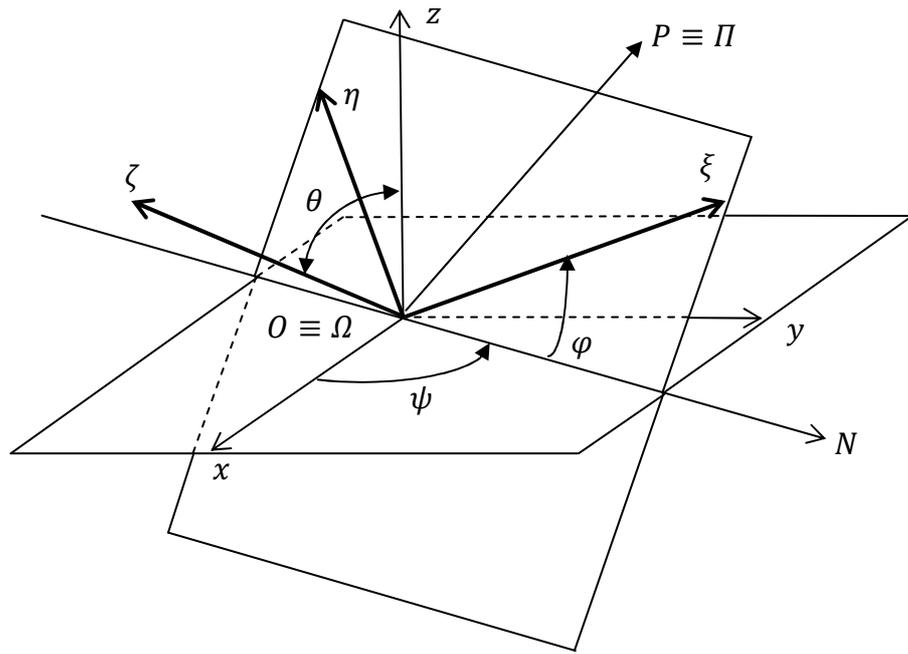
¹ Le anomalie sono angoli presi con segno. Il terzo angolo non richiede la specificazione di un segno in quanto è sufficiente la sua ampiezza a definire completamente la posizione del sistema di riferimento mobile.

² Queste relazioni si ricavano, con un po' di pazienza, osservando la figura.

³ Queste relazioni si ricavano utilizzando la formula 4.7.

⁴ Queste relazioni si ricavano sostituendo in quelle precedenti le espressioni trovate per i versori del sistema di riferimento mobile.

6.28)



Capitolo 7. Cinematica del generico moto rigido

7.1. I sistemi di riferimento. Fissiamo i seguenti sistemi di riferimento

terna fissa	$RC(\mathbf{O}; x, y, z) = RC(\mathbf{O}; \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$
terna con origine nel baricentro e orientamento invariabile rispetto alla terna fissa	$RC^l(\mathbf{G}; x^l, y^l, z^l) = RC^l(\mathbf{G}; \hat{e}_1^l, \hat{e}_2^l, \hat{e}_3^l)$
terna centrale di inerzia	$R\Gamma(\mathbf{G}; \xi, \eta, \zeta) = R\Gamma(\mathbf{G}; \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$
generica terna solidale al corpo rigido	$R\Gamma^l(\mathbf{G}; \xi^l, \eta^l, \zeta^l) = R\Gamma^l(\mathbf{G}; \hat{e}_1^l, \hat{e}_2^l, \hat{e}_3^l)$

7.2. La velocità angolare. Si rileva che

- 1) il moto di $R\Gamma$ rispetto RC^l è sferico di velocità angolare $\vec{\omega}_r = \omega_\xi \hat{e}_1 + \omega_\eta \hat{e}_2 + \omega_\zeta \hat{e}_3$
- 2) il moto di RC^l rispetto RC è traslatorio di velocità angolare $\vec{\omega}_\tau = \mathbf{0}$
- 3) il moto di $R\Gamma$ rispetto RC è rototraslatorio di velocità angolare $\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_\tau + \vec{\omega}_r = \vec{\omega}_r$
- 4) il moto di $R\Gamma^l$ rispetto RC^l è sferico di velocità angolare $\vec{\omega}_r^l = \omega_{\xi^l} \hat{e}_1^l + \omega_{\eta^l} \hat{e}_2^l + \omega_{\zeta^l} \hat{e}_3^l = \vec{\omega}_r$
- 5) il moto di $R\Gamma^l$ rispetto RC è rototraslatorio di velocità angolare $\vec{\omega}_a^l = \vec{\omega}_\tau + \vec{\omega}_r^l = \vec{\omega}_r^l$

In base a quanto visto nel capitolo 6 per il moto sferico si ha

$$7.1) \quad \begin{cases} \omega_\xi = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \\ \omega_\eta = -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \\ \omega_\zeta = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{cases}$$

essendo θ, φ, ψ gli angoli di Eulero che definiscono la posizione di $R\Gamma$ rispetto RC^l .

7.3. Il momento totale della quantità di moto. Considerando il moto assoluto, ovvero il moto del corpo rispetto RC , si dimostra che

$$7.2) \quad \vec{K}_\Omega = \mathcal{M} \vec{v}_\Omega \times \vec{G}\Omega + \begin{pmatrix} \hat{e}_1^l & \hat{e}_2^l & \hat{e}_3^l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^l} & -J_{\xi^l \eta^l} & -J_{\xi^l \zeta^l} \\ -J_{\xi^l \eta^l} & J_{\eta^l} & -J_{\eta^l \zeta^l} \\ -J_{\xi^l \zeta^l} & -J_{\eta^l \zeta^l} & J_{\zeta^l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{\xi^l} \\ \omega_{\eta^l} \\ \omega_{\zeta^l} \end{pmatrix}$$

essendo \mathcal{M} la massa del corpo. Infatti dalla definizione di momento totale della quantità di moto si ha

$$\begin{aligned}
\vec{K}_\Omega &= \int_V (\vec{v}(P) \times \overline{P\Omega}) \rho(P) dV = \int_V \left((\vec{v}(\Omega) + \vec{\omega}_a^l \times \overline{\Omega P}) \times \overline{P\Omega} \right) \rho(P) dV = \\
&= \int_V (\vec{v}(\Omega) \times \overline{P\Omega}) \rho(P) dV + \int_V \left((\vec{\omega}_a^l \times \overline{\Omega P}) \times \overline{P\Omega} \right) \rho(P) dV = \\
&= \vec{v}(\Omega) \times \int_V \overline{P\Omega} \rho(P) dV + \int_V \left((\vec{\omega}_a^l \cdot \overline{P\Omega}) \overline{\Omega P} - (\vec{\omega}_a^l \cdot \overline{\Omega P}) \vec{\omega}_a^l \right) \rho(P) dV = \\
&= \vec{v}(\Omega) \times \int_V \overline{P\Omega} \rho(P) dV + \int_V (\vec{\omega}_a^l \cdot \overline{P\Omega}) \overline{\Omega P} \rho(P) dV + \int_V (\overline{\Omega P} \cdot \overline{\Omega P}) \vec{\omega}_a^l \rho(P) dV = \\
&= \vec{v}(\Omega) \times \int_V \overline{P\Omega} \rho(P) dV + \int_V (\vec{\omega}_a^l \cdot \overline{P\Omega}) \overline{\Omega P} \rho(P) dV + \vec{\omega}_a^l \int_V |\overline{\Omega P}|^2 \rho(P) dV
\end{aligned}$$

Per il primo addendo si ha

$$\vec{v}(\Omega) \times \left(-\mathcal{M} \frac{\int_V \overline{\Omega P} \rho(P) dV}{\mathcal{M}} \right) = \vec{v}(\Omega) \times (-\mathcal{M} \overline{\Omega G}) = \vec{v}(\Omega) \times \mathcal{M} \overline{G\Omega}$$

Per il secondo e il terzo addendo si ha

$$\begin{aligned}
& - \int_V (\omega_{\xi^l} \xi^l + \omega_{\eta^l} \eta^l + \omega_{\zeta^l} \zeta^l) \overline{\Omega P} \rho(P) dV + \vec{\omega}_a^l \int_V (\xi^{l^2} + \eta^{l^2} + \zeta^{l^2}) \rho(P) dV = \\
&= - \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^l & \tilde{\varepsilon}_2^l & \tilde{\varepsilon}_3^l \end{pmatrix} \int_V (\omega_{\xi^l} \xi^l + \omega_{\eta^l} \eta^l + \omega_{\zeta^l} \zeta^l) \begin{pmatrix} \xi^l \\ \eta^l \\ \zeta^l \end{pmatrix} \rho(P) dV + \\
&+ \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^l & \tilde{\varepsilon}_2^l & \tilde{\varepsilon}_3^l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{\xi^l} \\ \omega_{\eta^l} \\ \omega_{\zeta^l} \end{pmatrix} \int_V (\xi^{l^2} + \eta^{l^2} + \zeta^{l^2}) \rho(P) dV = \\
&= - \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^l & \tilde{\varepsilon}_2^l & \tilde{\varepsilon}_3^l \end{pmatrix} \int_V \begin{pmatrix} \omega_{\xi^l} \xi^{l^2} + \omega_{\eta^l} \xi^l \eta^l + \omega_{\zeta^l} \xi^l \zeta^l \\ \omega_{\xi^l} \xi^l \eta^l + \omega_{\eta^l} \eta^{l^2} + \omega_{\zeta^l} \eta^l \zeta^l \\ \omega_{\xi^l} \xi^l \zeta^l + \omega_{\eta^l} \eta^l \zeta^l + \omega_{\zeta^l} \zeta^{l^2} \end{pmatrix} \rho(P) dV + \\
&+ \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^l & \tilde{\varepsilon}_2^l & \tilde{\varepsilon}_3^l \end{pmatrix} \int_V \begin{pmatrix} \omega_{\xi^l} \xi^{l^2} + \omega_{\eta^l} \eta^{l^2} + \omega_{\zeta^l} \zeta^{l^2} \\ \omega_{\eta^l} \xi^l \eta^l + \omega_{\eta^l} \eta^{l^2} + \omega_{\eta^l} \zeta^l \eta^l \\ \omega_{\zeta^l} \xi^l \zeta^l + \omega_{\zeta^l} \eta^l \zeta^l + \omega_{\zeta^l} \zeta^{l^2} \end{pmatrix} \rho(P) dV = \\
&= \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^l & \tilde{\varepsilon}_2^l & \tilde{\varepsilon}_3^l \end{pmatrix} \int_V \begin{pmatrix} -\omega_{\eta^l} \xi^l \eta^l - \omega_{\zeta^l} \xi^l \zeta^l + (\omega_{\xi^l} \eta^{l^2} + \omega_{\xi^l} \zeta^{l^2}) \\ -\omega_{\xi^l} \xi^l \eta^l - \omega_{\zeta^l} \eta^l \zeta^l + (\omega_{\eta^l} \xi^{l^2} + \omega_{\eta^l} \zeta^{l^2}) \\ -\omega_{\xi^l} \xi^l \zeta^l - \omega_{\eta^l} \eta^l \zeta^l + (\omega_{\zeta^l} \xi^{l^2} + \omega_{\zeta^l} \eta^{l^2}) \end{pmatrix} \rho(P) dV = \\
&= \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^l & \tilde{\varepsilon}_2^l & \tilde{\varepsilon}_3^l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - \int_V (\omega_{\eta^l} \xi^l \eta^l + \omega_{\zeta^l} \xi^l \zeta^l) \rho(P) dV + \int_V (\omega_{\xi^l} \eta^{l^2} + \omega_{\xi^l} \zeta^{l^2}) \rho(P) dV \\ - \int_V (\omega_{\xi^l} \xi^l \eta^l + \omega_{\zeta^l} \eta^l \zeta^l) \rho(P) dV + \int_V (\omega_{\eta^l} \xi^{l^2} + \omega_{\eta^l} \zeta^{l^2}) \rho(P) dV \\ - \int_V (\omega_{\xi^l} \xi^l \zeta^l + \omega_{\eta^l} \eta^l \zeta^l) \rho(P) dV + \int_V (\omega_{\zeta^l} \xi^{l^2} + \omega_{\zeta^l} \eta^{l^2}) \rho(P) dV \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ricordando la definizione di momento di inerzia e di momento misto di inerzia, si ha la **7.2**. Se in particolare prendiamo come polo del momento totale della quantità di moto il baricentro G del corpo, la **7.2** porge

$$7.3) \quad \vec{K}_G = \begin{pmatrix} \tilde{\hat{\varepsilon}}_1 & \tilde{\hat{\varepsilon}}_2 & \tilde{\hat{\varepsilon}}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^1} & -J_{\xi^1\eta^1} & -J_{\xi^1\zeta^1} \\ -J_{\xi^1\eta^1} & J_{\eta^1} & -J_{\eta^1\zeta^1} \\ -J_{\xi^1\zeta^1} & -J_{\eta^1\zeta^1} & J_{\zeta^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{\xi^1} \\ \omega_{\eta^1} \\ \omega_{\zeta^1} \end{pmatrix}$$

Considerando poi il moto relativo al baricentro, ovvero il moto rispetto al sistema di riferimento RC^1 , in base alla **3.39** (dimostrata per i sistemi di elementi e dunque valida, in particolare, per i corpi rigidi) abbiamo

$$7.4) \quad \widetilde{\vec{K}}^G = \vec{K}_G = \begin{pmatrix} \tilde{\hat{\varepsilon}}_1 & \tilde{\hat{\varepsilon}}_2 & \tilde{\hat{\varepsilon}}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^1} & -J_{\xi^1\eta^1} & -J_{\xi^1\zeta^1} \\ -J_{\xi^1\eta^1} & J_{\eta^1} & -J_{\eta^1\zeta^1} \\ -J_{\xi^1\zeta^1} & -J_{\eta^1\zeta^1} & J_{\zeta^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{\xi^1} \\ \omega_{\eta^1} \\ \omega_{\zeta^1} \end{pmatrix}$$

essendo appunto $\widetilde{\vec{K}}^G$ il momento totale della quantità di moto del moto relativo al baricentro, ovvero del moto sferico rispetto a RC^1 . Si ricorda (vedi equazione **3.38**) che nel moto relativo al baricentro il momento totale della quantità di moto è indipendente dal polo rispetto al quale lo si calcola.

Se in particolare il sistema di riferimento $R\Gamma^1(\Omega; \xi^1, \eta^1, \zeta^1) = R\Gamma^1(\Omega; \hat{\varepsilon}_1^1, \hat{\varepsilon}_2^1, \hat{\varepsilon}_3^1)$, che abbiamo detto essere un generico sistema di riferimento solidale al corpo rigido, coincide con la terna centrale di inerzia $R\Gamma(G; \xi, \eta, \zeta) = R\Gamma(G; \hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \hat{\varepsilon}_3)$, allora la **7.2** si scrive

$$7.5) \quad \vec{K}_G = \mathcal{M} \vec{v}_\Omega \times \overline{G\Omega} + \begin{pmatrix} \tilde{\hat{\varepsilon}}_1 & \tilde{\hat{\varepsilon}}_2 & \tilde{\hat{\varepsilon}}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix}$$

e la **7.4** diventa

$$7.6) \quad \widetilde{\vec{K}}^G = \vec{K}_G = \begin{pmatrix} \tilde{\hat{\varepsilon}}_1 & \tilde{\hat{\varepsilon}}_2 & \tilde{\hat{\varepsilon}}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} = J_\xi \omega_\xi \tilde{\hat{\varepsilon}}_1 + J_\eta \omega_\eta \tilde{\hat{\varepsilon}}_2 + J_\zeta \omega_\zeta \tilde{\hat{\varepsilon}}_3$$

7.4. Derivata del momento totale della quantità di moto. Derivando nel tempo la **7.2** si ha

$$7.7) \quad \dot{\vec{K}}_\Omega = (\mathcal{M} \vec{a}_\Omega \times \overline{G\Omega}) + \mathcal{M} \vec{v}_G \times \vec{v}_\Omega + \vec{\omega}_a \times \begin{pmatrix} \tilde{\hat{\varepsilon}}_1 & \tilde{\hat{\varepsilon}}_2 & \tilde{\hat{\varepsilon}}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^1} & -J_{\xi^1\eta^1} & -J_{\xi^1\zeta^1} \\ -J_{\xi^1\eta^1} & J_{\eta^1} & -J_{\eta^1\zeta^1} \\ -J_{\xi^1\zeta^1} & -J_{\eta^1\zeta^1} & J_{\zeta^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{\xi^1} \\ \omega_{\eta^1} \\ \omega_{\zeta^1} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \tilde{\hat{\varepsilon}}_1 & \tilde{\hat{\varepsilon}}_2 & \tilde{\hat{\varepsilon}}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^1} & -J_{\xi^1\eta^1} & -J_{\xi^1\zeta^1} \\ -J_{\xi^1\eta^1} & J_{\eta^1} & -J_{\eta^1\zeta^1} \\ -J_{\xi^1\zeta^1} & -J_{\eta^1\zeta^1} & J_{\zeta^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{\xi^1} \\ \dot{\omega}_{\eta^1} \\ \dot{\omega}_{\zeta^1} \end{pmatrix}$$

Sviluppando i calcoli (vedi l'ultimo paragrafo per i dettagli) nel secondo e terzo addendo abbiamo

$$7.7.bis) \quad \dot{\vec{K}}_\Omega = (\mathcal{M} \vec{a}_\Omega \times \overline{G\Omega}) + \mathcal{M} \vec{v}_G \times \vec{v}_\Omega +$$

$$+ \begin{pmatrix} \tilde{\hat{\varepsilon}}_1 & \tilde{\hat{\varepsilon}}_2 & \tilde{\hat{\varepsilon}}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -J_{\xi^1\zeta^1} \omega_{\xi^1} \omega_{\eta^1} + J_{\eta^1\zeta^1} (\omega_{\zeta^1}^2 - \omega_{\eta^1}^2) + (J_{\zeta^1} - J_{\eta^1}) \omega_{\eta^1} \omega_{\zeta^1} + J_{\xi^1\eta^1} \omega_{\xi^1} \omega_{\zeta^1} + J_{\xi^1} \dot{\omega}_{\xi^1} - J_{\xi^1\eta^1} \dot{\omega}_{\eta^1} - J_{\xi^1\zeta^1} \dot{\omega}_{\zeta^1} \\ (J_{\xi^1} - J_{\zeta^1}) \omega_{\xi^1} \omega_{\zeta^1} - J_{\xi^1\eta^1} \omega_{\eta^1} \omega_{\zeta^1} + J_{\xi^1\zeta^1} (\omega_{\xi^1}^2 - \omega_{\zeta^1}^2) + J_{\eta^1\zeta^1} \omega_{\xi^1} \omega_{\eta^1} - J_{\xi^1\eta^1} \dot{\omega}_{\xi^1} + J_{\eta^1} \dot{\omega}_{\eta^1} - J_{\eta^1\zeta^1} \dot{\omega}_{\zeta^1} \\ (J_{\eta^1} - J_{\xi^1}) \omega_{\xi^1} \omega_{\eta^1} - J_{\eta^1\zeta^1} \omega_{\xi^1} \omega_{\zeta^1} + J_{\xi^1\eta^1} (\omega_{\eta^1}^2 - \omega_{\xi^1}^2) + J_{\xi^1\zeta^1} \omega_{\eta^1} \omega_{\zeta^1} - J_{\xi^1\zeta^1} \dot{\omega}_{\xi^1} - J_{\eta^1\zeta^1} \dot{\omega}_{\eta^1} + J_{\zeta^1} \dot{\omega}_{\zeta^1} \end{pmatrix}$$

Se il polo è il baricentro si ha in particolare

$$7.8) \quad \dot{\vec{K}}_G = \dot{\vec{K}}^G = \vec{\omega}_a \times \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^| & \tilde{\varepsilon}_2^| & \tilde{\varepsilon}_3^| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^|} & -J_{\xi^|\eta^|} & -J_{\xi^|\zeta^|} \\ -J_{\xi^|\eta^|} & J_{\eta^|} & -J_{\eta^|\zeta^|} \\ -J_{\xi^|\zeta^|} & -J_{\eta^|\zeta^|} & J_{\zeta^|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{\xi^|} \\ \omega_{\eta^|} \\ \omega_{\zeta^|} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^| & \tilde{\varepsilon}_2^| & \tilde{\varepsilon}_3^| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^|} & -J_{\xi^|\eta^|} & -J_{\xi^|\zeta^|} \\ -J_{\xi^|\eta^|} & J_{\eta^|} & -J_{\eta^|\zeta^|} \\ -J_{\xi^|\zeta^|} & -J_{\eta^|\zeta^|} & J_{\zeta^|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{\xi^|} \\ \dot{\omega}_{\eta^|} \\ \dot{\omega}_{\zeta^|} \end{pmatrix}$$

che, tenendo presente la 7.4, si può scrivere più brevemente

$$7.9) \quad \dot{\vec{K}}_G = \dot{\vec{K}}^G = \vec{\omega}_a \times \vec{K}^G + \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^| & \tilde{\varepsilon}_2^| & \tilde{\varepsilon}_3^| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^|} & -J_{\xi^|\eta^|} & -J_{\xi^|\zeta^|} \\ -J_{\xi^|\eta^|} & J_{\eta^|} & -J_{\eta^|\zeta^|} \\ -J_{\xi^|\zeta^|} & -J_{\eta^|\zeta^|} & J_{\zeta^|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{\xi^|} \\ \dot{\omega}_{\eta^|} \\ \dot{\omega}_{\zeta^|} \end{pmatrix}$$

Se in particolare il sistema di riferimento $R\Gamma^|(\Omega; \xi^|, \eta^|, \zeta^|) = R\Gamma^|(\Omega; \hat{\varepsilon}_1^|, \hat{\varepsilon}_2^|, \hat{\varepsilon}_3^|)$, che abbiamo detto essere un generico sistema di riferimento solidale al corpo rigido, coincide con la terna centrale di inerzia $R\Gamma(G; \xi, \eta, \zeta) = R\Gamma(G; \hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \hat{\varepsilon}_3)$, allora la 7.7 si scrive

$$7.10) \quad \dot{\vec{K}}_\Omega = (\mathcal{M} \vec{a}_\Omega \times \vec{G}\Omega) + \mathcal{M} \vec{v}_G \times \vec{v}_\Omega + \vec{\omega}_a \times \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1 & \tilde{\varepsilon}_2 & \tilde{\varepsilon}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_\xi \\ \dot{\omega}_\eta \\ \dot{\omega}_\zeta \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1 & \tilde{\varepsilon}_2 & \tilde{\varepsilon}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix}$$

e la 7.9 si scrive

$$7.11) \quad \dot{\vec{K}}_G = \dot{\vec{K}}^G = \vec{\omega}_a \times \vec{K}^G + \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1 & \tilde{\varepsilon}_2 & \tilde{\varepsilon}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_\xi \\ \dot{\omega}_\eta \\ \dot{\omega}_\zeta \end{pmatrix}$$

7.5. \vec{K}^G e l'ellissoide centrale di inerzia. Si dimostra che

- *il momento totale della quantità di moto calcolato rispetto al baricentro, ovvero il momento totale della quantità di moto del moto relativo al baricentro, è ortogonale alla superficie dell'ellissoide di inerzia relativo a G, nel punto in cui tale superficie è intercettata dal vettore $\vec{\omega}_a$ applicato nel baricentro.*

Per dimostrare questa affermazione consideriamo intanto che l'equazione cartesiana dell'ellissoide centrale di inerzia, rispetto alla terna centrale di inerzia $R\Gamma(G; \xi, \eta, \zeta)$ si scrive

$$7.12) \quad J_\xi \xi^2 + J_\eta \eta^2 + J_\zeta \zeta^2 = \chi \Leftrightarrow \frac{\xi^2}{\chi/J_\xi} + \frac{\eta^2}{\chi/J_\eta} + \frac{\zeta^2}{\chi/J_\zeta} = 1 \Leftrightarrow \frac{\xi^2}{\chi/J_\xi} + \frac{\eta^2}{\chi/J_\eta} + \frac{\zeta^2}{\chi/J_\zeta} - 1 = 0$$

dove χ è un qualunque numero reale positivo avente le dimensioni fisiche del prodotto di un momento di inerzia per una lunghezza al quadrato. La scrittura parametrica, in coordinate polari, di questa equazione (vedi le tue sintesi di geometria analitica) si scrive

$$7.13) \quad \rho(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{\chi/I_\zeta} + \sin^2 \theta \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\chi/I_\xi} + \frac{\sin^2 \varphi}{\chi/I_\eta} \right)}}$$

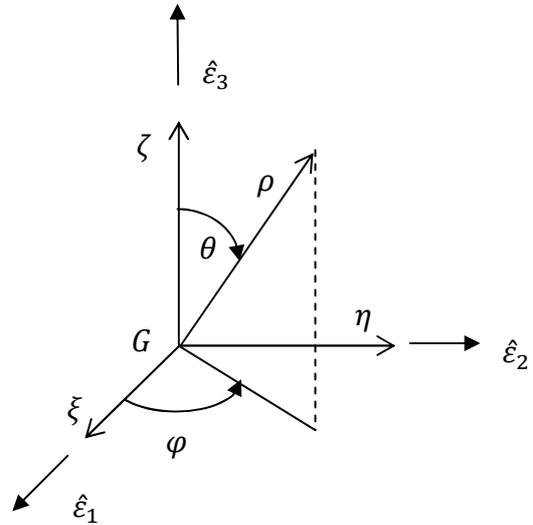
$$\begin{cases} \theta \in [0, \pi] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Ricavo ora i valori delle coordinate angolari che individuano la posizione della retta orientata la quale passi per G e abbia direzione e verso definiti dal vettore $\vec{\omega}_a$. Tenendo presente che

$$\vec{\omega}_a = \omega_\xi \tilde{\hat{e}}_1 + \omega_\eta \tilde{\hat{e}}_2 + \omega_\zeta \tilde{\hat{e}}_3$$

segue

$$7.14) \quad \begin{cases} \omega_\xi = \omega_a \sin \theta \cos \varphi \\ \omega_\eta = \omega_a \sin \theta \sin \varphi \\ \omega_\zeta = \omega_a \cos \theta \end{cases}$$



Sommando membro a membro i quadrati delle prime due delle **7.14**abbiamo

$$\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 = \omega_a^2 (\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) = \omega_a^2 \sin^2 \theta \Rightarrow$$

$$7.15) \quad \sin^2 \theta = \frac{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2}{\omega_a^2}$$

Dalla terza delle **7.14**abbiamo subito

$$7.16) \quad \cos^2 \theta = \frac{\omega_\zeta^2}{\omega_a^2}$$

Sostituendo poi le **7.15**, **7.16**nei quadrati delle prime due **7.14**rispettivamente, si ha

$$7.17) \quad \begin{cases} \omega_\xi^2 = \omega_a^2 \frac{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2}{\omega_a^2} \cos^2 \varphi \\ \omega_\eta^2 = \omega_a^2 \frac{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2}{\omega_a^2} \sin^2 \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 \varphi = \frac{\omega_\xi^2}{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2} \\ \sin^2 \varphi = \frac{\omega_\eta^2}{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2} \end{cases}$$

Inoltre dalle **7.14**si ha subito

$$7.18) \quad \begin{cases} \sin \theta \cos \varphi = \frac{\omega_\xi}{\omega_a} \\ \sin \theta \sin \varphi = \frac{\omega_\eta}{\omega_a} \\ \cos \theta = \frac{\omega_\zeta}{\omega_a} \end{cases}$$

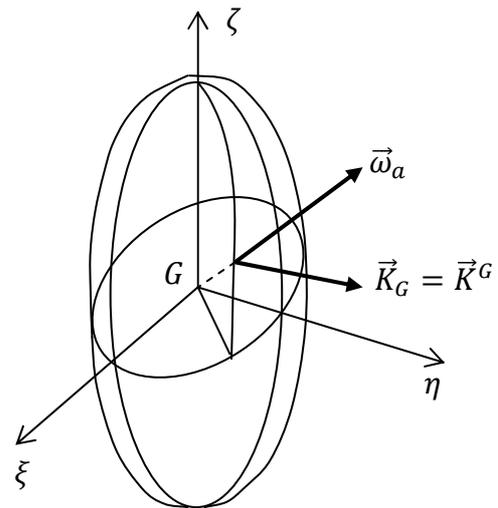
Sostituendo le **7.15**, **7.16**, **7.17** nella **7.13** abbiamo che $\vec{\omega}_a$ (applicata in G) intercetta l'ellissoide centrale di inerzia in un punto a cui corrisponde un raggio vettore di lunghezza

$$7.19) \quad \rho = \frac{\omega_a}{\sqrt{\frac{\omega_\xi^2}{\chi/J_\zeta} + (\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) \left(\frac{\omega_\xi^2}{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2} \frac{\omega_\eta^2}{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2} \right) \left(\frac{\chi/J_\xi}{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2} + \frac{\chi/J_\eta}{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2} \right)}}$$

Considerando poi le **7.18** con la **7.19** abbiamo che il punto di intersezione fra $\vec{\omega}_a$ (applicata in G) e l'ellissoide ha coordinate

$$\begin{cases} \xi = \rho \sin \theta \cos \varphi = \rho \frac{\omega_\xi}{\omega_a} \\ \eta = \rho \sin \theta \sin \varphi = \rho \frac{\omega_\eta}{\omega_a} \\ \zeta = \rho \cos \theta = \rho \frac{\omega_\zeta}{\omega_a} \end{cases} \Rightarrow$$

$$7.20) \quad \begin{cases} \xi = \frac{\omega_\xi}{\sqrt{\frac{\omega_\xi^2}{\chi/J_\zeta} + (\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) \left(\frac{\omega_\xi^2}{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2} \frac{\omega_\eta^2}{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2} \right) \left(\frac{\chi/J_\xi}{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2} + \frac{\chi/J_\eta}{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2} \right)}} \\ \eta = \frac{\omega_\eta}{\sqrt{\frac{\omega_\xi^2}{\chi/J_\zeta} + (\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) \left(\frac{\omega_\xi^2}{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2} \frac{\omega_\eta^2}{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2} \right) \left(\frac{\chi/J_\xi}{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2} + \frac{\chi/J_\eta}{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2} \right)}} \\ \zeta = \frac{\omega_\zeta}{\sqrt{\frac{\omega_\xi^2}{\chi/J_\zeta} + (\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) \left(\frac{\omega_\xi^2}{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2} \frac{\omega_\eta^2}{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2} \right) \left(\frac{\chi/J_\xi}{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2} + \frac{\chi/J_\eta}{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2} \right)}} \end{cases} = \begin{cases} \xi = \omega_\xi / R \\ \eta = \omega_\eta / R \\ \zeta = \omega_\zeta / R \end{cases}$$



Calcolo ora il piano tangente all'ellissoide in tale punto. A tale scopo considero l'equazione cartesiana **7.12** la quale porge per il piano tangente relativo al generico punto (ξ_0, η_0, ζ_0) l'equazione

$$2 \frac{\xi_0}{\chi/J_\xi} (\xi - \xi_0) + 2 \frac{\eta_0}{\chi/J_\eta} (\eta - \eta_0) + 2 \frac{\zeta_0}{\chi/J_\zeta} (\zeta - \zeta_0) = 0 \Leftrightarrow \xi_0 J_\xi (\xi - \xi_0) + \eta_0 J_\eta (\eta - \eta_0) + \zeta_0 J_\zeta (\zeta - \zeta_0) = 0$$

Un vettore perpendicolare a tale piano risulta essere dato da

$$\vec{v} = \xi_0 J_\xi \tilde{\epsilon}_1 + \eta_0 J_\eta \tilde{\epsilon}_2 + \zeta_0 J_\zeta \tilde{\epsilon}_3$$

Il valore di tale vettore nel punto **7.20** è dunque

$$7.17) \quad \vec{v} = \frac{\omega_\xi J_\xi}{R} \tilde{\hat{e}}_1 + \frac{\omega_\eta J_\eta}{R} \tilde{\hat{e}}_2 + \frac{\omega_\zeta J_\zeta}{R} \tilde{\hat{e}}_3$$

Ma questo vettore è parallelo a $\vec{K}^G = \vec{K}_G = J_\xi \omega_\xi \tilde{\hat{e}}_1 + J_\eta \omega_\eta \tilde{\hat{e}}_2 + J_\zeta \omega_\zeta \tilde{\hat{e}}_3$ (equazione 7.6) e dunque la tesi è dimostra.

7.6. Momento totale della quantità di moto nel moto sferico.

Si dimostra che

- *nel caso di moto sferico di centro Ω , il momento totale della quantità di moto calcolato rispetto al polo Ω risulta ortogonale alla superficie dell'ellissoide di inerzia relativo al punto Ω , nel punto in cui esso è intercettato dall'asse di istantanea rotazione.*

Sia infatti $RC(O; x, y, z)$ il sistema di riferimento fisso e $RF(\Omega; \xi, \eta, \zeta)$ il sistema di riferimento principale di inerzia relativo al punto Ω , centro del moto costantemente sovrapposto a Ω . Allora, in base alla 7.5, il momento totale della quantità di moto rispetto al polo Ω si scrive

$$7.18) \quad \vec{K}_\Omega = \begin{pmatrix} \tilde{\hat{e}}_1 & \tilde{\hat{e}}_2 & \tilde{\hat{e}}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} = J_\xi \omega_\xi \tilde{\hat{e}}_1 + J_\eta \omega_\eta \tilde{\hat{e}}_2 + J_\zeta \omega_\zeta \tilde{\hat{e}}_3$$

Mentre l'ellissoide di inerzia relativo al punto Ω , rispetto agli assi principali di inerzia ha equazione

$$7.19) \quad J_\xi \xi^2 + J_\eta \eta^2 + J_\zeta \zeta^2 = \chi$$

Quindi, come si vede, ci troviamo in una condizione formalmente analoga a quella discussa nel paragrafo precedente. Ne segue la tesi.

7.7. Appendice matematica.

In questo paragrafo riporto i calcoli attraverso i quali si sviluppa l'espressione 7.7 della derivata del momento totale della quantità di moto, nella 7.7.bis. Il secondo addendo della 7.7 si scrive

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \tilde{\hat{e}}_1 & \tilde{\hat{e}}_2 & \tilde{\hat{e}}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{\hat{e}}_1 & \tilde{\hat{e}}_2 & \tilde{\hat{e}}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_\xi & -J_{\xi|\eta} & -J_{\xi|\zeta} \\ -J_{\xi|\eta} & J_\eta & -J_{\eta|\zeta} \\ -J_{\xi|\zeta} & -J_{\eta|\zeta} & J_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \tilde{\hat{e}}_1 & \tilde{\hat{e}}_2 & \tilde{\hat{e}}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{\hat{e}}_1 & \tilde{\hat{e}}_2 & \tilde{\hat{e}}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_\xi \omega_\xi - J_{\xi|\eta} \omega_\eta - J_{\xi|\zeta} \omega_\zeta \\ -J_{\xi|\eta} \omega_\xi + J_\eta \omega_\eta - J_{\eta|\zeta} \omega_\zeta \\ -J_{\xi|\zeta} \omega_\xi - J_{\eta|\zeta} \omega_\eta + J_\zeta \omega_\zeta \end{pmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} \tilde{\hat{e}}_1 & \tilde{\hat{e}}_2 & \tilde{\hat{e}}_3 \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ J_\xi \omega_\xi - J_{\xi|\eta} \omega_\eta - J_{\xi|\zeta} \omega_\zeta & -J_{\xi|\eta} \omega_\xi + J_\eta \omega_\eta - J_{\eta|\zeta} \omega_\zeta & -J_{\xi|\zeta} \omega_\xi - J_{\eta|\zeta} \omega_\eta + J_\zeta \omega_\zeta \end{vmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \tilde{\hat{e}}_1 & \tilde{\hat{e}}_2 & \tilde{\hat{e}}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -J_{\xi|\zeta} \omega_\xi \omega_\eta - J_{\eta|\zeta} \omega_\eta^2 + J_\zeta \omega_\zeta \omega_\eta + J_{\xi|\eta} \omega_\xi \omega_\zeta - J_{\eta|\zeta} \omega_\eta \omega_\zeta + J_{\eta|\zeta} \omega_\zeta^2 \\ J_\xi \omega_\xi \omega_\zeta - J_{\xi|\eta} \omega_\eta \omega_\zeta - J_{\xi|\zeta} \omega_\zeta^2 + J_{\xi|\zeta} \omega_\xi^2 + J_{\eta|\zeta} \omega_\eta \omega_\xi - J_\zeta \omega_\zeta \omega_\xi \\ -J_{\xi|\eta} \omega_\xi^2 + J_\eta \omega_\xi \omega_\eta - J_{\eta|\zeta} \omega_\xi \omega_\zeta - J_\xi \omega_\xi \omega_\eta + J_{\xi|\eta} \omega_\eta^2 + J_{\xi|\zeta} \omega_\eta \omega_\zeta \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \tilde{\hat{e}}_1 & \tilde{\hat{e}}_2 & \tilde{\hat{e}}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -J_{\xi|\zeta} \omega_\xi \omega_\eta - J_{\eta|\zeta} \omega_\eta^2 + (J_\zeta - J_\eta) \omega_\eta \omega_\zeta + J_{\xi|\eta} \omega_\xi \omega_\zeta + J_{\eta|\zeta} \omega_\zeta^2 \\ (J_\xi - J_\zeta) \omega_\xi \omega_\zeta - J_{\xi|\eta} \omega_\eta \omega_\zeta - J_{\xi|\zeta} \omega_\zeta^2 + J_{\xi|\zeta} \omega_\xi^2 + J_{\eta|\zeta} \omega_\xi \omega_\eta \\ -J_{\xi|\eta} \omega_\xi^2 + (J_\eta - J_\xi) \omega_\xi \omega_\eta - J_{\eta|\zeta} \omega_\xi \omega_\zeta + J_{\xi|\eta} \omega_\eta^2 + J_{\xi|\zeta} \omega_\eta \omega_\zeta \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^1 & \tilde{\varepsilon}_2^1 & \tilde{\varepsilon}_3^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -J_{\xi|\zeta^1} \omega_{\xi^1} \omega_{\eta^1} + J_{\eta^1|\zeta^1} (\omega_{\zeta^1}^2 - \omega_{\eta^1}^2) + (J_{\zeta^1} - J_{\eta^1}) \omega_{\eta^1} \omega_{\zeta^1} + J_{\xi^1|\eta^1} \omega_{\xi^1} \omega_{\zeta^1} \\ (J_{\xi^1} - J_{\zeta^1}) \omega_{\xi^1} \omega_{\zeta^1} - J_{\xi^1|\eta^1} \omega_{\eta^1} \omega_{\zeta^1} + J_{\xi^1|\zeta^1} (\omega_{\xi^1}^2 - \omega_{\zeta^1}^2) + J_{\eta^1|\zeta^1} \omega_{\xi^1} \omega_{\eta^1} \\ (J_{\eta^1} - J_{\xi^1}) \omega_{\xi^1} \omega_{\eta^1} - J_{\eta^1|\zeta^1} \omega_{\xi^1} \omega_{\zeta^1} + J_{\xi^1|\eta^1} (\omega_{\eta^1}^2 - \omega_{\xi^1}^2) + J_{\xi^1|\zeta^1} \omega_{\eta^1} \omega_{\zeta^1} \end{pmatrix}$$

Il terzo addendo si scrive

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^1 & \tilde{\varepsilon}_2^1 & \tilde{\varepsilon}_3^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^1} & -J_{\xi^1|\eta^1} & -J_{\xi^1|\zeta^1} \\ -J_{\xi^1|\eta^1} & J_{\eta^1} & -J_{\eta^1|\zeta^1} \\ -J_{\xi^1|\zeta^1} & -J_{\eta^1|\zeta^1} & J_{\zeta^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{\xi^1} \\ \dot{\omega}_{\eta^1} \\ \dot{\omega}_{\zeta^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^1 & \tilde{\varepsilon}_2^1 & \tilde{\varepsilon}_3^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^1} \dot{\omega}_{\xi^1} - J_{\xi^1|\eta^1} \dot{\omega}_{\eta^1} - J_{\xi^1|\zeta^1} \dot{\omega}_{\zeta^1} \\ -J_{\xi^1|\eta^1} \dot{\omega}_{\xi^1} + J_{\eta^1} \dot{\omega}_{\eta^1} - J_{\eta^1|\zeta^1} \dot{\omega}_{\zeta^1} \\ -J_{\xi^1|\zeta^1} \dot{\omega}_{\xi^1} - J_{\eta^1|\zeta^1} \dot{\omega}_{\eta^1} + J_{\zeta^1} \dot{\omega}_{\zeta^1} \end{pmatrix}$$

Dunque in definitiva si ha

$$\begin{aligned} \dot{\vec{K}}_{\Omega} &= (\mathcal{M} \vec{a}_{\Omega} \times \vec{G}\Omega) + \\ &+ \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^1 & \tilde{\varepsilon}_2^1 & \tilde{\varepsilon}_3^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -J_{\xi^1|\zeta^1} \omega_{\xi^1} \omega_{\eta^1} + J_{\eta^1|\zeta^1} (\omega_{\zeta^1}^2 - \omega_{\eta^1}^2) + (J_{\zeta^1} - J_{\eta^1}) \omega_{\eta^1} \omega_{\zeta^1} + J_{\xi^1|\eta^1} \omega_{\xi^1} \omega_{\zeta^1} + J_{\xi^1} \dot{\omega}_{\xi^1} - J_{\xi^1|\eta^1} \dot{\omega}_{\eta^1} - J_{\xi^1|\zeta^1} \dot{\omega}_{\zeta^1} \\ (J_{\xi^1} - J_{\zeta^1}) \omega_{\xi^1} \omega_{\zeta^1} - J_{\xi^1|\eta^1} \omega_{\eta^1} \omega_{\zeta^1} + J_{\xi^1|\zeta^1} (\omega_{\xi^1}^2 - \omega_{\zeta^1}^2) + J_{\eta^1|\zeta^1} \omega_{\xi^1} \omega_{\eta^1} - J_{\xi^1|\eta^1} \dot{\omega}_{\xi^1} + J_{\eta^1} \dot{\omega}_{\eta^1} - J_{\eta^1|\zeta^1} \dot{\omega}_{\zeta^1} \\ (J_{\eta^1} - J_{\xi^1}) \omega_{\xi^1} \omega_{\eta^1} - J_{\eta^1|\zeta^1} \omega_{\xi^1} \omega_{\zeta^1} + J_{\xi^1|\eta^1} (\omega_{\eta^1}^2 - \omega_{\xi^1}^2) + J_{\xi^1|\zeta^1} \omega_{\eta^1} \omega_{\zeta^1} - J_{\xi^1|\zeta^1} \dot{\omega}_{\xi^1} - J_{\eta^1|\zeta^1} \dot{\omega}_{\eta^1} + J_{\zeta^1} \dot{\omega}_{\zeta^1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

GENERICO MOTO RIGIDO	
terna fissa	$RC(\mathbf{O}; \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = RC(\mathbf{O}; \hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$
terna con origine nel baricentro e orientamento invariabile rispetto alla terna fissa	$RC^l(\mathbf{G}; \mathbf{x}^l, \mathbf{y}^l, \mathbf{z}^l) = RC^l(\mathbf{G}; \hat{\mathbf{e}}_1^l, \hat{\mathbf{e}}_2^l, \hat{\mathbf{e}}_3^l)$
terna centrale di inerzia	$RF(\mathbf{G}; \xi, \eta, \zeta) = RF(\mathbf{G}; \hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$
generica terna solidale al corpo rigido	$RF^l(\Omega; \xi^l, \eta^l, \zeta^l) = RF^l(\Omega; \hat{\mathbf{e}}_1^l, \hat{\mathbf{e}}_2^l, \hat{\mathbf{e}}_3^l)$
momento totale della quantità di moto	$\vec{K}_{\Omega} = \mathcal{M} \vec{v}_{\Omega} \times \vec{G}\Omega + \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^1 & \tilde{\varepsilon}_2^1 & \tilde{\varepsilon}_3^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^1} & -J_{\xi^1 \eta^1} & -J_{\xi^1 \zeta^1} \\ -J_{\xi^1 \eta^1} & J_{\eta^1} & -J_{\eta^1 \zeta^1} \\ -J_{\xi^1 \zeta^1} & -J_{\eta^1 \zeta^1} & J_{\zeta^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{\xi^1} \\ \omega_{\eta^1} \\ \omega_{\zeta^1} \end{pmatrix}$
derivata del momento totale della quantità di moto	$\begin{aligned} \dot{\vec{K}}_{\Omega} &= (\mathcal{M} \vec{a}_{\Omega} \times \vec{G}\Omega) + \\ &+ \vec{\omega}_a \times \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^1 & \tilde{\varepsilon}_2^1 & \tilde{\varepsilon}_3^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^1} & -J_{\xi^1 \eta^1} & -J_{\xi^1 \zeta^1} \\ -J_{\xi^1 \eta^1} & J_{\eta^1} & -J_{\eta^1 \zeta^1} \\ -J_{\xi^1 \zeta^1} & -J_{\eta^1 \zeta^1} & J_{\zeta^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{\xi^1} \\ \omega_{\eta^1} \\ \omega_{\zeta^1} \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^1 & \tilde{\varepsilon}_2^1 & \tilde{\varepsilon}_3^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^1} & -J_{\xi^1 \eta^1} & -J_{\xi^1 \zeta^1} \\ -J_{\xi^1 \eta^1} & J_{\eta^1} & -J_{\eta^1 \zeta^1} \\ -J_{\xi^1 \zeta^1} & -J_{\eta^1 \zeta^1} & J_{\zeta^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{\xi^1} \\ \dot{\omega}_{\eta^1} \\ \dot{\omega}_{\zeta^1} \end{pmatrix} \end{aligned}$

Il momento totale della quantità di moto calcolato rispetto al baricentro, ovvero il momento totale della quantità di moto del moto relativo al baricentro, è ortogonale alla superficie dell'ellissoide centrale di inerzia relativo a G , nel punto in cui tale superficie è intercettata dal vettore $\vec{\omega}_a$ applicato nel baricentro.

Capitolo 8. Sollecitazioni

8.1. Sollecitazioni equivalenti. Ricordo le due definizioni seguenti:

- si dice **esterna** la sollecitazione costituita dalle forze attive e dalle forze vincolari, ricordando che le forze attive sono poi l'insieme delle forze effettive e di quelle apparenti¹;
- si dice **internala** sollecitazione costituita dalle forze che gli elementi si scambiano fra loro; anticipo che la risultante di tale sollecitazione è nulla e il suo momento totale è nullo rispetto a ogni polo, in base alla seconda legge di Newton (vedi la parte sulla dinamica dello schema particellare).

Due sollecitazioni si dicono **equivalenti** quando

- hanno la stessa risultante;
- hanno lo stesso momento totale rispetto a ogni polo.

8.2. Criteri di equivalenza. La definizione di equivalenza all'atto pratico non permette una verifica facile dell'equivalenza fra due sollecitazioni; questo a causa della seconda proprietà richiesta, la quale implica il calcolo di due una funzioni vettoriali (due campi elicoidali per l'esattezza) ovvero i momenti totali di ciascuna delle due sollecitazioni, i quali devono essere poi confrontati fra loro. Tuttavia è possibile procedere alla verifica dell'equivalenza in modo molto più semplice, ricorrendo ai due criteri seguenti.

• **Primo criterio di equivalenza.** Due sollecitazioni sono equivalenti se e solo se

- 1) hanno la stessa risultante
- 2) hanno lo stesso momento totale rispetto a un certo polo

Infatti si dimostra che se vale la 1 e la 2 allora il momento totale è lo stesso rispetto a ogni polo. Diciamo che siano \vec{F}, \vec{M}_A la risultante e il momento totale, rispetto al polo A, di una delle due sollecitazioni; siano poi \vec{F}', \vec{M}'_A le analoghe grandezze dell'altra sollecitazione. Allora, ricordando la definizione **1.15** del momento totale, si ha

$$\begin{aligned}\vec{M}_B &= \sum_i (\vec{f}_i \times \overline{P_i B}) = \sum_i (\vec{f}_i \times (\overline{P_i A} + \overline{AB})) = \sum_i (\vec{f}_i \times \overline{P_i A}) + \sum_i (\vec{f}_i \times \overline{AB}) = \\ &= \vec{M}_A + \sum_i (\vec{f}_i) \times \overline{AB} = \vec{M}_A + \vec{F} \times \overline{AB}\end{aligned}$$

Dunque abbiamo

$$8.1) \quad \vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{F} \times \overline{AB}$$

Ma essendo per le ipotesi 1,2 vero che $\vec{M}_A = \vec{M}'_A$ e $\vec{F} = \vec{F}'$, allora abbiamo

¹ Le forze effettive sono quelle che non variano (nel senso che mantengono intensità direzione e verso) cambiano il sistema di riferimento; quelle apparenti sono quelle che variano al variare del sistema di riferimento e sono legate all'inezia del sistema di punti material.

$$\vec{M}_B = \vec{M}'_A + \vec{F}' \times \vec{AB} = \vec{M}'_A \quad \forall B$$

e la tesi è dimostrata.

• **Secondo criterio di equivalenza.** Due sollecitazioni sono equivalenti se e solo se

- sono ordinatamente uguali i momenti totali rispetto a tre poli non allineati

Utilizzando la simbologia del punto precedente diciamo allora che risulti $\vec{M}_A = \vec{M}'_A, \vec{M}_B = \vec{M}'_B, \vec{M}_C = \vec{M}'_C$, con A, B, C non allineati; allora, considerando la 8.1, si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{F} \times \vec{AB} = \vec{M}'_A + \vec{F} \times \vec{AB} \\ \vec{M}'_B = \vec{M}'_A + \vec{F}' \times \vec{AB} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{M}'_A + \vec{F} \times \vec{AB} = \vec{M}'_A + \vec{F}' \times \vec{AB} \Leftrightarrow$$

$$\vec{M}_B = \vec{M}'_B$$

$$\Leftrightarrow \vec{F} \times \vec{AB} = \vec{F}' \times \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{F} \times \vec{AB} - \vec{F}' \times \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow (\vec{F} - \vec{F}') \times \vec{AB} = 0$$

Questo non permette di concludere che le due risultanti sono uguali, perché esse possono non essere uguali ma se il vettore $\vec{F} - \vec{F}'$ è parallelo al vettore \vec{AB} , allora si ottiene il risultato di cui sopra. Tuttavia in modo analogo si prova che

$$(\vec{F} - \vec{F}') \times \vec{AC} = 0$$

Ora per ipotesi i poli A, B, C non sono allineati e dunque le due relazioni trovate sono valide se e solo se sono uguali le due risultanti, perché se così non fosse, il vettore $\vec{F} - \vec{F}'$ dovrebbe essere parallelo a due vettori non paralleli fra loro. Poiché poi i momenti totali rispetto a uno stesso polo sono uguali, allora si ha la tesi, sfruttando il primo criterio di equivalenza.

8.3. Sollecitazioni riducibili a zero. Una sollecitazione si dice riducibile a zero quando

- ha risultante nulla
- ha momento totale nullo rispetto a ogni polo

Allora in base al primo criterio di equivalenza è possibile affermare che una sollecitazione è riducibile a zero se e solo se

- ha risultante nulla
- ha momento totale nullo rispetto a un polo

perché in questo modo tale sollecitazione risulta equivalente a quella descritta nella definizione di sollecitazione riducibile a zero.

Sfruttando invece il secondo criterio di equivalenza possiamo affermare che una sollecitazione è riducibile a zero se e solo se

- ha momento totale nullo rispetto a tre poli non allineati

8.4. Trasformazioni elementari. Usando il primo criterio di equivalenza si dimostra immediatamente che data una sollecitazione, allora se

- aggiungo o sottraggo una coppia di braccio nullo
- sostituisco più forze applicate in un dato punto, con la loro risultante applicata in quel medesimo punto

ottengo una sollecitazione equivalente a quella di partenza. Queste due operazioni sono dette **trasformazioni elementari** e sono molto utili per rendere una sollecitazione data di più facile analisi.

8.5. Riduzione della generica sollecitazione. La riduzione di una sollecitazione consiste nella sua trasformazione in una sollecitazione equivalente che sia costituita da una forza e da una coppia. Quest'ultima sollecitazione è detta **sollecitazione ridotta** della sollecitazione di partenza. Data allora una sollecitazione di risultante \vec{F} e di momento totale rispetto al polo A dato da \vec{M}_A , la sua riduzione è la sollecitazione costituita dalla forza \vec{F} applicata in A e dalla coppia $\vec{C} = \vec{M}_A$. L'equivalenza si dimostra immediatamente attraverso il primo criterio di equivalenza (stessa risultante e stesso momento totale rispetto al punto A), o se si vuole si può considerare che il momento totale della sollecitazione ridotta rispetto al generico polo P è dato da $\vec{M}_P = \vec{M}_A + \vec{F} \times \vec{PA}$ e dunque, considerando la **8.1**, è uguale a quello della sollecitazione di partenza.

Si osserva che

- la ridotta di una sollecitazione data non è unica: al variare del punto A , cambia il valore della coppia;
- se si pensa alla forma del campo elicoidale, si deduce che se il punto A appartiene all'asse centrale, allora la coppia è parallela alla forza stessa;
- si ha equivalenza a una forza e una coppia nulla se e solo se il campo dei momenti è circolare.²

8.6. Casi particolari di equivalenza. In questo paragrafo descrivo la riduzione di alcune delle sollecitazioni che più frequentemente si incontrano nella pratica.

• **Sollecitazione dei pesi.** Dato uno schema particellare di massa totale M , la sua ridotta è la forza $M\vec{g}$ applicata nel baricentro; dunque in questo caso la ridotta ha coppia nulla. Per verificare che questa sollecitazione sia realmente equivalente a quella di partenza, constatato immediatamente che la sollecitazione di partenza ha stessa risultante della ridotta, non ci resta che valutarne il momento totale. Si ha

$$\begin{aligned}\vec{M}_A &= \sum_i m_i \vec{g} \times \vec{P_i A} = \sum_i m_i \vec{g} \times \vec{P_i G} + \sum_i m_i \vec{g} \times \vec{GA} = \vec{g} \times \sum_i m_i \vec{P_i G} + M \vec{g} \times \vec{GA} = \\ &= \vec{g} \times M \sum_i \frac{m_i \vec{P_i G}}{M} + M \vec{g} \times \vec{GA} = \vec{g} \times \vec{GG} + M \vec{g} \times \vec{GA} = M \vec{g} \times \vec{GA}\end{aligned}$$

Dunque il momento totale della sollecitazione dei pesi coincide effettivamente con quello della sollecitazione ridotta indicata.

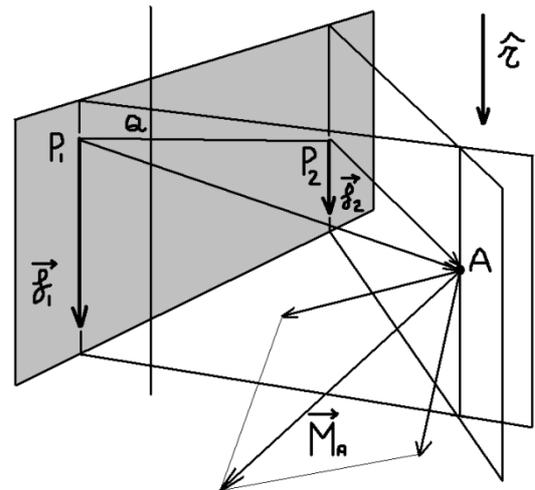
² Se il campo del momento totale è circolare allora la sollecitazione costituita solo dalla risultante applicata a un punto qualunque dell'asse centrale (tra l'altro la risultante è parallela caso all'asse centrale) è equivalente a quella data per il primo criterio; viceversa se la sollecitazione data è equivalente a una forza e a una coppia nulla, allora il momento totale si deve annullare nel punto di applicazione della forza, ma questo significa che il campo del momento totale è circolare, perché il campo elicoidale non assume mai valore nullo.

• **Sollecitazione delle forze apparenti nel caso di moto traslatorio.** Diciamo di studiare uno schema particellare rispetto a un sistema di riferimento il quale si muove di moto traslatorio, con accelerazione di trascinato \vec{a}_τ , rispetto a un sistema di riferimento inerziale. Allora la sollecitazione costituita dalle forze apparenti dovute al moto relativo si riduce alla forza $M\vec{a}_\tau$ applicata al baricentro. La verifica di questa equivalenza si conduce come nel punto precedente, basta sostituire a \vec{g} l'accelerazione di trascinato.

• **Sollecitazione piana costituita da due forze concordi.** Intanto è immediato constatare (ci si aiuti con la figura) che il campo dei momenti è un campo circolare il cui asse centrale si trova nel piano che contiene le due forze.

Volendo cercare l'asse centrale del campo dei momenti si può anzitutto osservare che esso deve trovarsi tra le rette d'azione delle due forze, perché altrimenti non c'è modo che il momento rispetto ai suoi punti sia nullo. Ciò detto consideriamo il segmento P_1P_2 e cerchiamo la sua intersezione Q con l'asse centrale. Il momento totale rispetto a tale punto è dato da

$$\begin{aligned} \vec{M}_Q &= \vec{f}_1 \times \overrightarrow{P_1Q} + \vec{f}_2 \times \overrightarrow{P_2Q} = \\ &= \vec{f}_1 \times \lambda \overrightarrow{P_1P_2} - \vec{f}_2 \times (1 - \lambda) \overrightarrow{P_1P_2} = \\ &= \lambda \vec{f}_1 \times \overrightarrow{P_1P_2} - (1 - \lambda) \vec{f}_2 \times \overrightarrow{P_1P_2} = \\ &= (\lambda \vec{f}_1 - (1 - \lambda) \vec{f}_2) \times \overrightarrow{P_1P_2} \end{aligned}$$



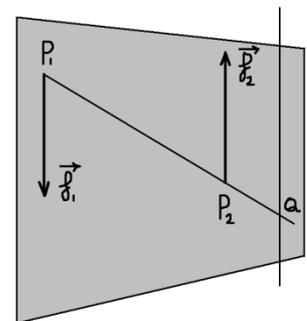
essendo $\lambda \in]0,1[$. Ora Q è un punto dell'asse centrale se e solo se il momento totale rispetto a esso si annulla. Impongo dunque l'annullamento e ricavo λ :

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{f}_1 - (1 - \lambda) \vec{f}_2) \times \overrightarrow{P_1P_2} = 0 &\Leftrightarrow \lambda \vec{f}_1 - (1 - \lambda) \vec{f}_2 = 0 \Leftrightarrow \\ \lambda f_1 \hat{r} - (1 - \lambda) f_2 \hat{r} = 0 &\Leftrightarrow \lambda f_1 - (1 - \lambda) f_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda f_1 - f_2 + \lambda f_2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda(f_1 + f_2) - f_2 = 0 &\Leftrightarrow \lambda = \frac{f_2}{f_1 + f_2} \end{aligned}$$

Dunque la sollecitazione data è equivalente alla forza $\vec{F} = f_1 + f_2$ applicata nel punto Q individuato sopra, o in qualunque altro punto dell'asse centrale. Infatti questa sollecitazione ridotta presenta la stessa risultante della sollecitazione data e lo stesso momento totale rispetto al punto Q ; dunque l'equivalenza è provata dal primo criterio di equivalenza.

• **Sollecitazione piana costituita da una coppia e una forza.** Anche qui il campo dei momenti deve essere circolare con asse parallelo alle rette di azione delle due forze; tuttavia il suo asse centrale non si trova nella porzione di piano fra le due rette d'azione, ma all'esterno. Procedendo come sopra si ha

$$\begin{aligned} \vec{M}_Q &= \vec{f}_1 \times \overrightarrow{P_1Q} + \vec{f}_2 \times \overrightarrow{P_2Q} = \\ &= \vec{f}_1 \times \lambda \overrightarrow{P_1P_2} + \vec{f}_2 \times (\lambda P_1P_2 - P_1P_2) \overrightarrow{P_1P_2} = \\ &= (\vec{f}_1 \lambda + \vec{f}_2 P_1P_2 (\lambda - 1)) \times \overrightarrow{P_1P_2} \end{aligned}$$



Per trovare l'asse centrale dobbiamo imporre l'annullamento di questo momento. Si ha

$$\begin{aligned} f_1 \lambda \hat{r} - f_2 P_1 P_2 (\lambda - 1) \hat{r} = 0 &\Leftrightarrow f_1 \lambda - f_2 P_1 P_2 (\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f_1 \lambda - f_2 P_1 P_2 \lambda + f_2 P_1 P_2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (f_1 - f_2 P_1 P_2) \lambda + f_2 P_1 P_2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{f_2 P_1 P_2}{f_2 P_1 P_2 - f_1} \end{aligned}$$

Il segno di λ dipende dalla intensità delle due forze; in particolare la configurazione indicata in figura corrisponde al segno positivo. In caso di segno negativo l'asse centrale si troverà nell'altro semipiano esterno alla striscia contenuta fra le due rette d'azione.

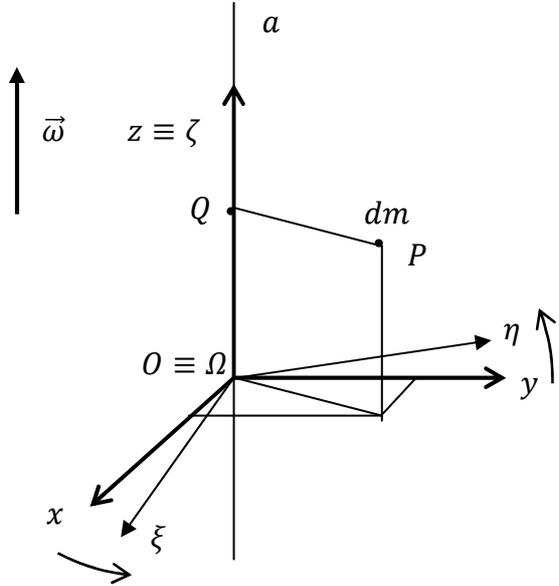
• **Sollecitazione centrifuga.** Un corpo rigido è solidale al sistema di riferimento $R\Gamma(\Omega; \xi, \eta, \zeta)$; il sistema di riferimento assunto come fisso sia $RC(O; x, y, z)$, con $O \equiv \Omega$ e $z \equiv \zeta$. Presa la porzione elementare dm del corpo, la forza apparente a cui essa è soggetta, in base alla 5.4, è data da

$$d\vec{f}(P) = \left(\frac{d\vec{\omega}_\tau}{dt} \times \overline{\Omega P} + \vec{\omega}_\tau \times (\vec{\omega}_\tau \times \overline{\Omega P}) \right) dm$$

Assumendo che la rotazione avvenga con velocità costante e che sia antioraria, ci si riduce a

$$d\vec{f}(P) = \left(\vec{\omega}_\tau \times (\vec{\omega}_\tau \times \overline{\Omega P}) \right) dm = \omega_\tau^2 \overline{QP}$$

essendo Q la proiezione di P sull'asse z . Ciò detto i casi che possono verificarsi sono tre.



1) **Equivalenza a una coppia.** Si realizza questa evenienza se e solo se l'asse di rotazione, cioè l'asse z , passa per il baricentro. Infatti l'equivalenza a una coppia si ha se e solo se è nulla la risultante della sollecitazione; ma la risultante³ è data da

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int_V d\vec{f}(P) = \int_V \omega_\tau^2 \overline{QP} \cdot \rho dV = \int_V \omega_\tau^2 \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix} \rho d\xi d\eta = \omega_\tau^2 \int_V \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix} \rho d\xi d\eta = \\ &= \omega_\tau^2 \int_V \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix} \rho d\xi d\eta = \omega_\tau^2 \mathcal{M} \begin{pmatrix} \xi_G \\ \eta_G \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e questa risultante si annulla se e solo se il baricentro è un punto dell'asse di rotazione. Volendo si può anche calcolare l'intensità di questa coppia: si deve valutare il momento totale della sollecitazione rispetto a un qualunque punto, infatti se la sollecitazione è equivalente a una forza nulla e a una coppia, allora il suo momento totale non può che essere lo stesso rispetto a qualsiasi polo. Calcoliamo allora rispetto all'origine dei due sistemi di riferimento:

³ Si osserva che la risultante è ortogonale all'asse di rotazione e inoltre punta il baricentro del corpo.

$$\vec{M}_\Omega = \int_V d\vec{f}(P) \times \overline{P\Omega} = -\omega_\tau^2 \int_V \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \rho d\xi d\eta = -\omega_\tau^2 \int_V \begin{pmatrix} \eta\zeta \\ -\xi\zeta \\ 0 \end{pmatrix} \rho d\xi d\eta = \omega_\tau^2 \begin{pmatrix} -J_{\eta\zeta} \\ J_{\xi\zeta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

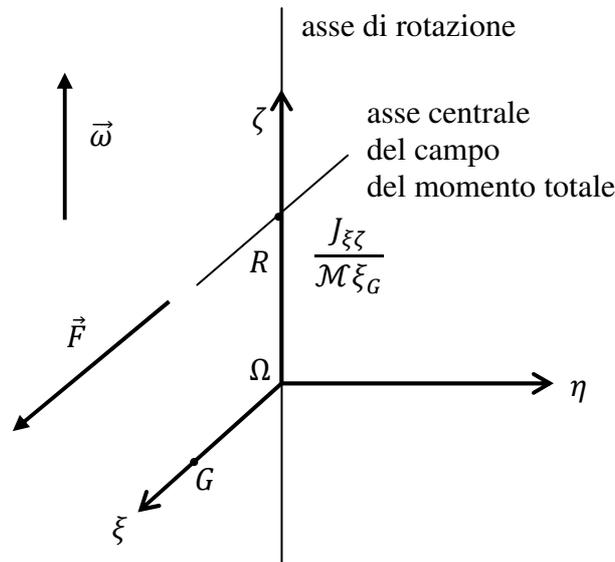
2) **Equivalenza a una forza.** L'equivalenza a una forza si realizza se e solo se il campo del momento totale è circolare (vedi nota 2). Ma se il campo del momento totale è circolare allora assume sempre come valore un vettore ortogonale alla risultante. Viceversa è sufficiente che il campo del momento totale assuma in un punto come valore un vettore ortogonale alla risultante, perché esso sia un campo circolare. Dunque il campo del momento totale è circolare e solo se un suo valore è ortogonale alla risultante. Allora impongo che il momento totale rispetto al polo Ω sia ortogonale alla risultante:

$$\vec{M}_\Omega \cdot \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \omega_\tau^2 \begin{pmatrix} -J_{\eta\zeta} \\ J_{\xi\zeta} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \omega_\tau^2 \mathcal{M} \begin{pmatrix} \xi_G \\ \eta_G \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \omega_\tau^4 \mathcal{M}(-J_{\eta\zeta}\xi_G + J_{\xi\zeta}\eta_G) = 0$$

Dunque la condizione N.S. perché il campo del momento totale sia circolare è

$$J_{\eta\zeta}\xi_G = J_{\xi\zeta}\eta_G$$

Si osserva che nel caso di risultante nulla (caso esaminato nel punto 1) questa condizione è sempre verificata: questo è in accordo con quanto trovato nel punto precedente, ovvero con l'equivalenza a una coppia, perché in effetti una coppia si può pensare come un campo circolare con asse centrale all'infinito.



Considerando invece il caso in cui l'asse di rotazione non passi per il baricentro, assumiamo, per semplificare l'analisi, che il sistema di riferimento solidale al corpo abbia un asse, diciamo l'asse ξ , passante per il baricentro (vedi figura). In questo caso la condizione di circolarità del campo del momento totale si riduce a

$$J_{\eta\zeta} = 0$$

che di per sé dice poco (si sottolinea che non è sufficiente questa condizione per dire che l'asse di rotazione sia asse principale rispetto al punto Q_G ; perché ciò sia vero si dovrebbe annullare anche $J_{\xi\zeta}$). L'asse centrale del campo del momento totale è parallelo alla retta d'azione della risultante,

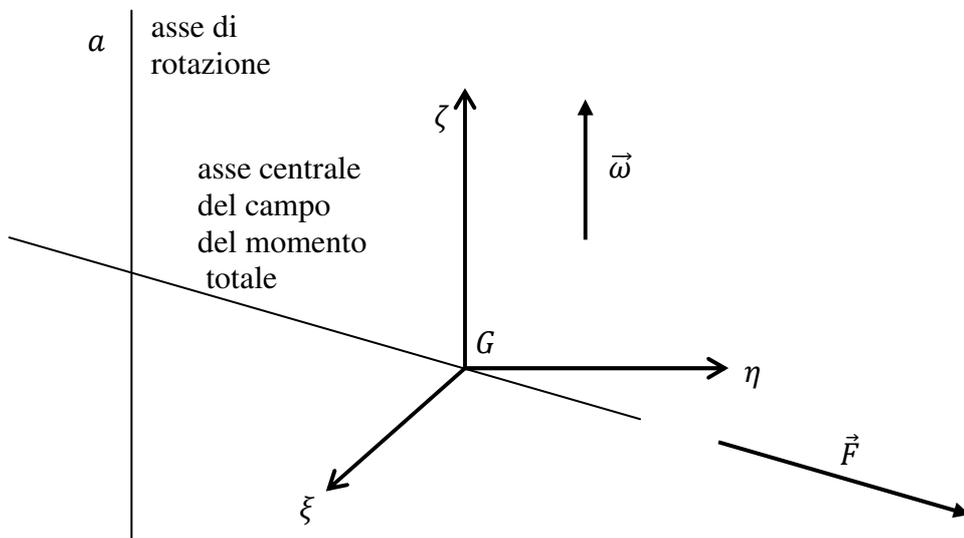
dunque è ortogonale all'asse di rotazione. Ora dobbiamo individuare tale asse centrale per sapere dove deve essere applicata la risultante e definire così completamente la sollecitazione ridotta. Facciamo l'ipotesi che l'asse centrale del campo del momento totale intercetti l'asse di rotazione in un punto $R \equiv (0,0,\zeta_R)$. Il momento totale rispetto a tale punto vale

$$\begin{aligned}\vec{M}_R &= \int_V d\vec{f}(P) \times \overline{PR} = -\omega_\tau^2 \int_V \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta - \zeta_R \end{pmatrix} \rho d\xi d\eta = \\ &= -\omega_\tau^2 \int_V \begin{pmatrix} \eta(\zeta - \zeta_R) \\ -\xi(\zeta - \zeta_R) \\ 0 \end{pmatrix} \rho d\xi d\eta = \omega_\tau^2 \begin{pmatrix} -J_{\eta\zeta} + \zeta_R \int_V \eta d\xi d\eta \\ J_{\xi\zeta} - \zeta_R \int_V \xi d\xi d\eta \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \omega_\tau^2 \begin{pmatrix} \zeta_R \int_V \eta d\xi d\eta \\ J_{\xi\zeta} - \zeta_R \int_V \xi d\xi d\eta \\ 0 \end{pmatrix} = \omega_\tau^2 \begin{pmatrix} 0 \\ J_{\xi\zeta} - \zeta_R \int_V \xi d\xi d\eta \\ 0 \end{pmatrix} = \omega_\tau^2 \begin{pmatrix} 0 \\ J_{\xi\zeta} - \mathcal{M} \zeta_R \xi_G \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dunque il campo del momento totale si annulla in corrispondenza del punto

$$R = \left(0, 0, \frac{J_{\xi\zeta}}{\mathcal{M} \xi_G}\right)$$

Per cui l'asse centrale del momento totale è una retta ortogonale all'asse di rotazione e passante per il punto R . La sollecitazione centrifuga dunque è equivalente alla risultante applicata in R .



3) **Equivalenza a una forza applicata nel baricentro.** Il caso particolare di equivalenza a una forza che sia applicata al baricentro risulta difficile da studiare appoggiandosi alle conclusioni tratte nel punto precedente (ho provato ma ho trovato solo che l'asse di rotazione è asse principale di inerzia rispetto a Ω , il che è tra l'altro immediato). Allora consideriamo un sistema di riferimento $R\Gamma(G; \xi, \eta, \zeta)$ che abbia origine nel baricentro e un asse, diciamo l'asse ζ , parallelo all'asse di rotazione a . Condizione N.S. affinché la sollecitazione centrifuga sia equivalente a una forza applicata in G è che il momento totale rispetto al polo G sia nullo. Ma il momento totale rispetto al baricentro si scrive

$$\vec{M}_G = \int_V d\vec{f}(P) \times \vec{PG} = -\omega_\tau^2 \int_V \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \rho d\xi d\eta = -\omega_\tau^2 \int_V \begin{pmatrix} \eta\zeta \\ -\xi\zeta \\ 0 \end{pmatrix} \rho d\xi d\eta = \omega_\tau^2 \begin{pmatrix} -J_{\eta\zeta} \\ J_{\xi\zeta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

e dunque esso si annulla se e solo se i momenti misti $J_{\xi\zeta}, J_{\eta\zeta}$ sono nulli, ovvero se e solo se l'asse ζ è asse centrale di inerzia.

8.7. Sollecitazioni autonome. In generale la risultante di una sollecitazione agente su uno schema particellare è una funzione del tipo

$$8.2) \quad \vec{F} = \vec{F}(P_1, P_2, \dots, P_n; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n; t)$$

ovvero una funzione vettoriale dipendente dalla posizione e dalla velocità di ciascuno degli elementi dello schema particellare, oltre che dal tempo. Nel caso in cui invece risulti

$$8.3) \quad \vec{F} = \vec{F}(P_G; \vec{v}_G; t)$$

si parla di sollecitazioni autonome. Un esempio di sollecitazione autonoma è la **sollecitazione apparente**; essa, in base alle **5.5** e **5.6**, è data dalle forze

$$\vec{f}_i = m_i \vec{a}_\tau = m_i \vec{a}_\Omega + m_i \frac{d\vec{\omega}_\tau}{dt} \times \vec{OP}_i + m_i \vec{\omega}_\tau \times (\vec{\omega}_\tau \times \vec{OP}_i) + 2\vec{\omega}_\tau \times \vec{v}_{ir}$$

Calcolo la risultante di questa sollecitazione:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i = \mathcal{M} \vec{a}_\Omega + \mathcal{M} \frac{d\vec{\omega}_\tau}{dt} \times \vec{OG} + m_i \vec{\omega}_\tau \times (\vec{\omega}_\tau \times \vec{OG}) + 2\vec{\omega}_\tau \times \vec{v}_{Gr}$$

Si vede subito che questa funzione è del tipo **8.3**, dunque effettivamente la sollecitazione apparente è autonoma. Più in generale si può affermare che ogni sollecitazione costituita da forze del tipo

$$\vec{f}_i = m_i (C_1 \vec{OP}_i + C_2 \vec{v}_i + \varphi(t))$$

risulta essere autonoma, infatti la risultante è evidentemente data dalla funzione

$$\vec{F} = \mathcal{M} (C_1 \vec{OG} + C_2 \vec{v}_G + \varphi(t))$$

Capitolo 9. Dinamica

9.1. Leggi fondamentali per elementi e sistemi di elementi. In questo paragrafo espongo i principi sui quali si basa la meccanica dei corpi, da quella del corpo rigido a quella dei fluidi, passando per la meccanica dei corpi deformabili. Queste leggi sono state estrapolate da osservazioni sperimentali condotte essenzialmente da Galilei e da Newton.

• **Prima legge, sistemi di riferimento inerziali.** Si dice sistema di riferimento inerziale ciascun sistema di riferimento rispetto al quale un elemento isolato¹ ha accelerazione nulla. Ovvero ogni elemento isolato ha accelerazione nulla rispetto a un qualsiasi sistema di riferimento inerziale.

• **Massa.** La massa è la misura della resistenza che un elemento offre alla variazione della sua accelerazione rispetto a un sistema di riferimento inerziale. Consideriamo un elemento a cui attribuiamo una massa di riferimento m_r , senza definire ulteriormente la massa. Isoliamolo insieme a un secondo elemento di massa incognita m_i . Misurandone il moto rispetto a un sistema di riferimento inerziale sia a_r l'accelerazione dell'elemento con massa di riferimento e a_i quella dell'elemento con massa incognita. Allora si pone per definizione

$$9.1) \quad m_i \triangleq \frac{m_r a_r}{a_i}$$

• **Seconda legge.** Consideriamo una coppia isolata di elementi e il loro moto rispetto a un sistema di riferimento inerziale. Sia

- \vec{a}_{hk} l'accelerazione dell'elemento di massa m_h
- \vec{a}_{kh} l'accelerazione dell'elemento di massa m_k
- P_h la posizione dell'elemento di massa m_h
- P_k la posizione dell'elemento di massa m_k

Allora l'esperienza dice che risulta sempre

$$9.2) \quad m_h \vec{a}_{hk} + m_k \vec{a}_{kh} = 0$$

$$9.3) \quad m_h \vec{a}_{hk} \times \overrightarrow{P_h O} + m_k \vec{a}_{kh} \times \overrightarrow{P_k O} = 0$$

Si intende che il punto O sia un qualunque punto solidale con il sistema di riferimento inerziale.

• **Forze.** Un elemento isolato, in base alla prima legge, non ha accelerazione rispetto a un sistema di riferimento inerziale. La seconda legge d'altra parte prevede il moto accelerato per ciascun elemento di una coppia di elementi isolati. Si deduce dunque che i due elementi siano l'uno la causa dell'accelerazione dell'altro secondo la legge descritta dalla **9.2**. Per evidenziare questo risultato espresso dalla seconda legge si pone

¹ Cioè disposto così lontano da qualunque ente da non poter subire influenze di qualsiasi tipo.

$$9.4) \quad \begin{cases} \vec{f}_{hk} \triangleq m_h \vec{a}_{hk} = -m_k \vec{a}_{kh} \\ \vec{f}_{kh} \triangleq m_k \vec{a}_{kh} = -m_h \vec{a}_{hk} \end{cases}$$

e si dice che \vec{f}_{hk} è la **forza** che la massa m_k esercita sulla massa m_h , mentre \vec{f}_{kh} è la forza che la massa m_h esercita sulla massa m_k . Poiché la **9.2** ci dice che le due accelerazioni hanno stessa direzione e verso opposto, si possono avere due casi in corrispondenza dei quali si pongono le due definizioni seguenti:

- se le due accelerazioni hanno verso convergente si parla di **forze attrattive**;
- se le due accelerazioni hanno verso divergente si parla di **forze repulsive**.

• **Principio di determinismo meccanico.** L'esperienza mostra che le forze scambiate dai due elementi di una coppia isolata sono indipendenti dal tempo, dipendendo solo dalla velocità e dalla posizione dei due elementi. Cioè le due forze sono funzioni del tipo

$$9.5) \quad \begin{cases} \vec{f}_{hk} = \vec{f}_{hk}(P_h, P_k, \vec{v}_h, \vec{v}_k) \\ \vec{f}_{kh} = \vec{f}_{kh}(P_h, P_k, \vec{v}_h, \vec{v}_k) \end{cases}$$

Ciò che dunque si rileva è l'indipendenza dal tempo. Per cui mettendo i due elementi, in tempi successivi, nelle stesse posizioni di partenza e con le stesse velocità, il moto si svolge esattamente allo stesso modo, ogni volta. Questa proprietà è detta del **determinismo meccanico**.

• **Terza legge. Sistema fondamentale della dinamica per sistemi isolati.** Consideriamo un sistema isolato, ovvero un insieme di n elementi materiali, isolati dal resto dell'Universo. Allora si è visto che continua a valere la seconda legge nel senso che presi comunque due elementi, per essi valgono le **9.2, 9.3**. Ma allora detta \vec{a}_h l'accelerazione dell'elemento $h - m_o$, si ha

$$9.6) \quad m_h \vec{a}_h = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n m_k \vec{a}_{kh} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n \vec{f}_{hk}(P_h, P_k, \vec{v}_h, \vec{v}_k) \quad h = 1, 2, \dots, n$$

L'insieme di queste n equazioni prende il nome di **sistema fondamentale della dinamica** per il sistema isolato. Si osservi che il sistema fondamentale della dinamica deriva dalla sola equazione **9.2**: l'altra equazione della seconda legge qui non è stata considerata.

• **Sollecitazione equivalente.** La sollecitazione che un sistema di elementi esercita sui suoi stessi elementi è equivalente alla sollecitazione nulla. La sua risultante infatti è

$$\sum_{h=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n \vec{f}_{hk}(P_h, P_k, \vec{v}_h, \vec{v}_k) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n [\vec{f}_{hk}(P_h, P_k, \vec{v}_h, \vec{v}_k) + \vec{f}_{kh}(P_h, P_k, \vec{v}_h, \vec{v}_k)]$$

e dunque vale zero per la **9.2**. Il momento totale rispetto al generico polo O è dato da

$$\sum_{h=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n (m_h \vec{a}_{hk} \times \overline{P_h O}) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n [m_h \vec{a}_{hk} \times \overline{P_h O} + m_k \vec{a}_{kh} \times \overline{P_k O}]$$

e dunque, per la **9.3**, è nullo anch'esso.

9.2. Leggi fondamentali per schemi particellari. Per schema particellare si intende un particolare sistema di elementi il quale possa essere diviso in due parti: il sistema Σ_1 e il sistema Σ_2 , tali che gli elementi che costituiscono la prima parte siano tutti di massa trascurabile rispetto agli elementi che costituiscono la seconda parte. Questo genere di configurazione rende lecito trascurare l'influenza degli elementi di Σ_1 sugli elementi di Σ_2 ; resta invece l'influenza degli elementi di Σ_2 sugli elementi di Σ_1 .

• **Sollecitazione esterna.** È l'insieme delle forze che gli elementi di Σ_2 esercitano sugli elementi di Σ_1 . Poiché si ammette che gli elementi di Σ_2 non subiscano influenze significative dagli elementi di Σ_1 , ciascuna di tali forze sarà indipendente da posizione e velocità degli elementi di Σ_1 . La forza che l'elemento $k - mo$ di Σ_2 esercita sull'elemento $h - mo$ di Σ_1 sarà dunque una funzione del tipo

$$9.7) \quad \vec{f}_{hk}^e = \vec{f}_{hk}^e(P_k^e(t), \vec{v}_k^e(t))$$

dove appunto non compaiono le funzioni cinematiche dell'elemento di Σ_1 , ma solo quelle dell'elemento di Σ_2 , che si assumono note a priori. L'apice si pone appunto per indicare che trattasi di una forza della sollecitazione esterna.

• **Terza legge. Sistema fondamentale della dinamica per schemi particellari.** Assunto che Σ_1 abbia n elementi e che Σ_2 ne abbia m , il sistema fondamentale della dinamica visto per il sistema isolato, nel caso di schema particellare si scrive

$$9.8) \quad m_h \vec{a}_h = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n \vec{f}_{hk}(P_h, P_k, \vec{v}_h, \vec{v}_k) + \sum_{k=1}^m \vec{f}_{hk}^e(P_k^e(t), \vec{v}_k^e(t)) \quad h = 1, 2, \dots, n$$

Per compattezza possiamo indicare direttamente la risultante della sollecitazione esterna agente sull'elemento $h - mo$ di Σ_1 riscrivendo la **9.8** come

$$9.9) \quad m_h \vec{a}_h = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n \vec{f}_{hk}(P_h, P_k, \vec{v}_h, \vec{v}_k) + \vec{F}_h^e(P_1^e(t), \dots, P_m^e(t); \vec{v}_1^e(t), \dots, \vec{v}_m^e(t)) \quad h = 1, 2, \dots, n$$

• **Sistema globale della dinamica per schemi particellari.** Dal sistema di n equazioni vettoriali **9.9** si deduce² il seguente sistema di due equazioni vettoriali

$$9.10) \quad \mathcal{M} \vec{a}_G = \vec{F}^e(P_1^e(t), \dots, P_m^e(t); \vec{v}_1^e(t), \dots, \vec{v}_m^e(t))$$

$$9.11) \quad \dot{\vec{K}}_A = \sum_{h=1}^n (\vec{F}_h^e \times \overline{P_h A}) + \mathcal{M} \vec{v}_G \times \vec{v}_A = \vec{M}_A^e + \mathcal{M} \vec{v}_G \times \vec{v}_A$$

dove si è posto

- $\vec{F}^e = \sum_{h=1}^n \vec{F}_h^e$ forza che complessivamente Σ_2 esercita sull'elemento $h - mo$ di Σ_1
- \mathcal{M} massa totale di Σ_1
- $\vec{K}_A = \sum_{h=1}^n (m_h \vec{v}_h \times \overline{P_h A})$ momento totale della quantità di moto di Σ_1 rispetto A
- \vec{M}_A^e momento totale della sollecitazione esterna rispetto A
- A generico punto animato dalla velocità \vec{v}_A
- \vec{v}_G, \vec{a}_G funzioni cinematiche del baricentro di Σ_1

² Il sistema **9.10**, **9.11** è dedotto dal **9.9**, ma non è equivalente: questo dovrebbe voler dire che fornisce solo un sottoinsieme delle soluzioni possibili.

Evidentemente la **9.10** è la somma delle n equazioni **9.10**. In effetti la somma dei primi membri è

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^n m_h \vec{a}_h &= \sum_{h=1}^n m_h \frac{d^2 \overline{OP}_h}{dt^2} = \sum_{h=1}^n m_h \frac{d^2 \overline{OG}}{dt^2} + \sum_{h=1}^n m_h \frac{d^2 \overline{GP}_h}{dt^2} = \mathcal{M} \vec{a}_G + \frac{d^2 \sum_{h=1}^n m_h \overline{GP}_h}{dt^2} = \\ &= \mathcal{M} \vec{a}_G + \frac{d^2 \mathcal{M} \sum_{h=1}^n m_h \overline{GG}}{dt^2} = \mathcal{M} \vec{a}_G\end{aligned}$$

La somma dei primi addendi dei secondi membri invece porge

$$\sum_{h=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n \vec{f}_{hk}(P_h, P_k, \vec{v}_h, \vec{v}_k) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n [\vec{f}_{hk}(P_h, P_k, \vec{v}_h, \vec{v}_k) + \vec{f}_{kh}(P_h, P_k, \vec{v}_h, \vec{v}_k)] = 0$$

dove l'annullamento della sommatoria è garantito dalla **9.2**. Consideriamo ora il momento totale della quantità di moto per il sistema di elementi, calcolato rispetto al generico polo A . Si ha

$$\vec{K}_A = \sum_{h=1}^n (m_h \vec{v}_h \times \overline{P_h A})$$

Derivando nel tempo abbiamo

$$\begin{aligned}\dot{\vec{K}}_A &= \sum_{h=1}^n (m_h \vec{a}_h \times \overline{P_h A}) + \sum_{h=1}^n \left(m_h \vec{v}_h \times \frac{d\overline{P_h A}}{dt} \right) = \sum_{h=1}^n (m_h \vec{a}_h \times \overline{P_h A}) + \sum_{h=1}^n \left(m_h \vec{v}_h \times \frac{d\overline{P_h A}}{dt} \right) = \\ &= \sum_{h=1}^n (m_h \vec{a}_h \times \overline{P_h A}) + \sum_{h=1}^n \left(m_h \vec{v}_h \times \left(\frac{d\overline{P_h O}}{dt} + \frac{d\overline{OA}}{dt} \right) \right) = \\ &= \sum_{h=1}^n \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n \vec{f}_{hk} \times \overline{P_h A} \right) + \sum_{h=1}^n (\vec{F}_h^e \times \overline{P_h A}) + \sum_{h=1}^n (m_h \vec{v}_h \times (-\vec{v}_h + \vec{v}_A)) = \\ &= \sum_{h=1}^n \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n \vec{f}_{hk} \times \overline{P_h A} \right) + \sum_{h=1}^n (\vec{F}_h^e \times \overline{P_h A}) + \sum_{h=1}^n (m_h \vec{v}_h \times \vec{v}_A) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n (\vec{f}_{hk} \times \overline{P_h A} + \vec{f}_{kh} \times \overline{P_k A}) \right) + \sum_{h=1}^n (\vec{F}_h^e \times \overline{P_h A}) + \mathcal{M} \vec{v}_G \times \vec{v}_A\end{aligned}$$

La prima sommatoria è nulla in base alla **9.3** dunque abbiamo la **9.11**.

9.3. Leggi fondamentali per corpi rigidi. Consideriamo il sistema globale della dinamica **9.10**, **9.11**: nel caso di corpo rigido la posizione è definita dagli angoli di Eulero φ, θ, ψ dalla posizione (x_G, y_G, z_G) del baricentro e per definire il moto basta la conoscenza della velocità \vec{v}_G del baricentro e delle derivate $\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ degli angoli di Eulero. Se consideriamo come polo del momento totale della quantità di moto il baricentro del corpo rigido, allora le **9.10**, **9.11** si scrivono

$$9.12) \quad \mathcal{M} \vec{a}_G = \vec{F}^e(x_G, y_G, z_G, \varphi, \theta, \psi; \vec{v}_G, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$$

$$9.13) \quad \dot{\vec{K}}_G = \dot{\vec{K}}^G = \iiint_V (\vec{F}^e \times \overline{PG}) dV = \vec{M}_G(x_G, y_G, z_G, \varphi, \theta, \psi; \vec{v}_G, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$$

Nella **9.13** si è voluto ricordare che il momento totale della quantità di moto calcolato con polo il baricentro, è uguale al momento totale della quantità di moto del moto relativo al baricentro³ calcolato con polo il baricentro \vec{K}^G , il quale è poi indipendente dal polo stesso, come dimostrato nel paragrafo **3.18**. Considerando poi l'espressione **7.11** della derivata del momento totale della quantità di moto, il sistema globale della dinamica per il corpo rigido si scrive

$$9.14) \quad \begin{cases} \mathcal{M}\vec{a}_G = \vec{F}^e(X, \theta; \dot{X}, \dot{\theta}) \\ \vec{\omega}_a \times (\hat{\varepsilon}_1 \quad \hat{\varepsilon}_2 \quad \hat{\varepsilon}_3) \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} + (\hat{\varepsilon}_1 \quad \hat{\varepsilon}_2 \quad \hat{\varepsilon}_3) \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_\xi \\ \dot{\omega}_\eta \\ \dot{\omega}_\zeta \end{pmatrix} = \vec{M}_G(X, \theta; \dot{X}, \dot{\theta}) \end{cases}$$

dove, per brevità, si è scritto θ al posto degli angoli di Eulero, e X al posto delle coordinate del baricentro. Volendo poi esprimere il tutto in equazioni scalari si ha

$$9.15) \quad \begin{cases} \mathcal{M}a_{Gx} = F_x^e(X, \theta; \dot{X}, \dot{\theta}) \\ \mathcal{M}a_{Gy} = F_y^e(X, \theta; \dot{X}, \dot{\theta}) \\ \mathcal{M}a_{Gz} = F_z^e(X, \theta; \dot{X}, \dot{\theta}) \\ J_\xi \dot{\omega}_\xi - (J_\eta - J_\zeta) \omega_\eta \omega_\zeta = M_{G\xi}(X, \theta; \dot{X}, \dot{\theta}) \\ J_\eta \dot{\omega}_\eta - (J_\zeta - J_\xi) \omega_\xi \omega_\zeta = M_{G\eta}(X, \theta; \dot{X}, \dot{\theta}) \\ J_\zeta \dot{\omega}_\zeta - (J_\xi - J_\eta) \omega_\xi \omega_\eta = M_{G\zeta}(X, \theta; \dot{X}, \dot{\theta}) \end{cases}$$

Il sistema di riferimento considerato nelle **9.14**, **9.15** è la terna centrale di inerzia, che nel capitolo 7 abbiamo indicato $R\Gamma(G; \xi, \eta, \zeta)$.

Nel caso più generale in cui invece ci si riferisca a una generica terna solidale al corpo rigido, che nel capitolo 7 abbiamo indicato $R\Gamma^l(\Omega; \xi^l, \eta^l, \zeta^l) = R\Gamma^l(\Omega; \hat{\varepsilon}_1^l, \hat{\varepsilon}_2^l, \hat{\varepsilon}_3^l)$, allora la **9.13** si scrive

$$9.16) \quad (\mathcal{M}\vec{a}_\Omega \times \vec{G}\vec{\Omega}) + \vec{\omega}_a \times (\tilde{\varepsilon}_1^l \quad \tilde{\varepsilon}_2^l \quad \tilde{\varepsilon}_3^l) \begin{pmatrix} J_{\xi^l} & -J_{\xi^l\eta^l} & -J_{\xi^l\zeta^l} \\ -J_{\xi^l\eta^l} & J_{\eta^l} & -J_{\eta^l\zeta^l} \\ -J_{\xi^l\zeta^l} & -J_{\eta^l\zeta^l} & J_{\zeta^l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{\xi^l} \\ \omega_{\eta^l} \\ \omega_{\zeta^l} \end{pmatrix} + (\tilde{\varepsilon}_1^l \quad \tilde{\varepsilon}_2^l \quad \tilde{\varepsilon}_3^l) \begin{pmatrix} J_{\xi^l} & -J_{\xi^l\eta^l} & -J_{\xi^l\zeta^l} \\ -J_{\xi^l\eta^l} & J_{\eta^l} & -J_{\eta^l\zeta^l} \\ -J_{\xi^l\zeta^l} & -J_{\eta^l\zeta^l} & J_{\zeta^l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{\xi^l} \\ \dot{\omega}_{\eta^l} \\ \dot{\omega}_{\zeta^l} \end{pmatrix} = \vec{M}_\Omega(X, \theta; \dot{X}, \dot{\theta})$$

dove si è utilizzata la **7.7**. Considerando la **7.7.bis** (con lo sviluppo del secondo membro) si ha invece

$$9.17) \quad (\mathcal{M}\vec{a}_\Omega \times \vec{G}\vec{\Omega}) + (\tilde{\varepsilon}_1^l \quad \tilde{\varepsilon}_2^l \quad \tilde{\varepsilon}_3^l) \begin{pmatrix} -J_{\xi^l\zeta^l} \omega_{\xi^l} \omega_{\eta^l} + J_{\eta^l\zeta^l} (\omega_{\zeta^l}^2 - \omega_{\eta^l}^2) + (J_{\zeta^l} - J_{\eta^l}) \omega_{\eta^l} \omega_{\zeta^l} + J_{\xi^l\eta^l} \omega_{\xi^l} \omega_{\zeta^l} + J_{\xi^l} \dot{\omega}_{\xi^l} - J_{\xi^l\eta^l} \dot{\omega}_{\eta^l} - J_{\xi^l\zeta^l} \dot{\omega}_{\zeta^l} \\ (J_{\xi^l} - J_{\zeta^l}) \omega_{\xi^l} \omega_{\zeta^l} - J_{\xi^l\eta^l} \omega_{\eta^l} \omega_{\zeta^l} + J_{\xi^l\zeta^l} (\omega_{\xi^l}^2 - \omega_{\zeta^l}^2) + J_{\eta^l\zeta^l} \omega_{\xi^l} \omega_{\eta^l} - J_{\xi^l\eta^l} \dot{\omega}_{\xi^l} + J_{\eta^l} \dot{\omega}_{\eta^l} - J_{\eta^l\zeta^l} \dot{\omega}_{\zeta^l} \\ (J_{\eta^l} - J_{\xi^l}) \omega_{\xi^l} \omega_{\eta^l} - J_{\eta^l\zeta^l} \omega_{\xi^l} \omega_{\zeta^l} + J_{\xi^l\eta^l} (\omega_{\eta^l}^2 - \omega_{\xi^l}^2) + J_{\xi^l\zeta^l} \omega_{\eta^l} \omega_{\zeta^l} - J_{\xi^l\zeta^l} \dot{\omega}_{\xi^l} - J_{\eta^l\zeta^l} \dot{\omega}_{\eta^l} + J_{\zeta^l} \dot{\omega}_{\zeta^l} \end{pmatrix} = \vec{M}_\Omega(X, \theta; \dot{X}, \dot{\theta})$$

³ È il moto rispetto a un sistema di riferimento avente origine nel baricentro e velocità angolare nulla rispetto al sistema di riferimento fisso (vedi in proposito il paragrafo **3.18**).

Capitolo 10. Teoremi di conservazione

10.1. Teoremi di conservazione per elementi. I seguenti teoremi riguardano la quantità di moto la quale, per un elemento di massa m , si definisce come il vettore

$$10.1) \quad \vec{q} = m\vec{v}$$

e sono tutti una conseguenza immediata della 9.6.

• **Conservazione di una componente della quantità di moto.** La generica componente della quantità di moto di un elemento è costante se e solo se è nulla l'omologa componente della risultante delle forze agenti su di esso. Infatti

$$q_x = mv_x = \text{costante} \Leftrightarrow \dot{q}_x = ma_x = 0$$

D'altra parte la 9.6 porge $ma_x = F_x$, dove \vec{F} indica la risultante delle forze agenti sull'elemento e quindi si conclude

$$q_x = \text{costante} \Leftrightarrow F_x = 0$$

• **Conservazione del momento della quantità di moto rispetto a un polo fisso.** Il momento della quantità di moto di un elemento rispetto a un polo fisso O è costante se e solo se è nullo il momento della forza agente sull'elemento, rispetto a O . Infatti

$$\vec{k}_O = m\vec{v} \times \overrightarrow{PO} = \text{costante} \Leftrightarrow \dot{\vec{k}}_O = m\vec{a} \times \overrightarrow{PO} - m\vec{v} \times \vec{v} = m\vec{a} \times \overrightarrow{PO} = \vec{F} \times \overrightarrow{PO} = 0$$

dove si è sostituita la 9.8. Questo risultato può essere applicato evidentemente alle singole componenti del momento.

• **Conservazione del momento della quantità di moto rispetto a un polo mobile.** Se il polo O si muove con velocità \vec{v}_O si ha

$$\dot{\vec{k}}_O = m\vec{a} \times \overrightarrow{PO} + m\vec{v} \times (-\vec{v} + \vec{v}_O) = m\vec{a} \times \overrightarrow{PO} + m\vec{v} \times \vec{v}_O$$

Dunque in questo caso l'annullamento del momento della forza agente sull'elemento, rispetto a O , non è equivalente alla costanza di \vec{k}_O . Occorre che sia verificata l'ulteriore condizione che \vec{v} risulti parallelo a \vec{v}_O . Questo risultato può essere applicato evidentemente alle singole componenti del momento.

• **Conservazione del momento assiale della quantità di moto rispetto a un asse fisso.** Il momento assiale della quantità di moto di un elemento rispetto a un asse fisso a è costante se e solo se è nullo il momento assiale della forza agente sull'elemento, rispetto a quello stesso asse. Infatti

$$k_a = \vec{k}_A \cdot \hat{a} = m\vec{v} \times \overrightarrow{PA} \cdot \hat{a} = \text{costante} \Leftrightarrow \dot{k}_a = \dot{\vec{k}}_A \cdot \hat{a} = (m\vec{a} \times \overrightarrow{PA} + m\vec{v} \times \vec{v}) \cdot \hat{a} = m\vec{a} \times \overrightarrow{PA} \cdot \hat{a} = m\vec{a} \times \overrightarrow{PA} \cdot \hat{a} = \vec{F} \times \overrightarrow{PA} \cdot \hat{a}$$

Si intende sopra che A è un punto dell'asse a , e che \hat{a} è il versore direttore di tale asse.

• **Conservazione del momento assiale della quantità di moto rispetto a un asse mobile.** Vediamo cosa succede se l'asse a si muove. Calcolo la derivata del momento assiale:

$$\begin{aligned} \dot{k}_a &= \dot{\vec{k}}_A \cdot \hat{a} + \vec{k}_A \cdot \dot{\hat{a}} = (m\vec{a} \times \vec{PA} + m\vec{v} \times \vec{v} + m\vec{v} \times \vec{v}_A) \cdot \hat{a} + m\vec{v} \times \vec{PA} \cdot \dot{\hat{a}} = \\ &= (\vec{F} \times \vec{PA} \cdot \hat{a} + m\vec{v} \times \vec{v}_A \cdot \hat{a}) + m\vec{v} \times \vec{PA} \cdot \dot{\hat{a}} = \vec{F} \times \vec{PA} \cdot \hat{a} + m\vec{v} \times \vec{v}_A \cdot \hat{a} + m\vec{v} \times \vec{PA} \cdot \dot{\hat{a}} \end{aligned}$$

L'annullamento del secondo addendo si ha se e solo se i tre vettori che vi compaiono sono complanari; d'altra parte se questa condizione è verificata si annulla anche il terzo addendo. Dunque possiamo concludere che il momento assiale della quantità di moto rispetto a un asse mobile si verifica se e solo se risulta nulla l'analogo momento della forza agente sull'elemento, e sono complanari, istante per istante, i tre vettori \vec{v} , \vec{v}_A , \hat{a} .

10.2. Teoremi di conservazione per sistemi isolati. Per ciascun elemento di un sistema isolato sono validi tutti i risultati del precedente paragrafo. Tuttavia in questo caso si possono dedurre anche altri risultati, sempre a partire dalle leggi fondamentali della dinamica, illustrate nel capitolo precedente.

Prima di procedere dimostro che la quantità di moto di un sistema isolato, così come di uno schema particellare o di un corpo rigido, è pari alla quantità di moto di un elemento fittizio avente posizione coincidente con quella del baricentro e massa pari alla massa totale:

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= \sum_{h=1}^n \vec{q}_h = \sum_{h=1}^n m_h \vec{v}_h = -\frac{d \sum_{h=1}^n m_h (\vec{P}_h \vec{G} + \vec{G} \vec{O})}{dt} = -\frac{d \sum_{h=1}^n m_h \vec{P}_h \vec{G}}{dt} - \frac{d \sum_{h=1}^n m_h \vec{G} \vec{O}}{dt} = \\ &= -\mathcal{M} \frac{d\vec{G}\vec{G}}{dt} + \frac{d \sum_{h=1}^n m_h \vec{O}\vec{G}}{dt} = \mathcal{M} \vec{v}_G \end{aligned}$$

Dunque

$$10.2) \quad \vec{Q} = \mathcal{M} \vec{v}_G$$

Dimostro inoltre che il momento totale della quantità di moto di un sistema isolato così come di uno schema particellare o di un corpo rigido è pari al momento totale della quantità di moto dell'elemento fittizio avente posizione coincidente con quella del baricentro e massa pari alla massa totale:

$$\begin{aligned} \vec{Q} \times \vec{G}\vec{O} &= \sum_{h=1}^n (m_h \vec{v}_h) \times \vec{G}\vec{O} = \sum_{h=1}^n \left(m_h \frac{d(\vec{\Omega}\vec{G} + \vec{G}\vec{P}_h)}{dt} \right) \times \vec{G}\vec{O} = \\ &= \left(\sum_{h=1}^n \left(m_h \frac{d\vec{\Omega}\vec{G}}{dt} \right) + \sum_{h=1}^n \left(m_h \frac{d\vec{G}\vec{P}_h}{dt} \right) \right) \times \vec{G}\vec{O} = \\ &= \left(\mathcal{M} \vec{v}_G + \mathcal{M} \frac{d\vec{G}\vec{G}}{dt} \right) \times \vec{G}\vec{O} = \mathcal{M} \vec{v}_G \times \vec{G}\vec{O} \end{aligned}$$

Dunque

$$10.3) \quad \vec{K}_O = \vec{Q} \times \vec{G}\vec{O} = \mathcal{M} \vec{v}_G \times \vec{G}\vec{O}$$

• **Riduzione della sollecitazione interna di un sistema isolato.** Ciascun elemento di un sistema isolato esercita una forza di ciascuno degli altri elementi, in accordo con le **9.2**, **9.3**. Ebbene questa sollecitazione è riducibile a zero (paragrafo **9.3**), cioè è equivalente alla sollecitazione nulla, cioè è equivalente a una sollecitazione costituita da una forza nulla e da una coppia nulla. La sua risultante infatti è

$$\sum_{h=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n \vec{f}_{hk}(P_h, P_k, \vec{v}_h, \vec{v}_k) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n [\vec{f}_{hk}(P_h, P_k, \vec{v}_h, \vec{v}_k) + \vec{f}_{kh}(P_h, P_k, \vec{v}_h, \vec{v}_k)]$$

e dunque vale zero per la **9.2**. Il momento totale rispetto al generico polo O è dato da

$$\sum_{h=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n (m_h \vec{a}_{hk} \times \overline{P_h O}) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n [m_h \vec{a}_{hk} \times \overline{P_h O} + m_k \vec{a}_{kh} \times \overline{P_k O}]$$

e dunque, per la **9.3**, è nullo anch'esso.

• **Conservazione della quantità di moto totale.** La quantità di moto totale di un sistema isolato, cioè la somma delle quantità di moto di ciascuno dei suoi elementi, si conserva. Infatti

$$\dot{\vec{Q}} = \sum_{h=1}^n \dot{\vec{q}}_h = \sum_{h=1}^n m_h \vec{a}_h = \text{risultante} = 0$$

È interessante notare che questa stessa proprietà dei sistemi isolati può essere enunciata dicendo che la quantità di moto di un elemento avente massa pari alla massa totale del sistema isolato e posizione coincidente con quella del suo baricentro, si conserva. Ciò discende immediatamente dalla **10.2**. Questo risultato può essere applicato evidentemente alle singole componenti della quantità di moto.

• **Conservazione del momento totale della quantità di moto rispetto a un polo fisso.** Il momento totale della quantità di moto di un sistema isolato rispetto a un polo fisso O è costante. Infatti

$$\begin{aligned} \dot{\vec{K}}_O &= \frac{d \sum_{h=1}^n (m_h \vec{v}_h \times \overline{P_h O})}{dt} = \sum_{h=1}^n (m_h \vec{a}_h \times \overline{P_h O}) - \sum_{h=1}^n (m_h \vec{v}_h \times \vec{v}_h) = \\ &= \sum_{h=1}^n (m_h \vec{a}_h \times \overline{P_h O}) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n [m_h \vec{a}_{hk} \times \overline{P_h O} + m_k \vec{a}_{kh} \times \overline{P_k O}] \end{aligned}$$

e dunque l'annullamento della derivata del momento discende immediatamente dalla **10.2**. Questa proprietà si enuncia in modo equivalente dicendo che il momento della quantità di moto (rispetto a un polo fisso) di un elemento avente massa pari alla massa totale e posizione coincidente con quella del baricentro, si conserva. Ciò discende immediatamente dalla **10.2**. Questo risultato può essere applicato evidentemente alle singole componenti del momento.

• **Conservazione del momento totale della quantità di moto rispetto a un polo mobile.** In questo caso il momento della quantità di moto si conserva se e solo se il polo mobile O presenta una velocità parallela a quella del baricentro. Infatti

$$\vec{K}_O = \vec{Q} \times \vec{GO} = \mathcal{M} \vec{v}_G \times \vec{GO} \Rightarrow \dot{\vec{K}}_O = \mathcal{M} \vec{a}_G \times \vec{GO} - \mathcal{M} \vec{v}_G \times \vec{v}_G + \mathcal{M} \vec{v}_G \times \vec{v}_O = \mathcal{M} \vec{v}_G \times \vec{v}_O$$

Questo risultato può essere applicato evidentemente alle singole componenti del momento.

• **Conservazione del momento assiale della quantità di moto.** Si dimostra che il momento assiale della quantità di moto si conserva purché l'asse si muova su un piano contenente istante per istante la velocità del baricentro del sistema isolato.

10.3. Teoremi di conservazione per schemi particellari e corpi rigidi.

Valgono teoremi analoghi a quelli visti per l'elemento materiale purché si consideri un elemento fittizio avente come posizione quella del baricentro e come massa la massa totale, e si sostituisca inoltre la sollecitazione esterna con la sua ridotta.

• **Conservazione di una componente della quantità di moto totale.** La conservazione si ha se e solo se è nulla la componente omologa della risultante della sollecitazione esterna. Infatti abbiamo già provato (vedi 10.2) per il sistema isolato che

$$\vec{Q} = \mathcal{M} \vec{v}_G \Rightarrow \dot{\vec{Q}} = \mathcal{M} \vec{a}_G$$

Considerando poi la equazione 9.12 del sistema globale della dinamica si ha

$$\dot{Q}_x = \mathcal{M} a_{Gx} = F_x^e$$

• **Conservazione del momento totale della quantità di moto rispetto a un polo mobile.** La conservazione si ha se e solo se è nullo il momento totale della sollecitazione esterna rispetto allo stesso polo e inoltre la velocità del polo è parallela a quella del baricentro. La dimostrazione discende immediatamente dalla 9.11. Questo risultato può essere applicato evidentemente alle singole componenti del momento.

• **Conservazione del momento totale assiale della quantità di moto.** La dimostrazione discende immediatamente dalla 9.11 dove sia A un punto qualunque dell'asse stesso. Infatti

$$\frac{d\vec{K}_A \cdot \hat{a}}{dt} = \dot{\vec{K}}_A \cdot \hat{a} + \vec{K}_A \cdot \dot{\hat{a}} = \vec{M}_A^e \cdot \hat{a} + (\mathcal{M} \vec{v}_G \times \vec{v}_A) \cdot \hat{a} + (\mathcal{M} \vec{v}_G \times \vec{GA}) \cdot \dot{\hat{a}}$$

dove si è sfruttato il risultato 10.3. Dunque l'annullamento si ha se e solo se è nullo il momento totale assiale della sollecitazione esterna e contemporaneamente sono complanari i tre vettori $\vec{v}_G, \vec{GA}, \hat{a}$, ciò che si verifica in particolare nel caso in cui l'asse sia fisso.

Capitolo 11. Lavoro e energia per l'elemento

11.1. Definizione di lavoro su un elemento. Sull'elemento di posizione $\overrightarrow{OP}(t)$ agisce la forza

$$11.1) \quad \vec{f} = \vec{f}(\overrightarrow{OP}(t), \dot{\overrightarrow{OP}}(t), t)$$

Allora si dice che il lavoro fatto dalla forza sull'elemento fra l'istante t_1 e l'istante t_2 è dato dall'integrale

$$11.2) \quad L_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f} \cdot \dot{\overrightarrow{OP}} dt$$

Nel caso di una forza posizionale¹ l'integrando

$$12.3) \quad \vec{f}(\overrightarrow{OP}) \cdot \dot{\overrightarrow{OP}}(t) dt = f_x(x, y, z) dx + f_y(x, y, z) dy + f_z(x, y, z) dz$$

detto lavoro elementare, è una forma differenziale lineare e il lavoro

$$11.4) \quad L_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}(\overrightarrow{OP}) \cdot \dot{\overrightarrow{OP}}(t) dt = \int_{\gamma} (f_x dx + f_y dy + f_z dz)$$

ne è l'integrale curvilineo sulla traiettoria γ dell'elemento. Se la traiettoria ha equazioni

$$11.5) \quad \gamma: \begin{cases} \gamma_x = \gamma_x(t) \\ \gamma_y = \gamma_y(t) \\ \gamma_z = \gamma_z(t) \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2]$$

allora il lavoro **11.4** si traduce nell'integrale lineare

$$11.6) \quad L_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \left(f_x(\gamma_x(t), \gamma_y(t), \gamma_z(t)) \frac{d\gamma_x(t)}{dt} + f_y(\gamma_x(t), \gamma_y(t), \gamma_z(t)) \frac{d\gamma_y(t)}{dt} + f_z(\gamma_x(t), \gamma_y(t), \gamma_z(t)) \frac{d\gamma_z(t)}{dt} \right) dt$$

11.2. Forza conservativa. Una forza posizionale $\vec{f}(\overrightarrow{OP})$ si dice conservativa quando la forma differenziale lineare

$$11.7) \quad dL = f_x(x, y, z) dx + f_y(x, y, z) dy + f_z(x, y, z) dz$$

è esatta, cioè quando alla forza resta associato un campo scalare² di cui essa sia il gradiente. Si osserva che nel caso particolare in cui la forza sia definita in un campo semplicemente connesso³, la natura conservativa della forza equivale alla condizione di chiusura della forma differenziale **11.3**, condizione espressa dalle tre relazioni

¹ E' una forza che dipende solo dalla posizione dell'elemento e non dalla sua velocità, né dal tempo.

² In realtà i campi scalari sono infiniti e differiscono fra loro per una costante additiva.

³ E' un campo in cui ogni curva chiusa può essere ristretta a un punto, senza che i punti di tale curva debbano uscire dall'insieme stesso.

$$11.8) \quad \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x} \quad \frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial x} \quad \frac{\partial f_z}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial z}$$

Nel caso di forza conservativa esiste una funzione scalare $U = U(x, y, z)$, che in Analisi prende il nome di primitiva della forma differenziale **11.5** mentre in Meccanica viene chiamata potenziale del campo di forze, la quel soddisfa le tre relazioni

$$11.9) \quad \frac{\partial U}{\partial x} = f_x \quad \frac{\partial U}{\partial y} = f_y \quad \frac{\partial U}{\partial z} = f_z$$

Allora il lavoro **11.6** si scrive

$$\begin{aligned} & L_{1,2} = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial U}{\partial x}(\gamma_x(t), \gamma_y(t), \gamma_z(t)) \frac{d\gamma_x(t)}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}(\gamma_x(t), \gamma_y(t), \gamma_z(t)) \frac{d\gamma_y(t)}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}(\gamma_x(t), \gamma_y(t), \gamma_z(t)) \frac{d\gamma_z(t)}{dt} \right) dt = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dU(\gamma_x(t), \gamma_y(t), \gamma_z(t))}{dt} \right) dt = U(\gamma_x(t_2), \gamma_y(t_2), \gamma_z(t_2)) - U(\gamma_x(t_1), \gamma_y(t_1), \gamma_z(t_1)) \end{aligned}$$

Se dunque indico

$$A \equiv (\gamma_x(t_1), \gamma_y(t_1), \gamma_z(t_1)) \quad B \equiv (\gamma_x(t_2), \gamma_y(t_2), \gamma_z(t_2))$$

rispettivamente la posizione iniziale e finale della traiettoria dell'elemento, allora il lavoro si scrive

$$11.10) \quad L_{A,B} = U(B) - U(A)$$

11.3. Energia potenziale associata a una forza conservativa. Data una forza conservativa, sappiamo che a essa resta associato un campo scalare U , detto potenziale, di cui la forza stessa costituisce il gradiente. Ebbene si dice energia potenziale associata a una forza conservativa tale campo scalare, cambiato di segno, ovvero la funzione

$$11.11) \quad \Pi = -U = \Pi(x, y, z) \leftrightarrow \vec{\nabla} \Pi = -\vec{f}(x, y, z)$$

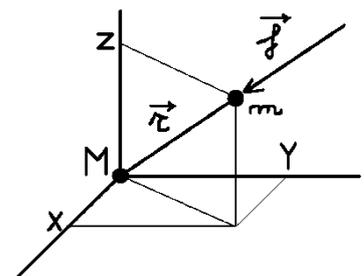
Il significato del segno meno è il seguente: si vuole che la forza spinga l'elemento verso posizioni a minore energia potenziale; dato che il gradiente di una funzione punta invece verso posizioni in cui tale funzione assume valori maggiori, è necessario il segno meno. L'energia potenziale permette di scrivere il lavoro di una forza posizionale conservativa in modo compatto come

$$11.12) \quad L_{A,B} = \Pi(A) - \Pi(B)$$

essendo A la posizione iniziale della traiettoria dell'elemento, e B la posizione finale, come discende immediatamente dalla **11.10**. Ricavo ora la funzione energia potenziale per i principali campi di forze conservativi.

• **Energia potenziale newtoniana.** La forza di gravitazione

$$11.13) \quad \vec{f}(x, y, z) = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{GMm}{x^2+y^2+z^2} \frac{x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$



è conservativa in ogni campo semplicemente connesso e la sua energia potenziale è data da

$$11.14) \Pi = -\frac{GMm}{r} + \text{costante} = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \text{costante}$$

Infatti la forma differenziale associata al campo delle forze gravitazionali è

$$11.15) dL = -\frac{GMm}{x^2+y^2+z^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx - \frac{GMm}{x^2+y^2+z^2} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dy - \frac{GMm}{x^2+y^2+z^2} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dz$$

e le sue derivate miste valgono

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial \left(-\frac{GMmx}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} \right)}{\partial y} = \frac{6GMmxy}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^4}$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial \left(-\frac{GMmy}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} \right)}{\partial x} = \frac{6GMmyx}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^4}$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{\partial \left(-\frac{GMmx}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} \right)}{\partial z} = \frac{6GMmxz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^4}$$

$$\frac{\partial f_z}{\partial x} = \frac{\partial \left(-\frac{GMmz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} \right)}{\partial x} = \frac{6GMmzx}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^4}$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial \left(-\frac{GMmy}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} \right)}{\partial z} = \frac{6GMmyz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^4}$$

$$\frac{\partial f_z}{\partial y} = \frac{\partial \left(-\frac{GMmz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} \right)}{\partial y} = \frac{6GMmzy}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^4}$$

Per verificare invece che l'energia potenziale indicata sia realmente tale, basta verificare che le sue derivate parziali coincidano con le componenti omologhe della forza, cambiate di segno. Si ha

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -\frac{\partial \frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\partial x} = \frac{GMm}{x^2+y^2+z^2} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{GMm}{x^2+y^2+z^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -\frac{\partial \frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\partial y} = \frac{GMm}{x^2+y^2+z^2} \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{GMm}{x^2+y^2+z^2} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = -\frac{\partial \frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\partial z} = \frac{GMm}{x^2+y^2+z^2} \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{GMm}{x^2+y^2+z^2} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Il lavoro del campo gravitazionale per portare la massa m dal punto (x_1, y_1, z_1) al punto (x_2, y_2, z_2) è dato, in base alla **11.12**, da

$$L_{1,2} = \Pi(x_1, y_1, z_1) - \Pi(x_2, y_2, z_2)$$

e dunque si scrive

$$11.16) L_{1,2} = -\frac{GMm}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}} + \frac{GMm}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

Si può constatare come il lavoro del campo gravitazionale relativo a una traiettoria che porti le due masse a una minore distanza reciproca, sia positivo.

• **Energia potenziale associata alla forza peso.** Nell'ingegneria civile e meccanica (e nella maggior parte delle applicazioni aeronautiche) il campo gravitazionale terrestre viene approssimato con il cosiddetto campo della forza peso, il quale è definito dalla funzione vettoriale

$$11.17) \vec{f} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_3$$

dove il versore \vec{e}_3 ha direzione del filo a piombo⁴, e dove l'accelerazione gravitazionale è data da

$$11.18) g = GM$$

dove compare la costante di gravitazione universale e la massa terrestre. Il campo di forze così definito è conservativo poiché, essendo nulle tutte le sue derivate parziali, la forma differenziale a esso associata è chiusa. La sua energia potenziale è data da

$$11.19) \Pi(z) = mgz$$

come è immediato verificare. Dunque il lavoro fatto dal campo della forza peso nel passaggio del punto materiale dalla quota z_1 alla quota z_2 , è dato da

$$11.20) L_{1,2} = \Pi(z_1) - \Pi(z_2) = mg(z_1 - z_2)$$

• **Energia potenziale coulombiana.** Il campo delle forze coulombiane è formalmente identico a quello delle forze gravitazionali, essendo descritto dalla funzione vettoriale

$$11.21) \vec{f}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{x^2+y^2+z^2} \frac{x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Dunque è anch'esso conservativo. Si nota che le forze sono attrattive, come per il campo gravitazionale, nel caso in cui le due cariche abbiano segno opposto; risultano invece repulsive nel caso in cui le due cariche abbiano segno opposto. L'energia potenziale, *mutatis mutandis*, si ottiene direttamente dalla **11.14**:

$$11.22) \Pi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r} + costante = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + costante$$

Il lavoro del campo coulombiano per portare la carica q dal punto (x_1, y_1, z_1) al punto (x_2, y_2, z_2) è dato, facendo riferimento alla **11.16**, da

⁴ Si ricorda che il filo a piombo non punta esattamente il centro della Terra, essendo deviato dalla forza inerziale dovuta al moto di rotazione intorno all'asse terrestre.

$$11.23) L_{1,2} = \Pi(x_1, y_1, z_1) - \Pi(x_2, y_2, z_2) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \right)$$

• **Energia potenziale elastica.** La forza elastica

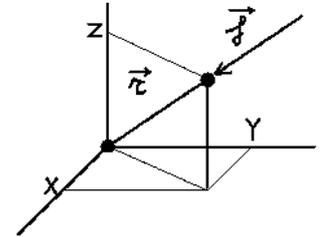
$$11.24) \vec{f} = -\mathcal{K}\vec{r} = -\mathcal{K}(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3)$$

è conservativa, essendo nulle tutte le derivate miste si ha infatti la chiusura della forma differenziale associata, e la relativa energia potenziale è

$$11.25) \Pi(x, y, z) = \frac{1}{2}\mathcal{K}(x^2 + y^2 + z^2)$$

come è immediato verificare calcolandone il gradiente. In accordo con la **11.12**, il lavoro della forza elastica per portare l'elemento dal punto dal punto (x_1, y_1, z_1) al punto (x_2, y_2, z_2) è dato allora da

$$11.26) L_{1,2} = \Pi(x_1, y_1, z_1) - \Pi(x_2, y_2, z_2) = \frac{1}{2}\mathcal{K}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - \frac{1}{2}\mathcal{K}(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)$$

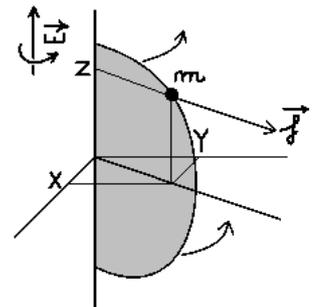


• **Energia potenziale centrifuga.** La forza centrifuga, in base alla **5.5**, è data da

$$11.27) \vec{f} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overline{OP}) = m\omega^2(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2)$$

è una forza conservativa⁵, essendo nulle le sue derivate miste risulta infatti chiusa la forma differenziale a essa associata, e la relativa energia potenziale è

$$11.28) \Pi(x, y, z) = -\frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$$



come si verifica immediatamente calcolandone il gradiente. In accordo con la **11.12**, il lavoro della forza centrifuga per portare l'elemento dal punto dal punto (x_1, y_1, z_1) al punto (x_2, y_2, z_2) è dato allora da

$$11.29) L_{1,2} = \Pi(x_1, y_1, z_1) - \Pi(x_2, y_2, z_2) = \frac{1}{2}m\omega^2(-(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2))$$

11.4. Energia cinetica, teorema del lavoro. A un elemento di massa m e velocità di modulo v si attribuisce un'energia, detta cinetica, data da

$$11.30) E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Il significato fisico di questa definizione, che pare del tutto arbitraria, è fornito dal **teorema del lavoro e dell'energia cinetica**, in base al quale il lavoro fatto su un elemento dalla forza totale agente su esso, in un dato intervallo di tempo, è pari alla variazione di energia cinetica dell'elemento nello stesso intervallo di tempo. Infatti

⁵ Si riconosce fra l'altro che la forza centrifuga è formalmente identica alla forza elastica nel piano, a meno del segno.

$$\begin{aligned}
dL &= \vec{f} \cdot \vec{v} dt = f_x v_x dt + f_y v_y dt + f_z v_z dy = m(\dot{v}_x v_x + \dot{v}_y v_y + \dot{v}_z v_z) dt = \\
&= m \frac{d(\dot{v}_x v_x + \dot{v}_y v_y + \dot{v}_z v_z)}{dt} dt = \frac{1}{2} m \frac{d(v_x v_x + v_y v_y + v_z v_z)}{dt} dt = \\
&= \frac{1}{2} m \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} dt = \frac{1}{2} m \frac{dv^2}{dt} dt = \frac{1}{2} m dv^2 = dE_c
\end{aligned}$$

Dunque si conclude che

$$11.31) L_{A,B} = E_c(B) - E_c(A)$$

11.5. Teorema di conservazione dell'energia totale. Si dice energia totale dell'elemento la somma

$$11.32) E = E_c + \Pi$$

essendo Π l'energia potenziale **11.11** dell'elemento stesso, nel caso ovviamente che questa sia definita, ovvero che l'elemento si trovi in uno o più campi di forze conservative. Allora il **teorema di conservazione dell'energia totale** afferma che l'energia totale di un elemento soggetto a una forza totale sostanzialmente conservativa⁶ si conserva. Infatti la variazione di energia totale durante lo spostamento dell'elemento dalla posizione A alla posizione B è data da

$$E_B(B) - E_A = (E_c(B) + \Pi(B)) - (E_c(A) + \Pi(A)) = E_c(B) - E_c(A) - (\Pi(A) - \Pi(B))$$

D'altra parte le **11.12**, **11.31** porgono

$$\begin{cases} L_{A,B} = \Pi(A) - \Pi(B) \\ L_{A,B} = E_c(B) - E_c(A) \end{cases}$$

e dunque

$$E_B(B) - E_A = L_{A,B} - L_{A,B} = 0$$

e la tesi è dimostrata.

⁶ Si parla di forza totale sostanzialmente conservativa quando le eventuali forze non conservative presenti non compiano lavoro (ovvero siano forze a potenza nulla).

Capitolo 12. Lavoro e energia per lo schema particellare e il corpo rigido

12.1. Lavoro di una sollecitazione su uno schema particellare. Consideriamo uno schema particellare costituito dagli n elementi materiali E_1, E_2, \dots, E_n e diciamo che sull'elemento $h - mo$ agisca complessivamente la forza

$$\vec{f}_h = \vec{f}_h(\overrightarrow{OP}_1, \dots, \overrightarrow{OP}_n; \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n; t)$$

la quale sia la somma delle forze che gli altri $n - 1$ elementi e il resto dell'universo esercitano su esso. Allora definisco il lavoro che la sollecitazione costituita dalle forze

$$12.1) \quad \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n\}$$

esplica sullo schema particellare dato, tra gli istanti t_1, t_2 , la sommatoria

$$12.2) \quad L_{t_1, t_2} = \sum_{h=1}^n \left(\int_{t_1}^{t_2} \vec{f}_h \cdot \vec{v}_h dt \right)$$

Nel caso di una sollecitazione posizionale il lavoro **12.2** perde la dipendenza dal tempo e si scrive

$$12.2) \quad L_{1,2} = \sum_{h=1}^n \left(\int_{\gamma_h} f_{hx} dx + f_{hy} dy + f_{hz} dz \right)$$

dove γ_h è la traiettoria descritta dall'elemento $h - mo$ tra gli istanti t_1, t_2 . Resta definita allora la forma differenziale lineare dello spazio \mathbb{R}^{3n} data da

$$12.3) \quad dL = \sum_{h=1}^n (f_{hx} dx + f_{hy} dy + f_{hz} dz)$$

la quale prende il nome di **lavoro elementare** della sollecitazione.

12.2. Sollecitazione conservativa e energia potenziale. La sollecitazione **12.1** si definisce conservativa quando è posizionale e quando la forma differenziale lineare **12.3** risulta essere esatta. Resta allora definita nello spazio \mathbb{R}^{3n} la funzione

$$12.4) \quad U = U(\overrightarrow{OP}_1, \dots, \overrightarrow{OP}_n) \leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x_h} = f_{hx} \\ \frac{\partial U}{\partial y_h} = f_{hy} \\ \frac{\partial U}{\partial z_h} = f_{hz} \end{cases} \quad h = 1, 2 \dots n$$

la quale rappresenta la primitiva della forma differenziale **12.3** e prende il nome di potenziale della sollecitazione, in analogia con quanto visto per il singolo elemento materiale. Ciò posto il lavoro **12.2** per una sollecitazione conservativa si scrive

$$L_{1,2} = \sum_{h=1}^n \left(\int_{\gamma_h} \frac{\partial U}{\partial x_h} dx + \frac{\partial U}{\partial y_h} dy + \frac{\partial U}{\partial z_h} dz \right) = \sum_{h=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial U}{\partial x_h} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_h} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_h} \frac{dz}{dt} \right) dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{h=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_h} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_h} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_h} \frac{dz}{dt} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dU}{dt} dt = U(t_2) - U(t_1)$$

Si definisce poi energia potenziale della sollecitazione la funzione

$$12.5) \quad \Pi = -U$$

E dunque il lavoro che la sollecitazione conservativa compie per portare lo schema particellare dalla configurazione A alla configurazione B risulta dato da

$$12.6) \quad L_{A,B} = \Pi(A) - \Pi(B)$$

• **Sollecitazione newtoniana.** Consideriamo uno schema particellare costituito da n elementi materiali e la sollecitazione composta dalle forze che essi si scambiano fra loro. Intanto la forza che l'elemento $h - m_o$ esercita sull'elemento $k - m_o$, in base alla **11.13**, è data da

$$12.7) \quad \vec{f}_{hk}(x_h, y_h, z_h; x_k, y_k, z_k) = -\frac{Gm_h m_k}{r_{hk}^2} \frac{\vec{r}_{hk}}{r_{hk}} = \frac{-Gm_h m_k}{(x_k - x_h)^2 + (y_k - y_h)^2 + (z_k - z_h)^2} \frac{(x_k - x_h)\vec{e}_1 + (y_k - y_h)\vec{e}_2 + (z_k - z_h)\vec{e}_3}{\sqrt{(x_k - x_h)^2 + (y_k - y_h)^2 + (z_k - z_h)^2}}$$

Per esaminare la sollecitazione consideriamo il caso in cui lo schema particellare sia costituito da quattro masse. Allora il lavoro che le forze del campo gravitazionale fanno per portare le masse da una configurazione A , assunta all'istante t_1 , a una configurazione B , assunta all'istante t_2 , essendo

$$A: \{(x_{1A}, y_{1A}, z_{1A}), (x_{2A}, y_{2A}, z_{2A}), (x_{3A}, y_{3A}, z_{3A}), (x_{4A}, y_{4A}, z_{4A})\}$$

$$B: \{(x_{1B}, y_{1B}, z_{1B}), (x_{2B}, y_{2B}, z_{2B}), (x_{3B}, y_{3B}, z_{3B}), (x_{4B}, y_{4B}, z_{4B})\}$$

in base alla definizione **12.2** è dato da

$$L_{AB} = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{f}_{12} \cdot \vec{v}_2 + \vec{f}_{13} \cdot \vec{v}_3 + \vec{f}_{14} \cdot \vec{v}_4) dt + \int_{t_1}^{t_2} (\vec{f}_{21} \cdot \vec{v}_1 + \vec{f}_{23} \cdot \vec{v}_3 + \vec{f}_{24} \cdot \vec{v}_4) dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} (\vec{f}_{31} \cdot \vec{v}_1 + \vec{f}_{32} \cdot \vec{v}_2 + \vec{f}_{34} \cdot \vec{v}_4) dt + \int_{t_1}^{t_2} (\vec{f}_{41} \cdot \vec{v}_1 + \vec{f}_{42} \cdot \vec{v}_2 + \vec{f}_{43} \cdot \vec{v}_3) dt$$

Considerando poi che le forze che si scambiano due elementi sono uguali se non per il verso, allora possiamo scrivere

$$L_{AB} = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{f}_{12} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + \vec{f}_{13} \cdot (\vec{v}_3 - \vec{v}_1) + \vec{f}_{14} \cdot (\vec{v}_4 - \vec{v}_1) + \vec{f}_{24} \cdot (\vec{v}_4 - \vec{v}_2) + \vec{f}_{34} \cdot (\vec{v}_4 - \vec{v}_3) + \vec{f}_{23} \cdot (\vec{v}_3 - \vec{v}_2)) dt$$

Osservato poi che

$$\vec{f}_{12} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) dt = \vec{f}_{12} \cdot d \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

e che relazioni analoghe valgono per gli altri 5 addendi, allora il lavoro si scrive

$$L_{AB} = \int_A^B \left(\vec{f}_{12} \cdot d \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} + \vec{f}_{13} \cdot d \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{pmatrix} + \vec{f}_{14} \cdot d \begin{pmatrix} x_4 - x_1 \\ y_4 - y_1 \\ z_4 - z_1 \end{pmatrix} + \vec{f}_{24} \cdot d \begin{pmatrix} x_4 - x_2 \\ y_4 - y_2 \\ z_4 - z_2 \end{pmatrix} + \vec{f}_{34} \cdot d \begin{pmatrix} x_4 - x_3 \\ y_4 - y_3 \\ z_4 - z_3 \end{pmatrix} + \vec{f}_{23} \cdot d \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \\ z_3 - z_2 \end{pmatrix} \right)$$

Allora si può concludere che la sollecitazione delle forze gravitazionali che le quattro masse si scambiano fra loro è conservativa poiché la funzione scalare

$$U = \frac{Gm_1m_2}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}} + \frac{Gm_1m_3}{\sqrt{(x_3-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2 + (z_3-z_1)^2}} + \\ + \frac{Gm_1m_4}{\sqrt{(x_4-x_1)^2 + (y_4-y_1)^2 + (z_4-z_1)^2}} + \frac{Gm_2m_4}{\sqrt{(x_4-x_2)^2 + (y_4-y_2)^2 + (z_4-z_2)^2}} + \\ + \frac{Gm_3m_4}{\sqrt{(x_4-x_3)^2 + (y_4-y_3)^2 + (z_4-z_3)^2}} + \frac{Gm_3m_2}{\sqrt{(x_3-x_2)^2 + (y_3-y_2)^2 + (z_3-z_2)^2}}$$

è la primitiva del differenziale lineare integrando essendo

$$\frac{\partial U}{\partial(x_2-x_1)} = \frac{Gm_1m_2}{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2} \frac{(x_2-x_1)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}} = f_{12x} \\ \frac{\partial U}{\partial(y_2-y_1)} = \frac{Gm_1m_2}{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2} \frac{(y_2-y_1)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}} = f_{12y} \\ \frac{\partial U}{\partial(z_2-z_1)} = \frac{Gm_1m_2}{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2} \frac{(z_2-z_1)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}} = f_{12z} \\ \dots$$

Dunque la sollecitazione considerata risulta conservativa secondo la definizione **12.4**, e la sua energia potenziale è data dalla funzione $\Pi = -U$. Quanto trovato si generalizza affermando che

la sollecitazione costituita dalle forze gravitazionali

$$12.8) \vec{f}_{hk}(x_h, y_h, z_h; x_k, y_k, z_k) = -\frac{Gm_hm_k}{r_{hk}^2} \frac{\vec{r}_{hk}}{r_{hk}} = \frac{-Gm_hm_k}{(x_k-x_h)^2 + (y_k-y_h)^2 + (z_k-z_h)^2} \frac{(x_k-x_h)\vec{e}_1 + (y_k-y_h)\vec{e}_2 + (z_k-z_h)\vec{e}_3}{\sqrt{(x_k-x_h)^2 + (y_k-y_h)^2 + (z_k-z_h)^2}}$$

che gli elementi di uno schema particellare si scambiano fra loro è conservativa, la sua energia potenziale è data da

$$12.9) \Pi(\overline{OP}_1, \dots, \overline{OP}_n) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n \frac{Gm_hm_k}{\sqrt{(x_k-x_h)^2 + (y_k-y_h)^2 + (z_k-z_h)^2}}$$

essendo gli addendi tanti quanti le combinazioni di classe due di n elementi (cioè ogni coppia va considerata una sola volta); il lavoro che tale sollecitazione realizza nel passaggio del sistema dalla configurazione A alla configurazione B è dato da

$$L_{AB} = \Pi(A) - \Pi(B)$$

Il caso particolare di quattro elementi l'ho affrontato per giustificare il fattore moltiplicativo $\frac{1}{2}$ della **12.9a** partendo dalla definizione di energia potenziale come primitiva (cambiata di segno) del lavoro elementare della sollecitazione.

• **Sollecitazione dei pesi.** L'energia potenziale di uno schema particellare costituito da n elementi materiali, soggetti al campo della forza peso

$$12.10) \vec{f} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_3$$

è data dalla funzione

$$12.11) \Pi(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{h=1}^n mgz_h$$

• **Sollecitazione colombiana.** Vale quanto detto per la sollecitazione delle forze gravitazionali, per cui si può affermare che

la sollecitazione costituita dalle forze coulombiane

$$12.12) \vec{f}_{hk}(\overrightarrow{OP}_h, \overrightarrow{OP}_k) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_h q_k}{r_{hk}^2} \frac{\vec{r}_{hk}}{r_{hk}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_h q_k}{(x_k - x_h)^2 + (y_k - y_h)^2 + (z_k - z_h)^2} \frac{(x_k - x_h)\vec{e}_1 + (y_k - y_h)\vec{e}_2 + (z_k - z_h)\vec{e}_3}{\sqrt{(x_k - x_h)^2 + (y_k - y_h)^2 + (z_k - z_h)^2}}$$

che gli elementi (provvisi di carica elettrica) di uno schema particellare si scambiano fra loro è conservativa, la sua energia potenziale è data da

$$12.13) \Pi(\overrightarrow{OP}_1, \dots, \overrightarrow{OP}_n) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n \frac{G m_h m_k}{\sqrt{(x_k - x_h)^2 + (y_k - y_h)^2 + (z_k - z_h)^2}}$$

essendo gli addendi tanti quanti le combinazioni di classe due di n elementi (cioè ogni coppia va considerata una sola volta); il lavoro che tale sollecitazione realizza nel passaggio del sistema dalla configurazione A alla configurazione B è dato da

$$L_{AB} = \Pi(A) - \Pi(B)$$

• **Sollecitazione elastica.** Ragionando in modo analogo al caso della sollecitazione interna gravitazionale, e considerando quanto indicato nella **11.25** se indichiamo \mathcal{K}_{hk} la costante elastica caratterizzante la forza elastica fra l'elemento h -mo e l'elemento k -mo, allora possiamo affermare che

la sollecitazione costituita dalle forze elastiche

$$12.14) \vec{f}_{hk}(\overrightarrow{OP}_h, \overrightarrow{OP}_k) = -\mathcal{K}_{hk} \vec{r}_{hk} = -\mathcal{K}_{hk} ((x_k - x_h)\vec{e}_1 + (y_k - y_h)\vec{e}_2 + (z_k - z_h)\vec{e}_3)$$

che gli elementi di uno schema particellare si scambiano fra loro è conservativa, la sua energia potenziale è data da

$$12.15) \Pi(\overrightarrow{OP}_1, \dots, \overrightarrow{OP}_n) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n \frac{1}{2} \mathcal{K}_{hk} \left((x_k - x_h)^2 + (y_k - y_h)^2 + (z_k - z_h)^2 \right)$$

essendo gli addendi tanti quanti le combinazioni di classe due di n elementi (cioè ogni coppia viene considerata una sola volta); il lavoro che tale sollecitazione realizza nel passaggio del sistema dalla configurazione A alla configurazione B è dato da

$$L_{AB} = \Pi(A) - \Pi(B)$$

• **Sollecitazione centrifuga.** È un caso formalmente analogo a quello della sollecitazione elastica nel caso piano. Estendendo quanto provato per la coppia di elementi si ha che

la sollecitazione costituita dalle forze centrifughe

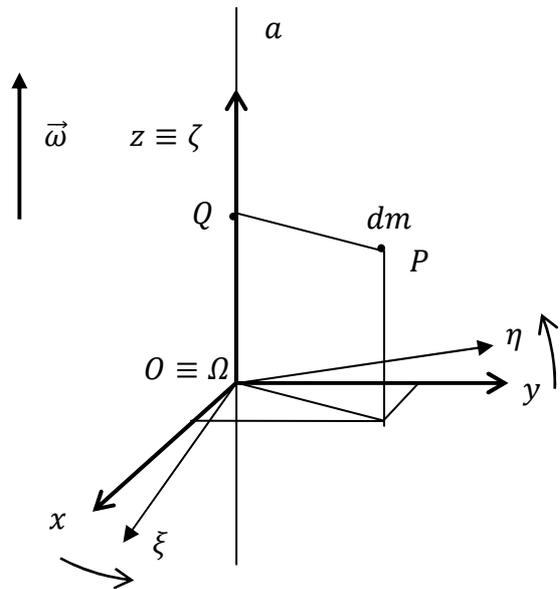
$$12.16) \vec{f}_h = -m_h \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overline{OP}_h) = -m_h \omega^2 (x_h \vec{e}_1 + y_h \vec{e}_2)$$

a cui gli elementi di uno schema particellare ruotante rispetto a un sistema inerziale, sono sottoposte, è conservativa, la sua energia potenziale è data da

$$12.17) \Pi(\overline{OP}_1, \dots, \overline{OP}_n) = -\sum_{h=1}^n \frac{1}{2} m_h \omega^2 (x_h^2 + y_h^2)$$

essendo gli addendi tanti quanti le combinazioni di classe due di n elementi (cioè ogni coppia viene considerata una sola volta); il lavoro che tale sollecitazione realizza nel passaggio del sistema dalla configurazione A alla configurazione B è dato da

$$L_{AB} = \Pi(A) - \Pi(B)$$



12.3. Teoremi energetici per lo schema particellare. Definisco energia cinetica di uno schema particellare la somma delle energie cinetiche di ciascuno dei suoi elementi.

• **Teorema di Koenig.** Afferma che l'energia cinetica di uno schema particellare risulta data da

$$12.18) T = \frac{1}{2} \mathcal{M} v_G^2 + T^G$$

dove \mathcal{M} è la massa totale dello schema particellare, \vec{v}_G è la velocità del suo baricentro e T^G è l'energia cinetica dello schema particellare rispetto a un sistema di riferimento che abbia origine nel baricentro e che abbia velocità angolare nulla rispetto al sistema di riferimento considerato fisso¹. Infatti in base alla **5.1** la velocità dell' h -mo elemento² è data da

$$12.19) \vec{v}_h = \vec{v}_G + \vec{v}_h^G$$

e dunque l'energia cinetica dello schema particellare si scrive

¹ Si ricorda che il moto dello schema particellare rispetto a questo particolare sistema di riferimento prende il nome di moto relativo al baricentro al baricentro, ed è stato introdotto nel paragrafo **3.18**.

² Ricordo che con l'apice G si indicano le grandezze cinematiche del moto relativo al baricentro.

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{h=1}^n \frac{1}{2} m_h v_h^2 = \sum_{h=1}^n \frac{1}{2} m_h \vec{v}_h \cdot \vec{v}_h = \sum_{h=1}^n \frac{1}{2} m_h (\vec{v}_G + \vec{v}_h^G) \cdot (\vec{v}_G + \vec{v}_h^G) = \\
&= \sum_{h=1}^n \frac{1}{2} m_h \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G + \sum_{h=1}^n \frac{1}{2} m_h \vec{v}_G \cdot \vec{v}_h^G + \sum_{h=1}^n \frac{1}{2} m_h \vec{v}_h^G \cdot \vec{v}_G + \sum_{h=1}^n \frac{1}{2} m_h \vec{v}_h^G \cdot \vec{v}_h^G = \\
&= \frac{1}{2} \mathcal{M} v_G^2 + \sum_{h=1}^n m_h \vec{v}_G \cdot \vec{v}_h^G + T^G = \frac{1}{2} \mathcal{M} v_G^2 + \vec{v}_G \cdot \sum_{h=1}^n m_h \vec{v}_h^G + T^G = \\
&= \frac{1}{2} \mathcal{M} v_G^2 + \mathcal{M} \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G^G + T^G = \frac{1}{2} \mathcal{M} v_G^2 + T^G
\end{aligned}$$

dove si è considerato che la velocità \vec{v}_G^G del baricentro nel moto relativo al baricentro è nulla.

• **Teorema del lavoro e dell'energia cinetica.** Considerando la definizione **12.2** del lavoro di una sollecitazione, nonché il teorema del lavoro per l'elemento materiale (paragrafo **11.4**), segue che

anche per uno schema particellare la variazione dell'energia cinetica fra gli istanti t_1, t_2 è pari al lavoro che la sollecitazione agente su di esso (esterna e interna) compie in quello stesso intervallo di tempo.

Dunque possiamo scrivere

$$12.20) T_2 - T_1 = L_{1,2}^i + L_{1,2}^e$$

dove si è distinto il lavoro delle forze esterne da quello delle forze interne per ricordare che in uno schema particellare (a differenza, come vedremo, di ciò che accade in un corpo rigido) le forze interne compiono un lavoro non nullo.

• **Energia totale e teorema di conservazione.** Detta energia totale di uno schema particellare la somma

$$12.21) E = T + \Pi$$

dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, allora

se la sollecitazione agente sullo schema particellare è sostanzialmente conservativa³, segue che l'energia totale si conserva.

Infatti per la **12.6**, la **12.20** e la **12.21** si ha che

$$E_2 - E_1 = T_2 + \Pi_2 - T_1 - \Pi_1 = (T_2 - T_1) - (\Pi_1 - \Pi_2) = L_{1,2} - L_{1,2} = 0$$

12.4. Lavoro di una sollecitazione su un corpo rigido. Il lavoro elementare su un corpo rigido della generica sollecitazione di risultante \vec{F} e momento totale rispetto al baricentro dato da \vec{M}_G , è dato da

$$12.22) dL = \vec{F} \cdot \vec{v}_G dt + \vec{M}_G \cdot \vec{\omega} dt$$

³ Si parla di sollecitazione sostanzialmente conservativa nel caso in cui le eventuali forze non conservative presenti non compiono lavoro (ovvero sono forze a potenza nulla).

essendo \vec{v}_G la velocità del baricentro del corpo rigido e $\vec{\omega}$ la sua velocità angolare. Infatti essendo il corpo rigido un particolare schema particellare, deve valere la **12.3** cioè

$$\begin{aligned}
 dL &= \int_{\Omega} \vec{f}(P) \cdot \vec{v}(P) dt dV = \int_{\Omega} \vec{f}(P) \cdot (\vec{v}(G) + \vec{\omega} \times \overline{GP}) dt dV = \\
 &= \int_{\Omega} \vec{f}(P) \cdot \vec{v}(G) dt dV + \int_{\Omega} \vec{f}(P) \cdot \vec{\omega} \times \overline{GP} dt dV = \\
 &= \int_{\Omega} \vec{f}(P) dt \cdot \vec{v}(G) dV + \int_{\Omega} \vec{f}(P) \cdot \vec{\omega} \times \overline{GP} dt dV = \\
 &= \vec{F} \cdot \vec{v}_G dt + \int_{\Omega} \vec{\omega} \cdot \overline{GP} \times \vec{f}(P) dt dV = \vec{F} \cdot \vec{v}_G dt + \vec{\omega} \cdot \int_{\Omega} \vec{f}(P) \times \overline{PG} dt dV = \\
 &= \vec{F} \cdot \vec{v}_G dt + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_G dt
 \end{aligned}$$

Indicato poi Ω un generico punto solidale al corpo rigido è immediato verificare che la **12.22** è equivalente alla più generale

$$12.22.bis) dL = \vec{F} \cdot \vec{v}_{\Omega} dt + \vec{M}_{\Omega} \cdot \vec{\omega} dt$$

• **Lavoro della sollecitazione interna di un corpo rigido.** Nel paragrafo **10.2** si è dimostrato che la sollecitazione interna di un sistema di punti materiali (e dunque, in particolare, di un corpo rigido) è equivalente a zero, ovvero è equivalente a una forza nulla e a una coppia nulla. Ma allora la **12.22** ci permette di concludere che

il lavoro della sollecitazione interna di un corpo rigido è nullo.

12.5. Energia cinetica e teoremi energetici per il corpo rigido. Intanto vale la pena ricordare che il corpo rigido è un caso particolare di schema particellare e dunque valgono per esse tutti i risultati ricavati per lo schema particellare.

• **Energia cinetica.** L'energia cinetica di un corpo rigido si scrive

$$12.23) T = \frac{1}{2} \mathcal{M} v_G^2 + \frac{1}{2} J_{\omega} \omega^2$$

dove si intende che J_{ω} è il momento di inerzia del corpo rispetto a un asse bari centrale il quale sia istante per istante parallelo all'asse di rotazione. Infatti

$$\begin{aligned}
 T &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho v^2(P) dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\vec{v}(G) + \vec{\omega} \times \overline{GP}) \cdot (\vec{v}(G) + \vec{\omega} \times \overline{GP}) dV = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \vec{v}(G) \cdot \vec{v}(G) dV + \int_{\Omega} \rho \vec{v}(G) \cdot \vec{\omega} \times \overline{GP} dV + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \vec{\omega} \times \overline{GP} \cdot \vec{\omega} \times \overline{GP} dV =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \mathcal{M} v_G^2 + \vec{v}(G) \times \vec{\omega} \cdot \int_{\Omega} \rho \overrightarrow{GP} dV + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |\vec{\omega} \times \overrightarrow{GP}|^2 dV = \\
&= \frac{1}{2} \mathcal{M} v_G^2 + \vec{v}(G) \times \vec{\omega} \cdot \mathcal{M} \overrightarrow{GG} + \frac{1}{2} \omega^2 \int_{\Omega} \rho \left| \frac{\vec{\omega}}{\omega} \times \overrightarrow{GP} \right|^2 dV = \frac{1}{2} \mathcal{M} v_G^2 + \frac{1}{2} \omega^2 J_{\omega}
\end{aligned}$$

• **Teorema del lavoro e dell'energia cinetica.** Vale il teorema omonimo dimostrato per lo schema particellare (il corpo rigido è un particolare schema particellare). Comunque vale la pena riportare la dimostrazione nel caso del corpo rigido: sostituendo le equazioni delle 9.15 nella 12.22 e fatte le semplificazioni del caso si ha

$$\begin{aligned}
dL &= \vec{F} \cdot \vec{v}_G dt + (J_{\xi} \dot{\omega}_{\xi} + J_{\eta} \dot{\omega}_{\eta} + J_{\zeta} \dot{\omega}_{\zeta}) dt = \mathcal{M} \vec{a}_G \cdot \vec{v}_G dt + (J_{\xi} \dot{\omega}_{\xi} \omega_{\xi} + J_{\eta} \dot{\omega}_{\eta} \omega_{\eta} + J_{\zeta} \dot{\omega}_{\zeta} \omega_{\zeta}) dt = \\
&= \frac{1}{2} \mathcal{M} d v_G^2 + \frac{1}{2} d(J_{\xi} \omega_{\xi}^2 + J_{\eta} \omega_{\eta}^2 + J_{\zeta} \omega_{\zeta}^2) = d \left(\frac{1}{2} \mathcal{M} v_G^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \left(J_{\xi} \frac{\omega_{\xi}^2}{\omega^2} + J_{\eta} \frac{\omega_{\eta}^2}{\omega^2} + J_{\zeta} \frac{\omega_{\zeta}^2}{\omega^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

Si consideri (magari con un disegno) che ω_{ξ}/ω è il coseno direttore della retta baricentrale parallela alla velocità angolare; ma allora

$$J_{\xi} \frac{\omega_{\xi}^2}{\omega^2} + J_{\eta} \frac{\omega_{\eta}^2}{\omega^2} + J_{\zeta} \frac{\omega_{\zeta}^2}{\omega^2} = J_{\omega}$$

E dunque la tesi:

$$dL = d \left(\frac{1}{2} \mathcal{M} v_G^2 + \frac{1}{2} \omega^2 J_{\omega} \right) = dT$$

Ricordo che il sistema di riferimento di assi ξ, η, ζ è la terna centrale di inerzia del corpo rigido.

• **Teorema dell'energia totale.** Per lo schema particellare si è dimostrato che l'energia totale, somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica, si conserva; quindi questa proprietà risulta verificata anche nel caso del corpo rigido, il quale è un particolare schema particellare. D'altra parte è immediato rilevare che

$$\begin{cases} dL = dT \\ dL = -d\Pi \Rightarrow dE = dT + d\Pi = dL - dL = 0 \\ E = T + \Pi \end{cases}$$

Capitolo 12. Lavoro e energia per lo schema particellare e il corpo rigido

12.1. Lavoro di una sollecitazione su uno schema particellare. Consideriamo uno schema particellare costituito dagli n elementi materiali E_1, E_2, \dots, E_n e diciamo che sull'elemento $h - mo$ agisca complessivamente la forza

$$\vec{f}_h = \vec{f}_h(\overrightarrow{OP}_1, \dots, \overrightarrow{OP}_n; \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n; t)$$

la quale sia la somma delle forze che gli altri $n - 1$ elementi e il resto dell'universo esercitano su esso. Allora definisco il lavoro che la sollecitazione costituita dalle forze

$$12.1) \quad \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n\}$$

esplica sullo schema particellare dato, tra gli istanti t_1, t_2 , la sommatoria

$$12.2) \quad L_{t_1, t_2} = \sum_{h=1}^n \left(\int_{t_1}^{t_2} \vec{f}_h \cdot \vec{v}_h dt \right)$$

Nel caso di una sollecitazione posizionale il lavoro **12.2** perde la dipendenza dal tempo e si scrive

$$12.2) \quad L_{1,2} = \sum_{h=1}^n \left(\int_{\gamma_h} f_{hx} dx + f_{hy} dy + f_{hz} dz \right)$$

dove γ_h è la traiettoria descritta dall'elemento $h - mo$ tra gli istanti t_1, t_2 . Resta definita allora la forma differenziale lineare dello spazio \mathbb{R}^{3n} data da

$$12.3) \quad dL = \sum_{h=1}^n (f_{hx} dx + f_{hy} dy + f_{hz} dz)$$

la quale prende il nome di **lavoro elementare** della sollecitazione.

12.2. Sollecitazione conservativa e energia potenziale. La sollecitazione **12.1** si definisce conservativa quando è posizionale e quando la forma differenziale lineare **12.3** risulta essere esatta. Resta allora definita nello spazio \mathbb{R}^{3n} la funzione

$$12.4) \quad U = U(\overrightarrow{OP}_1, \dots, \overrightarrow{OP}_n) \leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x_h} = f_{hx} \\ \frac{\partial U}{\partial y_h} = f_{hy} \\ \frac{\partial U}{\partial z_h} = f_{hz} \end{cases} \quad h = 1, 2 \dots n$$

la quale rappresenta la primitiva della forma differenziale **12.3** e prende il nome di potenziale della sollecitazione, in analogia con quanto visto per il singolo elemento materiale. Ciò posto il lavoro **12.2** per una sollecitazione conservativa si scrive

$$L_{1,2} = \sum_{h=1}^n \left(\int_{\gamma_h} \frac{\partial U}{\partial x_h} dx + \frac{\partial U}{\partial y_h} dy + \frac{\partial U}{\partial z_h} dz \right) = \sum_{h=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial U}{\partial x_h} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_h} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_h} \frac{dz}{dt} \right) dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{h=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_h} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_h} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_h} \frac{dz}{dt} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dU}{dt} dt = U(t_2) - U(t_1)$$

Si definisce poi energia potenziale della sollecitazione la funzione

$$12.5) \quad \Pi = -U$$

E dunque il lavoro che la sollecitazione conservativa compie per portare lo schema particellare dalla configurazione A alla configurazione B risulta dato da

$$12.6) \quad L_{A,B} = \Pi(A) - \Pi(B)$$

• **Sollecitazione newtoniana.** Consideriamo uno schema particellare costituito da n elementi materiali e la sollecitazione composta dalle forze che essi si scambiano fra loro. Intanto la forza che l'elemento $h - m_o$ esercita sull'elemento $k - m_o$, in base alla **11.13**, è data da

$$12.7) \quad \vec{f}_{hk}(x_h, y_h, z_h; x_k, y_k, z_k) = -\frac{Gm_h m_k}{r_{hk}^2} \frac{\vec{r}_{hk}}{r_{hk}} = \frac{-Gm_h m_k}{(x_k - x_h)^2 + (y_k - y_h)^2 + (z_k - z_h)^2} \frac{(x_k - x_h)\vec{e}_1 + (y_k - y_h)\vec{e}_2 + (z_k - z_h)\vec{e}_3}{\sqrt{(x_k - x_h)^2 + (y_k - y_h)^2 + (z_k - z_h)^2}}$$

Per esaminare la sollecitazione consideriamo il caso in cui lo schema particellare sia costituito da quattro masse. Allora il lavoro che le forze del campo gravitazionale fanno per portare le masse da una configurazione A , assunta all'istante t_1 , a una configurazione B , assunta all'istante t_2 , essendo

$$A: \{(x_{1A}, y_{1A}, z_{1A}), (x_{2A}, y_{2A}, z_{2A}), (x_{3A}, y_{3A}, z_{3A}), (x_{4A}, y_{4A}, z_{4A})\}$$

$$B: \{(x_{1B}, y_{1B}, z_{1B}), (x_{2B}, y_{2B}, z_{2B}), (x_{3B}, y_{3B}, z_{3B}), (x_{4B}, y_{4B}, z_{4B})\}$$

in base alla definizione **12.2** è dato da

$$L_{AB} = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{f}_{12} \cdot \vec{v}_2 + \vec{f}_{13} \cdot \vec{v}_3 + \vec{f}_{14} \cdot \vec{v}_4) dt + \int_{t_1}^{t_2} (\vec{f}_{21} \cdot \vec{v}_1 + \vec{f}_{23} \cdot \vec{v}_3 + \vec{f}_{24} \cdot \vec{v}_4) dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} (\vec{f}_{31} \cdot \vec{v}_1 + \vec{f}_{32} \cdot \vec{v}_2 + \vec{f}_{34} \cdot \vec{v}_4) dt + \int_{t_1}^{t_2} (\vec{f}_{41} \cdot \vec{v}_1 + \vec{f}_{42} \cdot \vec{v}_2 + \vec{f}_{43} \cdot \vec{v}_3) dt$$

Considerando poi che le forze che si scambiano due elementi sono uguali se non per il verso, allora possiamo scrivere

$$L_{AB} = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{f}_{12} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + \vec{f}_{13} \cdot (\vec{v}_3 - \vec{v}_1) + \vec{f}_{14} \cdot (\vec{v}_4 - \vec{v}_1) + \vec{f}_{24} \cdot (\vec{v}_4 - \vec{v}_2) + \vec{f}_{34} \cdot (\vec{v}_4 - \vec{v}_3) + \vec{f}_{23} \cdot (\vec{v}_3 - \vec{v}_2)) dt$$

Osservato poi che

$$\vec{f}_{12} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) dt = \vec{f}_{12} \cdot d \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

e che relazioni analoghe valgono per gli altri 5 addendi, allora il lavoro si scrive

$$L_{AB} = \int_A^B \left(\vec{f}_{12} \cdot d \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} + \vec{f}_{13} \cdot d \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{pmatrix} + \vec{f}_{14} \cdot d \begin{pmatrix} x_4 - x_1 \\ y_4 - y_1 \\ z_4 - z_1 \end{pmatrix} + \vec{f}_{24} \cdot d \begin{pmatrix} x_4 - x_2 \\ y_4 - y_2 \\ z_4 - z_2 \end{pmatrix} + \vec{f}_{34} \cdot d \begin{pmatrix} x_4 - x_3 \\ y_4 - y_3 \\ z_4 - z_3 \end{pmatrix} + \vec{f}_{23} \cdot d \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \\ z_3 - z_2 \end{pmatrix} \right)$$

Allora si può concludere che la sollecitazione delle forze gravitazionali che le quattro masse si scambiano fra loro è conservativa poiché la funzione scalare

$$U = \frac{Gm_1m_2}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}} + \frac{Gm_1m_3}{\sqrt{(x_3-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2 + (z_3-z_1)^2}} +$$

$$+ \frac{Gm_1m_4}{\sqrt{(x_4-x_1)^2 + (y_4-y_1)^2 + (z_4-z_1)^2}} + \frac{Gm_2m_4}{\sqrt{(x_4-x_2)^2 + (y_4-y_2)^2 + (z_4-z_2)^2}} +$$

$$+ \frac{Gm_3m_4}{\sqrt{(x_4-x_3)^2 + (y_4-y_3)^2 + (z_4-z_3)^2}} + \frac{Gm_3m_2}{\sqrt{(x_3-x_2)^2 + (y_3-y_2)^2 + (z_3-z_2)^2}}$$

è la primitiva del differenziale lineare integrando essendo

$$\frac{\partial U}{\partial(x_2-x_1)} = \frac{Gm_1m_2}{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2} \frac{(x_2-x_1)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}} = f_{12x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial(y_2-y_1)} = \frac{Gm_1m_2}{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2} \frac{(y_2-y_1)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}} = f_{12y}$$

$$\frac{\partial U}{\partial(z_2-z_1)} = \frac{Gm_1m_2}{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2} \frac{(z_2-z_1)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}} = f_{12z}$$

...

Dunque la sollecitazione considerata risulta conservativa secondo la definizione **12.4**, e la sua energia potenziale è data dalla funzione $\Pi = -U$. Quanto trovato si generalizza affermando che

la sollecitazione costituita dalle forze gravitazionali

$$12.8) \vec{f}_{hk}(x_h, y_h, z_h; x_k, y_k, z_k) = -\frac{Gm_hm_k}{r_{hk}^2} \frac{\vec{r}_{hk}}{r_{hk}} = \frac{-Gm_hm_k}{(x_k-x_h)^2 + (y_k-y_h)^2 + (z_k-z_h)^2} \frac{(x_k-x_h)\vec{e}_1 + (y_k-y_h)\vec{e}_2 + (z_k-z_h)\vec{e}_3}{\sqrt{(x_k-x_h)^2 + (y_k-y_h)^2 + (z_k-z_h)^2}}$$

che gli elementi di uno schema particellare si scambiano fra loro è conservativa, la sua energia potenziale è data da

$$12.9) \Pi(\overline{OP}_1, \dots, \overline{OP}_n) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n \frac{Gm_hm_k}{\sqrt{(x_k-x_h)^2 + (y_k-y_h)^2 + (z_k-z_h)^2}}$$

essendo gli addendi tanti quanti le combinazioni di classe due di n elementi (cioè ogni coppia va considerata una sola volta); il lavoro che tale sollecitazione realizza nel passaggio del sistema dalla configurazione A alla configurazione B è dato da

$$L_{AB} = \Pi(A) - \Pi(B)$$

Il caso particolare di quattro elementi l'ho affrontato per giustificare il fattore moltiplicativo $\frac{1}{2}$ della **12.9a** partire dalla definizione di energia potenziale come primitiva (cambiata di segno) del lavoro elementare della sollecitazione.

• **Sollecitazione dei pesi.** L'energia potenziale di uno schema particellare costituito da n elementi materiali, soggetti al campo della forza peso

$$12.10) \vec{f} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_3$$

è data dalla funzione

$$12.11) \Pi(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{h=1}^n mgz_h$$

• **Sollecitazione colombiana.** Vale quanto detto per la sollecitazione delle forze gravitazionali, per cui si può affermare che

la sollecitazione costituita dalle forze coulombiane

$$12.12) \vec{f}_{hk}(\overrightarrow{OP}_h, \overrightarrow{OP}_k) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_h q_k}{r_{hk}^2} \frac{\vec{r}_{hk}}{r_{hk}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_h q_k}{(x_k - x_h)^2 + (y_k - y_h)^2 + (z_k - z_h)^2} \frac{(x_k - x_h)\vec{e}_1 + (y_k - y_h)\vec{e}_2 + (z_k - z_h)\vec{e}_3}{\sqrt{(x_k - x_h)^2 + (y_k - y_h)^2 + (z_k - z_h)^2}}$$

che gli elementi (provvisi di carica elettrica) di uno schema particellare si scambiano fra loro è conservativa, la sua energia potenziale è data da

$$12.13) \Pi(\overrightarrow{OP}_1, \dots, \overrightarrow{OP}_n) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n \frac{G m_h m_k}{\sqrt{(x_k - x_h)^2 + (y_k - y_h)^2 + (z_k - z_h)^2}}$$

essendo gli addendi tanti quanti le combinazioni di classe due di n elementi (cioè ogni coppia va considerata una sola volta); il lavoro che tale sollecitazione realizza nel passaggio del sistema dalla configurazione A alla configurazione B è dato da

$$L_{AB} = \Pi(A) - \Pi(B)$$

• **Sollecitazione elastica.** Ragionando in modo analogo al caso della sollecitazione interna gravitazionale, e considerando quanto indicato nella **11.25** se indichiamo \mathcal{K}_{hk} la costante elastica caratterizzante la forza elastica fra l'elemento h -mo e l'elemento k -mo, allora possiamo affermare che

la sollecitazione costituita dalle forze elastiche

$$12.14) \vec{f}_{hk}(\overrightarrow{OP}_h, \overrightarrow{OP}_k) = -\mathcal{K}_{hk} \vec{r}_{hk} = -\mathcal{K}_{hk} ((x_k - x_h)\vec{e}_1 + (y_k - y_h)\vec{e}_2 + (z_k - z_h)\vec{e}_3)$$

che gli elementi di uno schema particellare si scambiano fra loro è conservativa, la sua energia potenziale è data da

$$12.15) \Pi(\overrightarrow{OP}_1, \dots, \overrightarrow{OP}_n) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n \frac{1}{2} \mathcal{K}_{hk} \left((x_k - x_h)^2 + (y_k - y_h)^2 + (z_k - z_h)^2 \right)$$

essendo gli addendi tanti quanti le combinazioni di classe due di n elementi (cioè ogni coppia viene considerata una sola volta); il lavoro che tale sollecitazione realizza nel passaggio del sistema dalla configurazione A alla configurazione B è dato da

$$L_{AB} = \Pi(A) - \Pi(B)$$

• **Sollecitazione centrifuga.** È un caso formalmente analogo a quello della sollecitazione elastica nel caso piano. Estendendo quanto provato per la coppia di elementi si ha che

la sollecitazione costituita dalle forze centrifughe

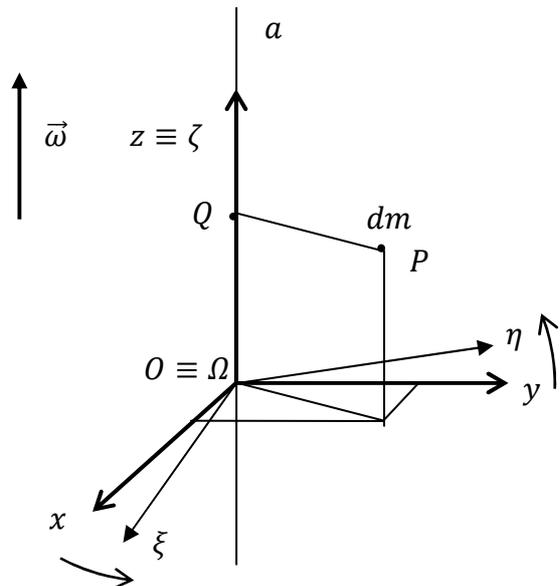
$$12.16) \vec{f}_h = -m_h \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overline{OP}_h) = -m_h \omega^2 (x_h \vec{e}_1 + y_h \vec{e}_2)$$

a cui gli elementi di uno schema particellare ruotante rispetto a un sistema inerziale, sono sottoposte, è conservativa, la sua energia potenziale è data da

$$12.17) \Pi(\overline{OP}_1, \dots, \overline{OP}_n) = -\sum_{h=1}^n \frac{1}{2} m_h \omega^2 (x_h^2 + y_h^2)$$

essendo gli addendi tanti quanti le combinazioni di classe due di n elementi (cioè ogni coppia viene considerata una sola volta); il lavoro che tale sollecitazione realizza nel passaggio del sistema dalla configurazione A alla configurazione B è dato da

$$L_{AB} = \Pi(A) - \Pi(B)$$



12.3. Teoremi energetici per lo schema particellare. Definisco energia cinetica di uno schema particellare la somma delle energie cinetiche di ciascuno dei suoi elementi.

• **Teorema di Koenig.** Afferma che l'energia cinetica di uno schema particellare risulta data da

$$12.18) T = \frac{1}{2} \mathcal{M} v_G^2 + T^G$$

dove \mathcal{M} è la massa totale dello schema particellare, \vec{v}_G è la velocità del suo baricentro e T^G è l'energia cinetica dello schema particellare rispetto a un sistema di riferimento che abbia origine nel baricentro e che abbia velocità angolare nulla rispetto al sistema di riferimento considerato fisso¹. Infatti in base alla **5.1** la velocità dell' h -mo elemento² è data da

$$12.19) \vec{v}_h = \vec{v}_G + \vec{v}_h^G$$

e dunque l'energia cinetica dello schema particellare si scrive

¹ Si ricorda che il moto dello schema particellare rispetto a questo particolare sistema di riferimento prende il nome di moto relativo al baricentro al baricentro, ed è stato introdotto nel paragrafo **3.18**.

² Ricordo che con l'apice G si indicano le grandezze cinematiche del moto relativo al baricentro.

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{h=1}^n \frac{1}{2} m_h v_h^2 = \sum_{h=1}^n \frac{1}{2} m_h \vec{v}_h \cdot \vec{v}_h = \sum_{h=1}^n \frac{1}{2} m_h (\vec{v}_G + \vec{v}_h^G) \cdot (\vec{v}_G + \vec{v}_h^G) = \\
&= \sum_{h=1}^n \frac{1}{2} m_h \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G + \sum_{h=1}^n \frac{1}{2} m_h \vec{v}_G \cdot \vec{v}_h^G + \sum_{h=1}^n \frac{1}{2} m_h \vec{v}_h^G \cdot \vec{v}_G + \sum_{h=1}^n \frac{1}{2} m_h \vec{v}_h^G \cdot \vec{v}_h^G = \\
&= \frac{1}{2} \mathcal{M} v_G^2 + \sum_{h=1}^n m_h \vec{v}_G \cdot \vec{v}_h^G + T^G = \frac{1}{2} \mathcal{M} v_G^2 + \vec{v}_G \cdot \sum_{h=1}^n m_h \vec{v}_h^G + T^G = \\
&= \frac{1}{2} \mathcal{M} v_G^2 + \mathcal{M} \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G^G + T^G = \frac{1}{2} \mathcal{M} v_G^2 + T^G
\end{aligned}$$

dove si è considerato che la velocità \vec{v}_G^G del baricentro nel moto relativo al baricentro è nulla.

• **Teorema del lavoro e dell'energia cinetica.** Considerando la definizione **12.2** del lavoro di una sollecitazione, nonché il teorema del lavoro per l'elemento materiale (paragrafo **11.4**), segue che

anche per uno schema particellare la variazione dell'energia cinetica fra gli istanti t_1, t_2 è pari al lavoro che la sollecitazione agente su di esso (esterna e interna) compie in quello stesso intervallo di tempo.

Dunque possiamo scrivere

$$12.20) T_2 - T_1 = L_{1,2}^i + L_{1,2}^e$$

dove si è distinto il lavoro delle forze esterne da quello delle forze interne per ricordare che in uno schema particellare (a differenza, come vedremo, di ciò che accade in un corpo rigido) le forze interne compiono un lavoro non nullo.

• **Energia totale e teorema di conservazione.** Detta energia totale di uno schema particellare la somma

$$12.21) E = T + \Pi$$

dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, allora

se la sollecitazione agente sullo schema particellare è sostanzialmente conservativa³, segue che l'energia totale si conserva.

Infatti per la **12.6**, la **12.20** e la **12.21** si ha che

$$E_2 - E_1 = T_2 + \Pi_2 - T_1 - \Pi_1 = (T_2 - T_1) - (\Pi_1 - \Pi_2) = L_{1,2} - L_{1,2} = 0$$

12.4. Lavoro di una sollecitazione su un corpo rigido. Il lavoro elementare su un corpo rigido della generica sollecitazione di risultante \vec{F} e momento totale rispetto al baricentro dato da \vec{M}_G , è dato da

$$12.22) dL = \vec{F} \cdot \vec{v}_G dt + \vec{M}_G \cdot \vec{\omega} dt$$

³ Si parla di sollecitazione sostanzialmente conservativa nel caso in cui le eventuali forze non conservative presenti non compiono lavoro (ovvero sono forze a potenza nulla).

essendo \vec{v}_G la velocità del baricentro del corpo rigido e $\vec{\omega}$ la sua velocità angolare. Infatti essendo il corpo rigido un particolare schema particellare, deve valere la **12.3** cioè

$$\begin{aligned}
 dL &= \int_{\Omega} \vec{f}(P) \cdot \vec{v}(P) dt dV = \int_{\Omega} \vec{f}(P) \cdot (\vec{v}(G) + \vec{\omega} \times \overline{GP}) dt dV = \\
 &= \int_{\Omega} \vec{f}(P) \cdot \vec{v}(G) dt dV + \int_{\Omega} \vec{f}(P) \cdot \vec{\omega} \times \overline{GP} dt dV = \\
 &= \int_{\Omega} \vec{f}(P) dt \cdot \vec{v}(G) dV + \int_{\Omega} \vec{f}(P) \cdot \vec{\omega} \times \overline{GP} dt dV = \\
 &= \vec{F} \cdot \vec{v}_G dt + \int_{\Omega} \vec{\omega} \cdot \overline{GP} \times \vec{f}(P) dt dV = \vec{F} \cdot \vec{v}_G dt + \vec{\omega} \cdot \int_{\Omega} \vec{f}(P) \times \overline{PG} dt dV = \\
 &= \vec{F} \cdot \vec{v}_G dt + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_G dt
 \end{aligned}$$

Indicato poi Ω un generico punto solidale al corpo rigido è immediato verificare che la **12.22** è equivalente alla più generale

$$12.22.bis) dL = \vec{F} \cdot \vec{v}_{\Omega} dt + \vec{M}_{\Omega} \cdot \vec{\omega} dt$$

• **Lavoro della sollecitazione interna di un corpo rigido.** Nel paragrafo **10.2** si è dimostrato che la sollecitazione interna di un sistema di punti materiali (e dunque, in particolare, di un corpo rigido) è equivalente a zero, ovvero è equivalente a una forza nulla e a una coppia nulla. Ma allora la **12.22** ci permette di concludere che

il lavoro della sollecitazione interna di un corpo rigido è nullo.

12.5. Energia cinetica e teoremi energetici per il corpo rigido. Intanto vale la pena ricordare che il corpo rigido è un caso particolare di schema particellare e dunque valgono per esse tutti i risultati ricavati per lo schema particellare.

• **Energia cinetica.** L'energia cinetica di un corpo rigido si scrive

$$12.23) T = \frac{1}{2} \mathcal{M} v_G^2 + \frac{1}{2} J_{\omega} \omega^2$$

dove si intende che J_{ω} è il momento di inerzia del corpo rispetto a un asse bari centrale il quale sia istante per istante parallelo all'asse di rotazione. Infatti

$$\begin{aligned}
 T &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho v^2(P) dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\vec{v}(G) + \vec{\omega} \times \overline{GP}) \cdot (\vec{v}(G) + \vec{\omega} \times \overline{GP}) dV = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \vec{v}(G) \cdot \vec{v}(G) dV + \int_{\Omega} \rho \vec{v}(G) \cdot \vec{\omega} \times \overline{GP} dV + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \vec{\omega} \times \overline{GP} \cdot \vec{\omega} \times \overline{GP} dV =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \mathcal{M} v_G^2 + \vec{v}(G) \times \vec{\omega} \cdot \int_{\Omega} \rho \overrightarrow{GP} dV + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |\vec{\omega} \times \overrightarrow{GP}|^2 dV = \\
&= \frac{1}{2} \mathcal{M} v_G^2 + \vec{v}(G) \times \vec{\omega} \cdot \mathcal{M} \overrightarrow{GG} + \frac{1}{2} \omega^2 \int_{\Omega} \rho \left| \frac{\vec{\omega}}{\omega} \times \overrightarrow{GP} \right|^2 dV = \frac{1}{2} \mathcal{M} v_G^2 + \frac{1}{2} \omega^2 J_{\omega}
\end{aligned}$$

• **Teorema del lavoro e dell'energia cinetica.** Vale il teorema omonimo dimostrato per lo schema particellare (il corpo rigido è un particolare schema particellare). Comunque vale la pena riportare la dimostrazione nel caso del corpo rigido: sostituendo le equazioni delle 9.15 nella 12.22 e fatte le semplificazioni del caso si ha

$$\begin{aligned}
dL &= \vec{F} \cdot \vec{v}_G dt + (J_{\xi} \dot{\omega}_{\xi} + J_{\eta} \dot{\omega}_{\eta} + J_{\zeta} \dot{\omega}_{\zeta}) dt = \mathcal{M} \vec{a}_G \cdot \vec{v}_G dt + (J_{\xi} \dot{\omega}_{\xi} \omega_{\xi} + J_{\eta} \dot{\omega}_{\eta} \omega_{\eta} + J_{\zeta} \dot{\omega}_{\zeta} \omega_{\zeta}) dt = \\
&= \frac{1}{2} \mathcal{M} d v_G^2 + \frac{1}{2} d (J_{\xi} \omega_{\xi}^2 + J_{\eta} \omega_{\eta}^2 + J_{\zeta} \omega_{\zeta}^2) = d \left(\frac{1}{2} \mathcal{M} v_G^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \left(J_{\xi} \frac{\omega_{\xi}^2}{\omega^2} + J_{\eta} \frac{\omega_{\eta}^2}{\omega^2} + J_{\zeta} \frac{\omega_{\zeta}^2}{\omega^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

Si consideri (magari con un disegno) che ω_{ξ}/ω è il coseno direttore della retta baricentrale parallela alla velocità angolare; ma allora

$$J_{\xi} \frac{\omega_{\xi}^2}{\omega^2} + J_{\eta} \frac{\omega_{\eta}^2}{\omega^2} + J_{\zeta} \frac{\omega_{\zeta}^2}{\omega^2} = J_{\omega}$$

E dunque la tesi:

$$dL = d \left(\frac{1}{2} \mathcal{M} v_G^2 + \frac{1}{2} \omega^2 J_{\omega} \right) = dT$$

Ricordo che il sistema di riferimento di assi ξ, η, ζ è la terna centrale di inerzia del corpo rigido.

• **Teorema dell'energia totale.** Per lo schema particellare si è dimostrato che l'energia totale, somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica, si conserva; quindi questa proprietà risulta verificata anche nel caso del corpo rigido, il quale è un particolare schema particellare. D'altra parte è immediato rilevare che

$$\begin{cases} dL = dT \\ dL = -d\Pi \Rightarrow dE = dT + d\Pi = dL - dL = 0 \\ E = T + \Pi \end{cases}$$

Capitolo 13. Statica dell'elemento

13.1. Quiete ed equilibrio per l'elemento. Si definisce quiete nel punto Q il moto

$$13.1) \quad \overline{OP}(t) = \overline{OQ} \quad \forall t \geq 0$$

Il punto materiale soggetto alla forza

$$13.2) \quad \vec{f} = \vec{f}(\overline{OP}, \dot{\overline{OP}}, t)$$

si dice che occupa una posizione Q di equilibrio se la soluzione del problema di Cauchy

$$13.3) \quad \begin{cases} m\ddot{\overline{OP}}(t) = \vec{f}(\overline{OP}(t), \dot{\overline{OP}}(t), t) \\ \overline{OP}(t=0) = \overline{OQ} \\ \dot{\overline{OP}}(t=0) = 0 \end{cases}$$

è il moto **13.1**, cioè la quiete. In altri termini

una posizione si definisce di equilibrio se, partendo da essa con velocità nulla l'elemento rimane in quella posizione, per sempre.

13.2. Problema diretto della statica per l'elemento. Dato un punto materiale soggetto alla forza **13.2**, si dice problema diretto della statica la ricerca di tutte le sue posizioni di equilibrio.

Le posizioni di equilibrio per l'elemento soggetto alla forza **13.2** sono tutte e sole le posizioni \overline{OQ} che soddisfano l'equazione

$$13.4) \quad \vec{f}(\overline{OP} = \overline{OQ}, \dot{\overline{OP}} = 0, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

Infatti se \overline{OQ} è una posizione di equilibrio, allora (per definizione) il moto **13.1** è una soluzione del problema di Cauchy **13.3**, e dunque

$$m\ddot{\overline{OQ}}(t) = \vec{f}(\overline{OQ}(t), \dot{\overline{OQ}}(t), t) \Leftrightarrow 0 = \vec{f}(\overline{OQ}, 0, t)$$

essendo nulle le derivate prima e seconda di \overline{OQ} . Se viceversa \overline{OQ} soddisfa la **13.4** allora soddisfa il problema **13.3** (infatti verifica sia le condizioni iniziali che l'equazione differenziale), dunque è una posizione di equilibrio.

13.3. Problema inverso e problema misto della statica per l'elemento. Nel caso in cui la forza risultante agente sull'elemento sia solo parzialmente nota, si definisce problema inverso della statica la determinazione delle incognite dinamiche in corrispondenza delle quali una posizione assegnata sia di equilibrio; si definisce invece problema misto la determinazione sia delle incognite dinamiche che delle posizioni, che realizzano l'equilibrio.

<i>PROBLEMA</i>	<i>FORZE AGENTI SULL'ELEMENTO</i>	<i>POSIZIONI D'EQUILIBRIO</i>
diretto	note	incognite
misto	parzialmente incognite	incognite
inverso	parzialmente incognite	note

Le incognite dinamiche sono generalmente costituite dalle reazioni dei vincoli eventualmente presenti.

13.4. Equilibrio stabile. Vediamo sotto quali condizioni una posizione di equilibrio P_e si definisce di equilibrio stabile. Se P_0 e v_0 sono le condizioni iniziali, allora P_e è di equilibrio stabile se

$$13.5) \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \quad \exists \delta_1, \delta_2 > 0 \mid \text{se} \begin{cases} |P_0 P_e| < \delta_1 \\ v_0 < \delta_2 \end{cases} \text{ allora } \begin{cases} |P_e P(t)| < \varepsilon_1 \\ v(t) < \varepsilon_2 \end{cases}, \forall t \geq 0$$

Nel seguito vediamo in quali ipotesi si realizza l'equilibrio stabile per un elemento soggetto a una forza totale

$$13.6) \quad \vec{f}(\overrightarrow{OP}, \vec{v}, t) = \vec{f}_1(\overrightarrow{OP}) + \vec{f}_2(\overrightarrow{OP}, \vec{v}, t)$$

dove il primo addendo sia una forza conservativa, il secondo sia invece rappresentato da una forza che sviluppa potenza nulla, ovvero che realizzi la condizione

$$13.7) \quad \vec{f}_2(\overrightarrow{OP}, \vec{v}, t) \perp \vec{v}(t) \quad \forall t$$

Ricordo che all'elemento risulta associata una energia potenziale Π legata alla presenza della forza conservativa, e ad essa legata dalla relazione

$$13.8) \quad \vec{f}_1(\overrightarrow{OP}) = -\vec{\nabla}\Pi(\overrightarrow{OP}) \quad \forall P$$

Valgono allora i seguenti teoremi.

LEMMA, EQUILIBRIO. Considerandogli enti appena introdotti si ha che se valgono le seguenti ipotesi

- 1) P_e è un punto di estremo relativo per l'energia potenziale Π ;
- 2) P_e è un punto interno dell'insieme di definizione di Π ;
- 3) $\vec{f}_2(\overrightarrow{OP_e}, 0, t) = 0$ in ogni istante

allora P_e è un punto di equilibrio.

DIMOSTRAZIONE. Le ipotesi 1,2 su P_e ci dicono in particolare che esso è un punto estremale, ovvero che si verifica la condizione

$$\vec{\nabla}\Pi(\overrightarrow{OP_e}) = 0$$

che si scrive anche

$$\vec{f}_1(\overrightarrow{OP_e}) = 0$$

Ma allora, stante anche l'ipotesi 3, abbiamo in definitiva che

$$\vec{f}(\overrightarrow{OP_e}, \vec{v}, t) = 0 \quad \forall t$$

Dunque, secondo quanto visto nel paragrafo 13.2, P_e costituisce una posizione di equilibrio ■

TEOREMA DI DIRICHLET, EQUILIBRIO STABILE. Nelle ipotesi del teorema di cui sopra si ha che se in particolare P_e è un punto di minimo relativo proprio per Π , allora esso è un punto di equilibrio stabile.

DIMOSTRAZIONE. L'energia potenziale è definita a meno di una costante additiva arbitraria, dunque è lecito porre

$$13.9) \quad \Pi(\overrightarrow{OP_e}) = 0$$

Quindi se P_e è un punto di minimo relativo proprio abbiamo

$$13.10) \quad \exists \sigma > 0 \mid \text{se } |\overrightarrow{P_e P}| < \sigma \Rightarrow \Pi(\overrightarrow{OP}) > 0$$

Si consideri ora un arbitrario $\varepsilon_1 > 0$ e si ponga

$$13.11) \quad r(\varepsilon_1) = \min\{\varepsilon_1, \sigma\}$$

Sia $S(\varepsilon_1)$ la sfera¹ di centro P_e e raggio $r(\varepsilon_1)$: essa costituisce un insieme chiuso e limitato che dunque ammette un punto $M(\varepsilon_1)$ di minimo assoluto. Per cui si ha

$$13.12) \quad \Pi(\overrightarrow{OP}) \geq \Pi(\overrightarrow{OM}) \geq 0, \forall P \in S(\varepsilon_1)$$

Ora si consideri un arbitrario $\varepsilon_2 > 0$ e si ponga

$$13.13) \quad E(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \min\left\{\Pi(\overrightarrow{OM}), \frac{1}{2}m\varepsilon_2^2\right\}$$

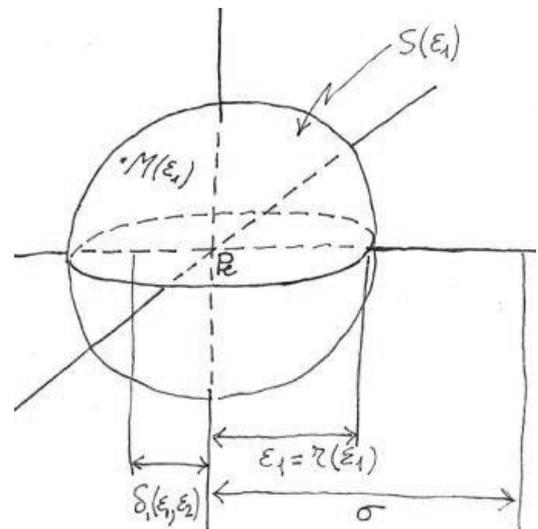
Data la continuità di Π si deduce, per note proprietà delle funzioni continue, che

$$13.14) \quad \exists \delta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mid |\overrightarrow{P_e P}| < \delta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \Rightarrow 0 \leq \Pi(\overrightarrow{OP}) < \frac{1}{2}E(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

Considerando ora che deve risultare

$$P \in S(\varepsilon_1) \Rightarrow \Pi(\overrightarrow{OP}) \geq \Pi(\overrightarrow{OM}) \geq E(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > \frac{1}{2}E(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

¹ In figura si è considerato, arbitrariamente, il caso $\varepsilon_1 < \sigma$.



deve essere $r(\varepsilon_1) > \delta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, perché se così non fosse si avrebbe l'assurdo

$$P \in S(\varepsilon_1) \Rightarrow \begin{cases} \Pi(\overrightarrow{OP}) < \frac{1}{2}E(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ \Pi(\overrightarrow{OP}) > \frac{1}{2}E(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{cases}$$

Si ponga ora

$$13.15) \delta_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \sqrt{\frac{E(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{m}}$$

Considerando ora le condizioni iniziali P_0, v_0 abbiamo

$$13.16) \begin{cases} |P_e P_0| < \delta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \Rightarrow \Pi(\overrightarrow{OP_0}) < \frac{1}{2}E(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ v_0 < \delta_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 < \frac{1}{2}E(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{cases}$$

ovvero

$$13.17) \begin{cases} |P_e P_0| < \delta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ v_0 < \delta_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{cases} \Rightarrow \Pi(\overrightarrow{OP_0}) + \frac{1}{2}mv_0^2 < E(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

Considerando ora l'ipotesi sulla natura della sollecitazione agente (forza conservativa più forza a potenza nulla) ne segue che l'energia totale deve conservarsi e dunque dalla **13.17** si ha

$$13.18) \begin{cases} |P_e P_0| < \delta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ v_0 < \delta_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{cases} \Rightarrow \Pi(\overrightarrow{OP}(t)) + \frac{1}{2}mv^2(t) < E(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad \forall t$$

ovvero in particolare

$$13.19) \begin{cases} |P_e P_0| < \delta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ v_0 < \delta_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{cases} \Rightarrow \Pi(\overrightarrow{OP}(t)) < E(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad \forall t$$

La precedente permette di asserire, considerando la **13.13**, che, dovendo essere $\Pi(\overrightarrow{OP}(t)) < \Pi(\overrightarrow{OM})$ in ogni istante, si avrà necessariamente $|\overrightarrow{P_e P}(t)| < r(\varepsilon_1) \leq \varepsilon_1$, cioè più precisamente

$$13.20) \begin{cases} |P_e P_0| < \delta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ v_0 < \delta_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{cases} \Rightarrow |\overrightarrow{P_e P}(t)| < \varepsilon_1 \quad \forall t$$

Dalla **13.18**, in base alla **13.10**, si ricava anche

$$\begin{cases} |P_e P_0| < \delta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ v_0 < \delta_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2(t) < E(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad \forall t$$

che in virtù della **13.13** comporta

$$\begin{cases} |P_e P_0| < \delta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ v_0 < \delta_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2(t) < \frac{1}{2}m\varepsilon_2^2 \quad \forall t$$

ovvero

$$13.21) \begin{cases} |P_e P_0| < \delta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ v_0 < \delta_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{cases} \Rightarrow v(t) < \varepsilon_2 \quad \forall t$$

In definitiva le **13.20**, **13.21** forniscono la tesi ■

TEOREMA, ESTENSIONE DIRICHLET. Ora supponiamo che la componente non conservativa della forza non sia a potenza nulla, ovvero che sia dissipativa. Anche in questo caso vale la tesi del teorema di Dirichlet, ovvero che ogni posizione di minimo relativo è una posizione di equilibrio stabile.

DIMOSTRAZIONE. Si ottiene la tesi utilizzando la dimostrazione del teorema precedente considerando dopo la **13.17** che in questo caso la conservazione dell'energia non vale e in particolare

$$\Pi(\overrightarrow{OP}(t)) + \frac{1}{2}mv^2(t) < \Pi(\overrightarrow{OP}_0) + \frac{1}{2}mv_0^2$$

ciò che non muta il resto della dimostrazione ■

TEOREMA DI LIAPUNOV, EQUILIBRIO INSTABILE. Se valgono le seguenti ipotesi

- 1) P_e è un punto di estremo relativo per l'energia potenziale Π ;
- 2) P_e è un punto interno dell'insieme di definizione di Π ;
- 3) P_e NON è un punto di minimo relativo proprio;
- 4) $\vec{f} = 0$ è tutta conservativa

allora P_e non è un punto di equilibrio stabile (ovvero, come si dice, è un punto di equilibrio instabile).

DIMOSTRAZIONE. Omessa ■

13.5. Teorema del lavoro virtuale per l'elemento. Si definisce **spostamento virtuale** qualunque spostamento $\vec{\delta}$ il quale sia compatibile con i vincoli a cui è soggetto l'elemento. Si definisce altresì **lavoro virtuale** la grandezza scalare²

$$13.22) L_v(\overrightarrow{OP}, t) = \vec{f}(\overrightarrow{OP}, 0, t) \cdot \vec{\delta}$$

essendo \vec{f} la sollecitazione totale agente sull'elemento; si noti la dipendenza del lavoro virtuale dalla posizione e dal tempo, la quale discende direttamente dall'analogia dipendenza della forza agente sull'elemento. Ebbene voglio dimostrare che

una posizione è di equilibrio per l'elemento se e solo se è nullo il lavoro virtuale per ogni possibile spostamento virtuale.

Se la posizione Q è di equilibrio allora per la **13.4** si ha

² E' importante osservare che il lavoro virtuale non ha il significato fisico di lavoro, ma è piuttosto un ente matematico il quale acquista un significato fisico solo attraverso il teorema del lavoro virtuale (che segue).

$$L_v(\overrightarrow{OP}, t) = \vec{f}(\overrightarrow{OQ}, 0, t) \cdot \vec{\delta} = \vec{0} \cdot \vec{\delta} = 0 \quad \forall \vec{\delta}$$

cioè il lavoro virtuale è nullo per qualunque spostamento virtuale. Viceversa se risulta

$$\vec{f}(\overrightarrow{OP}, 0, t) \cdot \vec{\delta} = 0 \quad \forall \vec{\delta}$$

deve essere in particolare

$$\vec{\delta} = \delta_x \hat{i} \neq \vec{0} \Rightarrow f_x(\overrightarrow{OP}, 0, t) = 0$$

$$\vec{\delta} = \delta_y \hat{j} \neq \vec{0} \Rightarrow f_y(\overrightarrow{OP}, 0, t) = 0$$

$$\vec{\delta} = \delta_z \hat{k} \neq \vec{0} \Rightarrow f_z(\overrightarrow{OP}, 0, t) = 0$$

dunque si ha $\vec{f}(\overrightarrow{OP}, 0, t) = \vec{0}$ e pertanto, per la **13.4** si ha che P è una posizione di equilibrio.

Capitolo 14. Statica per schemi particellari e corpi rigidi

14.1. Configurazione di equilibrio. Per uno schema particellare (cioè un insieme non isolato di N elementi) si parla di configurazione di equilibrio quando ciascun suo elemento occupa una posizione di equilibrio, secondo quanto definito nel capitolo precedente.

Per portare avanti la discussione riconsideriamo allora gli enti introdotti nel paragrafo **9.2**: abbiamo lo schema particellare costituito dagli N elementi di Σ_1 e dagli m di Σ_2 , dove si suppone che i primi abbiano un'influenza trascurabile sui secondi. Siamo interessati alle configurazioni di equilibrio di Σ_1 . Allora in base alla **13.4** e alla **9.9** si ha che le configurazioni di equilibrio sono tutte e sole quelle che soddisfano le equazioni

$$14.1) \quad \vec{0} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^N \vec{f}_{hk}(P_h, P_k, \vec{v}_h = 0, \vec{v}_k = 0) + \vec{F}_h^e(P_h, \vec{v}_h = 0, t) \quad h = 1, 2, \dots, N$$

dove \vec{f}_{hk} è la forza che l'elemento k -mo di Σ_1 esercita sull'elemento h -mo, mentre \vec{F}_h^e è la forza che complessivamente gli elementi di Σ_2 esercitano sull'elemento h -mo (l'apice vuole indicare che si tratta di forza esterna).

14.2. Sistema della statica per schemi particellari. Sommando membro a membro le **14.1** si ha

$$14.2) \quad \vec{0} = \sum_{h=1}^N \vec{F}_h^e(P_h, \vec{v}_h = 0, t)$$

dove si è tenuto conto che per la **9.2** la risultante delle forze interne che un insieme di elementi si scambiano fra loro è nulla.

Dato il generico polo A , dalle **14.1** si ha inoltre

$$\vec{0} \times \overrightarrow{P_h A} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^N (\vec{f}_{hk}(P_h, P_k, \vec{v}_h = 0, \vec{v}_k = 0) \times \overrightarrow{P_h A}) + \vec{F}_h^e(P_h, \vec{v}_h = 0, t) \times \overrightarrow{P_h A} \quad h = 1, 2, \dots, N$$

e sommando membro a membro

$$14.3) \quad \vec{0} = \sum_{h=1}^N (\vec{F}_h^e(P_h, \vec{v}_h = 0, t) \times \overrightarrow{P_h A})$$

dove si è tenuto conto della **9.3** che comporta l'annullamento della prima sommatoria a secondo membro. Allora, indicata \vec{F}^e la risultante della sollecitazione esterna e \vec{M}_A^e il momento totale della sollecitazione esterna rispetto al polo A , le **14.2** e **14.3** si scrivono

$$14.4) \quad \begin{cases} \vec{0} = \vec{F}^e(P_1, P_2, \dots, P_n; \vec{v}_1 = 0, \vec{v}_2 = 0, \dots, \vec{v}_N = 0; t) \\ \vec{0} = \vec{M}_A^e(P_1, P_2, \dots, P_n; \vec{v}_1 = 0, \vec{v}_2 = 0, \dots, \vec{v}_N = 0; t) \end{cases}$$

Si osserva che le **14.4** sono dedotte dalle **14.1**, ma non equivalgono a esse. Questo vuol dire che la loro soluzione fornisce un sottoinsieme di tutte le configurazioni di equilibrio possibili.

14.2. Sistema della statica per corpi rigidi. Nel caso particolare di schemi particellari che siano rigidi sappiamo che la configurazione è individuata dalla posizione del baricentro G e dai valori degli angoli di Eulero θ, φ, ψ . Dunque il sistema **14.4** si scrive

$$14.5) \quad \begin{cases} \vec{0} = \vec{F}^e(G, \theta, \varphi, \psi; \vec{v}_G = 0; \dot{\theta} = 0, \dot{\varphi} = 0, \dot{\psi} = 0; t) \\ \vec{0} = \vec{M}_A^e(G, \theta, \varphi, \psi; \vec{v}_G = 0; \dot{\theta} = 0, \dot{\varphi} = 0, \dot{\psi} = 0; t) \end{cases}$$

14.3. Lavoro virtuale per schemi particellari. Estendendo la definizione **13.22** al caso di uno schema particellare, detta C la configurazione di Σ_1 definita dalle posizioni P_1, P_2, \dots, P_N degli N elementi, chiamo **sistema di spostamenti virtuali** qualunque campo vettoriale che associ alla posizione dell'elemento i -mo uno spostamento $\vec{\delta}_i$ compatibile con i vincoli imposti. Allora definisco **lavoro virtuale** la grandezza scalare

$$14.6) \quad L_v(C, t) = \sum_{h=1}^N \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^N \vec{f}_{hk}(P_h, P_k, \vec{v}_h = 0, \vec{v}_k = 0) \cdot \vec{\delta}_h + \vec{F}_h^e(P_h, \vec{v}_h = 0, t) \cdot \vec{\delta}_h \right)$$

Si evidenzia la dipendenza dalla configurazione (condivisa con la sollecitazione interna e con quella esterna) e dall'istante considerato (condivisa con la sollecitazione esterna). Si dimostra allora anche in questo caso, come per l'elemento, che la configurazione C è di equilibrio, all'istante t , se e solo se risulta nullo il lavoro virtuale per qualunque sistema di spostamenti virtuali. Infatti se il lavoro virtuale è nullo per qualunque sistema di spostamenti virtuali allora, con ragionamento analogo a quello visto per l'elemento, deve risultare

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^N \vec{f}_{hk}(P_h, P_k, \vec{v}_h = 0, \vec{v}_k = 0) + \vec{F}_h^e(P_h, \vec{v}_h = 0, t) = 0 \quad \forall h$$

ovvero la **14.1**, cioè l'equilibrio. Viceversa la **14.1** comporta banalmente l'annullamento della **14.6** per qualunque sistema di spostamenti virtuali.

14.4. Lavoro virtuale per corpi rigidi. Nel caso di corpi rigidi il sistema di spostamenti virtuali può essere scritto attraverso l'**atto di moto virtuale**, il quale si definisce come qualunque atto di moto che sia compatibile con i vincoli imposti, ponendo

$$14.5) \quad \vec{\delta}(P) = \vec{v}^v(P)\delta t = \vec{v}_\Omega^v \delta t + \vec{\omega}^v \times \overline{\Omega P} \delta t$$

Allora il lavoro virtuale relativo alla sollecitazione esterna si scrive

$$\begin{aligned} L_v^e(C, t) &= \int_{\Omega} \vec{f}(P) \cdot \vec{v}^v(P) \delta t dV = \int_{\Omega} \vec{f}(P) \cdot (\vec{v}_\Omega^v \delta t + \vec{\omega}^v \times \overline{\Omega P}) \delta t dV = \\ &= \int_{\Omega} \vec{f}(P) \cdot \vec{v}_\Omega^v \delta t dV + \int_{\Omega} \vec{f}(P) \cdot \vec{\omega}^v \times \overline{\Omega P} \delta t dV = \\ &= \vec{F}^e \cdot \vec{v}_\Omega^v \delta t + \int_{\Omega} \vec{\omega}^v \cdot \overline{\Omega P} \times \vec{f}(P) \delta t dV = \vec{F}^e \cdot \vec{v}_\Omega^v \delta t + \vec{\omega}^v \cdot \int_{\Omega} \vec{f}(P) \times \overline{\Omega P} \delta t dV \end{aligned}$$

Cioè

$$14.6) \quad L_v^e = \vec{F}^e \cdot \vec{v}_\Omega^v \delta t + \vec{M}_A^e \cdot \vec{\omega}^v \delta t$$

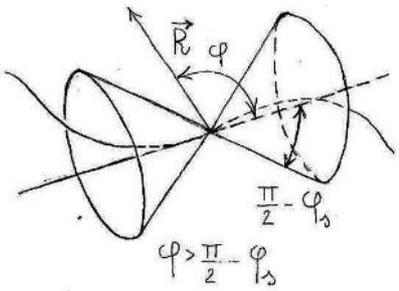
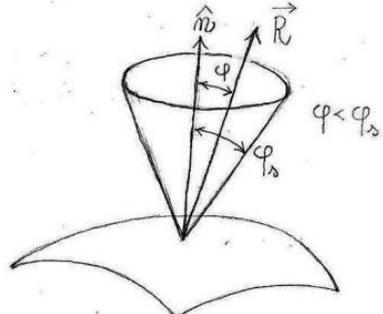
Considerando poi che la sollecitazione interna di un corpo rigido è equivalente a zero (vedi paragrafo **10.2**) allora, in base alla **14.6**, si ha che il lavoro virtuale della sollecitazione interna è nullo. Dunque in definitiva il lavoro virtuale si scrive

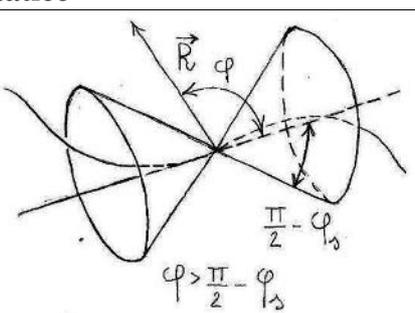
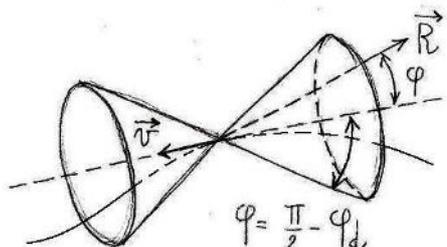
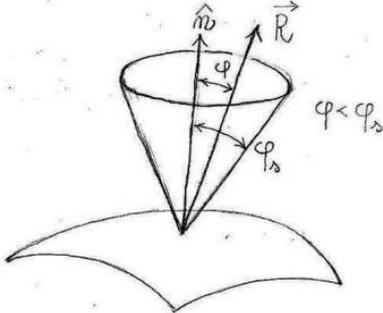
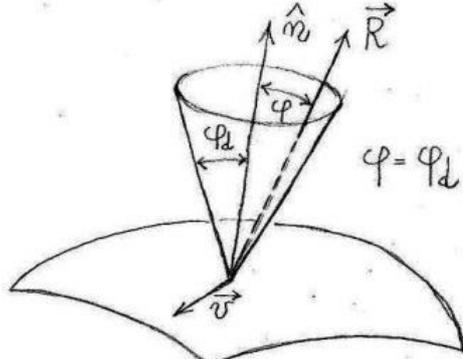
$$14.7) \quad L_v(C, t) = L_v^e(C, t) = \vec{F}^e(C, t) \cdot \vec{v}_\Omega^v \delta t + \vec{M}_A^e(C, t) \cdot \vec{\omega}^v \delta t$$

Sopra, per brevità, ho scritto (C, t) al posto di $(G, \theta, \varphi, \psi; \vec{v}_G = 0; \dot{\theta} = 0, \dot{\varphi} = 0, \dot{\psi} = 0; t)$. Ma i corpi rigidi sono particolari schemi particellari, dunque vale anche qui quanto provato nel paragrafo **14.3**, ovvero che la configurazione C risulta di equilibrio, all'istante t , se e solo se il lavoro virtuale si annulla per ogni sistema di spostamenti virtuali.

Capitolo 15. Vincoli per l'elemento

15.1. Vincoli per l'elemento. Nella tabella sono classificate le tipologie di vincoli possibili per un elemento con le limitazioni che vengono imposte al moto e le reazioni vincolari.

vincolo bilaterale	di linea	<p>Elemento vincolato ad appartenere a una curva: le 3 incognite cinematiche devono soddisfare il sistema di due superficie</p> $\begin{cases} \Psi_1(x, y, z) = 0 \\ \Psi_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$ <p>e quindi si riducono a 1 incognita cinematica indipendente</p>	caso statico		
			con attrito	<p>La reazione vincolare \vec{R} si trova fuori dal cono a due falde di apertura $\frac{\pi}{2} - \varphi_s$ (angolo dipendente dal materiale) avente asse definito dalla tangente alla curva nel punto considerato</p> 	
	caso dinamico				
	senza attrito		<p>La reazione del vincolo è ortogonale alla curva, ha verso e modulo incognito</p>		
di superficie	<p>Elemento vincolato ad appartenere a una superficie: le 3 incognite cinematiche devono soddisfare l'equazione</p> $\Psi(x, y, z) = 0$ <p>e quindi si riducono a 2 incognite cinematiche indipendenti</p>	caso statico			
		con attrito	<p>La reazione vincolare \vec{R} si trova dentro al cono di apertura φ_s (angolo dipendente dal materiale) avente asse definito dalla normale alla superficie nel punto considerato</p> 		
		caso dinamico			
		senza attrito	<p>La reazione del vincolo è ortogonale alla superficie, ha verso e modulo incognito</p>		

vincolo unilaterale	di linea	<p>Elemento vincolato ad appartenere a una curva: le 3 incognite cinematiche devono soddisfare il sistema di due superficie</p> $\begin{cases} \Psi_1(x, y, z) = 0 \\ \Psi_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$ <p>e quindi si riducono a 1 incognita cinematica indipendente</p>	con attrito	<p style="text-align: center;">caso statico</p> <p>La reazione vincolare \vec{R} si trova fuori dal cono a due falde di apertura $\frac{\pi}{2} - \varphi_s$ (angolo dipendente dal materiale) avente asse definito dalla tangente alla curva nel punto considerato</p> 
			con attrito	<p style="text-align: center;">caso dinamico</p> <p>La reazione vincolare \vec{R} si trova sul cono a due falde di apertura $\frac{\pi}{2} - \varphi_d$ (angolo dipendente dal materiale) avente asse definito dalla tangente alla curva nel punto considerato</p> 
			senza attrito	<p>La reazione del vincolo è ortogonale alla curva, ha verso e modulo incognito</p>
			senza attrito	<p style="text-align: center;">caso statico</p> <p>La reazione vincolare \vec{R} si trova dentro al cono di apertura φ_s (angolo dipendente dal materiale) avente asse definito dalla normale alla superficie nel punto considerato</p> 
di superficie	<p>Elemento vincolato ad appartenere a una superficie: le 3 incognite cinematiche devono soddisfare l'equazione</p> $\Psi(x, y, z) = 0$ <p>e quindi si riducono a 2 incognite cinematiche indipendenti</p>	con attrito	<p style="text-align: center;">caso dinamico</p> <p>La reazione vincolare \vec{R} si trova sul cono di apertura φ_d (angolo dipendente dal materiale) avente asse definito dalla normale alla superficie nel punto considerato</p> 	
		senza attrito	<p>La reazione del vincolo è ortogonale alla superficie, ha verso e modulo incognito</p>	

Capitolo 16. Vincoli per il corpo rigido

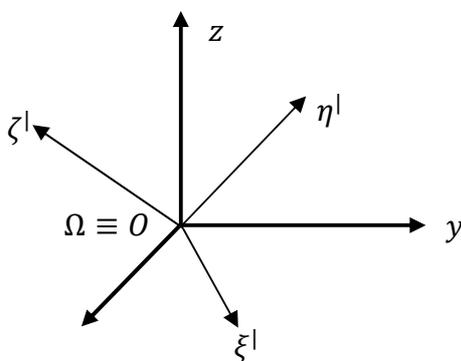
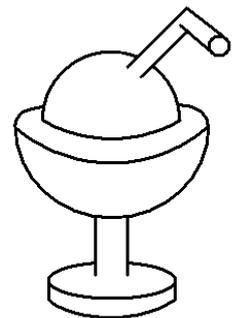
16.1. Introduzione. Nel seguito sono passati in rassegna quattro vincoli di frequente applicazione per il corpo rigido:

- snodo sferico
- cerniera cilindrica
- collare cilindrico
- guida prismatica
- appoggio a un piano

Per ciascuno di essi sono date le seguenti indicazioni.

- **Sistema di riferimento.** Per ogni vincolo indico $RC(O; x, y, z)$ il sistema di riferimento fisso, solidale al vincolo; indico $R\Gamma^l(\Omega; \xi^l, \eta^l, \zeta^l)$ quello mobile, solidale al corpo rigido.
- **Relazione caratteristica** Equazione dinamica che specifica la componente della reazione vincolare che il vincolo stesso non è in grado di esplicitare; indirettamente dunque la relazione caratteristica specifica anche quali sono i gradi di libertà, dei sei che il corpo rigido possiede, lasciati liberi dal vincolo stesso.
- **Equazioni della dinamica.** Il sistema **9.16** subisce delle semplificazioni nel caso del corpo rigido vincolato a causa della soppressione di uno o più gradi di libertà, operata dal vincolo.
- **Lavoro.** L'espressione **12.23** del lavoro elementare realizzato dalla sollecitazione agente su un corpo rigido viene adattata alla soppressione di alcuni gradi di libertà operata dal vincolo.
- **Energia cinetica.** L'espressione **12.24** della energia cinetica viene adattata alla soppressione di alcuni gradi di libertà operata dal vincolo.
- **Equazioni della statica.** Il sistema **14.5** subisce delle semplificazioni nel caso del corpo rigido vincolato a causa della soppressione di uno o più gradi di libertà, operata dal vincolo.

16.2. Snodo sferico. Si definisce in questo modo qualunque vincolo che consenta un moto sferico del corpo rigido, ovvero un moto in cui un punto dello spazio solidale al corpo rigido è costantemente sovrapposto a un punto dello spazio solidale al vincolo stesso.



Il **sistema di riferimento** solidale al corpo $R\Gamma^l(\Omega; \xi^l, \eta^l, \zeta^l)$ sia principale di inerzia (non necessariamente centrale) e sia Ω costantemente sovrapposto all'origine O del sistema di riferimento $RC(O; x, y, z)$, solidale al vincolo.

Le incognite cinematiche necessarie e sufficienti a definire la posizione del corpo rigido sono tre, ad esempio gli angoli di Eulero θ, φ, ψ tra $R\Gamma$ e RC .

Il contatto tra il vincolo e il corpo rigido avvenga nei punti $P_1, P_2, P_3 \dots$. Se ammettiamo un vincolo senza attrito allora la reazione vincolare in ciascuno di questi punti è costituita da una forza ortogonale alla superficie di contatto. Indicata \vec{f}_i^v la forza vincolare relativa al punto i -mo abbiamo allora

$$\vec{M}_\Omega^v = \vec{f}_1^v \times \overline{P_1\Omega} + \vec{f}_2^v \times \overline{P_2\Omega} + \dots = 0$$

Si riconosce allora che la sollecitazione vincolare è equivalente a una forza applicata in Ω ; dunque la **relazione caratteristica** si scrive

$$16.1) \quad \vec{M}_\Omega^v = 0$$

La **prima equazione della dinamica** (equazione **9.12**) si scrive

$$\mathcal{M}\vec{a}_G(\Theta(t), \dot{\Theta}(t)) = \vec{F}^e(\Theta(t), \dot{\Theta}(t), t)$$

e evidenziando la componente attiva e quella vincolare della sollecitazione esterna, abbiamo

$$16.2) \quad \mathcal{M}\vec{a}_G(\Theta(t), \dot{\Theta}(t)) = \vec{F}^v + \vec{F}^a(\Theta(t), \dot{\Theta}(t), t)$$

Si osservi che nota la sollecitazione esterna e le funzioni cinematiche, la **16.2** permette di ricavare la reazione vincolare.

La **seconda equazione della dinamica** (equazione **9.16**) si scrive

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}\vec{a}_\Omega \times \overline{G\Omega}) + \vec{\omega}_a \times \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^| & \tilde{\varepsilon}_2^| & \tilde{\varepsilon}_3^| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^|} & -J_{\xi^|\eta^|} & -J_{\xi^|\zeta^|} \\ -J_{\xi^|\eta^|} & J_{\eta^|} & -J_{\eta^|\zeta^|} \\ -J_{\xi^|\zeta^|} & -J_{\eta^|\zeta^|} & J_{\zeta^|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{\xi^|} \\ \omega_{\eta^|} \\ \omega_{\zeta^|} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^| & \tilde{\varepsilon}_2^| & \tilde{\varepsilon}_3^| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^|} & -J_{\xi^|\eta^|} & -J_{\xi^|\zeta^|} \\ -J_{\xi^|\eta^|} & J_{\eta^|} & -J_{\eta^|\zeta^|} \\ -J_{\xi^|\zeta^|} & -J_{\eta^|\zeta^|} & J_{\zeta^|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{\xi^|} \\ \dot{\omega}_{\eta^|} \\ \dot{\omega}_{\zeta^|} \end{pmatrix} = \vec{M}_\Omega(\Theta(t), \dot{\Theta}(t)) \end{aligned}$$

Ma nel nostro caso il punto Ω è fisso (dunque $\vec{a}_\Omega = 0$) e inoltre la terna $R\Gamma^l(\Omega; \xi^l, \eta^l, \zeta^l)$ è principale di inerzia, quindi l'equazione si semplifica nella

$$16.3) \quad \vec{\omega}_a \times \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^| & \tilde{\varepsilon}_2^| & \tilde{\varepsilon}_3^| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^|} & 0 & 0 \\ 0 & J_{\eta^|} & 0 \\ 0 & 0 & J_{\zeta^|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{\xi^|} \\ \omega_{\eta^|} \\ \omega_{\zeta^|} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^| & \tilde{\varepsilon}_2^| & \tilde{\varepsilon}_3^| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^|} & 0 & 0 \\ 0 & J_{\eta^|} & 0 \\ 0 & 0 & J_{\zeta^|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{\xi^|} \\ \dot{\omega}_{\eta^|} \\ \dot{\omega}_{\zeta^|} \end{pmatrix} = \vec{M}_\Omega(\Theta(t), \dot{\Theta}(t))$$

Sviluppando il primo termine si ha

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_a \times \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^| & \tilde{\varepsilon}_2^| & \tilde{\varepsilon}_3^| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^|} & 0 & 0 \\ 0 & J_{\eta^|} & 0 \\ 0 & 0 & J_{\zeta^|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{\xi^|} \\ \omega_{\eta^|} \\ \omega_{\zeta^|} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^| & \tilde{\varepsilon}_2^| & \tilde{\varepsilon}_3^| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^|} & 0 & 0 \\ 0 & J_{\eta^|} & 0 \\ 0 & 0 & J_{\zeta^|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{\xi^|} \\ \dot{\omega}_{\eta^|} \\ \dot{\omega}_{\zeta^|} \end{pmatrix} = \\ = \vec{\omega}_a \times \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^| & \tilde{\varepsilon}_2^| & \tilde{\varepsilon}_3^| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^|\omega_{\xi^|}} \\ J_{\eta^|\omega_{\eta^|}} \\ J_{\zeta^|\omega_{\zeta^|}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^| & \tilde{\varepsilon}_2^| & \tilde{\varepsilon}_3^| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^|\dot{\omega}_{\xi^|}} \\ J_{\eta^|\dot{\omega}_{\eta^|}} \\ J_{\zeta^|\dot{\omega}_{\zeta^|}} \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^1 & \tilde{\varepsilon}_2^1 & \tilde{\varepsilon}_3^1 \\ \omega_{\xi^1} & \omega_{\eta^1} & \omega_{\zeta^1} \\ J_{\xi^1}\omega_{\xi^1} & J_{\eta^1}\omega_{\eta^1} & J_{\zeta^1}\omega_{\zeta^1} \end{vmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^1 & \tilde{\varepsilon}_2^1 & \tilde{\varepsilon}_3^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^1}\dot{\omega}_{\xi^1} \\ J_{\eta^1}\dot{\omega}_{\eta^1} \\ J_{\zeta^1}\dot{\omega}_{\zeta^1} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^1 & \tilde{\varepsilon}_2^1 & \tilde{\varepsilon}_3^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (J_{\zeta^1} - J_{\eta^1})\omega_{\eta^1}\omega_{\zeta^1} \\ (J_{\xi^1} - J_{\zeta^1})\omega_{\xi^1}\omega_{\zeta^1} \\ (J_{\eta^1} - J_{\xi^1})\omega_{\xi^1}\omega_{\eta^1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^1 & \tilde{\varepsilon}_2^1 & \tilde{\varepsilon}_3^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^1}\dot{\omega}_{\xi^1} \\ J_{\eta^1}\dot{\omega}_{\eta^1} \\ J_{\zeta^1}\dot{\omega}_{\zeta^1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dunque la **16.3** si scrive

$$16.4) \begin{cases} J_{\xi^1}\dot{\omega}_{\xi^1} - (J_{\eta^1} - J_{\zeta^1})\omega_{\eta^1}\omega_{\zeta^1} = M_{\Omega\xi^1} \\ J_{\eta^1}\dot{\omega}_{\eta^1} - (J_{\xi^1} - J_{\zeta^1})\omega_{\xi^1}\omega_{\zeta^1} = M_{\Omega\eta^1} \\ J_{\zeta^1}\dot{\omega}_{\zeta^1} - (J_{\eta^1} - J_{\xi^1})\omega_{\xi^1}\omega_{\eta^1} = M_{\Omega\zeta^1} \end{cases}$$

Tenendo presente poi che $\vec{M}_\Omega = \vec{M}_\Omega^a + \vec{M}_\Omega^v$ e la relazione caratteristica **16.1** si ha $\vec{M}_\Omega = \vec{M}_\Omega^a$, dunque abbiamo in definitiva

$$16.5) \begin{cases} J_{\xi^1}\dot{\omega}_{\xi^1} - (J_{\eta^1} - J_{\zeta^1})\omega_{\eta^1}\omega_{\zeta^1} = M_{\Omega\xi^1}^a \\ J_{\eta^1}\dot{\omega}_{\eta^1} - (J_{\xi^1} - J_{\zeta^1})\omega_{\xi^1}\omega_{\zeta^1} = M_{\Omega\eta^1}^a \\ J_{\zeta^1}\dot{\omega}_{\zeta^1} - (J_{\eta^1} - J_{\xi^1})\omega_{\xi^1}\omega_{\eta^1} = M_{\Omega\zeta^1}^a \end{cases}$$

Il **lavoro** elementare che la sollecitazione esterna (attiva e vincolare) esplica, per la **12.23**, è dato da

$$dL = \vec{F} \cdot \vec{v}_\Omega dt + \vec{M}_\Omega \cdot \vec{\omega} dt$$

Ma essendo $\vec{v}_\Omega = 0$ e $\vec{M}_\Omega = \vec{M}_\Omega^a + \vec{M}_\Omega^v = \vec{M}_\Omega^a$ si ha

$$16.6) \quad dL = \vec{M}_\Omega^a \cdot \vec{\omega} dt$$

Per l'**energia cinetica** si ha

$$\begin{aligned}
T &= \int_\Omega \frac{1}{2} \rho v^2(P) dV = \frac{1}{2} \int_\Omega \rho \vec{v}(P) \cdot \vec{v}(P) dV = \\
&= \frac{1}{2} \int_\Omega \rho (\vec{v}(\Omega) + \vec{\omega} \times \overline{\Omega P}) \cdot (\vec{v}(\Omega) + \vec{\omega} \times \overline{\Omega P}) dV = \\
&= \frac{1}{2} \int_\Omega \rho (\vec{\omega} \times \overline{\Omega P}) \cdot (\vec{\omega} \times \overline{\Omega P}) dV = \frac{1}{2} \int_\Omega \rho |\vec{\omega} \times \overline{\Omega P}|^2 dV = \\
&= \frac{1}{2} \omega^2 \int_\Omega \left| \frac{\vec{\omega}}{\omega} \times \overline{\Omega P} \right|^2 \rho dV
\end{aligned}$$

Dunque

$$16.7) \quad T = \frac{1}{2} \omega^2 J_\omega$$

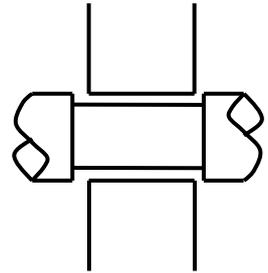
dove si intende che J_ω sia il momento di inerzia rispetto un asse che passi per Ω e sia parallelo a $\vec{\omega}$.

Il **sistema della statica** si scrive

$$16.8) \quad \begin{cases} 0 = \vec{F}^e \\ 0 = \vec{M}_\Omega^e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \vec{F}^a(\vartheta, \varphi, \psi; 0,0,0; t) + \vec{F}^v \\ 0 = \vec{M}_\Omega^a(\vartheta, \varphi, \psi; 0,0,0; t) \end{cases}$$

La seconda equazione permette di ricavare i valori degli angoli di Eulero che individuano le posizioni di equilibrio; questi valori, sostituiti nella prima equazione permettono di ricavare la sollecitazione vincolare.

16.4. Cerniera cilindrica. Un cilindro retto a sezione circolare è inserito in una cavità cilindrica di raggio appena superiore; i due assi sono sovrapposti; inoltre due risalti alle estremità impediscono la traslazione lungo la direzione degli assi. Dunque l'unico moto possibile è quello rotatorio.



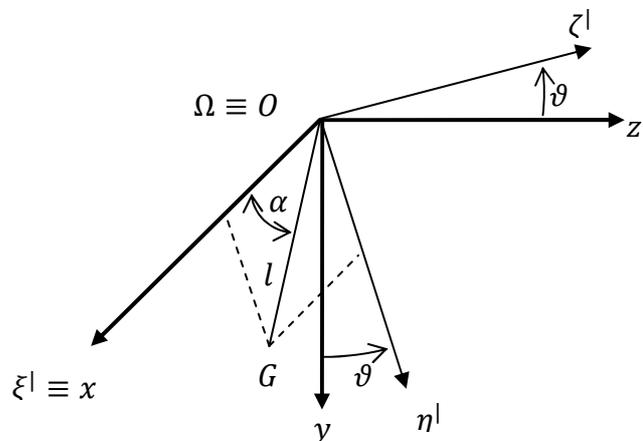
Per quanto riguarda i **sistemi di riferimento** si consideri un punto Ω dell'asse del corpo mobile sovrapposto al punto O dell'asse del corpo rigido. Il sistema di riferimento RG^l , solidale al corpo rigido, abbia asse ξ^l sovrapposto all'asse x . Allora la posizione del corpo rigido è definita da ϑ , anomalia (angolo con segno) fra y e η^l , assunta positiva se le rotazioni sono antiorarie.

La **relazione caratteristica** si deduce considerando che il vincolo non offre resistenza alla rotazione intorno a $\xi^l \equiv x$ e dunque deve essere

$$16.9) \quad \vec{M}_\Omega^v \cdot \hat{i} = 0$$

La **prima equazione della dinamica** si scrive

$$\mathcal{M} \vec{a}_G(\vartheta(t), \dot{\vartheta}(t)) = \vec{F}^v + \vec{F}^a(\vartheta(t); \dot{\vartheta}(t); t)$$



Considerando poi che le funzioni cinematiche del baricentro, con α e l costanti geometriche, sono del tipo

$$\vec{OG}(t) = \begin{pmatrix} l \cos \alpha \\ l \sin \alpha \cos \vartheta(t) \\ l \sin \alpha \sin \vartheta(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}(t) = l \sin \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\vartheta}(t) \sin \vartheta(t) \\ \dot{\vartheta}(t) \cos \vartheta(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}(t) = l \sin \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -\ddot{\vartheta}(t) \sin \vartheta(t) - \dot{\vartheta}(t) \cos \vartheta(t) \\ \ddot{\vartheta}(t) \cos \vartheta(t) - \dot{\vartheta}(t) \sin \vartheta(t) \end{pmatrix}$$

la prima equazione della dinamica si scrive in forma scalare

$$16.10) \quad \begin{cases} 0 = F_x^v + F_x^a(\vartheta(t); \dot{\vartheta}(t); t) \\ -LM \sin \alpha (\ddot{\vartheta}(t) \sin \vartheta(t) + \dot{\vartheta}(t) \cos \vartheta(t)) = F_y^a(\vartheta(t); \dot{\vartheta}(t); t) + F_y^v \\ LM \sin \alpha (\ddot{\vartheta}(t) \cos \vartheta(t) - \dot{\vartheta}(t) \sin \vartheta(t)) = F_z^a(\vartheta(t); \dot{\vartheta}(t); t) + F_z^v \end{cases}$$

La **seconda equazione della dinamica** (equazione **9.17**) si semplifica considerando che l'unica componente non nulla della velocità angolare è $\omega_{\xi^1} = \dot{\vartheta}$ e dunque

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^1 & \tilde{\varepsilon}_2^1 & \tilde{\varepsilon}_3^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^1} \dot{\omega}_{\xi^1} \\ J_{\xi^1 \zeta^1} \omega_{\xi^1}^2 - J_{\xi^1 \eta^1} \dot{\omega}_{\xi^1} \\ J_{\xi^1 \eta^1} \omega_{\xi^1}^2 - J_{\xi^1 \zeta^1} \dot{\omega}_{\xi^1} \end{pmatrix} = \vec{M}_{\Omega}(\vartheta(t); \dot{\vartheta}(t); t)$$

Considerando poi la relazione caratteristica **16.9** abbiamo il sistema scalare

$$16.11) \begin{cases} J_{\xi^1} \ddot{\vartheta}(t) = M_{\Omega \xi^1}^a(\vartheta(t); \dot{\vartheta}(t); t) \\ J_{\xi^1 \zeta^1} \dot{\vartheta}^2(t) - J_{\xi^1 \eta^1} \ddot{\vartheta}(t) = M_{\Omega \eta^1}^a(\vartheta(t); \dot{\vartheta}(t); t) + M_{\Omega \eta^1}^v \\ -J_{\xi^1 \eta^1} \dot{\vartheta}^2(t) - J_{\xi^1 \zeta^1} \ddot{\vartheta}(t) = M_{\Omega \zeta^1}^a(\vartheta(t); \dot{\vartheta}(t); t) + M_{\Omega \zeta^1}^v \end{cases}$$

Dalla prima equazione è possibile ricavare la legge del moto $\vartheta = \vartheta(t)$, che sostituita nelle altre due equazioni consente di calcolare le componenti incognite del momento totale della sollecitazione vincolare. Sostituendo poi la legge del moto nelle **16.10** si ottengono le componenti della risultante della sollecitazione vincolare.

Il **lavoro** elementare che la sollecitazione esterna (attiva e vincolare) esplica, par la **12.23**, è dato da

$$dL = \vec{F} \cdot \vec{v}_{\Omega} dt + \vec{M}_{\Omega} \cdot \vec{\omega} dt = \dot{\vartheta} (M_{\Omega \xi^1}^a + M_{\Omega \xi^1}^v) dt$$

e dunque, per la relazione caratteristica **16.9**, si ha

$$16.12) dL = \dot{\vartheta} M_{\Omega \xi^1}^a dt$$

L'**energia cinetica** ha espressione formalmente analoga alla **16.7**, trovata per lo snodo sferico. Ma in questo caso la velocità angolare ha direzione fissa, quella di $\xi^1 \equiv x$. Dunque si ha

$$16.13) T = \frac{1}{2} \dot{\vartheta}^2 J_{\xi^1}$$

Il **sistema della statica** si scrive

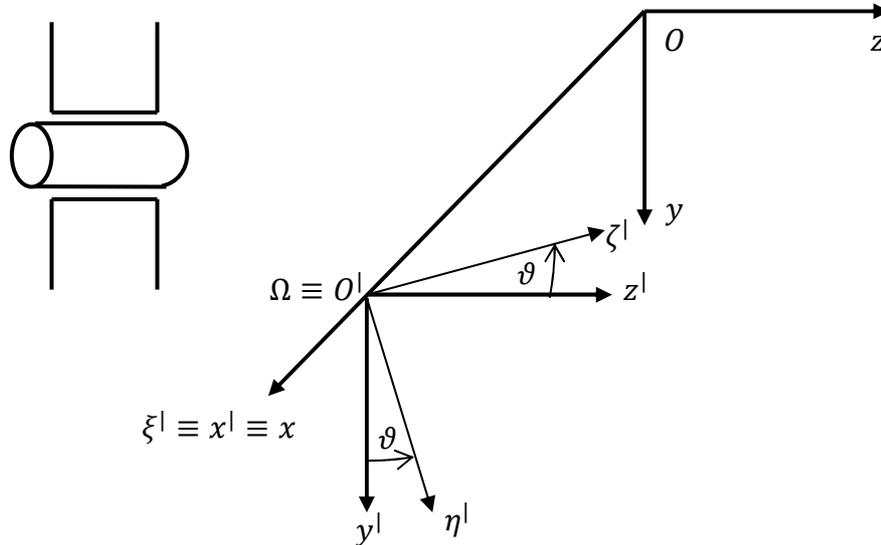
$$16.14) \begin{cases} 0 = \vec{F}^e \\ 0 = \vec{M}_{\Omega}^e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \vec{F}^a(\vartheta; 0; t) + \vec{F}^v \\ 0 = \vec{M}_{\Omega}^a(\vartheta; 0; t) + \vec{M}_{\Omega}^v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \vec{F}^a(\vartheta; 0; t) + \vec{F}^v \\ 0 = M_{\Omega \xi^1}^a(\vartheta; 0; t) \\ 0 = M_{\Omega \eta^1}^a(\vartheta; 0; t) + M_{\Omega \eta^1}^v \\ 0 = M_{\Omega \zeta^1}^a(\vartheta; 0; t) + M_{\Omega \zeta^1}^v \end{cases}$$

Le posizioni di equilibrio si ricavano dalla seconda equazione.

16.5. Collare cilindrico. Si tratta di una cerniera cilindrica senza risalti, cioè libera anche di scorrere lungo l'asse di rotazione.

Anche in questo caso il **sistema di riferimento** $R\Gamma^l$ solidale al corpo rigido, ha asse ξ^l costantemente sovrapposto all'asse x del sistema di riferimento fisso RC ; ma l'origine Ω scorre lungo l'asse x . Si considera poi un terzo sistema di riferimento RC^l , il quale abbia origine O^l costantemente sovrapposta a Ω , e assi costantemente paralleli ai rispettivi assi di RC .

Allora la posizione del corpo rigido è definita dalla anomalia ϑ , angolo con segno fra y^l e η^l , e dalla ascissa x del punto $\Omega \equiv O^l$.



La **relazione caratteristica** si scrive

$$16.15) \begin{cases} F_{\xi^l}^v = 0 \\ \vec{M}_{\Omega}^v \cdot \hat{i} = 0 \end{cases}$$

La **prima equazione della dinamica** si scrive

$$\mathcal{M} \vec{a}_G(\vartheta(t), x_{\Omega}(t); \dot{\vartheta}(t), \dot{x}_{\Omega}(t)) = \vec{F}^v + \vec{F}^a(\vartheta(t), x_{\Omega}(t); \dot{\vartheta}(t), \dot{x}_{\Omega}(t); t)$$

e facendo considerazioni analoghe a quelle viste per la cerniera cilindrica si perviene alle equazioni scalari

$$16.16) \begin{cases} \mathcal{M} \ddot{x}_{\Omega}(t) = F_x^v + F_x^a(\vartheta(t), x_{\Omega}(t); \dot{\vartheta}(t), \dot{x}_{\Omega}(t); t) \\ -l\mathcal{M} \sin \alpha (\ddot{\vartheta}(t) \sin \vartheta(t) + \dot{\vartheta}(t) \cos \vartheta(t)) + \mathcal{M} \ddot{y}_{\Omega}(t) = F_y^v + F_y^a(\vartheta(t), x_{\Omega}(t); \dot{\vartheta}(t), \dot{x}_{\Omega}(t); t) \\ l\mathcal{M} \sin \alpha (\ddot{\vartheta}(t) \cos \vartheta(t) - \dot{\vartheta}(t) \sin \vartheta(t)) + \mathcal{M} \ddot{z}_{\Omega}(t) = F_z^v + F_z^a(\vartheta(t), x_{\Omega}(t); \dot{\vartheta}(t), \dot{x}_{\Omega}(t); t) \end{cases}$$

La **seconda equazione della dinamica** (equazione 9.17) si semplifica considerando che l'unica componente non nulla della velocità angolare è $\omega_{\xi^l} = \dot{\vartheta}$. Si ha

$$\mathcal{M} \begin{vmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^l & \tilde{\varepsilon}_2^l & \tilde{\varepsilon}_3^l \\ \ddot{x}_{\Omega}(t) & 0 & 0 \\ l \cos \alpha & l \sin \alpha & 0 \end{vmatrix} + \begin{pmatrix} J_{\xi^l} \ddot{\vartheta}(t) \\ J_{\xi^l \zeta^l} \dot{\vartheta}^2(t) - J_{\xi^l \eta^l} \ddot{\vartheta}(t) \\ -J_{\xi^l \eta^l} \dot{\vartheta}^2(t) - J_{\xi^l \zeta^l} \ddot{\vartheta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{\Omega \xi^l}^a(\vartheta(t); \dot{\vartheta}(t); t) \\ M_{\Omega \eta^l}^v + M_{\Omega \eta^l}^a(\vartheta(t); \dot{\vartheta}(t); t) \\ M_{\Omega \zeta^l}^v + M_{\Omega \zeta^l}^a(\vartheta(t); \dot{\vartheta}(t); t) \end{pmatrix}$$

ovvero

$$16.17) \begin{cases} J_{\xi^1} \ddot{\vartheta}(t) = M_{\Omega \xi^1}^a(\vartheta(t); \dot{\vartheta}(t); t) \\ J_{\xi^1 \zeta^1} \dot{\vartheta}^2(t) - J_{\xi^1 \eta^1} \ddot{\vartheta}(t) = M_{\Omega \eta^1}^v + M_{\Omega \eta^1}^a(\vartheta(t); \dot{\vartheta}(t); t) \\ \ddot{x}_\Omega(t) l \sin \alpha - J_{\xi^1 \eta^1} \dot{\vartheta}^2(t) - J_{\xi^1 \zeta^1} \ddot{\vartheta}(t) = M_{\Omega \zeta^1}^v + M_{\Omega \zeta^1}^a(\vartheta(t); \dot{\vartheta}(t); t) \end{cases}$$

Il **lavoro** elementare che la sollecitazione esterna (attiva e vincolare) esplica, par la **12.23**, è dato da

$$dL = \vec{F} \cdot \vec{v}_\Omega dt + \vec{M}_\Omega \cdot \vec{\omega} dt = (F_{\xi^1}^a + F_{\xi^1}^v) \dot{x}_\Omega dt + (M_{\Omega \xi^1}^a + M_{\Omega \xi^1}^v) \dot{\vartheta} dt$$

e dunque, per la relazione caratteristica **16.15**, si ha

$$16.18) dL = \dot{\vartheta} M_{\Omega \xi^1}^a dt$$

In base alla **12.4** e considerando che la velocità angolare è costantemente parallela a ξ^1 , l'**energia cinetica** ha espressione

$$T = \frac{1}{2} \mathcal{M} v_G^2 + \frac{1}{2} J_{\xi^1} \dot{\vartheta}^2$$

Ma indicata l la distanza di G dall'asse di rotazione, si ha

$$v_G = \sqrt{l^2 \dot{\vartheta}^2 + x_\Omega^2}$$

Dunque in definitiva l'energia cinetica si scrive

$$16.19) T = \frac{1}{2} \mathcal{M} (l^2 \dot{\vartheta}^2 + x_\Omega^2) + \frac{1}{2} J_{\xi^1} \dot{\vartheta}^2$$

Il **sistema della statica** si scrive

$$16.20) \begin{cases} 0 = \vec{F}^e \\ 0 = \vec{M}_\Omega^e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \vec{F}^a(x_G, \vartheta; 0,0; t) + \vec{F}^v \\ 0 = \vec{M}_\Omega^a(x_G, \vartheta; 0,0; t) + \vec{M}_\Omega^v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = F_{\xi^1}^a(x_G, \vartheta; 0,0; t) \\ 0 = F_{\eta^1}^a(x_G, \vartheta; 0,0; t) + F_{\eta^1}^v \\ 0 = F_{\zeta^1}^a(x_G, \vartheta; 0,0; t) + F_{\zeta^1}^v \\ 0 = M_{\Omega \xi^1}^a(x_G, \vartheta; 0,0; t) \\ 0 = M_{\Omega \eta^1}^a(x_G, \vartheta; 0,0; t) + M_{\Omega \eta^1}^v \\ 0 = M_{\Omega \zeta^1}^a(x_G, \vartheta; 0,0; t) + M_{\Omega \zeta^1}^v \end{cases}$$

Le posizioni di equilibrio si ricavano mettendo a sistema la prima e la quarta equazione.

16.6. Guida prismatica. È un collare cilindrico in cui, a causa della forma a prisma del corpo rigido, è impedito il moto rotatorio. L'origine del **sistema di riferimento** $R\Gamma^1$ scorre lungo l'asse x del sistema di riferimento fisso RC . Dunque l'unica incognita cinematica è x_Ω .

La **relazione caratteristica** si scrive

$$16.21) F_{\xi^1}^v = 0$$

La **prima equazione della dinamica** si scrive

$$16.22) \mathcal{M} \ddot{x}_\Omega(t) = F_{\xi^1}^a(x_\Omega(t); \dot{x}_\Omega(t); t)$$

La **seconda equazione della dinamica** si può ricavare dalla **16.17**, considerando che in questo caso non vi sono componenti della velocità angolare e inoltre in generale il momento totale della reazione vincolare ha tutte e tre le componenti. Dunque

$$16.23) \begin{cases} 0 = M_{\Omega\xi^1}^v + M_{\Omega\xi^1}^a(x_\Omega(t); \dot{x}_\Omega(t); t) \\ 0 = M_{\Omega\eta^1}^v + M_{\Omega\eta^1}^a(x_\Omega(t); \dot{x}_\Omega(t); t) \\ \ddot{x}_\Omega(t) l \sin \alpha = M_{\Omega\zeta^1}^v + M_{\Omega\zeta^1}^a(x_\Omega(t); \dot{x}_\Omega(t); t) \end{cases}$$

Ricavata l'incognita cinematica dalla **16.22**, il sistema **16.23** fornisce le componenti del momento totale della reazione vincolare.

Il **lavoro** elementare che la sollecitazione esterna (attiva e vincolare) esplica, per la **12.23**, è dato da

$$dL = \vec{F} \cdot \vec{v}_\Omega dt + \vec{M}_\Omega \cdot \vec{\omega} dt = (F_{\xi^1}^a + F_{\xi^1}^v) \dot{x}_\Omega dt$$

e dunque, per la relazione caratteristica **16.21**, si ha

$$16.24) dL = \dot{\mathcal{M}}_{\Omega\xi^1}^a dt$$

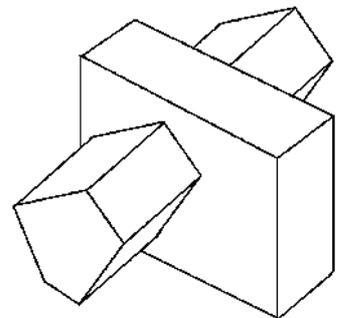
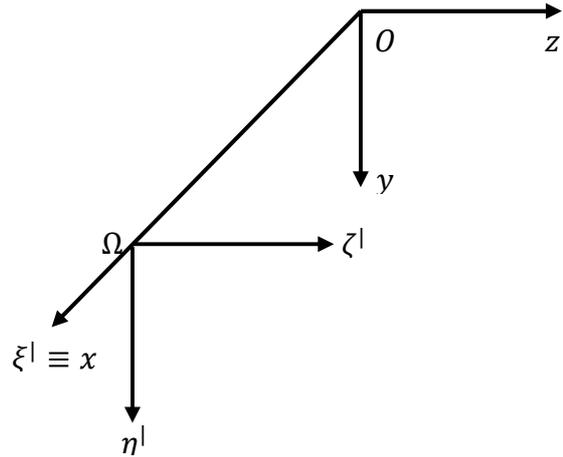
In base alla **12.4** l'**energia cinetica** ha espressione

$$16.25) T = \frac{1}{2} \mathcal{M} \dot{x}_\Omega^2$$

Il **sistema della statica** si scrive

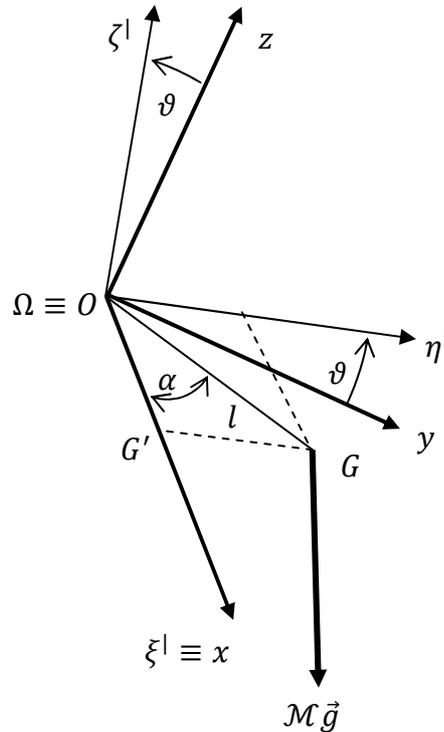
$$16.26) \begin{cases} 0 = \vec{F}^e \\ 0 = \vec{M}_\Omega^e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \vec{F}^a(x_G; 0; t) + \vec{F}^v \\ 0 = \vec{M}_\Omega^a(x_G; 0; t) + \vec{M}_\Omega^v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = F_{\xi^1}^a(x_G; 0; t) \\ 0 = F_{\eta^1}^a(x_G; 0; t) + F_{\eta^1}^v \\ 0 = F_{\zeta^1}^a(x_G; 0; t) + F_{\zeta^1}^v \\ 0 = M_{\Omega\xi^1}^a(x_G; 0; t) + M_{\Omega\xi^1}^v \\ 0 = M_{\Omega\eta^1}^a(x_G; 0; t) + M_{\Omega\eta^1}^v \\ 0 = M_{\Omega\zeta^1}^a(x_G; 0; t) + M_{\Omega\zeta^1}^v \end{cases}$$

La prima equazione fornisce le posizioni di equilibrio.



Capitolo 17. Cerniera cilindrica per corpo rigido pesante

17.1. Introduzione. Riprendiamo il vincolo di cerniera cilindrica considerato nel paragrafo 16.4 (con i medesimi sistemi di riferimento) e mettiamoci nel caso particolare in cui la sollecitazione attiva sia costituita esclusivamente dalla sollecitazione dei pesi (ricordo che, in base a quanto visto nel paragrafo 8.6, tale sollecitazione è equivalente alla risultante $\mathcal{M}\vec{g}$ applicata al baricentro).



Si dice allora che il corpo è **bilanciato staticamente** se il suo baricentro G si trova sull'asse della cerniera $\xi^1 \equiv x$.

17.2. Posizioni di equilibrio. Si dimostra immediatamente che se si ha il bilanciamento statico allora ogni posizione è di equilibrio, infatti il sistema della statica si scrive in questo caso

$$\begin{cases} 0 = \vec{F}^a(\vartheta; 0; t) + \vec{F}^v \\ 0 = M_{G\xi^1}^a(\vartheta; 0; t) + M_{G\xi^1}^v \\ 0 = M_{G\eta^1}^a(\vartheta; 0; t) + M_{G\eta^1}^v \\ 0 = M_{G\zeta^1}^a(\vartheta; 0; t) + M_{G\zeta^1}^v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \mathcal{M}\vec{g} + \vec{F}^v \\ 0 = M_{G\xi^1}^v \\ 0 = M_{G\eta^1}^v \\ 0 = M_{G\zeta^1}^v \end{cases}$$

dove si è preso come polo dei momenti il baricentro. Considerando poi la relazione caratteristica del vincolo (16.9), risulta $M_{G\xi^1}^v = 0$ e il sistema si scrive

$$\begin{cases} 0 = \mathcal{M}\vec{g} + \vec{F}^v \\ 0 = M_{G\eta^1}^v \\ 0 = M_{G\zeta^1}^v \end{cases}$$

ed è soddisfatto per qualunque valore di ϑ , da cui la tesi.

Consideriamo ora il caso in cui non vi sia bilanciamento statico, ovvero il caso in cui G non si trovi su $\xi^1 \equiv x$. Diciamo, senza perdere di generalità, che G sia nel piano $\xi^1 \eta^1$. Allora, detto G' il punto individuato dalla proiezione di G su $\xi^1 \equiv x$, il sistema della statica si scrive

$$\begin{cases} 0 = \vec{F}^a(\vartheta; 0; t) + \vec{F}^v \\ 0 = \vec{M}_{G'}^a(\vartheta; 0; t) + \vec{M}_{G'}^v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \mathcal{M} \vec{g} + \vec{F}^v \\ 0 = \mathcal{M} \vec{g} \times \overline{GG'} \cdot \hat{i} \\ 0 = \mathcal{M} \vec{g} \times \overline{GG'} \cdot \hat{j} + M_{G\eta^1}^v \\ 0 = \mathcal{M} \vec{g} \times \overline{GG'} \cdot \hat{k} + M_{G\zeta^1}^v \end{cases}$$

Quindi in conclusione le posizioni di equilibrio sono tutte e sole quelle nelle quali si annulla il prodotto misto $\mathcal{M} \vec{g} \times \overline{GG'} \cdot \hat{i}$; ciò che si verifica quando i tre vettori sono complanari ovvero in corrispondenza delle due posizioni per le quali la verticale per il baricentro intercetta l'asse di rotazione $\xi^1 \equiv x$.

17.3. Studio del moto. Nel caso specifico che stiamo considerando, ovvero quello in cui la sollecitazione esterna sia la sollecitazione dei pesi, le due equazioni della dinamica **16.10** e **16.11** si scrivono rispettivamente

$$17.1) \begin{cases} 0 = \mathcal{M} \vec{g} \cdot \hat{i} + F_x^v \\ -LM \sin \alpha (\ddot{\vartheta}(t) \sin \vartheta(t) + \dot{\vartheta}(t) \cos \vartheta(t)) = \mathcal{M} \vec{g} \cdot \hat{j} + F_y^v \\ LM \sin \alpha (\ddot{\vartheta}(t) \cos \vartheta(t) - \dot{\vartheta}(t) \sin \vartheta(t)) = \mathcal{M} \vec{g} \cdot \hat{k} + F_z^v \end{cases}$$

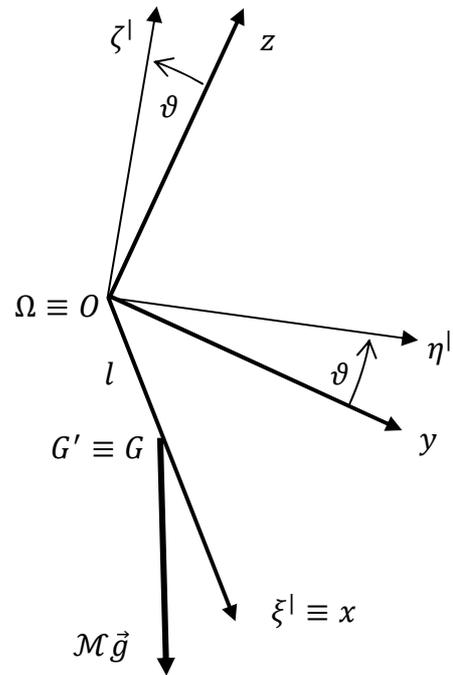
$$17.2) \begin{cases} J_{\xi^1} \ddot{\vartheta}(t) = \mathcal{M} \vec{g} \times \overline{GO} \cdot \hat{\varepsilon}'_1 \\ J_{\xi^1 \zeta^1} \dot{\vartheta}^2(t) - J_{\xi^1 \eta^1} \ddot{\vartheta}(t) = M_{\Omega \eta^1}^v + \mathcal{M} \vec{g} \times \overline{GO} \cdot \hat{\varepsilon}'_2 \\ -J_{\xi^1 \eta^1} \dot{\vartheta}^2(t) - J_{\xi^1 \zeta^1} \ddot{\vartheta}(t) = M_{\Omega \zeta^1}^v + \mathcal{M} \vec{g} \times \overline{GO} \cdot \hat{\varepsilon}'_3 \end{cases}$$

Nel caso particolare del bilanciamento statico poi si ha $\overline{GO} = \overline{G'O}$ e dunque la **17.2** si semplifica come segue

$$\begin{cases} J_{\xi^1} \ddot{\vartheta}(t) = 0 \\ J_{\xi^1 \zeta^1} \dot{\vartheta}^2(t) - J_{\xi^1 \eta^1} \ddot{\vartheta}(t) = M_{\Omega \eta^1}^v + \mathcal{M} \vec{g} \times \overline{G'O} \cdot \hat{\varepsilon}'_2 \Rightarrow \\ -J_{\xi^1 \eta^1} \dot{\vartheta}^2(t) - J_{\xi^1 \zeta^1} \ddot{\vartheta}(t) = M_{\Omega \zeta^1}^v + \mathcal{M} \vec{g} \times \overline{G'O} \cdot \hat{\varepsilon}'_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\vartheta}(t) = 0 \\ J_{\xi^1 \zeta^1} \dot{\vartheta}^2(t) = M_{\Omega \eta^1}^v + \overline{G'O} \times \hat{\varepsilon}'_2 \cdot \mathcal{M} \vec{g} \Rightarrow \\ -J_{\xi^1 \eta^1} \dot{\vartheta}^2(t) = M_{\Omega \zeta^1}^v + \overline{G'O} \times \hat{\varepsilon}'_3 \cdot \mathcal{M} \vec{g} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_0 \\ J_{\xi^1 \zeta^1} \dot{\vartheta}_0^2 = M_{\Omega \eta^1}^v + \mathcal{M} l \hat{\varepsilon}'_3 \cdot \vec{g} \\ -J_{\xi^1 \eta^1} \dot{\vartheta}_0^2 = M_{\Omega \zeta^1}^v - \mathcal{M} l \hat{\varepsilon}'_2 \cdot \vec{g} \end{cases}$$



Dunque, nel caso di bilanciamento statico le due equazioni della dinamica **17.1** e **17.2** si semplificano nelle

$$17.3) \begin{cases} F_x^v = -\mathcal{M} \vec{g} \cdot \hat{i} \\ F_y^v = -\mathcal{M} \vec{g} \cdot \hat{j} \\ F_z^v = -\mathcal{M} \vec{g} \cdot \hat{k} \end{cases}$$

$$17.4) \begin{cases} \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_0 \\ M_{\Omega\eta}^v = J_{\xi|\zeta} \dot{\vartheta}_0^2 - \mathcal{M} l \hat{\varepsilon}'_3 \cdot \vec{g} \\ M_{\Omega\zeta}^v = -J_{\xi|\eta} \dot{\vartheta}_0^2 + \mathcal{M} l \hat{\varepsilon}'_2 \cdot \vec{g} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_0 \\ M_{\Omega y}^v = M_{\Omega\eta}^v \cos \vartheta - M_{\Omega\zeta}^v \sin \vartheta \\ M_{\Omega z}^v = M_{\Omega\eta}^v \sin \vartheta + M_{\Omega\zeta}^v \cos \vartheta \end{cases}$$

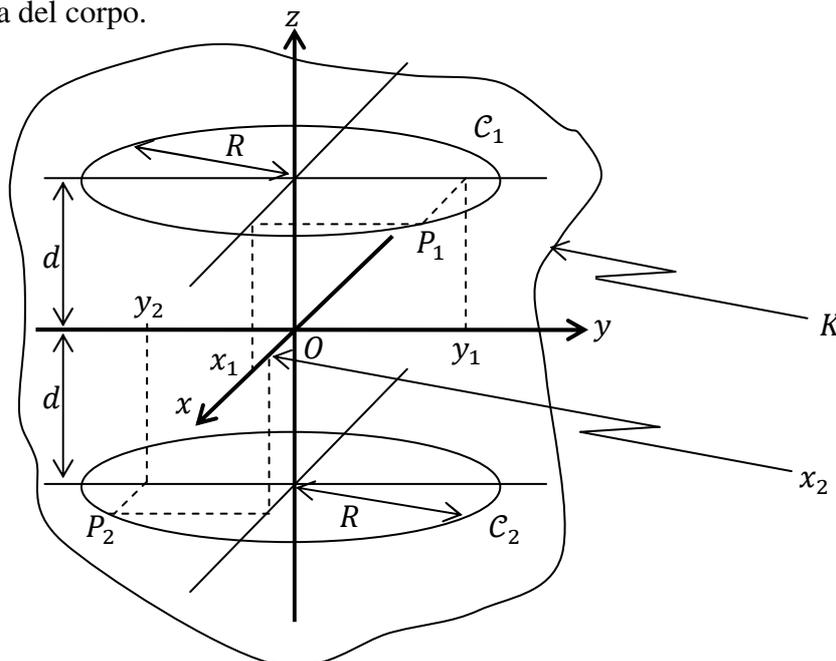
dove si sono indicate le componenti del momento totale della reazione vincolare anche rispetto agli assi fissi. Nel caso poi in cui l'asse della cerniera sia verticale si ha l'ulteriore semplificazione

$$17.5) \begin{cases} F_x^v = -\mathcal{M} g \\ F_y^v = 0 \\ F_z^v = 0 \end{cases}$$

$$17.6) \begin{cases} \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_0 \\ M_{\Omega\eta}^v = J_{\xi|\zeta} \dot{\vartheta}_0^2 \\ M_{\Omega\zeta}^v = -J_{\xi|\eta} \dot{\vartheta}_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_0 \\ M_{\Omega y}^v = (J_{\xi|\zeta} \cos \vartheta + J_{\xi|\eta} \sin \vartheta) \dot{\vartheta}_0^2 \\ M_{\Omega z}^v = (J_{\xi|\zeta} \sin \vartheta - J_{\xi|\eta} \cos \vartheta) \dot{\vartheta}_0^2 \end{cases}$$

E se in fine si ha anche che l'asse della cerniera è asse centrale di inerzia si ha l'annullamento del momento totale della sollecitazione vincolare. Quando questa condizione si verifica si parla di **bilanciamento dinamico**.

17.4. Bilanciamento dinamico. Sia dato un corpo K attraversato dall'asse z di un sistema di riferimento $RC(O; x, y, z)$, solidale al corpo stesso. Siano C_1, C_2 due circonferenze di raggio R con centri sull'asse z , disposte simmetricamente rispetto al piano xy . Voglio dimostrare qui che è sempre possibile posizionare una massa su ciascuna circonferenza in modo tale da ottenere che z sia asse centrale di inerzia del corpo.



Diciamo

- m_1 la massa posizionata in $P_1 \equiv (x_1, y_1, d)$;
- m_2 la massa posizionata in $P_2 \equiv (x_2, y_2, -d)$;
- K' il corpo a seguito dell'aggiunta delle masse;
- $G \equiv (x_G, y_G)$ la posizione del baricentro di K prima dell'aggiunta delle due masse;
- $G' \equiv (x'_G, y'_G)$ la posizione successiva all'aggiunta delle due masse;
- \mathcal{M} la massa iniziale di K ;
- J_{yz}, J_{xz} due dei prodotti di inerzia di K ;
- J'_{yz}, J'_{xz} i rispettivi prodotti di inerzia di K' .

Allora si ha che la posizione del baricentro dopo l'aggiunta delle due masse diventa

$$17.7) \quad \begin{cases} x'_G = \frac{\mathcal{M}x_G + m_1x_1 + m_2x_2}{\mathcal{M} + m_1 + m_2} \\ y'_G = \frac{\mathcal{M}y_G + m_1y_1 + m_2y_2}{\mathcal{M} + m_1 + m_2} \end{cases}$$

mentre per i prodotti di inerzia si ha

$$17.8) \quad \begin{cases} J'_{yz} = J_{yz} + y_1dm_1 + y_2(-d)m_2 \\ J'_{xz} = J_{xz} + x_1dm_1 + x_2(-d)m_2 \end{cases}$$

Le due condizioni di appartenenza $P_1 \in \mathcal{C}_1$ e $P_2 \in \mathcal{C}_2$ si scrivono

$$17.9) \quad \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = R^2 \\ x_2^2 + y_2^2 = R^2 \end{cases}$$

Affinché allora z sia asse centrale bisogna imporre che G' appartenga a esso e che i prodotti di inerzia **17.8** si annullino. Si ottiene così il sistema

$$17.10) \quad \begin{cases} m_1x_1 + m_2x_2 = -\mathcal{M}x_G \\ m_1y_1 + m_2y_2 = -\mathcal{M}y_G \\ y_1m_1d - y_2m_2d = -J_{yz} \\ x_1m_1d - x_2m_2d = -J_{xz} \end{cases}$$

Proviamo a risolverlo rispetto alle quattro incognite x_1, y_1, x_2, y_2 . Si vede che la prima è la quarta equazione costituiscono un sistema lineare nelle due incognite x_1, x_2 il quale porge

$$\begin{aligned} \begin{cases} m_1x_1 + m_2x_2 = -\mathcal{M}x_G \\ x_1m_1d - x_2m_2d = -J_{xz} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_1d & -m_2d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathcal{M}x_G \\ J_{xz} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_1d & -m_2d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{M}x_G \\ J_{xz} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_1d & -m_2d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{M}x_G \\ J_{xz} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2m_1m_2} \begin{pmatrix} -m_2d & -m_2 \\ -m_1d & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{M}x_G \\ J_{xz} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2m_1m_2d} \begin{pmatrix} -m_2\mathcal{M}x_Gd - m_2J_{xz} \\ -m_1\mathcal{M}x_Gd + m_1J_{xz} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dunque

$$17.11) \begin{cases} x_1 = -\frac{\mathcal{M}x_G d + J_{xz}}{2m_1 d} \\ x_2 = \frac{-\mathcal{M}x_G d + J_{xz}}{2m_2 d} \end{cases}$$

Analogamente la seconda e la terza del **17.10** costituiscono un sistema lineare in y_1, y_2 :

$$\begin{aligned} \begin{cases} m_1 y_1 + m_2 y_2 = -\mathcal{M}y_G \\ y_1 m_1 d - y_2 m_2 d = -J_{yz} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_1 d & -m_2 d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \mathcal{M}y_G \\ J_{xy} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_1 d & -m_2 d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{M}y_G \\ J_{xy} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} -m_2 d & -m_2 \\ -m_1 d & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{M}y_G \\ J_{xy} \end{pmatrix}}{2m_1 m_2 d} = \frac{1}{2m_1 m_2 d} \begin{pmatrix} -m_2 \mathcal{M}y_G d - m_2 J_{xy} \\ -m_1 \mathcal{M}y_G d + m_1 J_{xy} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dunque

$$17.12) \begin{cases} y_1 = \frac{-\mathcal{M}y_G d - J_{yz}}{2m_1 d} \\ y_2 = \frac{-\mathcal{M}y_G d + J_{yz}}{2m_2 d} \end{cases}$$

Sostituendo poi le **17.11** e **17.12** nelle **17.9** ricaviamo le masse incognite

$$17.13) \begin{cases} m_1 = \frac{\sqrt{(\mathcal{M}x_G d + J_{xz})^2 + (\mathcal{M}y_G d + J_{yz})^2}}{2dR} \\ m_2 = \frac{\sqrt{(-\mathcal{M}x_G d + J_{xz})^2 + (-\mathcal{M}y_G d + J_{yz})^2}}{2dR} \end{cases}$$

Le **17.11**, **17.12**, **17.13** risolvono completamente il problema di bilanciare dinamicamente K rispetto z , per mezzo di due masse puntiformi, definendone posizione e valore. E' interessante osservare che aumentando d – che rappresenta un parametro arbitrario – è possibile ridurre l'entità delle due masse.

Capitolo 18. Moti alla Poinot

18.1. Definizione. Si parla di moti alla Poinot quando sono verificate le due condizioni:

- 18.1) un punto Ω dello spazio solidale al corpo è costantemente sovrapposto a un punto O dello spazio fisso;
- 18.2) il momento totale della sollecitazione (attiva e vincolare) risulta nullo rispetto al polo O .

Un esempio di moto alla Poinot è quello che realizza un corpo pesante vincolato a uno snodo sferico in corrispondenza del suo baricentro G . In questo caso infatti

- il baricentro G ha posizione fissa rispetto allo spazio fisso \Rightarrow **18.1**
- la sollecitazione attiva (sollecitazione dei pesi) ha momento totale nullo rispetto a G (in quanto è equivalente alla forza $\mathcal{M}\vec{g}$ applicata in G), la sollecitazione vincolare ha momento totale nullo rispetto a G in base alla **16.1**, relazione caratteristica dello snodo sferico \Rightarrow **18.2**

18.2. Momento totale della quantità di moto. Il sistema di riferimento fisso sia $RC(O; x, y, z)$; sia $R\Gamma(\Omega; \xi, \eta, \zeta)$ la terna principale relativa al punto $\Omega \equiv O$. La prima immediata proprietà che si dimostra è che il momento totale della quantità di moto rispetto al polo O è costante. Infatti la seconda equazione della dinamica **9.16**, in considerazione della **18.2**, porge

$$18.3) \quad \dot{\vec{K}}_O = \vec{M}_O = 0 \Rightarrow \vec{K}_O = \text{costante}$$

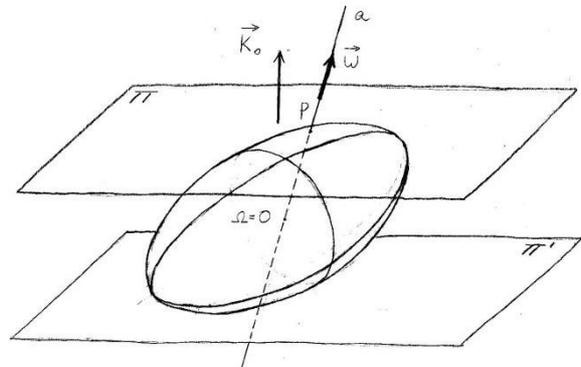
18.3. Energia cinetica. Si dimostra altresì che l'energia cinetica di un moto alla Poinot è costante, infatti la **12.22.bis** porge in questo caso

$$dL = \vec{F} \cdot \vec{v}_\Omega dt + \vec{M}_\Omega \cdot \vec{\omega} dt = \vec{F} \cdot \vec{0} dt + \vec{M}_\Omega \cdot \vec{0} dt = 0$$

Dunque per il teorema del lavoro e dell'energia cinetica segue $dT = 0$, cioè appunto T costante.

18.4. Piani del moto. Consideriamo l'ellissoide di inerzia relativo al punto Ω . Siano P, P' il punto della sua superficie in corrispondenza del quale l'asse di istantanea rotazione intercetta l'ellissoide; sia π il piano tangente in P all'ellissoide. Per quanto dimostrato nel paragrafo **7.6** sappiamo che \vec{K}_O è ortogonale alla superficie dell'ellissoide in P ; dunque esso è ortogonale a π .

Dalla **18.3** discende immediatamente dunque che il piano π ha orientamento costante; e questa stessa proprietà si dimostra per il piano π' , il quale si intende come quel piano che tangente l'ellissoide nel punto P' .



Vediamo ora come varia la distanza di π da O . A tal fine si consideri che esiste una funzione scalare $k = k(t)$ tale per cui si possa scrivere $\vec{OP} = k\vec{\omega}$, per cui le coordinate di P sono

$$18.4) \quad (\xi_P = k\omega_\xi \quad \eta_P = k\omega_\eta \quad \zeta_P = k\omega_\zeta)$$

Per ricavare k dobbiamo imporre l'appartenenza di P all'ellissoide, la cui equazione cartesiana rispetto alla terna principale $R\Gamma(\Omega; \xi, \eta, \zeta)$ si scrive $J_\xi \xi^2 + J_\eta \eta^2 + J_\zeta \zeta^2 = \chi$, dunque la condizione di appartenenza porge

$$18.5) \quad k^2(J_\xi \omega_\xi^2 + J_\eta \omega_\eta^2 + J_\zeta \omega_\zeta^2) = \chi \Leftrightarrow k = \pm \sqrt{\frac{\chi}{J_\xi \omega_\xi^2 + J_\eta \omega_\eta^2 + J_\zeta \omega_\zeta^2}}$$

Se \vec{OP} ha verso concorde rispetto $\vec{\omega}$ allora il segno del radicale è positivo. Si consideri ora che l'energia cinetica del moto, per la **16.7**, si scrive

$$18.6) \quad T = \frac{1}{2} J_\omega \omega^2 = \frac{1}{2} \left(J_\xi \frac{\omega_\xi^2}{\omega^2} + J_\eta \frac{\omega_\eta^2}{\omega^2} + J_\zeta \frac{\omega_\zeta^2}{\omega^2} \right) \omega^2 = \frac{1}{2} (J_\xi \omega_\xi^2 + J_\eta \omega_\eta^2 + J_\zeta \omega_\zeta^2)$$

Sostituendo la **18.5** nella **18.6** abbiamo allora

$$18.7) \quad k = \pm \sqrt{\frac{\chi}{2T}}$$

Sappiamo tuttavia dal paragrafo **18.3** che nei moti alla Poincot l'energia cinetica è costante, dunque la **18.7** ci dice che la distanza di π da O è costante, come quella di π' . Avendo inoltre provato che i due piani hanno orientamento costante, se ne conclude che essi sono fissi.

Si osserva che essendo l'asse di istantanea rotazione passante per P, P' , segue che la velocità dell'ellissoide rispetto ai piani π, π' , nei punti di tangenza, è nulla; ovvero la velocità di strisciamento dell'ellissoide rispetto a tali piani è nulla.

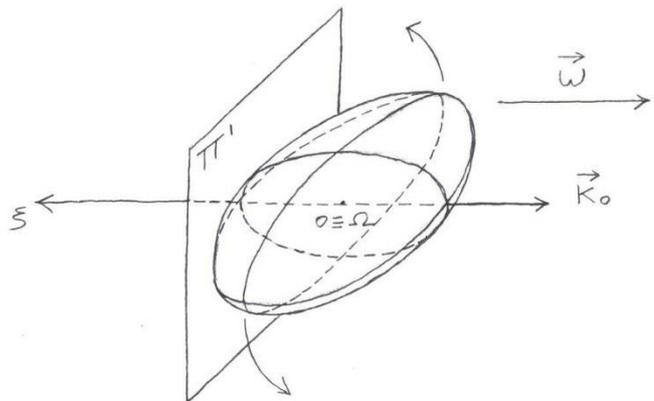
18.5. Moti alla Poincot rotatori. Dimostro che se all'istante iniziale l'asse di istantanea rotazione coincide con un asse principale di inerzia, allora tale asse resterà fisso nel tempo e la velocità di rotazione sarà costante.

Si consideri infatti la seconda equazione della dinamica **16.5**, ricavata per il corpo rigido vincolato allo snodo sferico. Si consideri poi che qui, per la **18.2**, i secondi membri sono tutti nulli. Quindi abbiamo il sistema

$$18.8) \quad \begin{cases} J_\xi \dot{\omega}_\xi - (J_\eta - J_\zeta) \omega_\eta \omega_\zeta = 0 \\ J_\eta \dot{\omega}_\eta - (J_\xi - J_\zeta) \omega_\xi \omega_\zeta = 0 \\ J_\zeta \dot{\omega}_\zeta - (J_\eta - J_\xi) \omega_\xi \omega_\eta = 0 \end{cases}$$

Le cui condizioni iniziali sono

$$18.9) \quad \begin{cases} \omega_\xi(t=0) = \omega_0 \\ \omega_\eta = 0 \\ \omega_\zeta = 0 \end{cases}$$



Dove si è assunto che all'istante iniziale l'asse di istantanea rotazione coincida con ξ . Se ipotizziamo la soluzione

$$18.10) \begin{cases} \omega_\xi(t) = \omega_0 \\ \omega_\eta(t) = 0 \\ \omega_\zeta(t) = 0 \end{cases}$$

vediamo immediatamente che essa soddisfa tanto il sistema di equazioni differenziali **18.8** che la condizione iniziale **18.9**. Dunque, se ammettiamo che il **18.8** abbia una e una sola soluzione (cosa che ora non sono sicuro di poter affermare, perché il sistema non è lineare), la **18.10** è l'unica soluzione del moto coerente con le condizioni iniziali.

Dunque la velocità angolare del moto si scrive

$$18.11) \vec{\omega} = \omega_0 \vec{\tilde{e}}_1$$

Dobbiamo ora ricavare la sua espressione rispetto al sistema di riferimento fisso; a tale scopo, considerando il sistema **6.23** (e facendo riferimento alla figura in **6.28**), si ha

$$18.12) \begin{cases} \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi = \omega_0 \\ -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi = 0 \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta = 0 \end{cases}$$

Se le condizioni iniziali sono

$$18.13) \begin{cases} \theta(t=0) = 0 \\ \varphi(t=0) = 0 \\ \psi(t=0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\theta}(t=0) = \omega_0 \\ \dot{\varphi}(t=0) = 0 \\ \dot{\psi}(t=0) = 0 \end{cases}$$

il moto

$$18.14) \begin{cases} \dot{\theta}(t) = \omega_0 \\ \dot{\varphi}(t) = 0 \\ \dot{\psi}(t) = 0 \end{cases}$$

è una soluzione? Sostituendo le **18.14** in **18.12** si ha

$$\begin{cases} \omega_0 \cos 0 + 0 \sin 0 \sin 0 = \omega_0 \\ -\omega_0 \sin 0 + 0 \sin 0 \cos 0 = 0 \\ 0 + 0 \cos 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_0 = \omega_0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Quindi le **18.14** descrivono il moto in termini di angoli di Eulero, e sostituite nelle **6.22** porgono

$$\begin{cases} \vec{\tilde{e}}_1 = \vec{e}_1 \\ \vec{\tilde{e}}_2 = \vec{e}_2 \cos \theta + \vec{e}_3 \sin \theta \\ \vec{\tilde{e}}_3 = -\vec{e}_2 \sin \theta + \vec{e}_3 \cos \theta \end{cases}$$

che sostituite nella **18.11** forniscono per la velocità angolare del moto l'espressione

$$18.15) \vec{\omega} = \omega_0 \vec{e}_1$$

Dunque il moto è rotatorio uniforme intorno all'asse principale ξ il quale rimane fisso nel tempo (nel nostro esempio rimane costantemente sovrapposto all'asse x); il momento totale della quantità di moto risulta in questo caso parallelo alla velocità angolare, infatti la 7.18 si scrive

$$18.16) \vec{K}_\Omega = J_\xi \omega_0 \tilde{\mathbf{e}}_1 = J_\xi \vec{\omega}$$

Viceversa si dimostra che se un moto alla Poinsoot è rotatorio attorno a un asse fisso, allora tale asse è asse principale di inerzia e anche il modulo della velocità angolare è uniforme. Diciamo infatti che il corpo rigido ruoti intorno all'asse $x \equiv \xi$ (ci si riferisca alla figura in 6.28), allora gli angoli di Eulero φ, ψ sono identicamente nulli e le 6.23 porgono

$$\begin{cases} \omega_\xi = \dot{\theta} \\ \omega_\eta = 0 \\ \omega_\zeta = 0 \end{cases}$$

che sostituite nella seconda equazione della dinamica 9.17 (dove si ponga $\vec{a}_\Omega = 0$ per la 18.1 e $\vec{M}_\Omega = 0$ per la 18.2) danno

$$\begin{cases} J_\xi \ddot{\theta} = 0 \\ J_{\xi\zeta} \dot{\theta}^2 - J_{\xi\eta} \ddot{\theta} = 0 \\ -J_{\xi\eta} \dot{\theta}^2 - J_{\xi\zeta} \ddot{\theta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} = 0 \\ J_{\xi\zeta} \dot{\theta}^2 = 0 \\ -J_{\xi\eta} \dot{\theta}^2 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si deduce che il moto rotatorio intorno a $x \equiv \xi$ è uniforme; dalle altre due, supposta una velocità di rotazione non nulla, si deduce che l'asse ξ è principale di inerzia, rispetto al punto Ω .

18.6. Caso dell'ellissoide di inerzia rotondo. Precessione. Nel caso di ellissoide di inerzia rotondo (diciamo intorno all'asse ζ) il moto alla Poinsoot ha le caratteristiche di **precessione regolare**, ovvero, con riferimento alla figura, si ha che

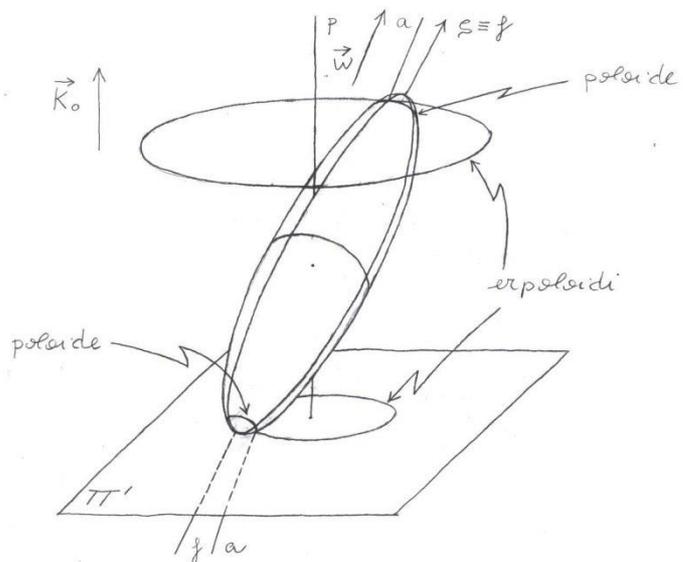
18.17) l'angolo fra l'asse $f \equiv \zeta$ (detto asse di figura) e l'asse $p \parallel \vec{K}_0$ (detto asse di precessione) è costante;

18.18) la componente di $\vec{\omega}$ su f è costante;

18.19) la componente di $\vec{\omega}$ su p è costante.

La seconda condizione ci dice che la rotazione del corpo intorno all'asse di figura è uniforme, la terza ci dice che la rotazione dell'asse di istantanea rotazione a intorno a p è uniforme.

La seconda equazione della dinamica, adattata ai moti alla Poinsoot (equazione 18.8), nel caso di ellissoide di inerzia rotondo intorno a ζ , si scrive



$$18.20) \begin{cases} J\dot{\omega}_\xi - (J - J_\zeta)\omega_\eta\omega_\zeta = 0 \\ J\dot{\omega}_\eta - (J - J_\zeta)\omega_\xi\omega_\zeta = 0 \\ \dot{\omega}_\zeta = 0 \end{cases}$$

dove si è posto $J_\xi = J_\eta = J$; mentre il momento totale della quantità di moto (equazione 7.2) rispetto Ω si scrive

$$18.21) \vec{K}_\Omega = (\tilde{\varepsilon}_1 \quad \tilde{\varepsilon}_2 \quad \tilde{\varepsilon}_3) \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} = (\tilde{\varepsilon}_1 \quad \tilde{\varepsilon}_2 \quad \tilde{\varepsilon}_3) \begin{pmatrix} \omega_\xi J \\ \omega_\eta J \\ \omega_\zeta J_\zeta \end{pmatrix}$$

Dalla terza delle **18.20** discende la **18.18**. Inoltre dalla **18.20** si ha

$$\omega_p = \frac{\vec{K}_\Omega}{K_\Omega} \cdot \vec{\omega} = \frac{\omega_\xi^2 J + \omega_\eta^2 J + \omega_\zeta^2 J_\zeta}{K_\Omega} = \frac{\omega^2}{K_\Omega} \left(\frac{\omega_\xi^2}{\omega^2} J + \frac{\omega_\eta^2}{\omega^2} J + \frac{\omega_\zeta^2}{\omega^2} J_\zeta \right) = \frac{\omega^2 J_\omega}{K_\Omega}$$

che in base alla **16.7** si scrive

$$\omega_p = \frac{2T}{K_\Omega}$$

ma l'energia cinetica di un moto alla Poinsot è costante (paragrafo **18.3**) e costante è anche K_Ω (paragrafo **18.2**); dunque risulta provata la **18.19**. In base alla **18.20** si ha anche

$$\frac{\vec{K}_\Omega}{K_\Omega} \cdot \tilde{\varepsilon}_3 = \frac{\omega_\zeta J_\zeta}{K_\Omega}$$

avendo a primo membro il coseno dell'angolo fra a e p , e a secondo membro una costante, essendo costanti ω_ζ per la 3° delle **18.20**, K_Ω per quanto visto nel paragrafo **18.2** e J_ζ in quanto legato alla geometria del corpo. Resta così provata anche la **18.17**.

Capitolo 19. Meccanica lagrangiana. Cinematica

19.1. Vincoli indipendenti regolari. Consideriamo un sistema di N punti materiali la cui configurazione generica è individuata dalle N terne di coordinate

$$19.1) \quad x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_N, y_N, z_N$$

una per ogni punto materiale; e il cui moto è descritto dalle $3N$ funzioni vettoriali

$$19.2) \quad \begin{cases} x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), \dots, x_N(t) \\ y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t), \dots, y_N(t) \\ z_1(t), z_2(t), z_3(t), z_4(t), \dots, z_N(t) \end{cases}$$

I vincoli possono essere rappresentati dalle k funzioni

$$19.3) \quad \begin{cases} \varphi_1(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_N, y_N, z_N) = 0 \\ \varphi_2(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_N, y_N, z_N) = 0 \\ \dots \\ \varphi_k(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_N, y_N, z_N) = 0 \end{cases}$$

Si intende cioè che il sistema ammette tutte le configurazioni tali per cui le coordinate dei suoi punti materiali soddisfano le k funzioni di cui sopra. Ciò posto si parla di **vincoli regolari** quando le funzioni **19.3** ammettono piano tangente (si intendono piani di uno spazio $3N$ dimensionale) per qualunque configurazione del sistema. Poiché il piano tangente della i -ma funzione **19.3** nel generico punto $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1; \tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{z}_2; \dots; \tilde{x}_N, \tilde{y}_N, \tilde{z}_N)$ si scrive

$$19.4) \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(x_1 - \tilde{x}_1) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1}(y_1 - \tilde{y}_1) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_1}(z_1 - \tilde{z}_1) + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_N}(x_N - \tilde{x}_N) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_N}(y_N - \tilde{y}_N) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_N}(z_N - \tilde{z}_N) = 0$$

richiedere l'esistenza di tale piano per ogni configurazione consentita del sistema significa richiedere che esistano non tutte nulle le derivate parziali. Per cui la condizione di regolarità dei vincoli può tradursi nella condizione che la matrice seguente non abbia neanche una riga nulla per qualunque configurazione ammessa del sistema.

$$19.5) \quad M(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_N, y_N, z_N) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_N} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_N} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_N} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_N} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_N} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_N} & \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_N} & \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_N} \end{pmatrix}$$

Se inoltre le righe della **19.5** sono L.I. (cioè se M presenta rango k)¹ allora si parla di **vincoli indipendenti regolari**. Poiché la lineare indipendenza di righe comporta in particolare che nessuna delle righe sia nulla, ne discende che **vincoli indipendenti regolari sono anche vincoli regolari**. Il contrario, evidentemente, non è necessariamente vero.

Se ad esempio ammettiamo che in corrispondenza a una configurazione C_0 la matrice **19.5** abbia le prime k colonne L.I. allora l'estensione del teorema del Dini ai sistemi di funzioni implicite

¹ Si assume che sia $k \leq 3N$, poiché se fosse $k > 3N$ si avrebbero più di tre vincoli di superficie per ogni punto materiale, quando ne bastano tre per imporre l'immobilità di un punto materiale (l'intersezione di tre superficie è un punto, dunque il vincolo di appartenenza a tre superficie impone l'immobilità del punto materiale).

consente di affermare che–nel sistema **19.3** – è possibile esprimere le prime k coordinate in funzione delle altre $3N - k$. Per cui il sistema **19.3** si può scrivere²

$$19.6) \begin{cases} x_i = x_i(x_{\frac{k}{3}+1}, y_{\frac{k}{3}+1}, z_{\frac{k}{3}+1}, \dots, x_N, y_N, z_N) \\ y_i = y_i(x_{\frac{k}{3}+1}, y_{\frac{k}{3}+1}, z_{\frac{k}{3}+1}, \dots, x_N, y_N, z_N) \\ z_i = z_i(x_{\frac{k}{3}+1}, y_{\frac{k}{3}+1}, z_{\frac{k}{3}+1}, \dots, x_N, y_N, z_N) \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots, \frac{k}{3}$$

Più in generale se la matrice **19.5** presenta rango k allora le corrispondenti k variabili sono esprimibili in funzione delle restanti $3N - k$. Si dice allora che il sistema presenta $n \triangleq 3N - k$ gradi di libertà nel senso che per definire le configurazioni consentite dai vincoli sono sufficienti n coordinate. Dunque la condizione di indipendenza dei vincoli (che include quella di regolarità) permette di dedurre che il sistema presenta un numero di gradi di libertà $n = 3N - k$. Ovvero, in simboli

$$19.7) \quad rgM(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1; \tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{z}_2; \dots; \tilde{x}_N, \tilde{y}_N, \tilde{z}_N) = k \Rightarrow \text{gradi di libertà} = 3N - k = n$$

dove si intende che i gradi di libertà sono n in un intorno della configurazione individuata dalle coordinate $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1; \tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{z}_2; \dots; \tilde{x}_N, \tilde{y}_N, \tilde{z}_N)$.

19.2. Coordinate lagrangiane. Assumiamo che valga la **19.7** per cui abbiamo un sistema con $n = 3N - k$ gradi di libertà. Diciamo allora, per fissare le idee, che il sistema **19.3** sia esplicitabile rispetto alle prime k coordinate, come in **19.6**. Supponiamo allora di poter individuare n parametri di qualunque natura³ (q_1, q_2, \dots, q_n) tali che

$$19.8) \begin{cases} x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{cases} \quad i = \frac{k}{3} + 1, \frac{k}{3} + 2, \dots, N$$

Tali parametri prendono il nome di **coordinate lagrangiane** del sistema. Sostituendo le **19.8** nelle **19.6** restano pertanto definite le $3N$ funzioni scalari

$$19.9) \begin{cases} x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

ovvero le N funzioni vettoriali

$$19.10) \quad \overrightarrow{OP}_i = \overrightarrow{OP}_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

La configurazione del sistema è allora descritto dalle n funzioni $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ essendo

$$19.11) \quad \overrightarrow{OP}_i(t) = \overrightarrow{OP}_i(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

e il suo atto di moto è dato dalle N funzioni vettoriali

² Si assume per praticità di scrittura che k sia un multiplo di 3.

³ Angoli, lunghezze, aree etc.

$$19.12) \vec{v}_i(t) = \frac{d\overline{OP}_i(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k} \frac{dq_k(t)}{dt} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

dove si è applicata la regola di derivazione delle funzioni composte a più variabili. Per le accelerazioni dei singoli punti materiali si ottiene, derivando ulteriormente, l'espressione

$$19.13) \vec{a}_i(t) = \frac{d^2\overline{OP}_i(t)}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n \left(\frac{\partial^2 \overline{OP}_i}{\partial q_h \partial q_k} \frac{dq_h(t)}{dt} \frac{dq_k(t)}{dt} \right) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k} \frac{d^2 q_k(t)}{dt^2} \right) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

19.3. Componenti lagrangiane dell'atto di moto. Si segnala che le derivate

$$19.14) \frac{dq_1(t)}{dt}, \frac{dq_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dq_n(t)}{dt}$$

prendono il nome di **componenti lagrangiane dell'atto di moto**. La 19.12 può essere anche scritta

$$19.15) \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \\ v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \\ \dots \\ v_{Nx} \\ v_{Ny} \\ v_{Nz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial OP_{1x}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{1x}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{1x}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{1y}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{1y}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{1y}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{1z}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{1z}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{1z}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{2x}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{2x}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{2x}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{2y}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{2y}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{2y}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{2z}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{2z}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial OP_{2z}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{2z}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{2z}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{2z}}{\partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial OP_{Nx}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{Nx}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{Nx}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{Ny}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{Ny}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{Ny}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{Nz}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{Nz}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{Nz}}{\partial q_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dq_1(t)}{dt} \\ \frac{dq_2(t)}{dt} \\ \dots \\ \frac{dq_n(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

Da questa scrittura emerge come la corrispondenza fra atto di moto e valori delle componenti lagrangiane dell'atto di moto è biunivoca se e solo se la matrice $3N \times n$ nella 19.15 presenta rango massimo, ovvero rango n . Questa condizione è considerata necessaria affinché i parametri (q_1, q_2, \dots, q_n) possano essere definiti coordinate lagrangiane.

La condizione di indipendenza regolare dei vincoli, introdotta nel paragrafo 19.1 è equivalente (e andrebbe dimostrato) alla condizione che la matrice in 19.15 abbia rango massimo, ovvero rango n . Per cui si capisce come questa condizione sia centrale nella teoria lagrangiana, in quanto garantisce l'unicità della soluzione nel sistema lineare 19.15.

19.4. Atti di moto virtuali e spostamenti virtuali. Dalla 19.15 si evince come, attribuendo valori arbitrari alle componenti lagrangiane dell'atto di moto, sia possibile ottenere tutti gli atti di moto virtuali⁴ del sistema. Inoltre derivando dalla 19.15 la

⁴ Atto di moto virtuale: qualunque atto di moto compatibile con i vincoli.

$$19.16) \begin{pmatrix} \delta_{1x} \\ \delta_{1y} \\ \delta_{1z} \\ \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \\ \delta_{2z} \\ \dots \\ \delta_{Nx} \\ \delta_{Ny} \\ \delta_{Nz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial OP_{1x}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{1x}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{1x}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{1y}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{1y}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{1y}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{1z}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{1z}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{1z}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{2x}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{2x}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{2x}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{2y}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{2y}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{2y}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{2z}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{2z}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{2z}}{\partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial OP_{Nx}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{Nx}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{Nx}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{Ny}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{Ny}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{Ny}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{Nz}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{Nz}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{Nz}}{\partial q_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \dots \\ \delta q_n \end{pmatrix}$$

otteniamo l'espressione di tutti gli spostamenti virtuali⁵ del sistema, al variare dei parametri $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$, detti **componenti lagrangiane dello spostamento virtuale**.

⁵ Sistema di spostamenti virtuali: qualunque campo di spostamenti che sia compatibile con i vincoli.

Capitolo 20. Meccanica lagrangiana. Dinamica

20.1. Lavoro virtuale e componenti lagrangiane della sollecitazione.

Dalla 19.16 si ottiene per il lavoro virtuale della generica sollecitazione $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_N)$ agente sul sistema materiale (si intende che \vec{f}_i agisce sul punto materiale *i-mo*) l'espressione

$$\begin{aligned}
 20.1) \quad L_v = \vec{f}_i \cdot \vec{\delta}_i &= \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{1z} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{2z} \\ \dots \\ f_{Nx} \\ f_{Ny} \\ f_{Nz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_{1x} \\ \delta_{1y} \\ \delta_{1z} \\ \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \\ \delta_{2z} \\ \dots \\ \delta_{Nx} \\ \delta_{Ny} \\ \delta_{Nz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{1z} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{2z} \\ \dots \\ f_{Nx} \\ f_{Ny} \\ f_{Nz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial OP_{1x}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{1x}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{1x}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{1y}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{1y}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{1y}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{1z}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{1z}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{1z}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{2x}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{2x}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{2x}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{2y}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{2y}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{2y}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{2z}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{2z}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{2z}}{\partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial OP_{Nx}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{Nx}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{Nx}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{Ny}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{Ny}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{Ny}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{Nz}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{Nz}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{Nz}}{\partial q_n} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \dots \\ \delta q_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{1z} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{2z} \\ \dots \\ f_{Nx} \\ f_{Ny} \\ f_{Nz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial OP_{1x}}{\partial q_k} \delta q_k \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial OP_{1y}}{\partial q_k} \delta q_k \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial OP_{1z}}{\partial q_k} \delta q_k \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial OP_{2x}}{\partial q_k} \delta q_k \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial OP_{2y}}{\partial q_k} \delta q_k \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial OP_{2z}}{\partial q_k} \delta q_k \\ \dots \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial OP_{Nx}}{\partial q_k} \delta q_k \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial OP_{Ny}}{\partial q_k} \delta q_k \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial OP_{Nz}}{\partial q_k} \delta q_k \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \left(f_{ix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial OP_{ix}}{\partial q_k} \delta q_k + f_{iy} \sum_{k=1}^n \frac{\partial OP_{iy}}{\partial q_k} \delta q_k + f_{iz} \sum_{k=1}^n \frac{\partial OP_{iz}}{\partial q_k} \delta q_k \right)
 \end{aligned}$$

Ora rielaboro l'espressione ottenuta per il lavoro virtuale, per arrivare all'espressione più comunemente usata:

$$\begin{aligned}
 L_v &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{k=1}^n f_{ix} \frac{\partial OP_{ix}}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_{k=1}^n f_{iy} \frac{\partial OP_{iy}}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_{k=1}^n f_{iz} \frac{\partial OP_{iz}}{\partial q_k} \delta q_k \right) = \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N f_{ix} \frac{\partial OP_{ix}}{\partial q_k} \right) \delta q_k + \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N f_{iy} \frac{\partial OP_{iy}}{\partial q_k} \right) \delta q_k + \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N f_{iz} \frac{\partial OP_{iz}}{\partial q_k} \right) \delta q_k =
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[\left(\sum_{i=1}^N f_{ix} \frac{\partial OP_{ix}}{\partial q_k} \right) + \left(\sum_{i=1}^N f_{iy} \frac{\partial OP_{iy}}{\partial q_k} \right) + \left(\sum_{i=1}^N f_{iz} \frac{\partial OP_{iz}}{\partial q_k} \right) \right] \delta q_k$$

Abbiamo ottenuto allora per il lavoro virtuale l'espressione

$$20.2) \quad L_v = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k$$

avendo posto

$$20.3) \quad Q_k \triangleq \sum_{i=1}^N \left(f_{ix} \frac{\partial OP_{ix}}{\partial q_k} + f_{iy} \frac{\partial OP_{iy}}{\partial q_k} + f_{iz} \frac{\partial OP_{iz}}{\partial q_k} \right)$$

essendo le Q_1, Q_2, \dots, Q_n definite **componenti lagrangiane della sollecitazione**. Si osservi che il loro numero è pari a quello dei gradi di libertà del sistema.

20.2. Sollecitazione conservativa. Definizione generalizzata. Ricordo che una forza posizionale, ovvero che sia funzione solo della posizione dell'elemento al quale è applicata, si dice conservativa quando esiste una funzione scalare di cui essa sia il differenziale. Come sappiamo questa definizione si estende alle sollecitazioni agenti su sistemi di elementi dicendo che la sollecitazione posizionale

$$\{\vec{f}_1(x_1, y_1, z_1), \vec{f}_2(x_2, y_2, z_2), \dots, \vec{f}_r(x_r, y_r, z_r)\}$$

è conservativa se esiste una funzione scalare (detta potenziale della sollecitazione)

$$U = U(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_r, y_r, z_r)$$

per le cui derivate risulti

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} = f_{1x} & \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = f_{2x} & \quad \frac{\partial U}{\partial x_r} = f_{rx} \\ \frac{\partial U}{\partial y_1} = f_{1y} & \quad \frac{\partial U}{\partial y_2} = f_{2y} \dots & \quad \frac{\partial U}{\partial y_r} = f_{ry} \\ \frac{\partial U}{\partial z_1} = f_{1z} & \quad \frac{\partial U}{\partial z_2} = f_{2z} & \quad \frac{\partial U}{\partial z_r} = f_{rz} \end{aligned}$$

Ora però si vuole dare una definizione più ampia di forza conservativa, basata sulle coordinate lagrangiane, piuttosto che su quelle cartesiane. Diciamo allora che una sollecitazione agente su un sistema con vincoli di posizione indipendenti risulta **conservativa secondo la definizione generalizzata** se esiste una funzione scalare

$$U = U(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$$

per le cui derivate risulti

$$20.4) \quad \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Voglio dimostrare adesso che **se una sollecitazione è conservativa secondo la definizione classica, allora lo è anche secondo questa nuova definizione**. A questo scopo consideriamo

l'espressione **20.4** delle componenti di sollecitazione e la condizione di conservatività secondo la definizione classica. Si ha

$$\begin{cases} Q_k = \sum_{i=1}^N \left(f_{ix} \frac{\partial OP_{ix}}{\partial q_k} + f_{iy} \frac{\partial OP_{iy}}{\partial q_k} + f_{iz} \frac{\partial OP_{iz}}{\partial q_k} \right) \\ \frac{\partial U}{\partial x_i} = f_{ix} \quad \frac{\partial U}{\partial y_i} = f_{iy} \quad \frac{\partial U}{\partial z_i} = f_{iz} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow Q_k = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial OP_{ix}}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial OP_{iy}}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial OP_{iz}}{\partial q_k} \right)$$

D'altra parte derivando rispetto alle coordinate lagrangiane il potenziale, per le regole di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial OP_{ix}}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial OP_{iy}}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial OP_{iz}}{\partial q_k} \right)$$

Confrontando questa espressione con quella precedente possiamo allora scrivere

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial OP_{ix}}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial OP_{iy}}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial OP_{iz}}{\partial q_k} \right) = Q_k$$

E dunque la sollecitazione è effettivamente conservativa anche secondo la nuova definizione. In generale non è invece possibile asserire il contrario, cioè che una sollecitazione per la quale valgono le **20.4** sia anche conservativa secondo la definizione classica. Infatti le **20.4** ci consentono solo di scrivere che

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial OP_{ix}}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial OP_{iy}}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial OP_{iz}}{\partial q_k} \right) = Q_k = \sum_{i=1}^N \left(f_{ix} \frac{\partial OP_{ix}}{\partial q_k} + f_{iy} \frac{\partial OP_{iy}}{\partial q_k} + f_{iz} \frac{\partial OP_{iz}}{\partial q_k} \right)$$

da cui non è possibile ricavare le condizioni di conservatività secondo la definizione classica. Dunque questa nuova definizione delinea un insieme di cui le sollecitazioni conservative secondo la definizione classica sono un sottoinsieme.

20.3. Vincoli perfetti e sistemi olonomi. Un vincolo si dice **perfetto** quando esplica tutte e solo le reazioni vincolari a cui corrisponde un lavoro virtuale nullo per ogni sistema di spostamenti virtuali (i vincoli privi di attrito sono un esempio di vincoli perfetti). Un sistema si dice **olonomo** quando i suoi vincoli sono tutti perfetti.

Vediamo ora come si possa tradurre analiticamente la definizione di sistema olonomo. Se consideriamo l'espressione **20.2** del lavoro virtuale, si ha che se risulta $Q_k = 0, \forall k$ allora il lavoro virtuale è nullo per ogni sistema di spostamenti virtuali; viceversa se il lavoro virtuale è nullo per ogni sistema di spostamenti virtuali allora deve risultare $Q_k = 0, \forall k$ (basta considerare ognuno dei possibili sistemi di spostamenti virtuali con solo uno spostamento non nullo). Ma allora si può asserire che un sistema è olonomo se e solo se risulta

$$20.5) Q_k^v = \left(\sum_{i=1}^N f_{ix}^v \frac{\partial OP_{ix}}{\partial q_k} \right) + \left(\sum_{i=1}^N f_{iy}^v \frac{\partial OP_{iy}}{\partial q_k} \right) + \left(\sum_{i=1}^N f_{iz}^v \frac{\partial OP_{iz}}{\partial q_k} \right) = 0, \quad k = 1, 2, 3 \dots n$$

La lettera v in apice sta ad indicare che la sollecitazione per la quale deve valere questa condizione è esclusivamente quella vincolare.

20.4. Equazioni di Lagrange. Ricordiamo che dato un sistema costituito da N punti materiali, il suo moto è governato dalle N equazioni vettoriali

$$20.6) \quad m_i \vec{a}_i = \vec{f}_i^a + \vec{f}_i^v \quad i = 1, 2, 3 \dots N$$

che costituiscono, si ricorda, il sistema fondamentale della dinamica. Se ora moltiplico scalarmente ambo i membri della **20.6** per $\frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k}$ abbiamo

$$20.7) \quad m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k} = \vec{f}_i^a \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k} + \vec{f}_i^v \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k} \quad i = 1, 2, 3 \dots N$$

Sommando membro a membro le N equazioni **20.7** otteniamo

$$20.8) \quad \sum_{i=1}^N \left(m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{i=1}^N \left(\vec{f}_i^a \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k} \right) + \sum_{h=1}^N \left(\vec{f}_i^v \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k} \right)$$

Se ora il sistema in questione è olonomo, cioè ha vincoli tutti perfetti, per definizione stessa di vincoli perfetti, in base alle **20.5** la seconda sommatoria a secondo membro è nulla. Dunque al variare di k si ottengono dalla **20.8** le n equazioni

$$20.9) \quad \sum_{i=1}^N \left(m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{i=1}^N \left(\vec{f}_i^a \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k} \right) \quad k = 1, 2, 3 \dots n$$

che ricordando la definizione **20.3** si scrivono brevemente

$$20.10) \quad \sum_{i=1}^N \left(m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k} \right) = Q_k \quad k = 1, 2, 3 \dots n$$

Ora voglio esplicitare la **20.10** rispetto le funzioni $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ e le loro derivate, prime e seconde. A tale scopo ricordo le **19.13** secondo le quali

$$\vec{a}_i(t) = \frac{d^2 \overline{OP}_i(t)}{dt^2} = \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n \left(m_i \frac{\partial^2 \overline{OP}_i}{\partial q_j \partial q_h} \frac{dq_j(t)}{dt} \frac{dq_h(t)}{dt} \right) + \sum_{j=1}^n \left(m_i \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_j} \frac{d^2 q_j(t)}{dt^2} \right) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

Sostituendo queste nelle **20.10** abbiamo

$$\sum_{i=1}^N \left(\left(\sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n \left(m_i \frac{\partial^2 \overline{OP}_i}{\partial q_j \partial q_h} \frac{dq_j(t)}{dt} \frac{dq_h(t)}{dt} \right) + \sum_{j=1}^n \left(m_i \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_j} \frac{d^2 q_j(t)}{dt^2} \right) \right) \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k} \right) = Q_k$$

$$k = 1, 2, 3 \dots n$$

che con semplici passaggi si scrive

$$20.11) \quad \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n \left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial^2 \overline{OP}_i}{\partial q_j \partial q_h} \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k} \right) \frac{dq_j(t)}{dt} \frac{dq_h(t)}{dt} + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k} \right) \frac{d^2 q_j(t)}{dt^2} = Q_k$$

per $k = 1, 2, \dots, n$. Le **20.11** prendono il nome di **equazioni di Lagrange** e costituiscono il sistema della dinamica per sistemi materiali il cui moto sia descritto da coordinate lagrangiane. Esse costituiscono un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine (non lineari e in forma non normale¹) nelle funzioni $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$.

In genere, per avere una espressione più compatta delle equazioni di Lagrange si pone

$$20.12) \quad g_{jk}(q_1, q_2, \dots, q_n) \triangleq \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \overrightarrow{OP}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP}_i}{\partial q_k}$$

Allora, con alcuni passaggi, le **20.11** si possono scrivere nella forma seguente

$$20.13) \quad \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n \left(\frac{\partial g_{hj}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kj}}{\partial q_h} \right) \frac{dq_j(t)}{dt} \frac{dq_h(t)}{dt} + \sum_{j=1}^n g_{jk} \frac{d^2 q_j(t)}{dt^2} = Q_k \quad k = 1, 2, 3 \dots n$$

Riscrivendo le **20.13** come segue

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n g_{j1} \frac{d^2 q_j(t)}{dt^2} = Q_1 - \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n \left(\frac{\partial g_{hj}}{\partial q_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{1j}}{\partial q_h} \right) \frac{dq_j(t)}{dt} \frac{dq_h(t)}{dt} \\ \sum_{j=1}^n g_{j2} \frac{d^2 q_j(t)}{dt^2} = Q_2 - \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n \left(\frac{\partial g_{hj}}{\partial q_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{2j}}{\partial q_h} \right) \frac{dq_j(t)}{dt} \frac{dq_h(t)}{dt} \\ \sum_{j=1}^n g_{jn} \frac{d^2 q_j(t)}{dt^2} = Q_n - \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n \left(\frac{\partial g_{hj}}{\partial q_n} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{nj}}{\partial q_h} \right) \frac{dq_j(t)}{dt} \frac{dq_h(t)}{dt} \end{cases}$$

si capisce che le equazioni di Lagrange possono essere poste in forma normale se e solo se è non nullo il determinante della matrice $n \times n$ dei coefficienti (teorema di Cramer) la quale si scrive

$$A = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1(n-1)} & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2(n-1)} & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{(n-1)1} & g_{(n-1)2} & \dots & g_{(n-1)(n-1)} & g_{(n-1)n} \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{n(n-1)} & g_{nn} \end{pmatrix}$$

Si osservi allora che essendo per la **20.12**

$$\begin{aligned} g_{jh} &= m_1 \frac{\partial \overrightarrow{OP}_1}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP}_1}{\partial q_k} + m_2 \frac{\partial \overrightarrow{OP}_2}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP}_2}{\partial q_k} + \dots + m_N \frac{\partial \overrightarrow{OP}_N}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP}_N}{\partial q_k} = \\ &= m_1 \frac{\partial OP_{1x}}{\partial q_j} \frac{\partial OP_{1x}}{\partial q_k} + m_1 \frac{\partial OP_{1y}}{\partial q_j} \frac{\partial OP_{1y}}{\partial q_k} + m_1 \frac{\partial OP_{1z}}{\partial q_j} \frac{\partial OP_{1z}}{\partial q_k} + \\ &+ m_2 \frac{\partial OP_{2x}}{\partial q_j} \frac{\partial OP_{2x}}{\partial q_k} + m_2 \frac{\partial OP_{2y}}{\partial q_j} \frac{\partial OP_{2y}}{\partial q_k} + m_2 \frac{\partial OP_{2z}}{\partial q_j} \frac{\partial OP_{2z}}{\partial q_k} + \\ &+ \dots + \end{aligned}$$

¹ Ricordo che una equazione differenziale si dice in forma normale quando è esplicitata rispetto alla derivata di ordine maggiore. Se si ha, come in questo caso, un sistema di equazioni differenziali, allora si parlerà di forma normale quando ciascuna riga del sistema è una equazione differenziale esplicitata rispetto alla derivata di ordine massimo di una delle funzioni incognite.

$$+m_N \frac{\partial OP_{Nx}}{\partial q_j} \frac{\partial OP_{Nx}}{\partial q_k} + m_N \frac{\partial OP_{Ny}}{\partial q_j} \frac{\partial OP_{Ny}}{\partial q_k} + m_N \frac{\partial OP_{Nz}}{\partial q_j} \frac{\partial OP_{Nz}}{\partial q_k}$$

si può scrivere

$$\begin{aligned} & \frac{A}{m_1 m_2 \dots m_N} = \\ & = \left(\begin{array}{c} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial OP_{ix}}{\partial q_1} \frac{\partial OP_{ix}}{\partial q_1} + \frac{\partial OP_{iy}}{\partial q_1} \frac{\partial OP_{iy}}{\partial q_1} + \frac{\partial OP_{iz}}{\partial q_1} \frac{\partial OP_{iz}}{\partial q_1} \right) \dots \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial OP_{ix}}{\partial q_1} \frac{\partial OP_{ix}}{\partial q_n} + \frac{\partial OP_{iy}}{\partial q_1} \frac{\partial OP_{iy}}{\partial q_n} + \frac{\partial OP_{iz}}{\partial q_1} \frac{\partial OP_{iz}}{\partial q_n} \right) \\ \dots \\ \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial OP_{ix}}{\partial q_n} \frac{\partial OP_{ix}}{\partial q_1} + \frac{\partial OP_{iy}}{\partial q_n} \frac{\partial OP_{iy}}{\partial q_1} + \frac{\partial OP_{iz}}{\partial q_n} \frac{\partial OP_{iz}}{\partial q_1} \right) \dots \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial OP_{ix}}{\partial q_n} \frac{\partial OP_{ix}}{\partial q_n} + \frac{\partial OP_{iy}}{\partial q_n} \frac{\partial OP_{iy}}{\partial q_n} + \frac{\partial OP_{iz}}{\partial q_n} \frac{\partial OP_{iz}}{\partial q_n} \right) \end{array} \right) = \\ & = \left(\begin{array}{cccccc} \frac{\partial OP_{1x}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{1y}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{1z}}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial OP_{Nx}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{Ny}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{Nz}}{\partial q_1} \\ \frac{\partial OP_{1x}}{\partial q_n} & \frac{\partial OP_{1y}}{\partial q_n} & \frac{\partial OP_{1z}}{\partial q_n} & \dots & \frac{\partial OP_{Nx}}{\partial q_n} & \frac{\partial OP_{Ny}}{\partial q_n} & \frac{\partial OP_{Nz}}{\partial q_n} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial OP_{1x}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{1x}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{1y}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{1y}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{1z}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{1z}}{\partial q_n} \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial OP_{Nx}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{Nx}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{Ny}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{Ny}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{Nz}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{Nz}}{\partial q_n} \end{pmatrix} = \\ & = B \cdot B^T \end{aligned}$$

E dunque $\det A = m_1 m_2 \dots m_n (\det B)^2$. Si osservi però ora che la matrice B^T è la matrice che compare nella **19.15** la quale ha determinante non nullo, perché se così non fosse, come si è fatto notare a suo tempo, non si avrebbe corrispondenza biunivoca fra le componenti lagrangiane del moto e l'atto di moto del sistema di punti materiali. Dunque, considerando la presenza della elevazione al quadrato, si deduce che $\det A > 0$.

Ma allora le equazioni di Lagrange **20.13** possono essere scritte in forma normale ottenendo un sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine in forma normale, nelle n funzioni incognite $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$, il quale, assegnate le condizioni iniziali, definisce il problema di Cauchy

$$20.14) \begin{cases} \ddot{q}_1(t) = F_1(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t); \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n(t); t) \\ \ddot{q}_2(t) = F_2(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t); \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n(t); t) \\ \dots \\ \ddot{q}_n(t) = F_n(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t); \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n(t); t) \\ q_1(t_0) = q_1^0, q_2(t_0) = q_2^0, \dots, q_n(t_0) = q_n^0 \\ \dot{q}_1(t_0) = \dot{q}_1^0, \dot{q}_2(t_0) = \dot{q}_2^0, \dots, \dot{q}_n(t_0) = \dot{q}_n^0 \end{cases}$$

il quale, per il teorema di esistenza e unicità di Cauchy, ammette una e una sola soluzione in un intorno delle condizioni iniziali.

Capitolo 21. Meccanica lagrangiana. Teoremi di conservazione

21.1. Energia cinetica. Esprimo qui l'energia cinetica del sistema di punti materiali in funzione delle coordinate lagrangiane, ottenendo una formula che userò nel seguito. Considerando le **19.10** abbiamo per l'energia cinetica

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{h=1}^n \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_h} \frac{dq_h(t)}{dt} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_j} \frac{dq_j(t)}{dt} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{h=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_j} \frac{dq_h(t)}{dt} \frac{dq_j(t)}{dt} \right) \end{aligned}$$

Dunque abbiamo ottenuto per l'energia cinetica l'espressione

$$21.1) \quad \mathcal{T}(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_j} \right) \frac{dq_k(t)}{dt} \frac{dq_j(t)}{dt} \right)$$

Ricordando le definizioni **20.12** la **21.1** si scrive in modo più conciso

$$21.2) \quad \mathcal{T}(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(g_{jk}(q_1, q_2, \dots, q_n) \frac{dq_k(t)}{dt} \frac{dq_j(t)}{dt} \right)$$

21.2. Lavoro. Ricordo che la definizione di lavoro elementare per un sistema di punti materiali porge

$$dL = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \vec{v}_i dt = \sum_{i=1}^N (f_{ix} v_{ix} + f_{iy} v_{iy} + f_{iz} v_{iz}) dt$$

dove si intende che \vec{f}_i è la risultante delle forze agenti sull'elemento i -mo. Considerando poi le **19.10** si ha

$$\begin{aligned} dL &= \sum_{i=1}^N \left(f_{ix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial OP_{ix}}{\partial q_k} \frac{dq_k(t)}{dt} + f_{iy} \sum_{k=1}^n \frac{\partial OP_{iy}}{\partial q_k} \frac{dq_k(t)}{dt} + f_{iz} \sum_{k=1}^n \frac{\partial OP_{iz}}{\partial q_k} \frac{dq_k(t)}{dt} \right) dt \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N f_{ix} \frac{\partial OP_{ix}}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^N f_{iy} \frac{\partial OP_{iy}}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^N f_{iz} \frac{\partial OP_{iz}}{\partial q_k} \right) \frac{dq_k(t)}{dt} dt \end{aligned}$$

che ricordando le **20.3** si scrive

$$21.3) \quad dL = \sum_{k=1}^n Q_k \frac{dq_k(t)}{dt} dt$$

21.3. Teorema del lavoro. Consideriamo le equazioni di Lagrange **20.12**: moltiplicando ambo i membri di ciascuna equazione per \dot{q}_k abbiamo

$$\sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n \left(\frac{\partial g_{hj}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kj}}{\partial q_h} \right) \frac{dq_j(t)}{dt} \frac{dq_h(t)}{dt} \frac{dq_h(t)}{dt} + \sum_{j=1}^n g_{jk} \frac{d^2 q_j(t)}{dt^2} \frac{dq_k(t)}{dt} = Q_k \frac{dq_k(t)}{dt} \quad k = 1, 2, 3 \dots n$$

Sommando membro a membro le n equazioni così ottenute abbiamo

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n \left(\frac{\partial g_{hj}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kj}}{\partial q_h} \right) \frac{dq_j(t)}{dt} \frac{dq_h(t)}{dt} \frac{dq_h(t)}{dt} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n g_{jk} \frac{d^2 q_j(t)}{dt^2} \frac{dq_k(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n Q_k \frac{dq_k(t)}{dt}$$

cioè

$$21.4) \quad \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n \frac{\partial g_{kj}}{\partial q_h} \frac{dq_j}{dt} \frac{dq_h}{dt} \frac{dq_k}{dt} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n g_{jk} \frac{d^2 q_j}{dt^2} \frac{dq_k}{dt} = \frac{dL}{dt}$$

dove si è sostituita a secondo membro l'espressione del lavoro elementare **21.3**. Adesso lasciamo da parte per un attimo questo risultato e calcoliamo la derivata temporale della energia cinetica **21.2**. Abbiamo

$$\frac{d\mathcal{T}}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{h=1}^n \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_h} \frac{dq_h(t)}{dt} \frac{dq_k(t)}{dt} \frac{dq_j(t)}{dt} + g_{jk} \left(\frac{d^2 q_k(t)}{dt^2} \frac{dq_j(t)}{dt} + \frac{dq_k(t)}{dt} \frac{d^2 q_j(t)}{dt^2} \right) \right)$$

cioè

$$21.5) \quad \frac{d\mathcal{T}(t)}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_h} \frac{dq_h(t)}{dt} \frac{dq_k(t)}{dt} \frac{dq_j(t)}{dt} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n g_{jk} \frac{d^2 q_k(t)}{dt^2} \frac{dq_j(t)}{dt}$$

Confrontando la **21.5** con la **21.4** si ha allora

$$21.6) \quad d\mathcal{T}(t) = dL(t)$$

ritrovando così l'enunciato del **teorema del lavoro e dell'energia cinetica**, derivandolo dalle equazioni di Lagrange ovvero, in definitiva, dalla legge di Newton.

21.4. Teorema di conservazione dell'energia. Confrontando la **21.6** con la **21.3** abbiamo

$$21.7) \quad \frac{d\mathcal{T}(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n Q_k \frac{dq_k(t)}{dt}$$

Ricordando che se una sollecitazione risulta conservativa (secondo la definizione classica o secondo quella generalizzata) allora

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

la **21.7** si può scrivere

$$\frac{d\mathcal{T}(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_k} \frac{dq_k(t)}{dt}$$

Ricordando le regole di derivazione delle funzioni composte posso quindi concludere che nel caso di una sollecitazione conservativa sussiste il teorema di conservazione dell'energia secondo cui

$$21.8) \quad \frac{dT(t)}{dt} = \frac{dU(t)}{dt}$$

che introducendo la funzione **energia potenziale** definita come di consueto

$$21.9) \quad \Pi = -U$$

si scrive

$$21.10) \quad dT + d\Pi = 0$$

Dunque la **21.10** è una proprietà che le sollecitazioni conservative secondo la definizione classica condividono con quelle conservative secondo la definizione generalizzata, pur essendo il primo insieme di definizione incluso nel secondo.

21.5. Equazioni di Lagrange ed energia cinetica. Le equazioni di Lagrange **20.13** possono essere scritte per mezzo della funzione energia cinetica. Per ottenere questa espressione dobbiamo calcolare alcune derivate della funzione energia cinetica **21.2**.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} &= \frac{1}{2} \frac{\partial (\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (g_{jk}(q_1, q_2, \dots, q_n) \dot{q}_k \dot{q}_j))}{\partial \dot{q}_h} = \\ &= \frac{\partial (\sum_{j=1}^n (g_{j1} \dot{q}_1 \dot{q}_j) + \sum_{j=1}^n (g_{j2} \dot{q}_2 \dot{q}_j) + \dots + \sum_{j=1}^n (g_{jh} \dot{q}_h \dot{q}_j) + \dots + \sum_{j=1}^n (g_{jn} \dot{q}_n \dot{q}_j))}{2 \partial \dot{q}_h} = \\ &= \frac{g_{h1} \dot{q}_1 + g_{h2} \dot{q}_2 + \dots + \sum_{j=1}^n (g_{jh} \dot{q}_j) + g_{hh} \dot{q}_h + \dots + g_{hn} \dot{q}_n}{2} = \\ &= \frac{g_{h1} \dot{q}_1 + g_{h2} \dot{q}_2 + \dots + g_{hh} \dot{q}_h + \dots + g_{hn} \dot{q}_n + \sum_{j=1}^n (g_{jh} \dot{q}_j)}{2} = \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n (g_{hj} \dot{q}_j) + \sum_{j=1}^n (g_{jh} \dot{q}_j)}{2} \end{aligned}$$

In base alla **20.12** risulta $g_{hj} = g_{jh}$. Dunque abbiamo trovato

$$21.11) \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{j=1}^n g_{hj} \dot{q}_j$$

Questo ci permette di scrivere

$$21.12) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{j=1}^n g_{hj} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{hj}}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j$$

Derivando rispetto la generica coordinata lagrangiana si ha poi

$$21.13) \quad \frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q_h} \dot{q}_k \dot{q}_j \right)$$

Allora si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_h} = \sum_{j=1}^n g_{hj} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{hj}}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q_h} \dot{q}_k \dot{q}_j \right)$$

A secondo membro abbiamo proprio il primo membro della **20.13e** dunque

$$21.14) \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_h} = Q_h \quad h = 1, 2, \dots, n$$

Questa è pertanto un'espressione alternativa delle equazioni di Lagrange **20.13**.

21.6. Equazioni di Lagrange per sollecitazioni conservative. Nel caso di sollecitazioni conservative le equazioni di Lagrange **20.13** possono essere scritte in forma omogenea, perdendo la dipendenza esplicita dalla sollecitazione esterna. Introducendo infatti la **funzione lagrangiana** $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ definita come

$$21.15) \mathcal{L} = \mathcal{T}(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) + U(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

e ricordando che per sollecitazioni conservative si ha $\frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k, k = 1, 2, \dots, n$ abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_h} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} &= \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_h} + \frac{\partial U}{\partial q_h} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_h} + Q_h \end{aligned}$$

Dunque risulta

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_h} - Q_h \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_h} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} + Q_h$$

Ricordando l'espressione **21.14** delle equazioni di Lagrange abbiamo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} + Q_h = Q_h$$

e dunque le equazioni di Lagrange per sollecitazioni conservative si scrivono

$$21.16) \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0 \quad h = 1, 2, \dots, n$$

Se invece non si introduce la funzione lagrangiana, allora sostituendo le **20.4** nelle **21.14** si ha

$$21.16.b) \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_h} = \frac{\partial U}{\partial q_h} \quad h = 1, 2, \dots, n$$

21.7. Momenti cinetici. Definisco **momenti cinetici** gli scalari

$$21.17) p_i \triangleq \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i}$$

che in base alla **21.11** si scrivono

$$21.18) p_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} \dot{q}_j$$

Il sostantivo latino *neutromomentum* era utilizzato nei testi scientifici (fino alla fine dell'800 i testi di fisica erano redatti in latino) per indicare la quantità di moto¹. In effetti i momenti cinetici si riconducono a componenti della quantità di moto di elementi materiali nel caso in cui le coordinate lagrangiane coincidano con quelle cartesiane; se ad esempio consideriamo il caso di un solo elemento materiale di coordinate lagrangiane

$$\begin{cases} q_1(t) = x(t) \\ q_2(t) = y(t) \\ q_3(t) = z(t) \end{cases}$$

allora le **20.12** porgono

$$\begin{aligned} g_{11}(q_1, q_2, q_3) &= m \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_1} = m \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial x} = m \\ g_{12}(q_1, q_2, q_3) &= m \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_2} = m \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial y} = 0 \\ g_{13}(q_1, q_2, q_3) &= m \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_3} = m \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial z} = 0 \\ g_{21}(q_1, q_2, q_3) &= m \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_1} = m \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial x} = 0 \\ g_{22}(q_1, q_2, q_3) &= m \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_2} = m \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial y} = m \\ g_{31}(q_1, q_2, q_3) &= m \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_1} = m \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial x} = 0 \\ g_{32}(q_1, q_2, q_3) &= m \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_2} = m \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial y} = 0 \\ g_{33}(q_1, q_2, q_3) &= m \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_3} = m \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial z} = m \end{aligned}$$

Sostituendole nella **21.11** abbiamo dunque

$$\begin{aligned} p_1 &= \sum_{j=1}^3 g_{1j} \dot{q}_j = g_{11} \dot{q}_1 + g_{12} \dot{q}_2 + g_{13} \dot{q}_3 = g_{11} \dot{q}_1 = m\dot{x} \\ p_2 &= \sum_{j=1}^3 g_{2j} \dot{q}_j = g_{21} \dot{q}_1 + g_{22} \dot{q}_2 + g_{23} \dot{q}_3 = g_{22} \dot{q}_2 = m\dot{y} \\ p_3 &= \sum_{j=1}^3 g_{3j} \dot{q}_j = g_{31} \dot{q}_1 + g_{32} \dot{q}_2 + g_{33} \dot{q}_3 = g_{33} \dot{q}_3 = m\dot{z} \end{aligned}$$

cioè appunto il vettore di componenti p_1, p_2, p_3 coincide con il momento della quantità di moto dell'elemento.

¹ L'inglese scientifico moderno usa ancora il sostantivo *momentum* per indicare la quantità di moto, per cui ad esempio *moment of momentum* sta per momento della quantità di moto.

21.8. Coordinate ignorabili. Se accade che le funzioni **20.12** sono indipendenti da una coordinata lagrangiana - diciamo q_1 - ovvero se risulta

$$21.19) \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_1} = 0 \quad j, k = 1, 2, \dots, n$$

e se inoltre

$$21.20) Q_1 = 0$$

cioè la corrispondente componente lagrangiana della sollecitazione è nulla; allora si dice che q_1 è una coordinata lagrangiana ignorabile.

Si vede subito che in questo caso, per la **21.2**, l'energia cinetica risulta indipendente dalla coordinata stessa, ovvero risulta

$$21.21) \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_1} = 0$$

Inoltre si ha che, se la sollecitazione ammette potenziale lagrangiano (ovvero se è conservativa secondo la definizione generalizzata), allora sostituendo la **21.20** nella **20.4** si ha

$$21.22) \frac{\partial U}{\partial q_1} = 0$$

Per cui l'energia totale del sistema è indipendente dal valore assunto dalla coordinata q_1 . Sostituendo poi la **21.21** e la **21.20** nella prima delle **21.14** si trova

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_1} = Q_1 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_1} - 0 = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_1} = 0$$

ovvero, in base alla definizione **21.17** di momento cinetico, che

$$21.23) p_1 = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_1} = \text{costante}$$

Si vuole ora provare che se q_1 è ignorabile, allora il sistema delle equazioni di Lagrange si riduce ad un sistema di $n-1$ equazioni differenziali nelle incognite $q_2(t), q_3(t), \dots, q_n(t)$. Considerata allora la condizione iniziale

$$21.24) p_1 = p_1(t=0) = p_1^0$$

sostituendo questa nella **21.23**, e considerando la **21.11**, si trova

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_1} = \sum_{j=1}^n g_{1j} \dot{q}_j = p_1^0 \Leftrightarrow g_{11} \dot{q}_1 = p_1^0 - \sum_{j=2}^n g_{1j} \dot{q}_j$$

Si tenga presente ora che essendo la **21.2** una forma quadratica definita positiva, deve essere $g_{11} > 0$, e dunque

$$21.25) \dot{q}_1 = \frac{1}{g_{11}} (p_1^0 - \sum_{j=2}^n g_{1j} \dot{q}_j)$$

Sostituendo la **21.25** nelle restanti $n - 1$ equazioni di Lagrange **20.13**, che non contengono l'incognita q_1 in base alla ipotesi **21.19**, si ottiene un sistema di $n - 1$ equazioni differenziali del 2° ordine nelle incognite $q_2(t), q_3(t), \dots, q_n(t)$. Sostituendo poi i valori di queste nella **21.25** si ricava $\dot{q}_1(t)$ che integrata permette di ricavare $q_1(t)$ a meno di una costante di integrazione, che poi è determinata in base alle condizioni iniziali.

Capitolo 22. Meccanica lagrangiana. Statica

22.1. Equilibrio meccanico. Abbiamo visto che con l'introduzione delle coordinate lagrangiane, l'espressione del lavoro virtuale è fornita dalla **20.2**. Ma allora il lavoro virtuale è nullo per ogni spostamento virtuale se e solo se sono nulle tutte le componenti lagrangiane della sollecitazione (se infatti queste sono tutte nulle, il lavoro virtuale è banalmente nullo per ogni spostamento virtuale; viceversa se il lavoro virtuale è nullo per ogni spostamento virtuale, allora deve esserlo in particolare per quello la cui unica componente è δq_j , il che comporta che deve essere Q_j ; ma essendo j arbitrario, ecco che è dimostrata la tesi).

Ricordo ora (vedi paragrafo **14.3**) che

- *condizione necessaria e sufficiente affinché una configurazione C^e sia di equilibrio meccanico, è che sia nullo il lavoro virtuale della sollecitazione esterna per ogni sistema di spostamenti virtuali applicati a partire dalla configurazione C^e assunta con atto di moto nullo.*

allora la condizione di equilibrio meccanico si esprime in modo equivalente nella formula

- *condizione necessaria e sufficiente affinché una configurazione C^e sia di equilibrio meccanico, è che siano nulle tutte le componenti lagrangiane di sollecitazione relative alla configurazione C^e , in corrispondenza di un atto di moto nullo.*

ovvero che risulti

$$22.1) \quad Q_k(q_1^e, q_2^e, \dots, q_n^e; 0, 0, \dots, 0; t) = 0, \forall t > 0 \quad k = 1, 2, \dots, n$$

dove i valori $q_1^e, q_2^e, \dots, q_n^e$ delle coordinate lagrangiane sono appunto quelli che definiscono la configurazione C^e .

Ma si prova questa condizione necessaria e sufficiente anche partendo dalle equazioni di Lagrange **20.13**. Se infatti sono vere le **22.1**, il moto descritto dalle funzioni costanti

$$22.2) \quad q_1(t) = q_1^e, q_2(t) = q_2^e, \dots, q_n(t) = q_n^e$$

soddisfa le equazioni **20.13**, in quanto annulla i primi membri di ciascuna equazione. Ma tale moto¹ è la quiete e dunque le **22.1** sono condizione sufficiente alla quiete.

Se viceversa le equazioni di Lagrange sono soddisfatte, in corrispondenza della configurazione iniziale C^e , dalle funzioni costanti **22.2**, allora necessariamente devono valere le **22.1**, che dunque sono anche condizioni necessarie al moto di quiete.

22.2. Stabilità dell'equilibrio meccanico. La definizione di equilibrio stabile per sistemi olonomi è un'estensione di quella vista per l'elemento e si enuncia nel seguente modo:

- *la configurazione di equilibrio C^e individuata dai valori $q_1^e, q_2^e, \dots, q_n^e$ delle variabili lagrangiane, si dice di equilibrio **stabile** se presi comunque piccoli due numeri reali positivi $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ allora esistono due numeri reali positivi δ_1, δ_2 tali che, se risulta*

¹ Si ricorda che si ammettono verificate le condizioni di regolarità richieste dal teorema di esistenza e unicità di Cauchy, dunque se la quiete è una soluzione delle equazioni di Lagrange, allora è l'unica soluzione possibile, per quelle date condizioni iniziali.

$$22.3) \begin{cases} \sqrt{\sum_{k=1}^n (q_k^e - \tilde{q}_k)^2} < \delta_1 \\ \sqrt{\sum_{k=1}^n (\tilde{q}_k)^2} < \delta_2 \end{cases}$$

allora segue che

$$22.4) \begin{cases} \sqrt{\sum_{k=1}^n (q_k^e - \tilde{q}_k(t))^2} < \varepsilon_1 & \forall t > 0 \\ \sqrt{\sum_{k=1}^n (\tilde{q}_k(t))^2} < \varepsilon_2 & \forall t > 0 \end{cases}$$

dove si intende che le funzioni $\tilde{q}_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$ sono la soluzione delle equazioni di Lagrange in corrispondenza della configurazione iniziale individuata dalle coordinate Lagrangiane $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n$ e dall'atto di moto dato da $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n$.

In termini grossolani dunque un equilibrio è stabile quando la soluzione rimane in un intorno della quiete tanto più prossimo, quanto più piccola è la perturbazione delle condizioni iniziali.

Da un punto di vista operativo il teorema² seguente fornisce una condizione sufficiente affinché una data configurazione sia di equilibrio stabile.

Teorema di Dirichlet. Data una sollecitazione conservativa in senso lagrangiano, allora ogni n -pla $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n$ in corrispondenza della quale si realizza un minimo relativo proprio per l'energia potenziale Π del sistema³, individua una configurazione di equilibrio stabile.

Per individuare le configurazioni di minimo relativo proprio per l'energia potenziale, si devono anzitutto determinare le configurazioni di stazionarietà, ovvero le configurazioni in corrispondenza delle quali si annulla il gradiente della funzione $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$. Diciamo allora che sia $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n$ una configurazione di stazionarietà, che indichiamo \tilde{C} per brevità. Ne segue, per quanto detto, che

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \right|_{\tilde{C}} = \left. \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} \right|_{\tilde{C}} = \dots = \left. \frac{\partial \Pi}{\partial q_n} \right|_{\tilde{C}} = 0$$

Ma allora posso scrivere

$$\begin{aligned} \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n) &= \Pi(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n) + \\ &+ \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} \right|_{\tilde{C}} (q_1 - \tilde{q}_1)^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2} \right|_{\tilde{C}} (q_2 - \tilde{q}_2)^2 + \dots + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_n^2} \right|_{\tilde{C}} (q_n - \tilde{q}_n)^2 + \\ &+ \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2} \right|_{\tilde{C}} (q_1 - \tilde{q}_1)(q_2 - \tilde{q}_2) + \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_3} \right|_{\tilde{C}} (q_1 - \tilde{q}_1)(q_3 - \tilde{q}_3) + \dots + \\ &+ \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_n} \right|_{\tilde{C}} (q_1 - \tilde{q}_1)(q_n - \tilde{q}_n) + o((q_1 - \tilde{q}_1)^2 + \dots + (q_n - \tilde{q}_n)^2) \end{aligned}$$

²² Questa versione del teorema di Dirichlet si dovrebbe dimostrare in modo analogo all'omonimo teorema dimostrato per l'elemento.

³ Anche nella meccanica lagrangiana si definisce energia potenziale l'opposto del potenziale lagrangiano U , definito in **20.4**, in analogia con quanto visto in **11.11** per la trattazione generale.

A secondo membro, se non si considera l'infinitesimo, abbiamo una forma quadratica (moltiplicata $\frac{1}{2}$) che indico Π^* e che possiamo scrivere come

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (q_1 - \tilde{q}_1) \\ (q_2 - \tilde{q}_2) \\ \dots \\ (q_n - \tilde{q}_n) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} \right|_{\tilde{c}} & \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2} \right|_{\tilde{c}} & \dots & \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_n} \right|_{\tilde{c}} \\ \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2 \partial q_1} \right|_{\tilde{c}} & \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2} \right|_{\tilde{c}} & \dots & \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2 \partial q_n} \right|_{\tilde{c}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_n \partial q_1} \right|_{\tilde{c}} & \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_n \partial q_2} \right|_{\tilde{c}} & \dots & \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_n^2} \right|_{\tilde{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (q_1 - \tilde{q}_1) \\ (q_2 - \tilde{q}_2) \\ \dots \\ (q_n - \tilde{q}_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (q_1 - \tilde{q}_1) & (q_2 - \tilde{q}_2) & \dots & (q_n - \tilde{q}_n) \end{pmatrix} M(q_1, q_2, \dots, q_n) \begin{pmatrix} (q_1 - \tilde{q}_1) \\ (q_2 - \tilde{q}_2) \\ \dots \\ (q_n - \tilde{q}_n) \end{pmatrix}$$

Dunque si ha

$$\Pi(q_1, q_2, \dots, q_n) - \Pi(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n) = \Pi^* + o\left(\sqrt{(q_1 - \tilde{q}_1)^2 + \dots + (q_n - \tilde{q}_n)^2}\right)$$

Pertanto, in base alla teoria delle forme quadratiche, abbiamo che se M presenta tutti i minori principali di testa positivi segue che $\Pi^* > 0$ (cioè la forma quadratica è definita positiva) e dunque (trascurando l'infinitesimo di ordine superiore) la configurazione $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n)$ è di minimo relativo proprio e in quanto tale, per il teorema di Dirichlet, è una configurazione di equilibrio stabile. Nel caso in cui invece la forma quadratica non è definita positiva vale il seguente teorema.

Teorema di Liapunov. Nel caso di una sollecitazione conservativa in senso stretto, allora se esistono delle configurazioni in corrispondenza delle quali Π^* è negativa, il che esclude che sia definita positiva, la configurazione $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n)$ non è di equilibrio stabile.

Dunque si possono riassumere gli enunciati teoremi di Dirichlet e di Liapunov nel seguente specchio:

Π^* definita positiva	Dirichlet \Rightarrow	equilibrio stabile
Π^* negativa almeno per qualche configurazione	Liapunov \Rightarrow	non equilibrio stabile
altri casi (ovvero Π^* identicamente nulla, oppure $\Pi^* \geq 0$)	nulla si può affermare	

22.3. Equilibrio instabile e equilibrio indifferente. Nel paragrafo precedente abbiamo dato la definizione di equilibrio stabile e dunque, indirettamente, quella di equilibrio non stabile. Ne approfitto qui per fornire altre due definizioni in uso, ovvero quella di equilibrio instabile (banale) e quella di equilibrio indifferente. In particolare si ha che

- la configurazione di equilibrio C^e , si dice di equilibrio **instabile** se non è di equilibrio stabile.

Quindi possiamo dire che ogni configurazione di equilibrio può essere o di equilibrio stabile o di equilibrio instabile; non ci sono altre possibilità. E' tuttavia utile distinguere, all'interno delle configurazioni di equilibrio instabile un caso particolare, detto di equilibrio indifferente. In particolare si ha che

• la configurazione di equilibrio \mathcal{C}^e individuata dai valori $q_1^e, q_2^e, \dots, q_n^e$ delle variabili lagrangiane, si dice di equilibrio **indifferente** se esiste un intorno Q del punto $(q_1^e, q_2^e, \dots, q_n^e)$ tale che comunque si scelga la configurazione $\mathcal{C}: (q_1, q_2, \dots, q_n) \in Q$ risulta

$$22.5) \quad \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n) - \Pi(q_1^e, q_2^e, \dots, q_n^e) = 0$$

Quindi si può dire brevemente che una configurazione è di equilibrio indifferente quando esiste un suo intorno dello spazio n -dimensionale in cui l'energia potenziale assume valore costante.

Teorema. In presenza di sollecitazione conservativa una configurazione di equilibrio indifferente è una particolare configurazione di equilibrio instabile.

Dim. Si può osservare immediatamente che in una configurazione \mathcal{C}^e di equilibrio indifferente l'energia potenziale Π non verifica né le ipotesi del teorema di Dirichlet (non ha in \mathcal{C}^e un punto di minimo relativo proprio), né quelle del teorema di Liapunov (Π^* è nulla per ogni configurazione, essendo le derivate seconde di Π tutte nulle in \mathcal{C}^e). Dunque la dimostrazione deve sfruttare direttamente la definizione di equilibrio stabile. Diciamo allora che al sistema vengano attribuite le condizioni iniziali

$$22.6) \quad \begin{cases} \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n \\ \dot{\tilde{q}}_1, \dot{\tilde{q}}_2, \dots, \dot{\tilde{q}}_n \end{cases}$$

a partire dalle quali si sviluppa il moto di legge oraria

$$22.7) \quad \tilde{q}_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Supponiamo altresì che sia $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n \in Q$, secondo la simbologia di questo paragrafo. Allora, almeno entro un certo intervallo di tempo, deve aversi, per la **22.5**, che

$$22.8) \quad \Pi(\tilde{q}_1(t), \tilde{q}_2(t), \dots, \tilde{q}_n(t)) - \Pi(q_1^e, q_2^e, \dots, q_n^e) = 0$$

ovvero che

$$22.9) \quad d\Pi(\tilde{q}_1(t), \tilde{q}_2(t), \dots, \tilde{q}_n(t)) = 0$$

D'altra parte, essendo la sollecitazione conservativa per ipotesi vale la **21.10** e cioè si ha

$$22.10) \quad d\mathcal{T}(\tilde{q}_1(t), \dots, \tilde{q}_n(t); \dot{\tilde{q}}_1(t), \dots, \dot{\tilde{q}}_n(t)) = 0$$

ovvero, considerando le **22.6**, si ha

$$22.11) \quad \mathcal{T}(\tilde{q}_1(t), \dots, \tilde{q}_n(t); \dot{\tilde{q}}_1(t), \dots, \dot{\tilde{q}}_n(t)) = \mathcal{T}(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n; \dot{\tilde{q}}_1, \dots, \dot{\tilde{q}}_n)$$

Diciamo ora, per semplificare la trattazione, che il sistema abbia un solo grado di libertà, ovvero una sola variabile lagrangiana. Allora l'energia cinetica per la **21.1** si scrive

$$22.12) \mathcal{T}(\tilde{q}(t); \dot{\tilde{q}}(t)) = \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial \tilde{q}} \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial \dot{\tilde{q}}} \right) \left(\frac{d\tilde{q}(t)}{dt} \right)^2 \right)$$

e dunque la **22.11** si scrive

$$22.13) \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{i=1}^N m_i \left| \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial \tilde{q}} \right|^2 \right) \left(\frac{d\tilde{q}(t)}{dt} \right)^2 \right) = \mathcal{T}(\tilde{q}; \dot{\tilde{q}})$$

Si osservi ora che la **22.13** porge

$$\sum_{i=1}^N m_i \left| \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial \tilde{q}} \right|^2 \left(\frac{d\tilde{q}(t)}{dt} \right)^2 = 2\mathcal{T}(\tilde{q}; \dot{\tilde{q}}) \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^N m_i \left| \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial \tilde{q}} \right|^2} |d\tilde{q}(t)| = \sqrt{2\mathcal{T}(\tilde{q}; \dot{\tilde{q}})} dt$$

Si consideri ora che -in base al teorema di permanenza del segno- si può sempre considerare un intervallo di tempo $[0, t_f]$ dall'avvio $t = 0$ in cui $\dot{\tilde{q}}(t)$ mantiene il segno di $\dot{\tilde{q}}(0) = \dot{\tilde{q}}$. Supponendo ad esempio che tale segno sia positivo abbiamo

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{i=1}^N m_i \left| \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial \tilde{q}} \right|^2} d\tilde{q}(t) &= \sqrt{2\mathcal{T}(\tilde{q}; \dot{\tilde{q}})} dt \Rightarrow \int_{\tilde{q}(0)}^{\tilde{q}(t_f)} \sqrt{\sum_{i=1}^N m_i \left| \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial \tilde{q}} \right|^2} d\tilde{q} = \sqrt{2\mathcal{T}(\tilde{q}; \dot{\tilde{q}})} \int_0^{t_f} dt \Rightarrow \\ 22.14) \int_{\tilde{q}(0)}^{\tilde{q}(t_f)} \sqrt{\sum_{i=1}^N m_i \left| \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial \tilde{q}} \right|^2} d\tilde{q} &= \sqrt{2\mathcal{T}(\tilde{q}; \dot{\tilde{q}})} t_f \end{aligned}$$

il che è possibile, dovendo essere l'argomento sempre positivo, solo se $\tilde{q}(t_f)$ cresce con t_f , essendo la funzione a secondo membro linearmente crescente con t_f . Se ne conclude che l'equilibrio è instabile perché l'espressione

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (q_k^e - \tilde{q}_k(t))^2}$$

diverge nel tempo per qualunque condizione iniziale che rispetti le **22.3**. Naturalmente se si assume la condizione iniziale

$$22.16) \begin{cases} \sqrt{\sum_{k=1}^n (q_k^e - \tilde{q}_k)^2} < \varepsilon_1 \\ \sqrt{\sum_{k=1}^n (\dot{\tilde{q}}_k)^2} = 0 \end{cases}$$

allora si ha

$$22.17) \begin{cases} \sqrt{\sum_{k=1}^n (q_k^e - \tilde{q}_k(t))^2} < \varepsilon_1 & \forall t > 0 \\ \sqrt{\sum_{k=1}^n (\dot{\tilde{q}}_k(t))^2} = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

tuttavia la definizione di equilibrio stabile -così come è stata posta qui- richiede che le **22.4** siano rispettate per qualunque condizione iniziale che verifichi le **22.3**, e non solo per le velocità iniziali nulle. Con ciò il teorema è dimostrato.

Un esempio tipico di equilibrio indifferente è quello del corpo soggetto solo al proprio peso posto su un piano orizzontale liscio: in questo caso per qualunque velocità iniziale non nulla la posizione del corpo aumenta linearmente nel tempo, indefinitamente. Dunque l'equilibrio è instabile.

Capitolo 23. Meccanica lagrangiana. Linearizzazione

23.1. Introduzione. In generale le **20.13** costituiscono un sistema di equazioni differenziali non lineari, dunque di difficile soluzione. Nasce così l'esigenza di sostituire il sistema **20.13** con un sistema di equazioni differenziali lineari, che possa facilmente essere risolto, e la cui soluzione approssimi quella esatta. Questo procedimento prende il nome di **linearizzazione**. Nella presente trattazione ci si limita a considerare sistemi che siano

23.1) olonomi (definizione **20.5**);

23.2) conservativi in senso lagrangiano (definizione **20.4**);

23.4) nell'intorno di una configurazione di equilibrio stabile (definizione nel paragrafo **22.2**).

Ragionando in modo non rigoroso (la trattazione rigorosa della linearizzazione trascende i nostri scopi) la condizione **23.4** garantisce che l'andamento delle coordinate lagrangiane in corrispondenza di condizioni iniziali vicine alla quiete e alla configurazione di equilibrio, sia poco dissimile da un andamento lineare.

23.2. Linearizzazione. In base alla **21.14** e nel caso di sollecitazione conservativa in senso lagrangiano, allora le equazioni di Lagrange si scrivono

$$23.5) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_h} = \frac{\partial U}{\partial q_h} \quad h = 1, 2, \dots, n$$

Si assuma ora che sia C_0 una configurazione di equilibrio stabile e che sia l'origine delle coordinate lagrangiane, ovvero che sia

$$23.6) \quad C_0 \equiv (0, 0, \dots, 0)$$

e assumiamo inoltre nullo il potenziale lagrangiano in C_0

$$23.7) \quad U(0, 0, \dots, 0) = 0$$

posizione che può sempre essere fatta, essendo il potenziale definito a meno di una costante additiva arbitraria. Si consideri poi che essendo C_0 una configurazione di equilibrio stabile; allora, in base al teorema di Dirichlet (paragrafo **22.2**), in essa il potenziale ha un punto di minimo relativo proprio, dunque in particolare si ha un punto di stazionarietà, ovvero un punto in cui è nullo il gradiente del potenziale lagrangiano stesso:

$$23.8) \quad \frac{\partial U}{\partial q_k}(0, 0, \dots, 0) = 0 \quad h = 1, 2, \dots, n$$

Con queste premesse lo sviluppo in serie del potenziale lagrangiano in un intorno di C_0 porge

$$23.9) \quad U(q_1, q_2, \dots, q_n) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k} \right|_{C_0} q_h q_k + o(q_1^2 + \dots + q_n^2)$$

Sviluppando in serie anche le funzioni **20.12** otteniamo

$$23.10) g_{jk}(q_1, q_2, \dots, q_n) = g_{jk}|_{C_0} + \sum_{h=1}^n \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_h} \Big|_{C_0} q_h + o(\sqrt{q_1^2 + \dots + q_n^2})$$

Dunque l'energia cinetica **21.2** si scrive

$$23.11) \mathcal{T}(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\left(g_{jk}|_{C_0} + \sum_{h=1}^n \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_h} \Big|_{C_0} q_h + o(\sqrt{q_1^2 + \dots + q_n^2}) \right) \dot{q}_k \dot{q}_j \right)$$

Considerando condizioni prossime a C_0 e alla quiete, la stabilità dell'equilibrio consente di affermare che i vettori (q_1, q_2, \dots, q_n) e $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ sono prossimi al vettore nullo, e ciò è tanto più vero quanto più sono piccole le perturbazioni dalla condizione di equilibrio. Allora quello che si fa in questa circostanza è sostituire a U e \mathcal{T} le **forme ridotte**

$$23.12) U^*(q_1, q_2, \dots, q_n) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k} \Big|_{C_0} q_h q_k \right)$$

$$23.13) \mathcal{T}^*(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(g_{jk}|_{C_0} \dot{q}_k \dot{q}_j \right)$$

le quali si ottengono eliminando gli ordini di infinitesimo maggiori per perturbazioni dall'equilibrio che tendano a zero. Si ottengono due forme quadratiche le quali possono essere riscritte attraverso le due matrici ad esse associate. Posto infatti

$$23.14) P = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_1} \Big|_{C_0} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} \Big|_{C_0} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_n} \Big|_{C_0} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_1} \Big|_{C_0} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_2} \Big|_{C_0} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_n} \Big|_{C_0} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_1} \Big|_{C_0} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_2} \Big|_{C_0} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_n} \Big|_{C_0} \end{pmatrix}$$

$$23.15) T = \begin{pmatrix} g_{11}|_{C_0} & g_{12}|_{C_0} & g_{1n}|_{C_0} \\ g_{21}|_{C_0} & g_{22}|_{C_0} & g_{2n}|_{C_0} \\ g_{n1}|_{C_0} & g_{n2}|_{C_0} & g_{nn}|_{C_0} \end{pmatrix}$$

le **23.12** e **23.13** si scrivono

$$23.16) U^*(q_1, q_2, \dots, q_n) = \frac{1}{2} (q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n) P \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix}$$

$$23.17) \mathcal{T}^*(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) = \frac{1}{2} (\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dots \quad \dot{q}_n) T \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix}$$

Derivando le forme ridotte si trova

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial \dot{q}_h} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(g_{jk} |_{C_0} \frac{\partial (\dot{q}_k \dot{q}_j)}{\partial \dot{q}_h} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(g_{jk} |_{C_0} \left(\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_j + \dot{q}_k \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_h} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(g_{jk} |_{C_0} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_j \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(g_{jk} |_{C_0} \dot{q}_k \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_h} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(g_{jh} |_{C_0} \dot{q}_j \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(g_{hk} |_{C_0} \dot{q}_k \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(g_{hj} |_{C_0} \dot{q}_j \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(g_{hk} |_{C_0} \dot{q}_k \right) = \sum_{k=1}^n \left(g_{hk} |_{C_0} \dot{q}_k \right) \\ \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial q_h} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U^*}{\partial q_h} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} |_{C_0} \frac{\partial (q_j q_k)}{\partial q_h} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} |_{C_0} \frac{\partial q_j}{\partial q_h} q_k \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} |_{C_0} q_j \frac{\partial q_k}{\partial q_h} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k} |_{C_0} q_k \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_h} |_{C_0} q_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k} |_{C_0} q_k \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_h} |_{C_0} q_k \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_h} |_{C_0} q_k \right)\end{aligned}$$

Andando poi a sostituire nella **23.5** si ottengono le

$$23.18) \sum_{k=1}^n (g_{hk} |_{C_0} \ddot{q}_k) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k} |_{C_0} q_k \right) \quad h = 1, 2, \dots, n$$

le quali costituiscono un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine lineari a coefficienti costanti, e prendono il nome di **equazioni di Lagrange linearizzate**. Per come sono state costruite queste equazioni, esse approssimano quelle esatte in corrispondenza a condizioni iniziali prossime all'atto di moto nullo e alla configurazione di equilibrio C_0 .

23.3. Coordinate normali. Ricordo che una forma quadratica

$$f_q = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & & m_{2n} \\ & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

di matrice M nelle coordinate x_1, x_2, \dots, x_n può trovare un'espressione più semplice ricorrendo alla diagonalizzazione di M , che essendo simmetrica per definizione stessa di forma quadratica, ammette forma diagonale rispetto alla base dei suoi autovettori. In particolare, se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori e se C è la matrice le cui colonne sono le coordinate dei relativi autovettori rispetto alla base canonica, allora si ha

$$\begin{aligned}f_q &= (x'_1 \quad x'_2 \quad \dots \quad x'_n) C^T \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & & m_{2n} \\ & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & & m_{nn} \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = \\ &= (x'_1 \quad x'_2 \quad \dots \quad x'_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Consideriamo ora la **23.17** e diciamo che sia C la matrice¹ le cui colonne sono le coordinate della base di autovettori di T , di autovalori t_1, t_2, t_3 . Ciò posto² si ha

$$23.19) \mathcal{J}^* = \frac{1}{2}(\dot{y}_1 \quad \dot{y}_2 \quad \dot{y}_n) C^T T C \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\dot{y}_1 \quad \dot{y}_2 \quad \dot{y}_n) \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\dot{y}_1^2 t_1 + \dot{y}_2^2 t_2 + \dot{y}_3^2 t_3)$$

dove le nuove coordinate sono legate alle precedenti dalla relazione

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = c_{11}\dot{q}_1 + c_{21}\dot{q}_2 + c_{31}\dot{q}_n \\ \dot{y}_2 = c_{12}\dot{q}_1 + c_{22}\dot{q}_2 + c_{32}\dot{q}_n \\ \dot{y}_3 = c_{13}\dot{q}_1 + c_{23}\dot{q}_2 + c_{33}\dot{q}_n \end{cases}$$

Si può osservare ora che la forma quadratica \mathcal{J}^* è definita positiva (dato il suo significato fisico), dunque i suoi autovalori devono essere positivi e dunque è possibile scrivere

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \dot{y}_1 \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} c_{11} \dot{q}_1 + \sqrt{t_1} c_{21} \dot{q}_2 + \sqrt{t_1} c_{31} \dot{q}_n \\ \dot{z}_2 = \dot{y}_2 \sqrt{t_2} = \sqrt{t_2} c_{12} \dot{q}_1 + \sqrt{t_2} c_{22} \dot{q}_2 + \sqrt{t_2} c_{32} \dot{q}_n \\ \dot{z}_3 = \dot{y}_3 \sqrt{t_3} = \sqrt{t_3} c_{13} \dot{q}_1 + \sqrt{t_3} c_{23} \dot{q}_2 + \sqrt{t_3} c_{33} \dot{q}_n \end{cases}$$

Resta così definita una nuova matrice di cambio delle coordinate, data da

$$C' = (C^1 \sqrt{t_1} \quad C^2 \sqrt{t_2} \quad C^3 \sqrt{t_3})$$

la quale non è più ortogonale. Integrando con condizioni iniziali nulle si hanno allora le relazioni

$$23.20) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = C'^T \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \sqrt{t_1} c_{11} q_1 + \sqrt{t_1} c_{21} q_2 + \sqrt{t_1} c_{31} q_3 \\ z_2 = \sqrt{t_2} c_{12} q_1 + \sqrt{t_2} c_{22} q_2 + \sqrt{t_2} c_{32} q_3 \\ z_3 = \sqrt{t_3} c_{13} q_1 + \sqrt{t_3} c_{23} q_2 + \sqrt{t_3} c_{33} q_3 \end{cases}$$

ovvero

$$23.21) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = (C'^T)^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

e la **23.19** si scrive

$$23.22) \mathcal{J}^* = \frac{1}{2}(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2 + \dot{z}_3^2)$$

Ora sostituiamo le **23.20** nella forma quadratica **23.16**, ottenendo

$$23.23) U^* = \frac{1}{2}(z_1 \quad z_2 \quad z_3) (C'^{-1} P (C'^T)^{-1}) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(z_1 \quad z_2 \quad z_3) P' \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

¹ Si ricorda che le matrici del cambiamento di base, nel caso di basi ortogonali, sono matrici ortogonali, ovvero matrici per le quali l'inversa coincide con la trasposta.

² Nel seguito, per semplificare la notazione, si considerano matrici di dimensione tre..

Adesso invece indicata \bar{C} la matrice le cui colonne siano le coordinate della base di autovettori di P' , e se p_1, p_2, p_3 sono i relativi autovalori, allora si ha

$$U^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \bar{C}^T P' \bar{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{2} (x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3)$$

dove le nuove coordinate sono legate alle precedenti dalla relazione

$$23.24) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \bar{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \bar{c}_{11}x_1 + \bar{c}_{21}x_2 + \bar{c}_{31}x_3 \\ z_2 = \bar{c}_{12}x_1 + \bar{c}_{22}x_2 + \bar{c}_{32}x_3 \\ z_3 = \bar{c}_{13}x_1 + \bar{c}_{23}x_2 + \bar{c}_{33}x_3 \end{cases}$$

Elevando al quadrato si ha

$$23.25) \begin{cases} z_1^2 = \bar{c}_{11}^2 x_1^2 + \bar{c}_{21}^2 x_2^2 + \bar{c}_{31}^2 x_3^2 + 2\bar{c}_{11}\bar{c}_{21}x_1x_2 + 2\bar{c}_{11}\bar{c}_{31}x_1x_3 + 2\bar{c}_{21}\bar{c}_{31}x_2x_3 \\ z_2^2 = \bar{c}_{12}^2 x_1^2 + \bar{c}_{22}^2 x_2^2 + \bar{c}_{32}^2 x_3^2 + 2\bar{c}_{12}\bar{c}_{22}x_1x_2 + 2\bar{c}_{12}\bar{c}_{32}x_1x_3 + 2\bar{c}_{22}\bar{c}_{32}x_2x_3 \\ z_3^2 = \bar{c}_{13}^2 x_1^2 + \bar{c}_{23}^2 x_2^2 + \bar{c}_{33}^2 x_3^2 + 2\bar{c}_{13}\bar{c}_{23}x_1x_2 + 2\bar{c}_{13}\bar{c}_{33}x_1x_3 + 2\bar{c}_{23}\bar{c}_{33}x_2x_3 \end{cases}$$

Sommando membro a membro e tenendo presente l'ortogonalità³ della matrice \bar{C} abbiamo

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

e dunque, derivando le **23.25**, abbiamo che la **23.22** si scrive

$$23.26) \mathcal{J}^* = \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dots + \dot{x}_n^2)$$

mentre la **23.16** si scrive

$$23.27) U^* = \frac{1}{2} (x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \dots + x_n^2 p_n)$$

Le nuove coordinate x_1, x_2, \dots, x_n prendono il nome di **coordinate normali**. Derivando le **23.26**, **23.27** si ha

$$23.28) \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial \dot{x}_h} = \dot{x}_h \\ \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x_h} = 0 \\ \frac{\partial U^*}{\partial x_h} = x_h p_h \end{cases}$$

Sostituendo le **23.28** nella **23.5** si hanno le equazioni di Lagrange linearizzate rispetto alle coordinate normali:

$$23.29) \ddot{x}_h - x_h p_h = 0 \quad h = 1, 2, \dots, n$$

³ Cioè le sue colonne sono vettori ortonormali fra loro, e altrettanto dicasi delle sue righe.

Si vede che si ottiene un sistema di equazioni differenziali⁴ indipendenti l'una dall'altra, e dunque molto più semplice rispetto al sistema **23.18**. Si ricorda che nelle **23.29** i coefficienti p_1, p_2, \dots, p_n costituiscono gli autovalori della matrice **23.14** della forma quadratica **23.16**; ma tale forma quadratica è definita negativa (rappresentando il potenziale nell'intorno di una configurazione di minimo relativo proprio), dunque – per un teorema dell'Analisi – i suoi autovalori sono tutti negativi. Definite allora le **pulsazioni normali** $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ attraverso le posizioni

$$23.30) -p_h = \omega_h^2 \quad h = 1, 2, \dots, n$$

abbiamo che ad ogni equazione delle **23.19** corrisponde, in base alla teoria sulle equazioni a coefficienti costanti, un integrale generale

$$23.31) x_h(t) = a_h \cos(\omega_h t) + b_h \sin(\omega_h t) \quad h = 1, 2, \dots, n$$

con a_h, b_h costanti da determinare secondo le condizioni iniziali. Si osservi poi che posto

$$23.32) \begin{cases} a_h = \mathcal{A}_h \sin \varphi_h \\ b_h = \mathcal{A}_h \cos \varphi_h \end{cases}$$

abbiamo per il sistema linearizzato **23.29** le soluzioni

$$23.33) x_h(t) = \mathcal{A}_h \sin(\omega_h t + \varphi_h) \quad h = 1, 2, \dots, n$$

Le costanti \mathcal{A}_h, φ_h vengono determinate univocamente dalle condizioni iniziali. I parametri

$$23.34) \nu_h = \frac{\omega_h}{2\pi} \quad h = 1, 2, \dots, n$$

prendono il nome di **frequenze normali** del sistema olonomo, a cui corrispondono i periodi

$$23.35) T_h = \nu_h^{-1} = \frac{\omega_h}{2\pi} \quad h = 1, 2, \dots, n$$

Se esiste un minimo comune multiplo degli n periodi, esso costituirà il periodo del sistema olonomo.

23.4. Soluzione. Per ottenere la soluzione in termini delle coordinate lagrangiane originarie si tenga conto che sostituendo la **23.24** nella **23.21** si ha

$$23.36) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix} = (C'^T)^{-1} \bar{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

dove ricordo che le matrici sono definite come segue

23.37) C è la matrice le cui colonne sono le coordinate degli autovettori di T ;

23.38) C' è la matrice le cui colonne sono date da

$$C' = (C^1 \sqrt{t_1} \quad C^2 \sqrt{t_2} \quad \dots \quad C^n \sqrt{t_n})$$

⁴ Si tratta di equazioni differenziali omogenee a coefficienti costanti.

essendo t_h l'autovalore $h - mo$ di T ;

23.39) \bar{C} è la matrice le cui colonne sono le coordinate degli autovettori di $C'^{-1}P(C'^T)^{-1}$.

Posto poi

$$23.40) \bar{C} = (C'^T)^{-1} \bar{C}$$

le **23.36** si scrivono

$$23.41) \begin{cases} q_1 = \bar{c}_{11}x_1 + \bar{c}_{12}x_2 + \dots + \bar{c}_{1n}x_n \\ q_2 = \bar{c}_{21}x_1 + \bar{c}_{22}x_2 + \dots + \bar{c}_{2n}x_n \\ \dots \\ q_n = \bar{c}_{n1}x_1 + \bar{c}_{n2}x_2 + \dots + \bar{c}_{nn}x_n \end{cases}$$

e dunque, ricordando le **23.33** in definitiva la soluzione delle equazioni di Lagrange linearizzate **23.18** si scrivono

$$23.42) \begin{cases} q_1 = \bar{c}_{11}\mathcal{A}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \dots + \bar{c}_{1n}\mathcal{A}_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \\ q_2 = \bar{c}_{21}\mathcal{A}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \dots + \bar{c}_{2n}\mathcal{A}_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \\ \dots \\ q_n = \bar{c}_{n1}\mathcal{A}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \dots + \bar{c}_{nn}\mathcal{A}_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \end{cases}$$

ovvero in forma matriciale

$$23.43) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix} = \bar{C} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \mathcal{A}_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \dots \\ \mathcal{A}_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \end{pmatrix}$$

dove la matrice \bar{C} e le pulsazioni normali $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ dipendono esclusivamente dalle matrici **23.14** e **23.15**, mentre le costanti $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ e $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ devono essere determinate in base alle condizioni iniziali.

Si noti che la soluzione **23.42** è rappresentata da una configurazione oscillante, in accordo con l'ipotesi **23.4**.

23.5. Metodo pratico. Vediamo ora un metodo pratico per ricavare le soluzioni **23.43**. Cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$23.44) q_k = \mathcal{B}_k \sin(\omega t + \varphi) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Sostituendo le **23.44** nella **23.18** si ha

$$-\sum_{k=1}^n (g_{hk}|_{C_0} \mathcal{B}_k \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k} \Big|_{C_0} \mathcal{B}_k \sin(\omega t + \varphi) \right) \quad h = 1, 2, \dots, n$$

ovvero, semplificando:

$$23.45) \sum_{k=1}^n \left(g_{hk}|_{c_0} \omega^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k} \Big|_{c_0} \right) \mathcal{B}_k = 0 \quad h = 1, 2, \dots, n$$

E in forma matriciale

$$23.46) \begin{pmatrix} \left(g_{11}|_{c_0} \omega^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_1} \Big|_{c_0} \right) & \left(g_{12}|_{c_0} \omega^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} \Big|_{c_0} \right) & \left(g_{1n}|_{c_0} \omega^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_n} \Big|_{c_0} \right) \\ \left(g_{21}|_{c_0} \omega^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_1} \Big|_{c_0} \right) & \left(g_{22}|_{c_0} \omega^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_2} \Big|_{c_0} \right) & \left(g_{2n}|_{c_0} \omega^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_n} \Big|_{c_0} \right) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(g_{n1}|_{c_0} \omega^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_1} \Big|_{c_0} \right) & \left(g_{n2}|_{c_0} \omega^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_2} \Big|_{c_0} \right) & \left(g_{nn}|_{c_0} \omega^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_n} \Big|_{c_0} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \\ \dots \\ \mathcal{B}_n \end{pmatrix} = 0$$

Affinché il sistema **23.46** non ammetta solo la soluzione banale (che corrisponde alla quiete) bisogna imporre che il suo determinante sia nullo, ottenendo una equazione⁵ di grado n nella incognita ω^2 . Questa equazione fornisce le soluzioni

$$23.47) \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$$

che dovrebbero tra l'altro coincidere con le **23.30** (e questo andrebbe dimostrato). Sostituendo poi ciascuno dei valori **23.47** nel **23.46** si ottengono n sistemi lineari

$$23.47) \begin{pmatrix} \left(g_{11}|_{c_0} \omega_i^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_1} \Big|_{c_0} \right) & \left(g_{12}|_{c_0} \omega_i^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} \Big|_{c_0} \right) & \left(g_{1n}|_{c_0} \omega_i^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_n} \Big|_{c_0} \right) \\ \left(g_{21}|_{c_0} \omega_i^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_1} \Big|_{c_0} \right) & \left(g_{22}|_{c_0} \omega_i^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_2} \Big|_{c_0} \right) & \left(g_{2n}|_{c_0} \omega_i^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_n} \Big|_{c_0} \right) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(g_{n1}|_{c_0} \omega_i^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_1} \Big|_{c_0} \right) & \left(g_{n2}|_{c_0} \omega_i^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_2} \Big|_{c_0} \right) & \left(g_{nn}|_{c_0} \omega_i^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_n} \Big|_{c_0} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{1i} \\ \mathcal{B}_{2i} \\ \dots \\ \mathcal{B}_{ni} \end{pmatrix} = 0$$

con $i = 1, 2, \dots, n$. Risolvendo ciascuno di essi si ottengono le soluzioni

$$23.48) q_k = \sum_{i=1}^n \mathcal{B}_{ki} \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Restano indeterminati gli **sfasamenti** $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ i quali vanno poi determinati in funzione delle condizioni iniziali (presumo).

⁵ Dovrebbe poter essere possibile dimostrare che, stante la definita positività delle **23.15** e **23.16**, allora le soluzioni della equazione caratteristica della matrice in **23.46** sono tutte reali e positive, ma non so come si possa fare.

Appendice 1. Problemi dinamici per l'elemento

A.1.1. Piano di lancio. Si considera la sollecitazione dei pesi introdotta in 11.7. Poiché la sollecitazione ha componenti nulle su ogni piano orizzontale, in base a quanto visto nel paragrafo 10.1 possiamo affermare che

a.1.1) *le componenti orizzontali della quantità di moto sono costanti.*

Si dimostra inoltre che

a.1.2) *il momento totale della quantità di moto rispetto a un asse verticale è nullo.*

Infatti il momento assiale della forza peso rispetto a un qualunque asse verticale a si scrive

$$m_a = \vec{m}(C) = \overline{CP} \times m\vec{g} \cdot \hat{a} = 0$$

Dunque, in base a quanto dimostrato nel paragrafo 10.1, il momento assiale della quantità di moto rispetto all'asse a è nullo.

a.1.3) *l'energia dell'elemento si conserva.*

Infatti la sollecitazione dei pesi è una sollecitazione conservativa, di potenziale 11.19, e dunque vale il teorema dimostrato nel paragrafo 11.5.

Si dimostra inoltre che

a.1.4) *il moto dell'elemento si sviluppa tutto su un piano detto 'piano di lancio'.*

Infatti l'equazione fondamentale della dinamica 9.4 si scrive in questo caso

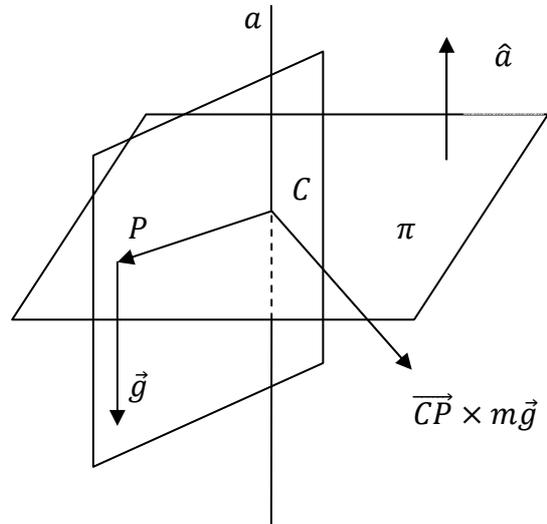
$$a.1.5) \quad m\ddot{\overline{OP}} = m\vec{g}$$

che integrando porge

$$a.1.6) \quad \overline{OP}(t) = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \dot{\overline{OP}}_0 t + \overline{OP}_0$$

Il moto allora si svolge sul piano individuato dai vettori $\dot{\overline{OP}}_0$ e \vec{g} , infatti

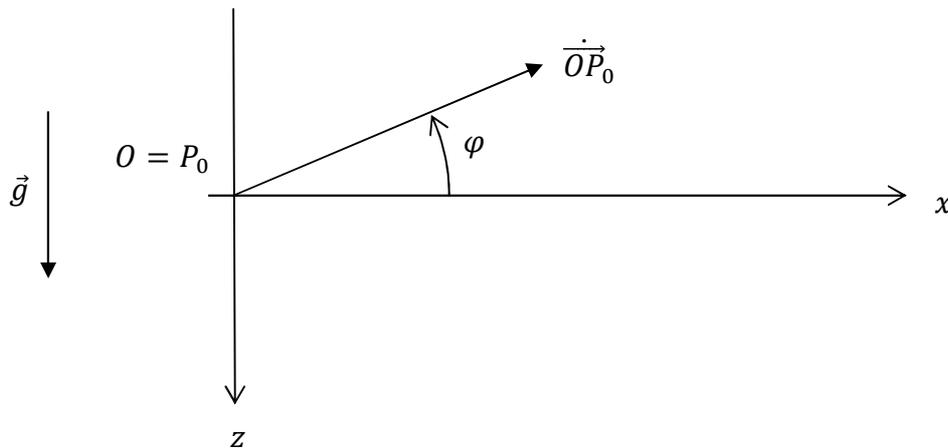
$$\begin{aligned} (\overline{OP}(t) - \overline{OP}_0) \cdot (\dot{\overline{OP}}_0 \times \vec{g}) &= \left(\frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \dot{\overline{OP}}_0 t\right) \cdot (\dot{\overline{OP}}_0 \times \vec{g}) = \\ &= \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \cdot (\dot{\overline{OP}}_0 \times \vec{g}) + \dot{\overline{OP}}_0 t \cdot (\dot{\overline{OP}}_0 \times \vec{g}) = \\ &= \frac{1}{2}t^2 \dot{\overline{OP}}_0 \cdot (\vec{g} \times \vec{g}) + t\vec{g} \cdot (\dot{\overline{OP}}_0 \times \dot{\overline{OP}}_0) = \vec{0} \end{aligned}$$



Dunque $(\vec{OP}(t) - \vec{OP}_0) \perp (\dot{\vec{OP}}_0 \times \vec{g})$ cioè $\vec{OP}(t) - \vec{OP}_0$ è costantemente parallelo al piano individuato dai vettori $\dot{\vec{OP}}_0$ e \vec{g} .

A.1.2. Sistema di riferimento. Il sistema di riferimento comunemente usato nello studio del moto dell'elemento soggetto a sola forza peso presenta

- l'asse z sia concorde col vettore \vec{g} ;
- l'origine sia coincidente con la posizione iniziale P_0 ;
- il piano xy sia il piano di lancio;
- l'asse x formi con $\dot{\vec{OP}}_0$ un angolo non ottuso.



L'angolo φ soddisfa le limitazioni $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ in base all'ultima condizione imposta, e prende il nome di **angolo di lancio**. Proiettando la **a.1.6** sugli assi di questo sistema di riferimento si ha

$$\text{a.1.7) } \begin{cases} x(t) = |\dot{\vec{OP}}_0| t \cos \varphi \\ z(t) = \frac{1}{2} g t^2 - |\dot{\vec{OP}}_0| t \sin \varphi \end{cases}$$

A.1.3. Velocità iniziale nulla. In questo caso il sistema **a.1.7** si scrive

$$\text{a.1.8) } \begin{cases} x(t) = 0 \\ z(t) = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Si osserva allora che

- la traiettoria del moto è il semiasse z ;
- introdotta l'ascissa curvilinea $s = z(t)$ si ha $\ddot{s} = g$ e dunque, in base a quanto visto nel paragrafo **3.13** si ha un moto uniformemente vario; inoltre $\dot{s} = gt$ e dunque, per quanto visto nel paragrafo **3.11** si ha un moto accelerato;
- il teorema di conservazione dell'energia totale porge $\frac{1}{2} m v^2 - mgz = 0$ e dunque

$$\text{a.1.9) } v = \sqrt{2gz}$$

A.1.4. Lancio verticale verso l'alto. Le equazioni del moto si scrivono

$$\text{a.1.9)} \begin{cases} x(t) = 0 \\ z(t) = \frac{1}{2}gt^2 - \left| \vec{OP}_0 \right| t \end{cases}$$

Introdotta l'ascissa curvilinea $s = z(t)$ si ha che

- $\ddot{s}(t) = g$ e dunque il moto è uniformemente vario;
- $\dot{s}(t) = gt - v_0$ quindi

$$\text{a.1.10)} \begin{cases} \dot{s} < 0 \Leftrightarrow t < \frac{v_0}{g} \\ \dot{s} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{g} \\ \dot{s} > 0 \Leftrightarrow t > \frac{v_0}{g} \end{cases}$$

- per $t < \frac{v_0}{g}$ si ha $\dot{s}\ddot{s} < 0$ e dunque la **3.22** ci dice che il moto non è accelerato, e non essendo neanche uniforme (essendo $\ddot{s}(t) = g$), deve essere decelerato;
- per $t = \frac{v_0}{g}$ si ha $\dot{s} = 0$ e dunque si ha una fase di inversione del moto;
- per $t > \frac{v_0}{g}$ si ha $\dot{s}\ddot{s} > 0$ e dunque, per la **3.22**, si ha un moto accelerato;
- la quota massima raggiunta dall'elemento si ha per $t = \frac{v_0}{g}$ e vale $z\left(\frac{v_0}{g}\right) = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$;
- la traiettoria dell'elemento presenta due archi; il primo è il segmento che da O arriva a $\left(0, 0, -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\right)$; il secondo è la semiretta di origine $\left(0, 0, -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\right)$ orientata come l'asse z .

A.1.5. Lancio verticale verso il basso. Le equazioni del moto si scrivono

$$\text{a.1.11)} \begin{cases} x(t) = 0 \\ z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + \left| \vec{OP}_0 \right| t \end{cases}$$

Introdotta l'ascissa curvilinea $s = z(t)$ si ha che

- $\dot{s}(t) = gt + \left| \vec{OP}_0 \right|$ e dunque $\dot{s}\ddot{s} > 0$, cioè, per la **3.22**, il moto è accelerato;
- $\ddot{s}(t) = g$ e dunque il moto è uniformemente vario (paragrafo **3.13**);
- la traiettoria del moto è il semiasse positivo delle z .

A.1.6. Lancio obliquo verso l'alto. Sia $\varphi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e $\left| \vec{OP}_0 \right| \neq 0$, allora

- cercando l'equazione cartesiana della traiettoria si ha

$$\begin{cases} x(t) = |\dot{\vec{OP}}_0| t \cos \varphi \\ z(t) = \frac{1}{2} g t^2 - |\dot{\vec{OP}}_0| t \sin \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x(t)}{|\dot{\vec{OP}}_0| \cos \varphi} \\ z(t) = \frac{1}{2} g \frac{x^2(t)}{|\dot{\vec{OP}}_0|^2 \cos^2 \varphi} - x(t) \tan \varphi \end{cases}$$

e dunque

$$\text{a.1.12) } z = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{|\dot{\vec{OP}}_0|^2 \cos^2 \varphi} - x \tan \varphi$$

- allora la traiettoria dell'elemento è una parabola passante per l'origine e avente concavità verso le z positive, ovvero verso il basso;
- l'intersezione della traiettoria con l'asse delle ascisse si chiama **gittata** e vale

$$\text{a.1.13) } x = \frac{|\dot{\vec{OP}}_0|^2 \sin 2\varphi}{g}$$

- la gittata massima, per un valore assegnato di velocità iniziale, si ha per $2\varphi = \pi/2$, ovvero per $\varphi = \pi/4$;
- il corrispondente valore della gittata massima è

$$\text{a.1.14) } x_M = \frac{|\dot{\vec{OP}}_0|^2}{g}$$

- il modulo della velocità si scrive

$$\text{a.1.14) } v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{g^2 t^2 - 2gt |\dot{\vec{OP}}_0| + |\dot{\vec{OP}}_0|^2 + |\dot{\vec{OP}}_0|^2 \cos^2 \varphi}$$

e decresce per $t < |\dot{\vec{OP}}_0| \frac{\sin \varphi}{g}$, è minima per $t = |\dot{\vec{OP}}_0| \frac{\sin \varphi}{g}$, e poi cresce;

- la quota massima si ha all'istante

$$\text{a.1.15) } \dot{z} = 0 \Leftrightarrow t_M = |\dot{\vec{OP}}_0| \frac{\sin \varphi}{g}$$

e vale

$$\text{a.1.16) } z_M = z(t_M) = -\frac{1}{2} \frac{|\dot{\vec{OP}}_0|^2 \sin^2 \varphi}{g}$$

A.1.7. Velocità minima. Sia assegnato un punto $B \equiv (x_B, z_B)$: si vuole valutare la velocità minima con cui lanciare l'elemento per colpire B (e il corrispondente angolo di lancio). A tale scopo, considerando il caso in cui sia $x_B \neq 0$, si impone il passaggio per B nella equazione cartesiana **a.1.12** ottenendo

$$z_B = \frac{1}{2} g \frac{x_B^2}{|\dot{\vec{O}P_0}|^2 \cos^2 \varphi} - x_B \tan \varphi$$

che considerando le relazioni trigonometriche

$$\tan^2 \varphi = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{1 - \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 \varphi} = 1 + \tan^2 \varphi$$

si riscrive

$$\begin{aligned} z_B = \frac{gx_B^2}{2|\dot{\vec{O}P_0}|^2} + \frac{gx_B^2}{2|\dot{\vec{O}P_0}|^2} \tan^2 \varphi - x_B \tan \varphi &\Leftrightarrow \frac{gx_B^2}{2|\dot{\vec{O}P_0}|^2} \tan^2 \varphi - x_B \tan \varphi + \frac{gx_B^2}{2|\dot{\vec{O}P_0}|^2} - z_B = 0 \\ &\Leftrightarrow \tan^2 \varphi - \frac{2|\dot{\vec{O}P_0}|^2}{gx_B} \tan \varphi + \frac{\frac{gx_B^2}{2|\dot{\vec{O}P_0}|^2} - z_B}{\frac{gx_B^2}{2|\dot{\vec{O}P_0}|^2}} = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\text{a.1.17) } \tan^2 \varphi - \frac{2|\dot{\vec{O}P_0}|^2}{gx_B} \tan \varphi + 1 - \frac{2|\dot{\vec{O}P_0}|^2}{gx_B^2} z_B = 0$$

Dunque affinché esistano valori reali di $\tan \varphi$ che risolvano il problema deve aversi

$$\left(\frac{2|\dot{\vec{O}P_0}|^2}{gx_B} \right)^2 - \left(4 - \frac{8|\dot{\vec{O}P_0}|^2}{gx_B^2} z_B \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{|\dot{\vec{O}P_0}|^4}{g^2 x_B^2} - 1 + \frac{2|\dot{\vec{O}P_0}|^2}{gx_B^2} z_B \geq 0$$

A sinistra della disuguaglianza abbiamo una funzione crescente in $|\dot{\vec{O}P_0}|$: quindi il valore minimo di $|\dot{\vec{O}P_0}|$ per il quale la disuguaglianza è soddisfatta è quello per il quale il primo membro si annulla; la condizione di annullamento si scrive:

$$\text{a.1.18) } |\dot{\vec{O}P_0}|^4 + 2gz_B |\dot{\vec{O}P_0}|^2 - g^2 x_B^2 = 0$$

che facendo la sostituzione $\xi = |\dot{\vec{O}P_0}|^2$ porge

$$\xi^2 + 2gz_B \xi - g^2 x_B^2 = 0 \Leftrightarrow \xi = \frac{-2gz_B \pm 2g\sqrt{z_B^2 + x_B^2}}{2} = g \left(-z_B \pm \sqrt{z_B^2 + x_B^2} \right)$$

Dovendo poi essere $\xi > 0$ si deve prendere il segno positivo, e dunque il valore cercato è

$$\text{a.1.19) } |\dot{\vec{O}P_0}| = \sqrt{g \left(-z_B + \sqrt{z_B^2 + x_B^2} \right)}$$

che sostituito nella **a.1.17** porge

$$\tan^2 \varphi - \frac{2(-z_B + \sqrt{z_B^2 + x_B^2})}{x_B} \tan \varphi + 1 - \frac{2(-z_B + \sqrt{z_B^2 + x_B^2})}{x_B^2} z_B = 0$$

la cui soluzione è

$$\text{a.1.20) } \tan \varphi = \frac{-z_B + \sqrt{z_B^2 + x_B^2}}{x_B}$$

A.1.8. Parabola di sicurezza. Assegnato un valore di velocità iniziale $|\dot{\vec{OP}}_0|$, ci si chiede quale sia il luogo geometrico dei punti del piano di lancio (piano xz) i quali sono raggiunti dall'elemento in corrispondenza di uno e un sol valore dell'angolo di lancio. Ricordando allora l'equazione cartesiana della parabola descritta dall'elemento ordinata rispetto $\tan \varphi$ (equazione **a.1.17**)

$$\text{a.1.21) } \tan^2 \varphi - \frac{2|\dot{\vec{OP}}_0|^2}{gx} \tan \varphi + 1 - \frac{2|\dot{\vec{OP}}_0|^2}{gx^2} z = 0$$

abbiamo che i punti (x, z) i quali possono essere raggiunti in corrispondenza di uno e un sol valore di $\tan \varphi$ sono tutti e soli quelli per i quali l'equazione **a.1.21** in $\tan \varphi$ ammette una ed una sola soluzione, ovvero abbia determinante nullo. Imponendo l'annullamento del determinante si ha

$$\frac{4|\dot{\vec{OP}}_0|^4}{g^2 x^2} - 4 + \frac{8|\dot{\vec{OP}}_0|^2}{gx^2} z = 0$$

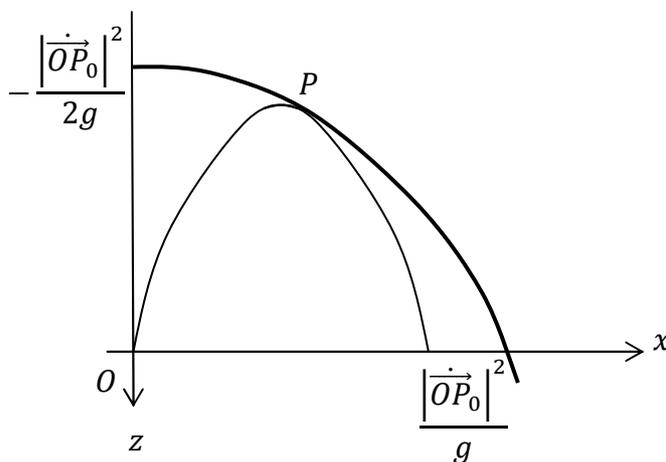
Si ottiene così la parabola

$$\text{a.1.22) } z = \frac{gx^2}{2|\dot{\vec{OP}}_0|^2} - \frac{|\dot{\vec{OP}}_0|^2}{2g}$$

la quale ha concavità verso le z positive e intercetta gli assi nei punti

$$\text{a.1.23) } \left(0, -\frac{|\dot{\vec{OP}}_0|^2}{2g} \right)$$

$$\text{a.1.24) } \left(\frac{|\dot{\vec{OP}}_0|^2}{g}, 0 \right)$$



Il primo punto coincide con la quota massima raggiunta nel lancio verticale; il secondo coincide con la gittata massima del lancio obliquo (equazione **a.1.14**). Si può dimostrare che la parabola **a.1.22** costituisce l'involuppo di tutte le parabole che si ottengono al variare dell'angolo di lancio da $\pi/2$ a π . Ad essa si attribuisce il nome di **parabola di sicurezza**.

A.1.9. Forza elastica. Un elemento di massa \mathcal{M} sia soggetto alla forza elastica

$$\text{a.1.25) } \vec{f} = k\vec{PC}$$

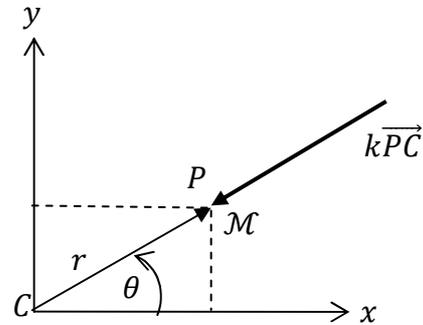
dove P sia la posizione occupata dalla massa. Si vede che si realizza un moto centrale, secondo la definizione del paragrafo **3.16**, in quanto l'accelerazione

$$\text{a.1.26) } \vec{a} = \frac{k\overline{PC}}{\mathcal{M}}$$

è costantemente parallela al vettore posizione \overline{CP} .
Ne segue che il moto avviene su un piano fisso (moto piano) con velocità areolare costante, secondo quanto dimostrato nel paragrafo suddetto. Si consideri allora il sistema di riferimento $RC(C; x, y, z)$ avente origine in C e piano xy coincidente col piano del moto.

Proiettando su RC l'equazione **a.1.26** si ha

$$\text{a.1.27) } \begin{cases} \ddot{x} + \frac{kx}{\mathcal{M}} = 0 \\ \ddot{y} + \frac{ky}{\mathcal{M}} = 0 \end{cases}$$



Si ottiene un sistema omogeneo di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti le quali, secondo la teoria, ammettono le soluzioni

$$\text{a.1.28) } \begin{cases} x = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{\mathcal{M}}}t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{\mathcal{M}}}t\right) \\ y = C_3 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{\mathcal{M}}}t\right) + C_4 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{\mathcal{M}}}t\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = C_1 \sqrt{\frac{k}{\mathcal{M}}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{\mathcal{M}}}t\right) - C_2 \sqrt{\frac{k}{\mathcal{M}}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{\mathcal{M}}}t\right) \\ y = C_3 \sqrt{\frac{k}{\mathcal{M}}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{\mathcal{M}}}t\right) - C_4 \sqrt{\frac{k}{\mathcal{M}}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{\mathcal{M}}}t\right) \end{cases}$$

Imponendo le condizioni iniziali x_0, y_0 e \dot{x}_0, \dot{y}_0 abbiamo per le costanti i valori

$$C_1 = \dot{x}_0 / \sqrt{\frac{k}{\mathcal{M}}} \quad C_2 = x_0$$

$$C_3 = \dot{y}_0 / \sqrt{\frac{k}{\mathcal{M}}} \quad C_4 = y_0$$

e dunque le soluzioni sono

$$\text{a.1.29) } \begin{cases} x = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) + x_0 \cos(\omega t) \\ y = \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin(\omega t) + y_0 \cos(\omega t) \end{cases}$$

dove, per compattezza, si è posto $\sqrt{k/\mathcal{M}} = \omega$. Volendo ora ricavare l'equazione cartesiana della traiettoria possiamo risolvere il sistema **a.1.29** rispetto le due incognite $\sin(\omega t)/\omega$ e $\cos(\omega t)$:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 & x_0 \\ \dot{y}_0 & y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\omega t)/\omega \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sin(\omega t)/\omega \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_0 & x_0 \\ \dot{y}_0 & y_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} y_0 & \dot{y}_0 \\ x_0 & \dot{x}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\dot{x}_0 y_0 - x_0 \dot{y}_0} =$$

$$= \frac{1}{\dot{x}_0 y_0 - x_0 \dot{y}_0} (x y_0 + y \dot{y}_0) \Rightarrow \begin{cases} \sin(\omega t) = \frac{x y_0 + y \dot{y}_0}{\dot{x}_0 y_0 - x_0 \dot{y}_0} \omega \\ \cos(\omega t) = \frac{x_0 x + \dot{x}_0 y}{\dot{x}_0 y_0 - x_0 \dot{y}_0} \end{cases}$$

Quadrando e sommando si ha

$$\begin{aligned} (\dot{x}_0 y_0 - x_0 \dot{y}_0)^2 &= (x y_0 + y \dot{y}_0)^2 \omega^2 + (x_0 x + \dot{x}_0 y)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\dot{x}_0 y_0 - x_0 \dot{y}_0)^2 &= x^2 (y_0^2 \omega^2 + x_0^2) + y^2 (\dot{y}_0^2 \omega^2 + \dot{x}_0^2) + 2(y_0 \dot{y}_0 \omega^2 + x_0 \dot{x}_0) x y \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto la conica

$$\text{a.1.30) } x^2 (y_0^2 \omega^2 + x_0^2) + y^2 (\dot{y}_0^2 \omega^2 + \dot{x}_0^2) + 2(y_0 \dot{y}_0 \omega^2 + x_0 \dot{x}_0) x y - (\dot{x}_0 y_0 - x_0 \dot{y}_0)^2 = 0$$

la cui matrice si scrive

$$\text{a.1.31) } A = \begin{pmatrix} -(\dot{x}_0 y_0 - x_0 \dot{y}_0)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (y_0^2 \omega^2 + x_0^2) & (y_0 \dot{y}_0 \omega^2 + x_0 \dot{x}_0) \\ 0 & (y_0 \dot{y}_0 \omega^2 + x_0 \dot{x}_0) & (\dot{y}_0^2 \omega^2 + \dot{x}_0^2) \end{pmatrix}$$

Il suo determinante vale

$$\begin{aligned} \det A &= -(\dot{x}_0 y_0 - x_0 \dot{y}_0)^2 \left((y_0^2 \omega^2 + x_0^2) (\dot{y}_0^2 \omega^2 + \dot{x}_0^2) - (y_0 \dot{y}_0 \omega^2 + x_0 \dot{x}_0) (y_0 \dot{y}_0 \omega^2 + x_0 \dot{x}_0) \right) = \\ &= -(\dot{x}_0 y_0 - x_0 \dot{y}_0)^2 (y_0^2 \dot{x}_0^2 + x_0^2 \dot{y}_0^2 - 2 y_0 \dot{y}_0 x_0 \dot{x}_0) \omega^2 = -(\dot{x}_0 y_0 - x_0 \dot{y}_0)^4 \omega^2 \end{aligned}$$

In base alla **3.38** si ha dunque

$$\det A = -2\omega^2 |\vec{S}|^4 = -2\omega^2 |\vec{CP} \times \dot{\vec{CP}}|^4 = -2\omega^2 |\vec{CP}(t=0) \times \dot{\vec{CP}}(t=0)|^4$$

E questo valore è nullo se $\vec{CP}(t=0) = 0$ oppure se $\dot{\vec{CP}}(t=0) = 0$ oppure ancora se i due vettori sono paralleli. Escludendo dalla nostra analisi questi tre casi, o una loro combinazione, abbiamo che il rango di A è 3. Allora, essendo

$$\det A_{23,23} = (\dot{x}_0 y_0 - x_0 \dot{y}_0)^2 \omega^2 > 0$$

la traiettoria è una ellisse, il cui centro ha coordinate

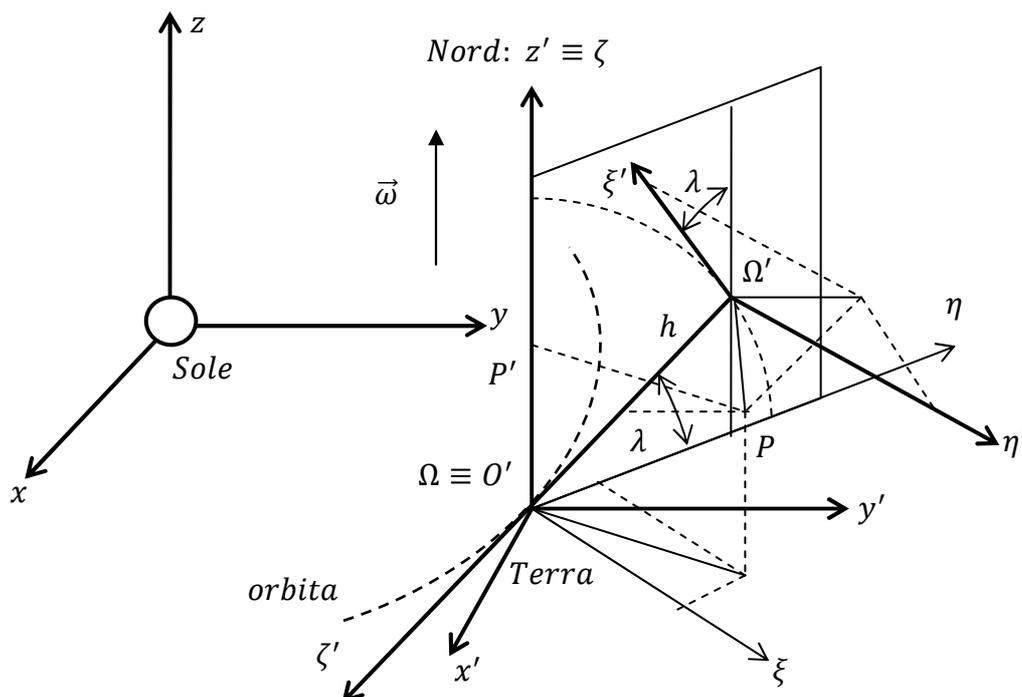
$$\begin{aligned} x &= -\frac{\det A_{23,13}}{\det A_{23,23}} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & (y_0 \dot{y}_0 \omega^2 + x_0 \dot{x}_0) \\ 0 & (\dot{y}_0^2 \omega^2 + \dot{x}_0^2) \end{vmatrix}}{\det A_{23,23}} = 0 \\ y &= -\frac{\det A_{23,12}}{\det A_{23,23}} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & (y_0^2 \omega^2 + x_0^2) \\ 0 & (y_0 \dot{y}_0 \omega^2 + x_0 \dot{x}_0) \end{vmatrix}}{\det A_{23,23}} = 0 \end{aligned}$$

e quindi coincide con il punto C , verso cui converge la forza elastica.

I problemi dinamici per l'elemento vincolato sono sul manoscritto dalla pagina 263 alla pagina 296.

Appendice 2. Caduta di un grave

A.2.1. Sistema di riferimento. Il sistema di riferimento fisso $RC(O; x, y, z)$ abbia centro nel centro del Sole e orientamento invariabile rispetto alle stelle lontane. Questo sistema di riferimento risulta inerziale con ottima approssimazione. Il sistema di riferimento $RC'(O'; x', y', z')$ abbia centro nel centro della Terra e assi con orientamento invariabile rispetto a quelli di RC . Questo sistema di riferimento non è inerziale a causa del moto di rotazione della Terra intorno al Sole; tuttavia è possibile considerarlo inerziale commettendo un errore trascurabile.



Il sistema di riferimento $R\Gamma(\Omega; \xi, \eta, \zeta)$ sia solidale alla Terra e abbia asse ζ coincidente con l'asse di rotazione terrestre; dunque esso si muove di moto rotatorio uniforme rispetto RC' , con velocità angolare $\vec{\omega}$ (velocità angolare di rotazione della Terra intorno al suo asse).

Il sistema di riferimento $R\Gamma'(\Omega'; \xi', \eta', \zeta')$ infine è solidale al sistema $R\Gamma$: esso ha origine individuata dalla latitudine λ e asse ξ' tangente alla superficie del pianeta in Ω' ; l'asse ζ' risulta poi puntare il centro del pianeta.

Per quanto ci riguarda dunque il sistema di riferimento del moto assoluto è RC' , mentre quello mobile è $R\Gamma'$.

A.2.2. Equazioni del moto. Ci interessa allora ricavare l'espressione della accelerazione di un elemento materiale rispetto al sistema di riferimento mobile, ovvero la sua accelerazione relativa \vec{a}_r . In base alla equazione 5.7 sui moti relativi si ha

$$a.2.1) \quad \widetilde{\vec{a}}_r = -\vec{a}_\tau + \vec{a}_a - \vec{a}_c$$

dove si ricorda che il segno ondulato sta ad indicare che $\widetilde{\vec{a}}_r$ è la accelerazione relativa rispetto allo spazio di riferimento fisso, cioè la sua immagine. Si osserva immediatamente che l'accelerazione assoluta, essendo per nostra ipotesi presente la sola forza peso, è fornita dalla espressione della forza di gravitazione 11.13, per la quale

$$\text{a.2.2)} \quad \vec{a}_a = \frac{GM}{O'P^2} \frac{\overline{PO'}}{O'P}$$

essendo G la costante di gravitazione universale e \mathcal{M} la massa terrestre. Il primo addendo invece, l'accelerazione di trascinamento, in base alla **5.5** si scrive

$$\vec{a}_\tau = \vec{a}_{O'} + \frac{d\vec{\omega}_\tau(t)}{dt} \times \overline{O'P} + \vec{\omega}_\tau \times (\vec{\omega}_\tau \times \overline{O'P})$$

dove la velocità angolare di trascinamento $\vec{\omega}_\tau$ è la velocità angolare $\vec{\omega}$ di rotazione della Terra intorno al suo asse, la quale è costante; e dove $\vec{a}_{O'}$ è l'accelerazione assoluta di O' (che vale zero), dunque

$$\text{a.2.3)} \quad \vec{a}_\tau = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overline{O'P})$$

dove si intende che P è la posizione dell'elemento materiale. Il terzo addendo rappresenta l'accelerazione di Coriolis, che in base alla **5.6** si scrive

$$\text{a.2.4)} \quad \vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$$

Dunque in conclusione abbiamo trovato che l'accelerazione relativa si scrive

$$\text{a.2.5)} \quad \vec{a}_r = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overline{O'P}) + \frac{GM}{O'P^2} \frac{\overline{PO'}}{O'P} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$$

Calcoliamo ora il doppio prodotto vettoriale, in cerca di una scrittura più semplice. Si ha

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overline{O'P}) = \vec{\omega} \times \begin{pmatrix} \hat{e}'_1 & \hat{e}'_2 & \hat{e}'_3 \\ 0 & 0 & \omega \\ x'_P & y'_P & z'_P \end{pmatrix} = \vec{\omega} \times \begin{pmatrix} -\omega y'_P \\ \omega x'_P \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{e}'_1 & \hat{e}'_2 & \hat{e}'_3 \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y'_P & \omega x'_P & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 x'_P \\ -\omega^2 y'_P \\ 0 \end{pmatrix}$$

Detto allora P' la proiezione di P sull'asse $z' \equiv \zeta$, abbiamo

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overline{O'P}) = -\omega^2 \overline{P'P}$$

e dunque la **a.2.5** si scrive

$$\text{a.2.6)} \quad \vec{a}_r = \omega^2 \overline{P'P} + \frac{GM}{O'P^2} \frac{\overline{PO'}}{O'P} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$$

Dunque la forza a cui è complessivamente soggetto l'elemento di massa m , somma della forza effettiva (forza gravitazionale) e della forza apparente, si scrive

$$\text{a.2.7)} \quad \vec{f} = m\vec{a}_r = m\omega^2 \overline{P'P} + \frac{GMm}{O'P^2} \frac{\overline{PO'}}{O'P} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r$$

dove il primo addendo costituisce la **forza centrifuga**, il secondo è la forza gravitazionale che la Terra esercita sull'elemento, il terzo rappresenta la **forza di Coriolis**. Proiettando l'equazione vettoriale **a.2.6** sugli assi di $R\Gamma(\Omega; \xi, \eta, \zeta)$ abbiamo

$$\text{a.2.8) } \begin{cases} \ddot{\xi} = \left(\omega^2 - \frac{GM}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \xi + 2\omega\dot{\eta} \\ \ddot{\eta} = \left(\omega^2 - \frac{GM}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \eta - 2\omega\dot{\xi} \\ \ddot{\zeta} = -\frac{GM}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} \zeta \end{cases}$$

dove si è calcolato per il terzo addendo

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_r = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1 & \tilde{\varepsilon}_2 & \tilde{\varepsilon}_3 \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{\xi} & \dot{\eta} & \dot{\zeta} \end{pmatrix} = (\tilde{\varepsilon}_1 \quad \tilde{\varepsilon}_2 \quad \tilde{\varepsilon}_3) \begin{pmatrix} -\omega\dot{\eta} \\ \omega\dot{\xi} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per proiettare la **a.2.6** sugli assi di $R\Gamma'(\Omega'; \xi', \eta', \zeta')$ cerchiamo le relazioni fra i versori di $R\Gamma'$ e $R\Gamma$:

$$\text{a.2.9) } \begin{cases} \hat{\varepsilon}'_1 = -\sin \lambda \hat{\varepsilon}_2 + \cos \lambda \hat{\varepsilon}_3 \\ \hat{\varepsilon}'_2 = \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}'_3 = -\cos \lambda \hat{\varepsilon}_2 - \sin \lambda \hat{\varepsilon}_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}'_1 \\ \hat{\varepsilon}'_2 \\ \hat{\varepsilon}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \lambda & \cos \lambda \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \lambda & -\sin \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_3 \end{pmatrix}$$

che invertendo la matrice si scrive anche

$$\text{a.2.10) } \begin{cases} \hat{\varepsilon}_1 = \hat{\varepsilon}'_2 \\ \hat{\varepsilon}_2 = -\sin \lambda \hat{\varepsilon}'_1 - \cos \lambda \hat{\varepsilon}'_3 \\ \hat{\varepsilon}_3 = \cos \lambda \hat{\varepsilon}'_1 - \sin \lambda \hat{\varepsilon}'_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sin \lambda & 0 & -\cos \lambda \\ \cos \lambda & 0 & -\sin \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}'_1 \\ \hat{\varepsilon}'_2 \\ \hat{\varepsilon}'_3 \end{pmatrix}$$

Essendo poi

$$\text{a.2.11) } \overline{\Omega'P} = \overline{\Omega'O'} + \overline{O'P} = (0 \quad -h \cos \lambda \quad -h \sin \lambda) \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}'_1 \\ \hat{\varepsilon}'_2 \\ \hat{\varepsilon}'_3 \end{pmatrix} + (\xi \quad \eta \quad \zeta) \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_3 \end{pmatrix}$$

dove si è posto

$$\text{a.2.12) } \overline{\Omega'O'} = h$$

Allora sostituendo la **a.2.10** nella **a.2.11** si ha

$$\overline{\Omega'P} = (0 \quad -h \cos \lambda \quad -h \sin \lambda) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sin \lambda & 0 & -\cos \lambda \\ \cos \lambda & 0 & -\sin \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}'_1 \\ \hat{\varepsilon}'_2 \\ \hat{\varepsilon}'_3 \end{pmatrix} + (\xi \quad \eta \quad \zeta) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sin \lambda & 0 & -\cos \lambda \\ \cos \lambda & 0 & -\sin \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}'_1 \\ \hat{\varepsilon}'_2 \\ \hat{\varepsilon}'_3 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\overline{\Omega'P} = (-\eta \sin \lambda + \zeta \cos \lambda \quad \xi \quad -\eta \cos \lambda - \zeta \sin \lambda + h) \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}'_1 \\ \hat{\varepsilon}'_2 \\ \hat{\varepsilon}'_3 \end{pmatrix}$$

e quindi, in definitiva, si ha

$$\text{a.2.13)} \begin{cases} \xi' = -\eta \sin \lambda + \zeta \cos \lambda \\ \eta' = \xi \\ \zeta' = -\eta \cos \lambda - \zeta \sin \lambda + h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \lambda & \cos \lambda \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \lambda & -\sin \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\text{a.2.14)} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \lambda & \cos \lambda \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \lambda & -\sin \lambda \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' - h \end{pmatrix}$$

che ricorrendo alla matrice inversa già calcolata si scrive

$$\text{a.2.15)} \begin{cases} \xi = \eta' \\ \eta = -\xi' \sin \lambda - (\zeta' - h) \cos \lambda \\ \zeta = \xi' \cos \lambda - (\zeta' - h) \sin \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sin \lambda & 0 & -\cos \lambda \\ \cos \lambda & 0 & -\sin \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' - h \end{pmatrix}$$

Derivando si ottiene poi

$$\text{a.2.16)} \begin{cases} \dot{\xi} = \dot{\eta}' \\ \dot{\eta} = -\dot{\xi}' \sin \lambda - \dot{\zeta}' \cos \lambda \\ \dot{\zeta} = \dot{\xi}' \cos \lambda - \dot{\zeta}' \sin \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\xi} = \ddot{\eta}' \\ \ddot{\eta} = -\ddot{\xi}' \sin \lambda - \ddot{\zeta}' \cos \lambda \\ \ddot{\zeta} = \ddot{\xi}' \cos \lambda - \ddot{\zeta}' \sin \lambda \end{cases}$$

Sostituendo infine le **a.2.15**, **a.2.16** nelle **a.2.8** si ha

$$\text{a.2.17)} \begin{cases} \ddot{\eta}' = \left(\omega^2 - \frac{GM}{(\eta'^2 + \xi'^2 + (\zeta' - h)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \eta' - 2\omega(\dot{\xi}' \sin \lambda + \dot{\zeta}' \cos \lambda) \\ -\ddot{\xi}' \sin \lambda - \ddot{\zeta}' \cos \lambda = \left(\omega^2 - \frac{GM}{(\eta'^2 + \xi'^2 + (\zeta' - h)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) (-\xi' \sin \lambda - (\zeta' - h) \cos \lambda) - 2\omega \dot{\eta}' \\ \ddot{\xi}' \cos \lambda - \ddot{\zeta}' \sin \lambda = -\frac{GM}{(\eta'^2 + \xi'^2 + (\zeta' - h)^2)^{\frac{3}{2}}} (\xi' \cos \lambda - (\zeta' - h) \sin \lambda) \end{cases}$$

Dove, per le **a.2.15**, si è considerato che

$$\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= \eta'^2 + (-\xi' \sin \lambda - (\zeta' - h) \cos \lambda)^2 + (\xi' \cos \lambda - (\zeta' - h) \sin \lambda)^2 = \\ &= \eta'^2 + (\xi'^2 \sin^2 \lambda + (\zeta' - h)^2 \cos^2 \lambda + \xi'(\zeta' - h)2 \sin \lambda \cos \lambda) + \\ &\quad + (\xi'^2 \cos^2 \lambda + (\zeta' - h)^2 \sin^2 \lambda - 2 \sin \lambda \cos \lambda \xi'(\zeta' - h)) = \\ &= \eta'^2 + \xi'^2 + (\zeta' - h)^2 \end{aligned}$$

Il **a.2.17** costituisce il sistema da integrare per ottenere la legge del moto rispetto al sistema di riferimento $R\Gamma'(\Omega'; \xi', \eta', \zeta')$.

A.2.3. Forza peso. Nella espressione **a.2.7** la somma dei primi due addendi

$$a.2.18) \vec{p} = m \left(\omega^2 \overrightarrow{P'P} + \frac{GM}{PO'^2} \overrightarrow{PO'} \right)$$

prende il nome di forza peso, e definisce la sollecitazione dei pesi introdotta in **11.17**. Il termine in parentesi ha le dimensioni di una accelerazione e si indica

$$a.2.18) \vec{g} = \omega^2 \overrightarrow{P'P} + \frac{GM}{PO'^2} \overrightarrow{PO'}$$

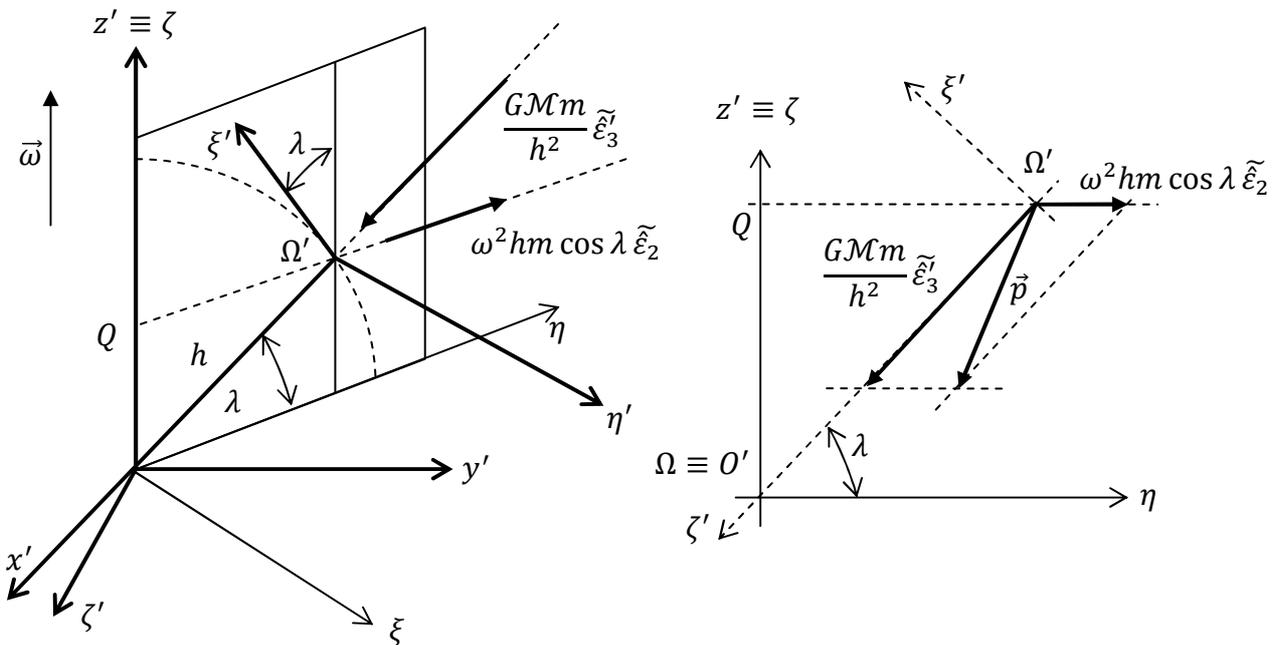
prendendo il nome di **accelerazione gravitazionale**. La forza peso è la somma della forza centrifuga e della forza di attrazione gravitazionale che la Terra esercita sull'elemento materiale; essa costituisce la forza complessiva agente su un elemento in quiete.

La forza peso definisce la **direzione verticale** sulla superficie terrestre, ovvero quella direzione individuata dal **filo a piombo**¹ la quale assume una importanza cruciale in tutte le applicazioni ingegneristiche in cui si considerino oggetti in quiete.

E' immediato osservare che la direzione verticale non punta il centro del pianeta; in particolare se assumiamo che la massa occupa – in quiete – la posizione Ω' , allora la forza peso si scrive

$$a.2.19) \vec{p} = m \left(\omega^2 h \cos \lambda \tilde{\epsilon}_2 + \frac{GM}{h^2} \tilde{\epsilon}_3 \right)$$

e dunque la sua direzione giace sul piano $\xi'\zeta'$ ma si discosta dalla direzione di ζ' , deviato verso il piano equatoriale.



Vediamo ora quale è il valore dei due addendi della accelerazione gravitazionale **a.2.18**. Per le costanti in gioco si ha intanto

¹ Strumento utilizzato in edilizia, costituito da un peso metallico appeso a un filo.

$$\text{a.2.20) } \begin{cases} G = 6,637 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \\ \mathcal{M} = 5,966 \cdot 10^{24} kg \\ h = 6,371 \cdot 10^6 m \\ \omega = 7,28 \cdot 10^{-5} s^{-1} \end{cases}$$

dove si è assunto per h il valore medio del raggio terrestre. Allora la **a.2.18** si scrive

$$\text{a.2.18) } \vec{g} = 0,33 \cdot 10^{-1} \frac{m}{s^2} \cos \lambda \tilde{\epsilon}_2 + 9,75 \frac{m}{s^2} \tilde{\epsilon}_3$$

Si vede dunque che la componente centrifuga dell'accelerazione gravitazionale, il cui valore massimo si ha per $\lambda = 0$ (equatore), rimane un termine di almeno due ordini di grandezza inferiori rispetto all'addendo dovuto alla forza di attrazione terrestre. In molte applicazioni si assume per \vec{g} un valore fisso, definito **valore normale**, il quale coincide con il valore assunto dalla **a.2.18** per $\lambda = 45^\circ$ e vale

$$\text{a.2.19) } \vec{g}_N = 0,23 \cdot 10^{-1} \frac{m}{s^2} \tilde{\epsilon}_2 + 9,75 \frac{m}{s^2} \tilde{\epsilon}_3$$

Il modulo dell'accelerazione gravitazionale si può ricavare proiettando la **a.2.18** sugli assi $\xi' \zeta'$ ottenendo

$$\text{a.2.20) } \vec{g} = -0,33 \cdot 10^{-1} \frac{m}{s^2} \sin \lambda \cos \lambda \tilde{\epsilon}_1 + (9,75 - 0,33 \cdot 10^{-1} \cos^2 \lambda) \frac{m}{s^2} \tilde{\epsilon}_3$$

che nel caso dell'accelerazione normale **a.2.19** porge

$$\text{a.2.21) } \vec{g}_N = -0,0165 \frac{m}{s^2} \tilde{\epsilon}_1 + 9,7335 \frac{m}{s^2} \tilde{\epsilon}_3$$

con modulo² di valore

$$\text{a.2.22) } g_N = 9,8061$$

A.2.4. Deviazione verso Est. Riprendiamo il sistema **a.2.17** e trascuriamo l'effetto della accelerazione centrifuga, ponendo $\omega = 0$ nel termine dovuto alla accelerazione centrifuga. Si ottiene il sistema

$$\text{a.2.23) } \begin{cases} \ddot{\eta}' = - \frac{GM}{(\eta'^2 + \xi'^2 + (\zeta' - h)^2)^{\frac{3}{2}}} \eta' - 2\omega(\dot{\xi}' \sin \lambda + \dot{\zeta}' \cos \lambda) \\ -\ddot{\xi}' \sin \lambda - \ddot{\zeta}' \cos \lambda = - \frac{GM}{(\eta'^2 + \xi'^2 + (\zeta' - h)^2)^{\frac{3}{2}}} (-\dot{\xi}' \sin \lambda - (\dot{\zeta}' - h) \cos \lambda) - 2\omega\dot{\eta}' \\ \ddot{\xi}' \cos \lambda - \ddot{\zeta}' \sin \lambda = - \frac{GM}{(\eta'^2 + \xi'^2 + (\zeta' - h)^2)^{\frac{3}{2}}} (\dot{\xi}' \cos \lambda - (\dot{\zeta}' - h) \sin \lambda) \end{cases}$$

Come ulteriore semplificazione si assuma che la accelerazione dovuta al campo gravitazionale terrestre sia costante, cioè sia

² In realtà facendo il calcolo del modulo della **a.2.21** si ottiene un valore inferiore, probabilmente a causa dei troncamenti e dei valori usati per le costanti in **a.2.20**.

$$\text{a.2.24)} \frac{GM}{\eta'^2 + \xi'^2 + (\zeta' - h)^2} = g$$

Allora il **a.2.23** si scrive

$$\text{a.2.25)} \begin{cases} \ddot{\eta}' = -\frac{g}{(\eta'^2 + \xi'^2 + (\zeta' - h)^2)^{\frac{3}{2}}} \eta' - 2\omega(\dot{\xi}' \sin \lambda + \dot{\zeta}' \cos \lambda) \\ -\ddot{\xi}' \sin \lambda - \ddot{\zeta}' \cos \lambda = -\frac{g}{(\eta'^2 + \xi'^2 + (\zeta' - h)^2)^{\frac{3}{2}}} (-\dot{\xi}' \sin \lambda - (\dot{\zeta}' - h) \cos \lambda) - 2\omega\dot{\eta}' \\ \ddot{\xi}' \cos \lambda - \ddot{\zeta}' \sin \lambda = -\frac{g}{(\eta'^2 + \xi'^2 + (\zeta' - h)^2)^{\frac{3}{2}}} (\dot{\xi}' \cos \lambda - (\dot{\zeta}' - h) \sin \lambda) \end{cases}$$

Si assuma poi costante la distanza $(\eta'^2 + \xi'^2 + (\zeta' - h)^2)^{\frac{1}{2}}$ ponendola pari a h ; si ottiene allora

$$\text{a.2.26)} \begin{cases} \ddot{\eta}' = -\frac{g}{h} \eta' - 2\omega(\dot{\xi}' \sin \lambda + \dot{\zeta}' \cos \lambda) \\ -\ddot{\xi}' \sin \lambda - \ddot{\zeta}' \cos \lambda = -\frac{g}{h} (-\dot{\xi}' \sin \lambda - (\dot{\zeta}' - h) \cos \lambda) - 2\omega\dot{\eta}' \\ \ddot{\xi}' \cos \lambda - \ddot{\zeta}' \sin \lambda = -\frac{g}{h} (\dot{\xi}' \cos \lambda - (\dot{\zeta}' - h) \sin \lambda) \end{cases}$$

Si consideri poi che, essendo h il raggio terrestre, si ha $\zeta' - h \cong -h$ e dunque abbiamo

$$\begin{cases} \ddot{\eta}' = -\frac{g}{h} \eta' - 2\omega(\dot{\xi}' \sin \lambda + \dot{\zeta}' \cos \lambda) \\ -\ddot{\xi}' \sin \lambda - \ddot{\zeta}' \cos \lambda = -\frac{g}{h} (-\dot{\xi}' \sin \lambda + h \cos \lambda) - 2\omega\dot{\eta}' \Leftrightarrow \\ \ddot{\xi}' \cos \lambda - \ddot{\zeta}' \sin \lambda = -\frac{g}{h} (\dot{\xi}' \cos \lambda + h \sin \lambda) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\eta}' = -\frac{g}{h} \eta' - 2\omega(\dot{\xi}' \sin \lambda + \dot{\zeta}' \cos \lambda) \\ -\ddot{\xi}' \sin \lambda - \ddot{\zeta}' \cos \lambda = \frac{g}{h} \dot{\xi}' \sin \lambda - g \cos \lambda - 2\omega\dot{\eta}' \\ \ddot{\xi}' \cos \lambda - \ddot{\zeta}' \sin \lambda = -\frac{g}{h} \dot{\xi}' \cos \lambda - g \sin \lambda \end{cases}$$

Dunque abbiamo

$$\text{a.2.27)} \begin{cases} \ddot{\eta}' = -\frac{g}{h} \eta' - 2\omega(\dot{\xi}' \sin \lambda + \dot{\zeta}' \cos \lambda) \\ -\left(\ddot{\xi}' + \frac{g}{h} \dot{\xi}'\right) \sin \lambda + (-\ddot{\zeta}' + g) \cos \lambda = -2\omega\dot{\eta}' \\ \left(\ddot{\xi}' + \frac{g}{h} \dot{\xi}'\right) \cos \lambda = -(-\ddot{\zeta}' + g) \sin \lambda \end{cases}$$

Sostituendo la terza equazione nella seconda abbiamo

$$\text{a.2.28)} \begin{cases} \ddot{\eta}' = -\frac{g}{h} \eta' - 2\omega(\dot{\xi}' \sin \lambda + \dot{\zeta}' \cos \lambda) \\ \ddot{\zeta}' = g + 2\omega\dot{\eta}' \cos \lambda \\ -\left(\ddot{\xi}' + \frac{g}{h} \dot{\xi}'\right) = (-\ddot{\zeta}' + g) \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} \end{cases}$$

Essendo $h \gg \eta', \xi'$ decido di considerare nulli gli addendi $\frac{\eta'}{h}, \frac{\xi'}{h}$ nella prima e nella terza equazione, ottenendo il sistema

$$\text{a.2.29) } \begin{cases} \ddot{\eta}' = -2\omega(\dot{\xi}' \sin \lambda + \dot{\zeta}' \cos \lambda) \\ \ddot{\zeta}' = g + 2\omega\dot{\eta}' \cos \lambda \\ \ddot{\xi}' = (\dot{\zeta}' - g) \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} \end{cases}$$

Integrando la prima e la terza equazione con le **condizioni iniziali**

$$\text{a.2.30) } \begin{cases} \xi'_0 = \eta'_0 = \zeta'_0 = 0 \\ \dot{\xi}'_0 = \dot{\eta}'_0 = \dot{\zeta}'_0 = 0 \\ t_0 = 0 \end{cases}$$

abbiamo

$$\text{a.2.29) } \begin{cases} \dot{\eta}' = -2\omega(\xi' \sin \lambda + \zeta' \cos \lambda) \\ \dot{\eta}' = \frac{\dot{\zeta}' - g}{2\omega \cos \lambda} \\ \xi' = \left(\zeta' - g \frac{t^2}{2}\right) \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} \end{cases}$$

Sostituendo la seconda e la terza equazione nella prima abbiamo

$$\frac{\dot{\zeta}' - g}{2\omega} = -2\omega \left(\left(\zeta' - g \frac{t^2}{2} \right) \sin^2 \lambda + \zeta' \cos^2 \lambda \right) \Leftrightarrow \dot{\zeta}' - g = -2\omega^2 (2\zeta' - gt^2 \sin^2 \lambda)$$

Si ottiene allora l'equazione differenziale ordinaria a coefficienti costanti non omogenea

$$\text{a.2.30) } \ddot{\zeta}' + 4\omega^2 \zeta' = 2\omega^2 g \sin^2 \lambda t^2 + g$$

Il polinomio caratteristico della omogenea associata ha le soluzioni $\mu_{1,2} = \pm i2\omega$ e dunque il suo integrale generale è dato dal polinomio trigonometrico

$$\text{a.2.31) } p(t) = C_1 \sin(2\omega t) + C_2 \cos(2\omega t)$$

Come soluzione particolare della non omogenea proviamo un polinomio di secondo grado:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f = at^2 + bt + c \\ \dot{f} = 2at + b \Rightarrow 2a + 4\omega^2(at^2 + bt + c) = 2\omega^2 g \sin^2 \lambda t^2 + g \Leftrightarrow \\ \ddot{f} = 2a \\ \Leftrightarrow 4\omega^2 at^2 + 4\omega^2 bt + (4\omega^2 c + 2a) = 2\omega^2 g \sin^2 \lambda t^2 + g \Leftrightarrow \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 4\omega^2 a = 2\omega^2 g \sin^2 \lambda \\ 4\omega^2 b = 0 \\ 4\omega^2 c + 2a = g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{g \sin^2 \lambda}{2} \\ b = 0 \\ c = \frac{g - 2a}{4\omega^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{g \sin^2 \lambda}{2} \\ b = 0 \\ c = \frac{g - g \sin^2 \lambda}{4\omega^2} = g \frac{\cos^2 \lambda}{4\omega^2} \end{cases} \end{aligned}$$

Dunque si è ottenuta la soluzione particolare

$$f = \frac{g \sin^2 \lambda}{2} t^2 + \frac{g \cos^2 \lambda}{4\omega^2}$$

e l'integrale generale della **a.2.30** si scrive

$$\text{a.2.32) } \begin{cases} \zeta'(t) = C_1 \sin(2\omega t) + C_2 \cos(2\omega t) + \frac{g \sin^2 \lambda}{2} t^2 + \frac{g \cos^2 \lambda}{4\omega^2} \\ \dot{\zeta}'(t) = 2\omega C_1 \cos(2\omega t) - 2\omega C_2 \sin(2\omega t) + gt \sin^2 \lambda \end{cases}$$

Per ricavare le costanti di integrazione imponiamo le c.i. **a.2.30**:

$$\begin{cases} \zeta'(0) = C_2 + \frac{g \cos^2 \lambda}{4\omega^2} = 0 \\ \dot{\zeta}'(0) = 2\omega C_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = -\frac{g \cos^2 \lambda}{4\omega^2} \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

dunque, sostituendo i valori delle costanti nella **a.2.32** abbiamo

$$\text{a.2.33) } \begin{cases} \zeta'(t) = -\frac{g \cos^2 \lambda}{4\omega^2} \cos(2\omega t) + \frac{g \sin^2 \lambda}{2} t^2 + \frac{g \cos^2 \lambda}{4\omega^2} \\ \dot{\zeta}'(t) = 2\omega \frac{g \cos^2 \lambda}{4\omega^2} \sin(2\omega t) + gt \sin^2 \lambda \end{cases}$$

Sostituendo la prima delle **a.2.33** nella terza delle **a.2.29** abbiamo

$$\begin{aligned} \xi' &= \left(-\frac{g \cos^2 \lambda}{4\omega^2} \cos(2\omega t) - g \frac{\cos^2 \lambda}{2} t^2 + \frac{g \cos^2 \lambda}{4\omega^2} \right) \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} = \\ &= \left(-\frac{1}{4\omega^2} \cos(2\omega t) - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{4\omega^2} \right) g \frac{\sin \lambda \cos^2 \lambda}{\cos \lambda} = \\ &= (-\cos(2\omega t) - 2\omega^2 t^2 + 1) \frac{g \sin 2\lambda}{8\omega^2} \end{aligned}$$

Sostituendo poi nella prima delle **a.2.29** abbiamo

$$\begin{aligned} \eta' &= -2\omega \left((-\cos(2\omega t) - 2\omega^2 t^2 + 1) \frac{g \sin 2\lambda}{8\omega^2} \sin \lambda + \left(-\frac{g \cos^2 \lambda}{4\omega^2} \cos(2\omega t) + \frac{g \sin^2 \lambda}{2} t^2 + \frac{g \cos^2 \lambda}{4\omega^2} \right) \cos \lambda \right) = \\ &= -2\omega \left((-\cos(2\omega t) - 2\omega^2 t^2 + 1) \frac{g \sin 2\lambda}{8\omega^2} \sin \lambda + \left(-\frac{g \cos^2 \lambda}{4\omega^2 \sin^2 \lambda} \sin^2 \lambda \cos(2\omega t) + \frac{g \sin^2 \lambda}{4\omega^2} 2\omega^2 t^2 + \frac{g \cos^2 \lambda}{4\omega^2 \sin^2 \lambda} \sin^2 \lambda \right) \cos \lambda \right) = \\ &= \left(\cos(2\omega t) - 1 + \frac{\cos^2 \lambda}{\sin^2 \lambda} \cos(2\omega t) - \frac{\cos^2 \lambda}{\sin^2 \lambda} \right) \frac{g \sin 2\lambda}{4\omega} \sin \lambda = \\ &= \left(\frac{\cos(2\omega t)}{\sin^2 \lambda} - \frac{1}{\sin^2 \lambda} \right) \frac{g \sin 2\lambda}{4\omega} \sin \lambda = (\cos(2\omega t) - 1) \frac{g \sin 2\lambda}{4\omega \sin \lambda} = (\cos(2\omega t) - 1) \frac{g \cos \lambda}{2\omega} \end{aligned}$$

e integrando

$$\eta' = \frac{g \cos \lambda}{2\omega} \left(\int_0^t \cos(2\omega \tau) d\tau - \int_0^t d\tau \right) = \frac{g \cos \lambda}{2\omega} \left(\frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} - t \right)$$

In conclusione il sistema **a.2.17**, semplificato³ nel **a.2.29** - con le condizioni iniziali **a.2.30** - è risolto dalle funzioni

$$\text{a.2.34) } \left\{ \begin{array}{l} \xi'(t) = (-\cos(2\omega t) - 2\omega^2 t^2 + 1) \frac{g \sin 2\lambda}{8\omega^2} \\ \eta'(t) = (\sin(2\omega t) - 2\omega t) \frac{g \cos \lambda}{4\omega^2} \\ \zeta'(t) = \left(-\cos(2\omega t) + 2\omega^2 t^2 \frac{\sin^2 \lambda}{\cos^2 \lambda} + 1\right) \frac{g \cos^2 \lambda}{4\omega^2} \end{array} \right.$$

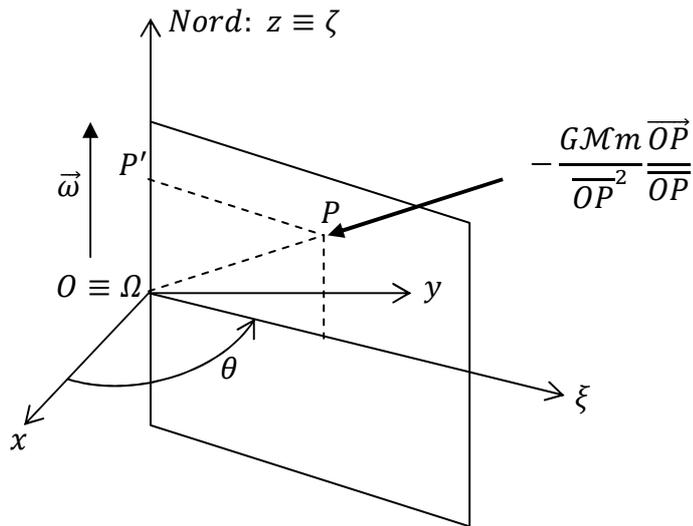
Assegnata una quota di caduta q si risolve in t l'equazione $\zeta'(t) = q$, ricavando il tempo di caduta t_q , che sostituito nella seconda equazione permette di ricavare la **deviazione verso Est** $\eta'(t_q)$.

³ Trascurando – lo ricordo – la forza centrifuga e facendo delle semplificazioni legate alla predominanza di h rispetto al valore delle coordinate del moto

Appendice 3. Meccanica celeste

A.3.1. Satellite stazionario. In questo capitolo ci proponiamo di trovare le condizioni, se esistono, per le quali un satellite in orbita intorno alla Terra sia fermo rispetto alla Terra stessa. Affinché ciò si realizzi il moto assoluto del satellite deve verificare due condizioni:

- a.3.1) l'orbita deve essere circolare;
- a.3.2) la velocità di rotazione del satellite deve essere uguale a quella della Terra.



Sia $RC(O; x, y, z)$ un sistema di riferimento

- a.3.3) con centro coincidente con il baricentro terrestre;
- a.3.4) inerziale;
- a.3.5) con asse z concorde con la velocità angolare $\vec{\omega}$ della Terra per direzione e verso.

Sia invece $R\Gamma(\Omega; x\xi, \eta, \zeta)$ un sistema di riferimento

- a.3.6) solidale alla Terra;
- a.3.7) con asse ζ sovrapposto all'asse z .

Allora si vede che le condizioni **a.3.1**, **a.3.2** sono soddisfatte nel momento in cui P è in quiete nel sistema di riferimento $R\Gamma(\Omega; x\xi, \eta, \zeta)$, ovvero P deve risultare una posizione di equilibrio per il satellite, nel riferimento mobile.

In base alla **a.2.7**, riadattata per la simbologia della presente figura, sappiamo che la forza complessiva (effettiva e apparente) agente sul satellite è

$$\text{a.3.8) } \vec{f} = m\vec{a}_r = m\omega^2\overrightarrow{P'O} + \frac{GMm}{PO^2}\frac{\overrightarrow{PO}}{PO} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r$$

Ma le posizioni di equilibrio sono date dalle soluzioni delle equazione **13.4** che, in base alla **a.3.8**, si scrive

$$\text{a.3.9) } m\omega^2\overrightarrow{P'O} + \frac{GMm}{PO^2}\frac{\overrightarrow{PO}}{PO} = 0$$

Si trova dunque la condizione

$$\text{a.3.10) } \overrightarrow{P'P} = -\frac{GM}{\overline{PO}^2} \frac{\overline{PO}}{\overline{PO}\omega^2}$$

Si vede che condizione necessaria affinché la **a.3.10** sia soddisfatta è che P si muova sul piano xy (il piano equatoriale). In questo caso la **a.3.10** porge

$$\overrightarrow{OP} = \frac{GM}{\overline{PO}^2} \frac{\overline{OP}}{\overline{PO}\omega^2} \Leftrightarrow \overline{PO}^3 = \frac{GM}{\omega^2} \Leftrightarrow \overline{PO} = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}$$

che, in base ai valori **a.2.20** delle costanti, si scrive

$$\text{a.3.11) } \overline{PO} = \sqrt[3]{\frac{6,637 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} 5,966 \cdot 10^{24} kg}{(7,28 \cdot 10^{-5} s^{-1})^2}} = 42117,647 \cdot 10^3 m$$

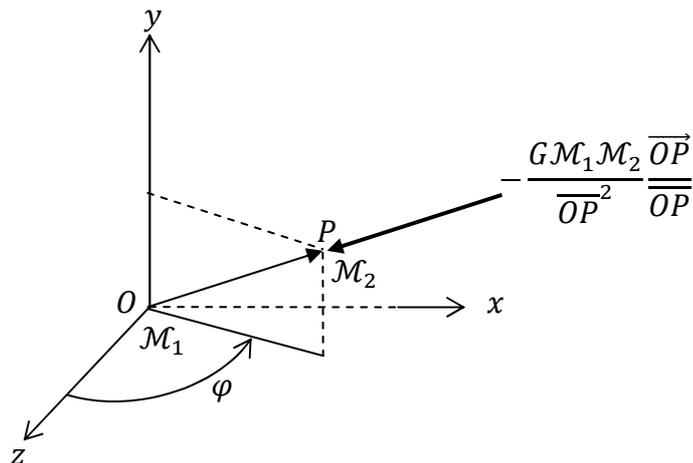
Dunque abbiamo concluso che affinché un satellite terrestre sia immobile rispetto al pianeta devono essere soddisfatte le due condizioni seguenti

a.3.12) l'orbita deve essere equatoriale;

a.3.13) il raggio dell'orbita deve essere di circa 42 mila chilometri.

Un satellite di questo tipo, detto stazionario, può essere utile per il monitoraggio di aree specifiche della superficie del pianeta: ad esempio sono di questo tipo i satelliti per le rilevazioni meteorologiche.

A.3.2. Orbite planetarie. Consideriamo due masse isolate \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 e un sistema di riferimento inerziale $RC(O; x, y, z)$ il quale abbia origine costantemente sovrapposta alla posizione occupata dal baricentro della massa \mathcal{M}_1 .



La sola forza agente sulla massa \mathcal{M}_2 è la forza di attrazione gravitazionale esercitata su di essa dalla massa \mathcal{M}_1 , che per la **11.13** si scrive

$$\text{a.3.14) } \vec{f}(\overline{OP}) = \mathcal{M}_2 \ddot{\overline{OP}} = -\frac{GM_1 M_2}{\overline{OP}^2} \frac{\overline{OP}}{\overline{OP}}$$

Secondo la definizione data nel paragrafo **3.16**, il moto di \mathcal{M}_2 è un moto centrale di centro O , essendo, per la **a.3.14**, l'accelerazione costantemente parallela ad \overrightarrow{OP} . Ne segue che
a.3.15) il moto avviene tutto su un piano (moto piano);
a.3.16) che la velocità areolare **3.37** del moto è costante.

Queste due proprietà sono già state dimostrate in generale per il moto centrale nel paragrafo **3.16**. Ma è immediato dimostrarle di nuovo considerando che dalla **a.3.14** si ha

$$\frac{d(\dot{\overrightarrow{OP}} \times \overrightarrow{OP})}{dt} = \ddot{\overrightarrow{OP}} \times \overrightarrow{OP} = \frac{GM_1}{OP^2} \frac{1}{OP} \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OP} = 0 \Rightarrow \dot{\overrightarrow{OP}} \times \overrightarrow{OP} = \text{costante vettoriale}$$

Questo prova immediatamente che il piano del moto (di giacitura $\dot{\overrightarrow{OP}} \times \overrightarrow{OP}$) è fisso; inoltre sostituendo quanto trovato nella 3.37 si ha la costanza della velocità areolare.

Diciamo allora che il piano del moto (che è definito dalla velocità iniziale) sia il piano xy e cerchiamo l'equazione della traiettoria descritta da \mathcal{M}_2 su di esso.

Per prima cosa si osserva che, essendo nullo il momento della forza agente su \mathcal{M}_2 rispetto al polo O , deve essere costante il momento della quantità di moto di \mathcal{M}_2 rispetto allo stesso polo (vedi paragrafo **10.1**). Il calcolo di tale momento porge

$$\text{a.3.17) } \vec{K}_O = \mathcal{M}_2 \dot{\overrightarrow{OP}} \times \overrightarrow{PO} = \mathcal{M}_2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ -x & -y & 0 \end{vmatrix} = \mathcal{M}_2 (x\dot{y} - y\dot{x}) \hat{k}$$

Introducendo le coordinate polari

$$\text{a.3.18) } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta \end{cases}$$

la **a.3.17** si scrive

$$\text{a.3.19) } \vec{K}_O = \mathcal{M}_2 r^2 \dot{\theta} \hat{k}$$

Detto L il modulo costante del momento della quantità di moto si ha

$$\text{a.3.20) } \dot{\theta} = \frac{L}{\mathcal{M}_2 r^2}$$

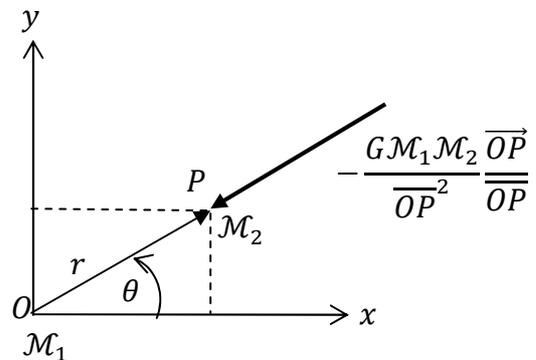
L'energia totale di \mathcal{M}_2 è somma dell'energia cinetica T e dell'energia potenziale gravitazionale Π , ed è data da

$$\text{a.3.21) } E = T + \Pi = \frac{1}{2} \mathcal{M}_2 \left| \dot{\overrightarrow{OP}} \right|^2 - \frac{GM_1 \mathcal{M}_2}{r} = \frac{1}{2} \mathcal{M}_2 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{GM_1 \mathcal{M}_2}{r}$$

Considerando poi la **a.3.20** abbiamo

$$\text{a.3.22) } E = \frac{1}{2} \mathcal{M}_2 \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mathcal{M}_2 r^2} - \frac{GM_1 \mathcal{M}_2}{r}$$

Considerando poi che, per la regola di derivazione delle funzioni composte, si ha



$$\dot{r}(t) = \frac{dr(\theta)}{d\theta} \dot{\theta}$$

che per la **a.3.20** si scrive

$$\text{a.3.23) } \dot{r}(t) = \frac{dr(\theta)}{d\theta} \frac{\dot{L}}{\mathcal{M}_2 r^2}$$

allora sostituendo la **a.3.23** nella **a.3.22** si ha

$$\text{a.3.24) } E = \frac{1}{2} \mathcal{M}_2 \left(\frac{dr(\theta)}{d\theta} \right)^2 \frac{L^2}{\mathcal{M}_2^2 r^4} + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mathcal{M}_2 r^2} - \frac{G\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}{r}$$

Osservando poi che

$$\text{a.3.25) } \frac{d\left(\frac{1}{r(\theta)}\right)}{d\theta} = -\frac{d(r(\theta))}{d\theta} \frac{1}{r^2(\theta)}$$

e sostituendo nella **a.3.25** abbiamo

$$E = \frac{1}{2} \mathcal{M}_2 \left(\frac{d\left(\frac{1}{r(\theta)}\right)}{d\theta} \right)^2 \frac{L^2}{\mathcal{M}_2^2} + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mathcal{M}_2 r^2} - \frac{G\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}{r}$$

che ponendo

$$\text{a.3.26) } u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$$

si scrive

$$\text{a.3.27) } E = \frac{1}{2} \mathcal{M}_2 \left(\frac{du(\theta)}{d\theta} \right)^2 \frac{L^2}{\mathcal{M}_2} + \frac{1}{2} \frac{L^2 u^2(\theta)}{\mathcal{M}_2} - u(\theta) G\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$$

ovvero

$$\text{a.3.28) } \frac{du(\theta)}{d\theta} = \sqrt{-u^2(\theta) + \frac{2G\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^2}{L^2} u(\theta) + \frac{2\mathcal{M}_2 E}{L^2}}$$

Se aggiungo e sottraggo al radicando la quantità $G^2\mathcal{M}_1^2\mathcal{M}_2^4/L^4$ ottengo

$$\text{a.3.29) } \frac{du(\theta)}{d\theta} = \sqrt{\frac{G^2\mathcal{M}_1^2\mathcal{M}_2^4}{L^4} + \frac{2\mathcal{M}_2 E}{L^2} - \left(u(\theta) - \frac{G\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^2}{L^2}\right)^2} \Leftrightarrow \frac{du(\theta)}{\sqrt{\frac{G^2\mathcal{M}_1^2\mathcal{M}_2^4}{L^4} + \frac{2\mathcal{M}_2 E}{L^2} - \left(u(\theta) - \frac{G\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^2}{L^2}\right)^2}} = d\theta$$

Procedo alla integrazione della **a.3.29** ricordando che

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$$

e ottenendo

$$\sin^{-1}\left(\frac{u(\theta) - \frac{GM_1M_2^2}{L^2}}{\sqrt{\frac{G^2M_1^2M_2^4}{L^4} + \frac{2M_2E}{L^2}}}\right) = \theta + c \Rightarrow \frac{u(\theta) - \frac{GM_1M_2^2}{L^2}}{\sqrt{\frac{G^2M_1^2M_2^4}{L^4} + \frac{2M_2E}{L^2}}} = \sin(\theta + c)$$

In definitiva si è trovato che

$$\text{a.3.30) } u(\theta) = \frac{GM_1M_2^2}{L^2} + \sin(\theta + c) \sqrt{\frac{G^2M_1^2M_2^4}{L^4} + \frac{2M_2E}{L^2}}$$

cioè

$$\text{a.3.31) } r(\theta) = \frac{1}{\frac{GM_1M_2^2}{L^2} + \sin(\theta + c) \sqrt{\frac{G^2M_1^2M_2^4}{L^4} + \frac{2M_2E}{L^2}}}$$

La costante dipende dalla condizione iniziale, cioè dalla posizione di \mathcal{M}_2 all'istante iniziale. Diciamo che questa posizione sia quella per la quale la costante è nulla. Dunque l'equazione della traiettoria seguita da \mathcal{M}_2 è definita dall'equazione

$$\text{a.3.32) } r(\theta) = \frac{1}{\frac{GM_1M_2^2}{L^2} + \sin(\theta) \sqrt{\frac{G^2M_1^2M_2^4}{L^4} + \frac{2M_2E}{L^2}}}$$

Ora cerchiamo di definire la natura della curva sopra trovata. A tale ci sarà utile tornare in coordinate cartesiane. A conti fatti la **a.3.32** in coordinate cartesiane si scrive

$$\text{a.3.33) } \frac{G^2M_1^2M_2^4}{L^4}x^2 - \frac{2M_2E}{L^2}y^2 + 2y\sqrt{\frac{G^2M_1^2M_2^4}{L^4} + \frac{2M_2E}{L^2}} - 1 = 0$$

Si vede allora che si è ottenuta una conica. Per capire di quale conica si tratti è necessario considerare la matrice della conica la cui espressione è

$$\text{a.3.34) } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{\frac{G^2M_1^2M_2^4}{L^4} + \frac{2M_2E}{L^2}} \\ 0 & \frac{G^2M_1^2M_2^4}{L^4} & 0 \\ \sqrt{\frac{G^2M_1^2M_2^4}{L^4} + \frac{2M_2E}{L^2}} & 0 & -\frac{2M_2E}{L^2} \end{pmatrix}$$

Il suo determinante vale

$$\text{a.3.35) } \det A = -\left(\frac{G^2M_1^2M_2^4}{L^4}\right)^2 \neq 0$$

Allora il rango è 3 e la conica può essere una iperbole, una parabola o una ellisse. Per capire di quale conica si tratti si calcola

$$\det A_{23,23} = \begin{vmatrix} \frac{G^2 \mathcal{M}_1^2 \mathcal{M}_2^4}{L^4} & 0 \\ 0 & -\frac{2\mathcal{M}_2 E}{L^2} \end{vmatrix} = -\frac{2mE}{L^2} \frac{G^2 \mathcal{M}_1^2 \mathcal{M}_2^4}{L^4}$$

Allora si hanno i tre casi seguenti

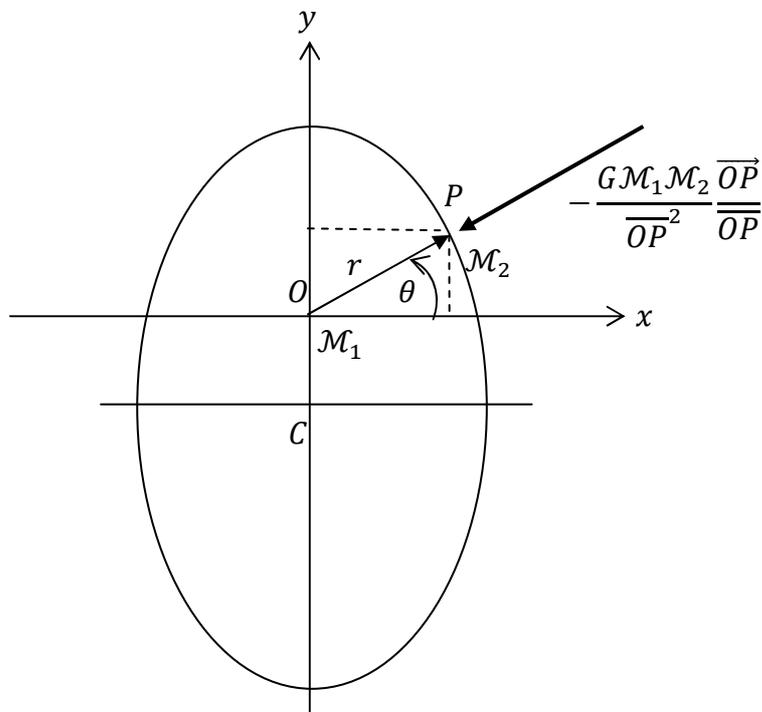
$$\text{a.3.36) } \begin{cases} E < 0 \Rightarrow \det A_{23,23} > 0 \Rightarrow \text{ellisse} \\ E = 0 \Rightarrow \det A_{23,23} = 0 \Rightarrow \text{parabole} \\ E > 0 \Rightarrow \det A_{23,23} < 0 \Rightarrow \text{iperbole} \end{cases}$$

Quindi a bassa energia cinetica si formano delle orbite ellittiche, altrimenti si possono avere o parabole o rami di iperbole (con \mathcal{M}_2 in un fuoco, ma questo non lo dimostro).

Consideriamo ora il caso in cui si abbia un'orbita **ellittica**. Allora le coordinate del centro¹ della ellisse sono date da

$$\text{a.3.37) } \begin{cases} x_C = -\frac{\det A_{23,13}}{\det A_{23,23}} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \frac{G^2 \mathcal{M}_1^2 \mathcal{M}_2^4}{L^4} + \frac{2\mathcal{M}_2 E}{L^2} & -\frac{2\mathcal{M}_2 E}{L^2} \end{vmatrix}}{\det A_{23,23}} = 0 \\ y_C = -\frac{\det A_{23,12}}{\det A_{23,23}} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{G^2 \mathcal{M}_1^2 \mathcal{M}_2^4}{L^4} \\ \frac{G^2 \mathcal{M}_1^2 \mathcal{M}_2^4}{L^4} + \frac{2\mathcal{M}_2 E}{L^2} & 0 \end{vmatrix}}{\det A_{23,23}} = \frac{\sqrt{\frac{G^2 \mathcal{M}_1^2 \mathcal{M}_2^4}{L^4} + \frac{2\mathcal{M}_2 E}{L^2}}}{\frac{2\mathcal{M}_2 E}{L^2}} < 0 \end{cases}$$

Per calcolare la posizione dei fuochi invece si può procedere col metodo degli invarianti dicendo che, nel riferimento canonico, l'equazione dell'ellisse si scrive



¹ Si ricorda che l'energia totale è negativa e dunque il determinante di $\det A_{23,23}$ è positivo. In definitiva la coordinata y del centro è negativa.

$$X^2\alpha + Y^2\beta = 1$$

dove i coefficienti sono le soluzioni della equazione di 2° grado

$$t^2 - \frac{\mathfrak{S}}{\rho}t + \frac{\det A_{23,23}}{\rho^2} = 0$$

con

$$\rho = -\frac{\det A}{\det A_{23,23}}, \quad \mathfrak{S} = a_{11} + a_{22}$$

A questo punto avendosi $\alpha = 1/a^2, \beta = 1/b^2$, ove si è considerata l'equazione scritta come

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

si calcola $c^2 = a^2 - b^2$ e si ha la distanza dei fuochi dal centro. Si trova

$$\text{a.3.38) } c = |y_c| = -\frac{\sqrt{\frac{G^2\mathcal{M}_1^2\mathcal{M}_2^4}{L^4} + \frac{2\mathcal{M}_2E}{L^2}}}{\frac{2\mathcal{M}_2E}{L^2}}$$

L'ellisse dunque appare come quella in figura.

A.3.3. Terra e Sole. Ora particolarizziamo l'equazione **a.3.31** nel caso in cui \mathcal{M}_1 rappresenti il Sole e \mathcal{M}_2 la Terra. Per le masse si ha

$$\text{a.3.39) } \begin{cases} \mathcal{M}_1 = 1,99 \cdot 10^{30} kg \\ \mathcal{M}_2 = 5,98 \cdot 10^{24} kg \end{cases}$$

Per calcolare l'energia cinetica abbiamo bisogno della distanza media Terra-Sole:

$$\text{a.3.40) } D = 1,49 \cdot 10^{11} m$$

e della velocità angolare media di rotazione intorno al Sole

$$\text{a.3.41) } \omega = 1,99 \cdot 10^{-7} \frac{rad}{s}$$

Allora l'energia cinetica vale all'incirca

$$\text{a.3.42) } T = \frac{1}{2}\mathcal{M}_2(\omega D)^2 = 2,63 \cdot 10^{33} J$$

Se assumiamo che il Sole sia molto vicino al centro dell'orbita, allora l'energia potenziale gravitazionale vale all'incirca

$$\text{a.3.43) } \Pi = -\frac{GM_1M_2}{D} = -5,30 \cdot 10^{33} J$$

dove si è considerata la costante di gravitazione

$$G = 6,637 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

Allora l'energia totale è grosso modo

$$\text{a.3.44) } E = -2,67 \cdot 10^{33} J$$

Per il momento della quantità di moto si ha in fine

$$\text{a.3.45) } L = M_2 D^2 \omega = 2,64 \cdot 10^{40} \frac{kg \cdot m^2 \cdot rad}{s}$$

Allora l'equazione dell'orbita in coordinate polari **a.3.31** si scrive in questo caso

$$\text{a.3.46) } r(\theta) = \frac{m}{6,81 \cdot 10^{-12} + 3,16 \cdot 10^{-13} \sin \theta}$$

Vediamo adesso le caratteristiche salienti di questa ellisse:

$$\text{a.3.41) } \begin{cases} r\left(\theta = -\frac{\pi}{2}\right) = 153,988 \cdot 10^6 km \\ r(\theta = 0) = 146,842 \cdot 10^6 km \\ r\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = 140,331 \cdot 10^6 km \end{cases}$$

Secondo questi dati il semiasse maggiore dell'ellisse vale dunque

$$\frac{r\left(\theta = -\frac{\pi}{2}\right) + r\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)}{2} = 147,159 \cdot 10^6 km$$

Esso è lontano dal valore effettivo che, è di $149,57 \cdot 10^6 km$; questo dipende probabilmente dai valori medi introdotti per energia e momento della quantità di moto. Calcoliamo anche la distanza del Sole dal centro dell'ellisse. Si ha

$$\frac{r\left(\theta = -\frac{\pi}{2}\right) - r\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)}{2} = 6,828 \cdot 10^6 km$$

Dunque tale distanza è realmente piccola rispetto ai semiassi dell'ellisse.

Appendice4. Problemi dinamici per il corpo rigido

A.4.1. Disco su piano inclinato scabro. Abbiamo

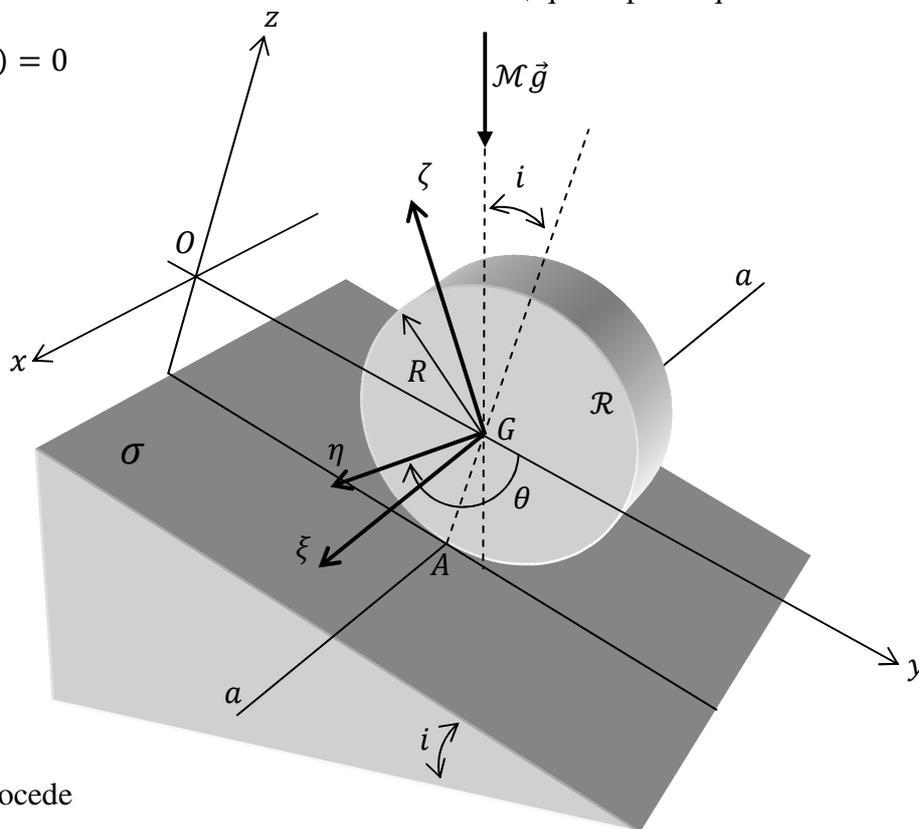
- a.4.1) un piano scabro σ di inclinazione i ;
- a.4.2) un disco rigido e omogeneo \mathcal{R} di raggio R e spessore trascurabile.

Vogliamo determinare gli eventuali moti di \mathcal{R} i quali soddisfino le condizioni seguenti:

- a.4.3) \mathcal{R} appartiene costantemente a un piano fisso verticale che intercetta σ lungo una direttrice di massima pendenza;
- a.4.4) il moto di \mathcal{R} rispetto σ abbia velocità di strisciamento nulla, e il contatto fra le due superficie sia costante¹.

Sistemi di riferimento. Il sistema di riferimento fisso sia $RC(O; x, y, z)$ con origine coincidente con la posizione iniziale del baricentro G di \mathcal{R} e con piano yz coincidente con il piano del moto. Sia $R\Gamma(G; \xi, \eta, \zeta)$ una delle terne centrali di inerzia del disco, quella per la quale risulti

- a.4.5) $\theta(t = 0) = 0$



Strategia. Si procede

- a.4.6) ricavando le incognite cinematiche necessarie e sufficienti a descrivere un moto del tipo cercato;
- a.4.8) definendo le forze attive e vincolari agenti sul corpo;
- a.4.9) si ricava la legge del moto, attraverso le leggi della dinamica o un teorema di conservazione...
- a.4.10) si ricavano le reazioni vincolari in funzione della legge del moto e si verifica che il vincolo sia in grado di esplicitare questo genere di reazione.

¹ Si parla in questo caso di moto di confine.

Discussione. La condizione **a.4.4** ci dice che l'atto di moto nel punto A di contatto fra \mathcal{R} e σ , deve essere nullo; la condizione **a.4.3** ci dice che il moto è piano, di piano zy . Allora l'atto di moto ha asse centrale a passante per A e ortogonale al piano zy e si scrive

$$\text{a.4.11) } \vec{v}(P) = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \times \overline{AP} = \vec{\omega} \times \overline{AP} = \dot{\theta} \hat{e}_1 \times \overline{AP}$$

dove si è espressa la velocità angolare in funzione della anomalia θ fra y e η , presa con segno positiva per le rotazioni antiorarie (quindi nel caso in figura il suo valore è negativo). Ma allora la velocità del baricentro si scrive

$$\vec{v}(G) = \dot{\theta} \hat{e}_1 \times \overline{AG} = \dot{\theta} \hat{e}_1 \times R \hat{e}_3 = -\dot{\theta} R \hat{e}_2 \Rightarrow \dot{y}_G(t) = -\dot{\theta} R$$

dove il segno meno è giustificato dal fatto che nel nostro riferimento l'anomalia decresce, dunque la sua derivata è negativa, mentre la velocità del baricentro è concorde con \hat{e}_2 . Integrando con la condizione iniziale **a.4.5** si ha

$$\text{a.4.12) } y_G(t) = -\theta R$$

Poiché poi si ha costantemente $x_G = z_G = 0$, la posizione del baricentro è completamente determinata dal valore dell'anomalia.

*

La sollecitazione attiva agente su \mathcal{R} è costituita dai pesi, ed è dunque equivalente alla forza

$$\text{a.4.13) } \vec{f}^a = \mathcal{M} \vec{g} = \mathcal{M} g \sin i \hat{e}_2 - \mathcal{M} g \cos i \hat{e}_3$$

applicata nel baricentro (paragrafo **8.6**); la sollecitazione reattiva, essendo nulla la velocità di strisciamento, e avvenendo il contatto in un punto, coincide con quella descritta nel **cap 15** nel caso di un elemento immobile vincolato ad una superficie con attrito, per cui si ha

$$\text{a.4.14) } \left\{ \begin{array}{l} \vec{f}^v = r_x \hat{e}_1 + r_y \hat{e}_2 + r_z \hat{e}_3 \\ r_z \geq 0 \\ \frac{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}{r_z} \leq \varphi_s \end{array} \right.$$

*

Proviamo ora a ricavare la legge del moto $\theta = \theta(t)$ a partire dalla prima equazione della dinamica **9.12**. Si ha

$$\text{a.4.15) } \left\{ \begin{array}{l} 0 = r_x \\ \mathcal{M} \ddot{y}_G = \mathcal{M} g \sin i + r_y \\ 0 = -\mathcal{M} g \cos i + r_z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = r_x \\ -\mathcal{M} \ddot{\theta} R = \mathcal{M} g \sin i + r_y \\ 0 = -\mathcal{M} g \cos i + r_z \end{array} \right.$$

dove si è sostituita la **a.4.12**. Si vede però che questa equazione non può fornire la legge del moto, a causa della presenza delle incognite dinamiche costituite dalle componenti della reazione vincolare. Consideriamo allora la seconda legge (ultime tre del **9.15**):

$$\text{a.4.16) } \left\{ \begin{array}{l} 0 = M_{G\xi}^v(\theta) \\ J_\eta \dot{\theta} = M_{G\eta}^v(\theta) \\ 0 = M_{G\zeta}^v(\theta) \end{array} \right.$$

dove il momento è tutto vincolare, essendo nullo quello della sollecitazione dei pesi rispetto al baricentro. Ma anche questa equazione non è utilizzabile, poiché la reazione vincolare è incognita. Consideriamo allora che, essendo la forza attiva conservativa e quella reattiva a lavoro nullo (è applicata istante per istante a un punto in cui l'atto di moto vale zero), allora vale il teorema di conservazione dell'energia totale **12.21**. Nel nostro caso l'energia cinetica **12.23** si scrive

$$\text{a.4.17)} T = \frac{1}{2} \mathcal{M} \dot{\theta}^2 R^2 + \frac{1}{2} J_{\xi} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \mathcal{M} \dot{\theta}^2 R^2 + \frac{1}{2} \mathcal{M} \dot{\theta}^2 \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \mathcal{M} \left(R^2 + \frac{R^2}{2} \right) = \dot{\theta}^2 \mathcal{M} \frac{3R^2}{4}$$

mentre l'energia potenziale della sollecitazione dei pesi si scrive

$$\text{a.4.18)} \Pi = -\mathcal{M} g y_G \sin i = \mathcal{M} g R \theta \sin i$$

Dunque l'energia totale si scrive

$$\text{a.4.19)} E = T + \Pi = \dot{\theta}^2 \mathcal{M} \frac{3R^2}{4} + \mathcal{M} g R \theta \sin i$$

La condizione di conservazione dell'energia totale si esprime dunque annullando la sua derivata temporale:

$$\text{a.4.20)} \dot{\theta} \ddot{\theta} \mathcal{M} \frac{3R^2}{2} + \mathcal{M} g R \dot{\theta} \sin i = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{2g \sin i}{3R}$$

Integrando si ha la legge oraria

$$\text{a.4.21)} \theta = -\frac{g \sin i}{3R} t^2 + \dot{\theta}_0 t \Leftrightarrow y_G = \frac{g \sin i}{3} t^2 - R \dot{\theta}_0 t$$

dove si è considerata la c.i. **a.4.5**. Data la sostanziale² conservatività della sollecitazione esterna possiamo applicare anche il teorema del lavoro e dell'energia cinetica (paragrafo **12.5**). Per il lavoro elementare, secondo la **12.22** si ha

$$\text{a.4.22)} dL = (\mathcal{M} \vec{g} + \vec{R}) \cdot \vec{v}(A) dt - \mathcal{M} g \sin i \dot{\theta} dt = -\mathcal{M} g \sin i \dot{\theta} dt$$

essendo $\vec{v}(A) = 0$. Il differenziale dell'energia cinetica **a.4.17** è d'altra parte

$$\text{a.4.23)} dT = 2\dot{\theta} \ddot{\theta} \mathcal{M} \frac{3R^2}{4} dt$$

e dunque il citato teorema porge nuovamente l'equazione differenziale **a.4.20**.

*

Sostituendo ora la legge del moto **a.4.21** nella prima legge della dinamica **a.4.15** abbiamo

$$\begin{cases} r_x = 0 \\ r_y = -\frac{\mathcal{M} g \sin i}{3} \\ r_z = \mathcal{M} g \cos i \end{cases}$$

Affinché dunque sia possibile il moto **a.4.21** la reazione vincolare **a.4.15** deve verificare le condizioni **a.4.14**, ovvero deve essere

² Sollecitazione sostanzialmente conservativa: un insieme di forze conservative e di forze a lavoro nullo.

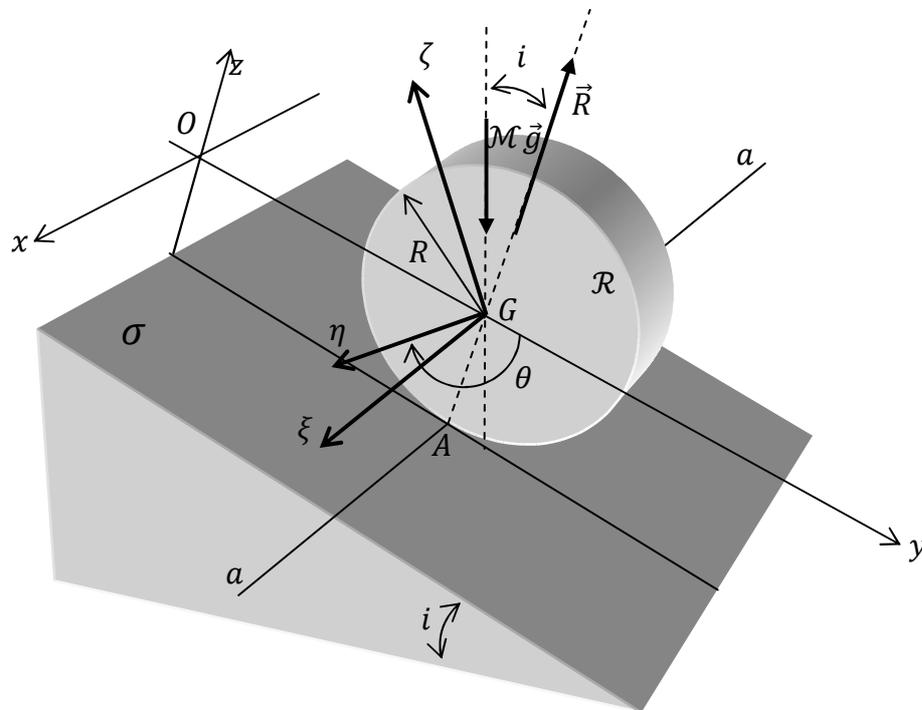
$$a.4.16) \sqrt{\frac{r_x^2 + r_y^2}{r_z}} \leq \varphi_s \Leftrightarrow \frac{\sin i}{3 \cos i} \leq \varphi_s \Leftrightarrow \tan i \leq 3\varphi_s$$

Si può supporre che per inclinazioni più ripide si presenti lo strisciamento fra \mathcal{R} e σ .

A.4.2. Disco su piano inclinato liscio. Con riferimento alla figura si abbia

- a.4.17) un piano liscio σ di inclinazione i ;
- a.4.18) un disco rigido e omogeneo \mathcal{R} di raggio R e spessore trascurabile;
- a.4.19) inizialmente il disco giaccia su un piano che intercetta σ in una retta di massima pendenza;
- a.4.20) l'atto di moto iniziale sia rotatorio con asse di istantanea rotazione coincidente con a ;
- a.4.21) la velocità iniziale del baricentro sia $v_0 \hat{e}_2$.

Vogliamo determinare il moto di \mathcal{R} .



Strategia. Procedo

- a.4.22) facendo delle ipotesi sul moto del disco, così da semplificare la trattazione;
- a.4.23) ricavando il moto coerente con le ipotesi fatte;
- a.4.24) verificando che il moto comporti una reazione vincolare coerente con il tipo di vincolo.

Discussione. Faccio le seguenti ipotesi:

- a.4.25) il moto è di confine³;
- a.4.26) il moto è senza strisciamento;
- a.4.27) il moto avviene tutto nel piano yz .

³ Moto di confine: nel caso di vincoli unilaterali, si parla di moto di confine quando la superficie del corpo è costantemente a contatto con quella del vincolo.

Intanto si considera che se il vincolo è liscio la reazione vincolare in A è tutta normale a σ , e si scrive

$$\text{a.4.28) } \vec{R} = r_z \hat{e}_3$$

Per cui il diagramma delle forze, attiva e vincolare, è quello in figura. Con queste ipotesi sussiste anche qui la relazione **a.4.12**, mentre la prima equazione della dinamica **a.4.15** si scrive

$$\text{a.4.29) } \begin{cases} \ddot{\theta} = -\frac{g \sin i}{R} \\ r_z = \mathcal{M}g \cos i \end{cases}$$

e la seconda equazione **a.4.16** si scrive

$$\text{a.4.30) } J_\xi \dot{\theta} = 0$$

essendo nulli i momenti rispetto al baricentro tanto della reazione vincolare che di quella attiva. Si vede immediatamente allora che le due equazioni differenziali in θ sono compatibili solo nel caso in cui sia nulla l'inclinazione i , che per ipotesi assumiamo diversa da zero. Questo vuol dire che le ipotesi fatte sul moto sono sbagliate.

*

Proviamo allora a far cadere l'ipotesi **a.4.26**: in questo caso non vale la relazione **a.4.12** e la prima equazione della dinamica si scrive

$$\text{a.4.31) } \mathcal{M} \vec{a}_G = \mathcal{M} \vec{g} + \vec{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{M} \ddot{x}_G = 0 \\ \mathcal{M} \dot{y}_G = \mathcal{M}g \sin i \\ \mathcal{M} \ddot{z}_G = r_z - \mathcal{M}g \cos i \end{cases}$$

Si osserva che l'ipotesi **a.4.25** impone che sia costantemente nulla z_G , mentre l'ipotesi **a.4.27** impone che sia costantemente nulla x_G . Ne consegue che la prima equazione è una identità, e la terza va riscritta. Si ottiene dunque il sistema

$$\text{a.4.32) } \begin{cases} \dot{y}_G = g \sin i \\ r_z = \mathcal{M}g \cos i \end{cases}$$

La prima equazione scalare consente di ricavare la legge del moto del baricentro, porgendo

$$\text{a.4.33) } \dot{y}_G = gt \sin i \Rightarrow y_G = \frac{1}{2}gt^2 \sin i$$

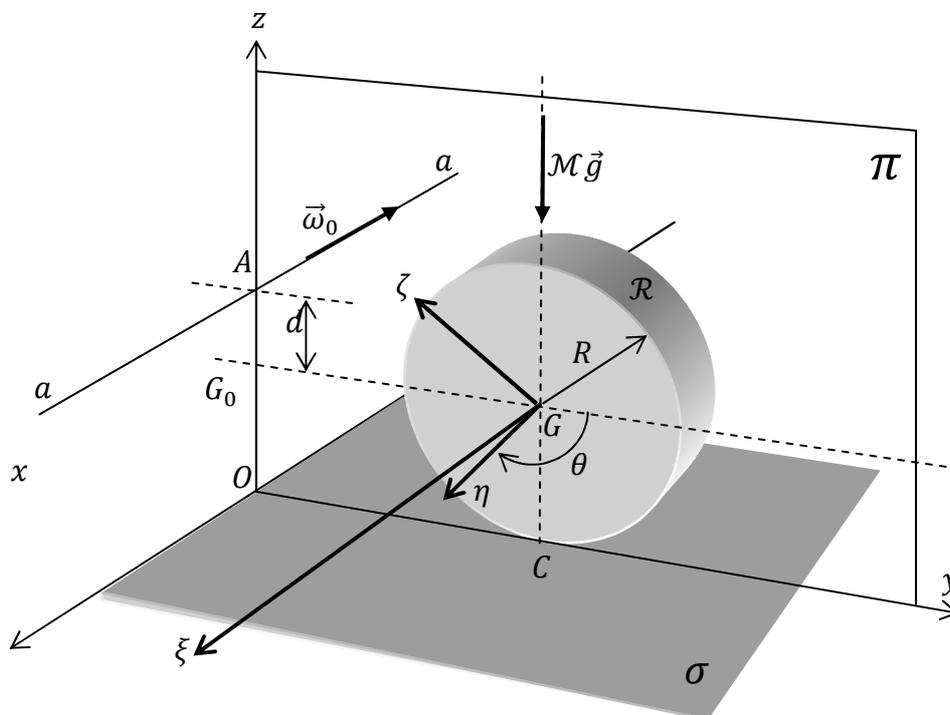
dove ho considerato nulle le condizioni iniziali. Ora però, se il moto è senza strisciamento, la sua descrizione è incompleta senza l'espressione della velocità angolare, che in questo caso è interamente nota, nota che sia l'anomalia θ . La seconda equazione della dinamica (dal sistema **9.15**) è la **a.4.30** anche senza l'ipotesi di strisciamento, e porge

$$\text{a.4.34) } \theta = \theta_0$$

Ovvero, mancando l'attrito con il piano σ la rotazione conserva la sua energia cinetica, come ci si poteva aspettare.

A.4.3. Disco su piano orizzontale scabro. Il disco \mathcal{R} , di spessore trascurabile e raggio R , abbia massa \mathcal{M} e densità variabile in funzione della distanza dal centro.

La posizione iniziale sia
a.4.35) con il baricentro sia in G_0 ;
a.4.36) con il disco tutto contenuto nel piano π .



L'atto di moto iniziale sia

a.4.37) rotatorio con asse di istantanea rotazione a passante per A (vedi figura) e ortogonale a π ;
a.4.38) di velocità angolare $\vec{\omega}_0$.

Sistemi di riferimento. Il sistema di riferimento fisso $RC(O; x, y, z)$ abbia piano yz coincidente col piano π e asse z che contiene la posizione iniziale del baricentro. Il sistema di riferimento solidale al disco, che indico $R\Gamma(G; \xi, \eta, \zeta)$, sia posizionato in modo tale che η sia parallelo a y nell'istante iniziale, ovvero in modo che sia nulla l'anomalia θ , che assumiamo positiva per le rotazioni antiorarie.

Strategia. Faccio delle ipotesi sul tipo di moto, in modo da semplificare le equazioni della dinamica; poi risolvo le equazioni della dinamica semplificate; quindi verifico che le reazioni vincolari corrispondenti a questo moto siano compatibili col tipo di vincolo.

Discussione. Facciamo, ad intuito, le seguenti ipotesi sul moto:

a.4.39) il moto è di confine, cioè il disco non perde mai il contatto con il piano;
a.4.40) il moto è piano, e avviene tutto sul piano π ;
a.4.41) il moto abbia – almeno inizialmente – velocità di strisciamento non nulla.

La terza ipotesi è giustificata dal fatto che l'atto di moto iniziale implica una velocità di strisciamento non nulla

$$a.4.42) \vec{v}(O, t = 0) = \vec{v}(A, t = 0) + \vec{\omega}_0 \times \overline{AO} = \vec{\omega}_0 \times \overline{AO} = -(R + d)|\vec{\omega}_0|\hat{e}_2$$

Si ricorda che, in presenza di strisciamento la reazione vincolare di un piano scabro non è più semplicemente la **a.4.14**, ma la

$$\text{a.4.43) } \left\{ \begin{array}{l} \vec{f}^v = r_x \hat{e}_1 + r_y \hat{e}_2 + r_z \hat{e}_3 \\ \vec{f}^v = -\frac{\vec{v}(C)}{|\vec{v}(C)|} |\vec{f}^v| \\ r_z \geq 0 \\ \frac{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}{r_z} = \varphi_d \end{array} \right.$$

Con le ipotesi che il moto avvenga tutto sul piano yz abbiamo $r_x = 0$ e dunque

$$\text{a.4.44) } \left\{ \begin{array}{l} \vec{f}^v = r_y \hat{e}_2 + r_z \hat{e}_3 \\ \vec{f}^v = -\frac{\vec{v}(C)}{|\vec{v}(C)|} |\vec{f}^v| \\ r_z \geq 0 \\ \frac{|r_y|}{r_z} = \varphi_d \\ r_x = 0 \end{array} \right.$$

La prima equazione cardinale della dinamica **9.12** si scrive

$$\text{a.4.45) } \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M} \dot{y}_G = r_y = \pm r_z \varphi_d \\ 0 = -\mathcal{M}g + r_z \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_G = \pm g \varphi_d \\ r_y = \pm \varphi_d \mathcal{M}g \\ r_z = \mathcal{M}g \end{array} \right.$$

dove si è considerato che $z_G = R - d$ costantemente (per l'ipotesi **a.4.39**) e inoltre che $x_G = 0$ costantemente, per l'ipotesi **a.4.40**. Il segno della equazione differenziale sarà, almeno inizialmente, concorde col segno di $\dot{y}_G(t=0)$, che poi è determinato dal vettore $\vec{\omega}_0$. In particolare è facile verificare che sarà

$$\text{a.4.46) } \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_G = -\text{sgn}(\omega_{0\xi}) g \varphi_d \\ r_y = -\text{sgn}(\omega_{0\xi}) \varphi_d \mathcal{M}g \\ r_z = \mathcal{M}g \end{array} \right.$$

nel caso illustrato in figura dunque varrà il segno positivo.

*

La seconda equazione cardinale della dinamica (dal sistema **9.15**) si scrive

$$\text{a.4.46) } \left\{ \begin{array}{l} J_\xi \dot{\omega}_\xi = M_{G\xi}(y_G, \theta; \dot{y}_G, \dot{\theta}) \\ 0 = M_{G\eta}(y_G, \theta; \dot{y}_G, \dot{\theta}) \\ 0 = M_{G\zeta}(y_G, \theta; \dot{y}_G, \dot{\theta}) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} J_\xi \dot{\omega}_\xi = r_y R \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow J_\xi \ddot{\theta} = r_y R$$

Considerando poi la 4° delle **a.4.44** e la 2° delle **a.4.45** si ha

$$\text{a.4.47) } \ddot{\theta} = -\text{sgn}(\omega_{0\xi}) \frac{\mathcal{M}gR}{J_\xi}$$

Dunque, integrando si ottengono le equazioni del moto

$$a.4.48) \begin{cases} \dot{y}_G = -sgn(\omega_{0\xi})g\varphi_d t + \omega_{0\xi}d \\ \dot{\theta} = -sgn(\omega_{0\xi})\frac{\mathcal{M}gR}{J_\xi}t + \omega_{0\xi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_G = -sgn(\omega_{0\xi})g\varphi_d \frac{t^2}{2} + \omega_{0\xi}dt \\ \theta = -sgn(\omega_{0\xi})\frac{\mathcal{M}gR}{2J_\xi}t^2 + \omega_{0\xi}t \end{cases}$$

Ricordando che $J_\xi = \mathcal{M}R^2/2$, dunque le leggi del moto si scrivono

$$a.4.49) \begin{cases} y_G(t) = -sgn(\omega_{0\xi})g\varphi_d \frac{t^2}{2} + \omega_{0\xi}dt \\ \theta(t) = -sgn(\omega_{0\xi})\frac{g}{R}t^2 + \omega_{0\xi}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y}_G = -sgn(\omega_{0\xi})g\varphi_d t + \omega_{0\xi}d \\ \dot{\theta} = -sgn(\omega_{0\xi})\frac{2g}{R}t + \omega_{0\xi} \end{cases}$$

con la reazione vincolare in **a.4.46**. Se in particolare ammettiamo (come suggerisce la figura) che $\omega_{0\xi} < 0$, allora segue che leggi del moto e reazioni vincolari sono date da

$$a.4.50) \begin{cases} \begin{cases} y_G(t) = g\varphi_d \frac{t^2}{2} + \omega_{0\xi}dt \\ \theta(t) = \frac{g}{R}t^2 + \omega_{0\xi}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y}_G = g\varphi_d t + \omega_{0\xi}d \\ \dot{\theta} = \frac{2g}{R}t + \omega_{0\xi} \end{cases} \\ \begin{cases} r_y = \varphi_d \mathcal{M}g \\ r_z = \mathcal{M}g \end{cases} \end{cases}$$

Questa soluzione vale fino al momento in cui non si annulla la velocità di strisciamento, poiché in quell'istante cambia la natura della reazione vincolare – che non soddisfa più le **a.4.44** – e le equazioni del moto devono essere ricavate di nuovo.

*

Calcoliamo allora l'istante in cui si annulla la velocità di strisciamento in base alla **a.4.50**. La velocità di strisciamento non è altro che il valore dell'atto di moto in C , il quale è dato da

$$\vec{v}(C, t) = \vec{v}(G, t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{GC} = (g\varphi_d t + \omega_{0\xi}d)\hat{e}_2 + \left(\frac{2g}{R}t + \omega_{0\xi}\right)\hat{e}_1 \times (-R)\hat{e}_3$$

cioè

$$a.4.51) \vec{v}(C, t) = \left((\varphi_d + 2)gt + \omega_{0\xi}(R + d)\right)\hat{e}_2$$

La condizione di annullamento della velocità di strisciamento porge allora

$$a.4.52) \bar{t} = -\frac{\omega_{0\xi}(R+d)}{g(\varphi_d+2)}$$

In corrispondenza di questo istante si ha

$$a.4.53) \begin{cases} \dot{y}_G(\bar{t}) = \frac{2d-R\varphi_d}{\varphi_d+2}\omega_{0\xi} \\ \dot{\theta}(\bar{t}) = -\frac{2d-R\varphi_d}{R(\varphi_d+2)}\omega_{0\xi} \end{cases}$$

$$\text{a.4.54) } \begin{cases} y_G(\bar{t}) = \left(\varphi_d \frac{R+d}{2(\varphi_d+2)} + d \right) \frac{\omega_{0\xi}^2(R+d)}{g(\varphi_d+2)} \\ \theta(\bar{t}) = \left(\frac{R+d}{R(\varphi_d+2)} + 1 \right) \frac{\omega_{0\xi}^2(R+d)}{g(\varphi_d+2)} \end{cases}$$

Dunque a seconda del segno di $2d - R\varphi_d$ si hanno tre possibili casi, che esaminiamo uno ad uno.

*

Per $2d - R\varphi_d = 0$ si ha atto di moto nullo. Allora la reazione vincolare è di tipo statico e verifica le limitazioni

$$\text{a.4.55) } \begin{cases} \vec{f}^v = r_x \hat{e}_1 + r_y \hat{e}_2 + r_z \hat{e}_3 \\ r_z \geq 0 \\ \frac{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}{r_z} \leq \varphi_s \end{cases}$$

Si osservi che le equazioni della statica **14.5** si scrivono

$$\text{a.4.56) } \begin{cases} \mathcal{M} \vec{g} + \vec{f}^v = \vec{0} \\ \vec{M}_G^v = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\mathcal{M}g + r_z = 0 \\ r_x = 0 \\ r_y = 0 \\ r_y R = 0 \\ r_y R = 0 \\ r_z 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_x = 0 \\ r_y = 0 \\ r_z = \mathcal{M}g \end{cases}$$

Come si vede la reazione vincolare **a.4.55** soddisfa il sistema della statica **a.4.56**: dunque in questo caso il disco si ferma all'istante \bar{t} di annullamento della velocità di strisciamento.

*

Per $2d - R\varphi_d < 0$ si ha per $t = \bar{t}$ atto di moto

$$\text{a.4.57) } \begin{cases} \dot{y}_G(\bar{t}) < 0 \\ \dot{\theta}(\bar{t}) > 0 \end{cases}$$

Se faccio ora l'ipotesi che il disco proceda senza strisciare anche per gli istanti successivi all'annullamento della velocità di strisciamento, allora vale quanto trovato nel paragrafo **a.4.1**, purché si considerino le c.i. **a.4.55** e una inclinazione $i = 0$; allora vale l'equazione differenziale **a.4.20**, da cui

$$\text{a.4.58) } \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(\bar{t}) \Rightarrow \theta(t) = \dot{\theta}(\bar{t})(t - \bar{t}) + \theta(\bar{t})$$

$$\text{a.4.59) } \dot{y}_G(t) = -R\dot{\theta}(\bar{t}) \Rightarrow y_G(t) = -R\dot{\theta}(\bar{t})(t - \bar{t}) + y_G(\bar{t})$$

che sostituendo le **a.4.53** e **a.4.54** si scrivono

$$\text{a.4.60) } \begin{cases} \theta(t) = -\frac{2d-R\varphi_d}{R(\varphi_d+2)} \omega_{0\xi}(t - \bar{t}) + \left(\frac{R+d}{R(\varphi_d+2)} + 1 \right) \frac{\omega_{0\xi}^2(R+d)}{g(\varphi_d+2)} \\ y_G(t) = -\frac{2d-R\varphi_d}{\varphi_d+2} \omega_{0\xi}(t - \bar{t}) + \left(\varphi_d \frac{R+d}{2(\varphi_d+2)} + d \right) \frac{\omega_{0\xi}^2(R+d)}{g(\varphi_d+2)} \end{cases}$$

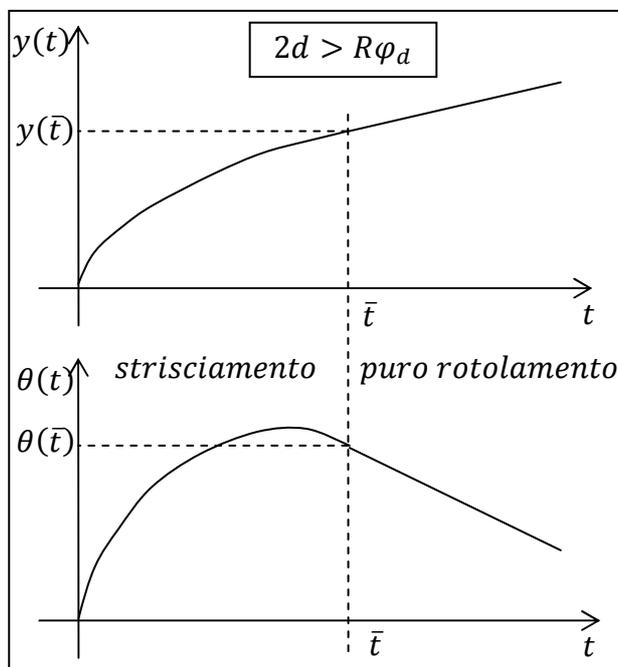
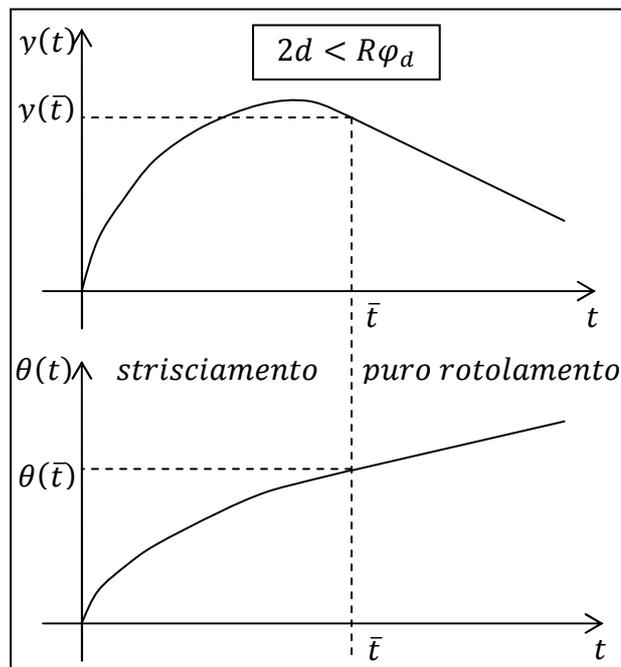
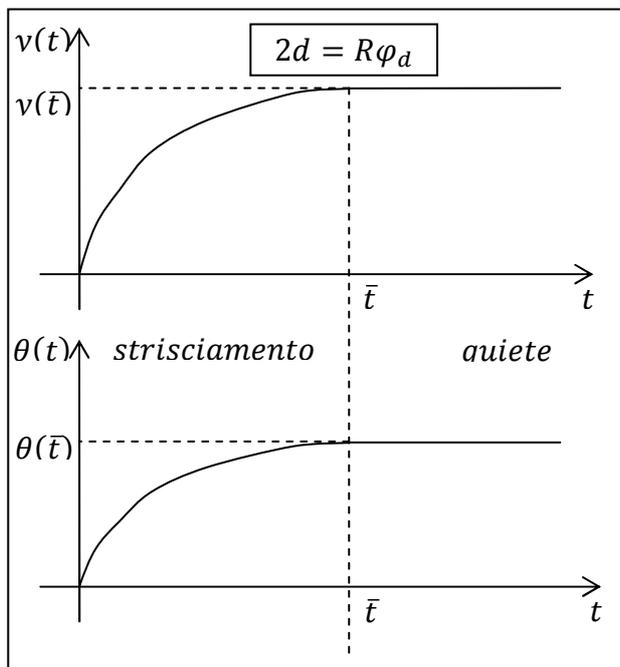
Il caso $2d - R\varphi_d > 0$ vede per $t = \bar{t}$ un atto di moto del tipo

$$\text{a.4.61) } \begin{cases} \dot{y}_G(\bar{t}) > 0 \\ \dot{\theta}(\bar{t}) < 0 \end{cases}$$

mentre le soluzioni, ipotizzando l'assenza di strisciamento, sono ancora le **a.4.60**.

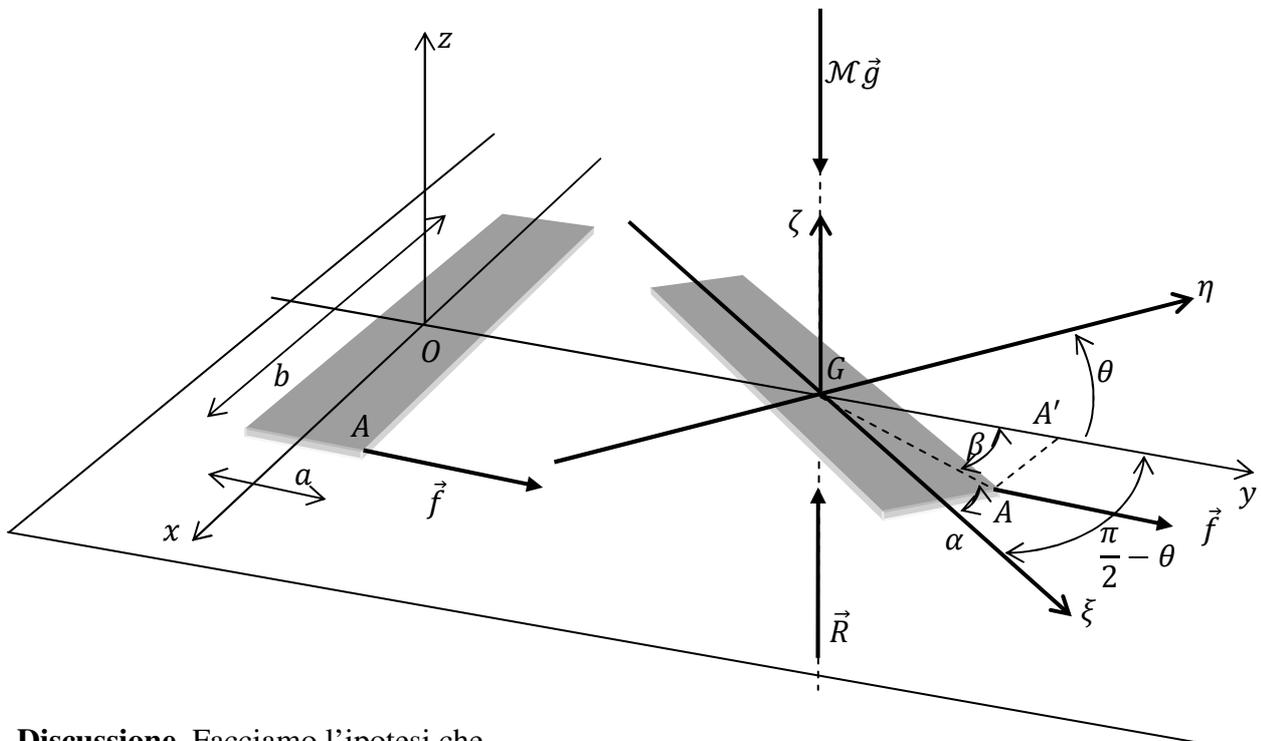
*

Diamo ora una rappresentazione qualitativa dell'andamento delle due funzioni cinematiche, distinguendo, dopo la fine dello strisciamento, i tre casi evidenziati.



A.4.4. Lamina su piano orizzontale liscio. Una lamina di massa \mathcal{M} , di spessore trascurabile, di dimensioni $a \times b$, giace su un piano orizzontale liscio σ . In corrispondenza dello spigolo A è applicata una forza costante, giacente su σ . L'atto di moto iniziale sia nullo.

Sistemi di riferimento. Il sistema di riferimento fisso $RC(O; x, y, z)$ sia la terna centrale della lamina nella sua posizione iniziale. Il sistema mobile $R\Gamma(G; \xi, \eta, \zeta)$ sia la terna centrale della lamina, con asse ζ ortogonale a σ .



Discussione. Facciamo l'ipotesi che

a.4.62) il moto sia di confine, ovvero la lamina aderisca sempre al piano σ .

Il moto allora è piano e possiamo definire l'anomalia θ come l'angolo che l'asse η forma con la direzione orientata definita da y . Sappiamo che il moto piano è descritto univocamente dal moto del baricentro e dall'anomalia.

La reazione vincolare che questo tipo di vincolo è in grado di esplicitare è costituita da una forza verticale \vec{R} applicata in un punto del poligono di appoggio della lamina, poligono che coincide evidentemente con il rettangolo che delimita la lamina stessa.

Il sistema della dinamica **9.15** si scrive

$$a.4.63) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}\ddot{x} = 0 \\ \mathcal{M}\ddot{y} = f \\ 0 = -\mathcal{M}g + R \\ \\ 0 = M_{G\xi}^v \\ 0 = M_{G\eta}^v \\ J_\zeta\ddot{\theta} = f\overline{AA'} \end{array} \right.$$

dove si è considerato che il momento rispetto al baricentro di \vec{f} ha solo componente ζ , mentre quello di \vec{R} non ha componente ζ . Nella terza equazione abbiamo poi considerato che $z = 0$ costantemente (per l'ipotesi **a.4.62**) e dunque la sua derivata seconda è altrettanto nulla.

Dalle equazioni quattro e cinque si deduce che \vec{R} , avendo momento nullo rispetto al baricentro, è applicata al baricentro stesso, evenienza compatibile col tipo di vincolo; dalla terza equazione si ricava inoltre

$$\text{a.4.64) } R = \mathcal{M}g$$

Dalla prima equazione, considerando anche le condizioni iniziali $x = \dot{x} = 0$, si ricava

$$\text{a.4.65) } x(t) = 0$$

Dalla seconda equazione, integrando con le c.i. $y = \dot{y} = 0$, abbiamo

$$\text{a.4.66) } \dot{y} = \frac{f}{\mathcal{M}}t \Rightarrow y = \frac{f}{2\mathcal{M}}t^2$$

Per integrare l'ultima equazione dobbiamo ricavare $\overline{AA'}$. Osservando la figura si trova

$$\text{a.4.67) } \overline{AA'} = \overline{AG} \sin \beta$$

Inoltre considerazioni sugli angoli permettono di scrivere

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \theta - \alpha \Rightarrow \sin \beta = \sin \left(\left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) - \alpha \right) = \\ &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \cos \alpha - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \sin \alpha = \cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha = \\ &= \cos \theta \frac{b}{2\overline{AG}} - \sin \theta \frac{a}{2\overline{AG}} \end{aligned}$$

Quindi la **a.4.68** si scrive

$$\text{a.4.69) } \overline{AA'} = \frac{b}{2} \cos \theta - \frac{a}{2} \sin \theta$$

Allora l'ultima equazione del sistema **a.4.63** porge

$$\text{a.4.70) } \ddot{\theta} = \frac{f}{2J_{\zeta}} (b \cos \theta - a \sin \theta)$$

che non essendo una equazione lineare non è banalmente risolvibile, e forse non ha neanche una soluzione esatta. Tuttavia nel caso in cui i valori dell'anomalia si mantengano prossimi allo zero, si può provare la linearizzazione

$$\text{a.4.71) } \ddot{\theta} + \frac{fa}{2J_{\zeta}} \theta = \frac{fb}{2J_{\zeta}}$$

la cui omogenea ha integrale generale

$$\text{a.4.72) } \theta = C_1 \cos \left(\sqrt{\frac{fa}{2J_{\zeta}}} t \right) + C_2 \sin \left(\sqrt{\frac{fa}{2J_{\zeta}}} t \right)$$

e una cui soluzione particolare è banalmente $\theta = 1/a$. Per cui l'integrale generale della **a.4.70** si scrive

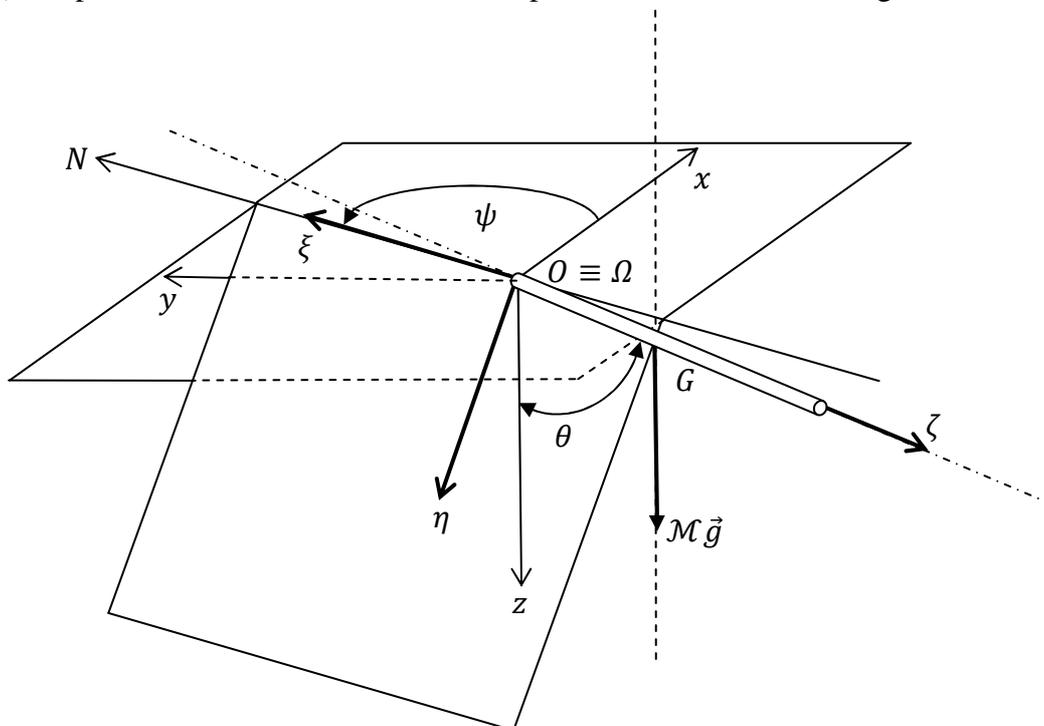
$$a.4.73) \theta = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{fa}{2J\zeta}} t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{fa}{2J\zeta}} t\right) + \frac{1}{a} \Rightarrow \dot{\theta} = -C_1 \sqrt{\frac{fa}{2J\zeta}} \sin\left(\sqrt{\frac{fa}{2J\zeta}} t\right) + C_2 \sqrt{\frac{fa}{2J\zeta}} \cos\left(\sqrt{\frac{fa}{2J\zeta}} t\right)$$

Imponendo le c.i. si ha $C_1 = -1/a$ e $C_2 = 0$, dunque abbiamo la rotazione periodica

$$a.4.74) \theta = \frac{1}{a} \left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{fa}{2J\zeta}} t\right)\right)$$

A.4.5. Sbarra con snodo sferico a una estremità. Una barra di massa \mathcal{M} è vincolata a una estremità a uno snodo sferico. Ci si chiede se sono possibili moti rotatori uniformi intorno all'asse verticale passante per il centro dello snodo.

Sistema di riferimento. Si adotta la stessa simbologia introdotta per il generico moto sferico introdotto nel **cap.6**, ma in questo caso la rotazione intorno all'asse ζ è assente, dato che la sbarra si assume lineare; per cui fissiamo $\varphi = 0$, cioè l'asse ξ è costantemente sovrapposto all'asse N (di nutazione). La posizione della sbarra è allora completamente definita dall'angolo θ e dall'anomalia ψ .



Discussione. Si deve verificare che un moto rotatorio uniforme risolva la seconda equazione della dinamica **16.5** (quella adattata al caso di moto sferico) e che la reazione vincolare che si ottiene sostituendo le leggi del moto nella prima equazione della dinamica, sia compatibile con il tipo di vincolo il quale, lo ricordo, può esplicare solo reazioni che abbiano momento nullo rispetto O .

Se la rotazione deve essere uniforme, la velocità angolare deve essere costante, ovvero devono essere nulle le derivate delle sue componenti rispetto al sistema di riferimento fisso. Per cui, ricordando la **6.24** (in cui si ponga $\varphi = 0$) si ha

$$a.4.75) \begin{cases} \omega_x = \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_y = \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_z = \dot{\psi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\omega}_x = \ddot{\theta} \cos \psi - \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \psi \\ \dot{\omega}_y = \ddot{\theta} \sin \psi + \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \psi \\ \dot{\omega}_z = \ddot{\psi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} = \dot{\theta} \dot{\psi} \frac{\sin \psi}{\cos \psi} \\ \ddot{\theta} = -\dot{\theta} \dot{\psi} \frac{\cos \psi}{\sin \psi} \\ \ddot{\psi} = 0 \end{cases}$$

Inoltre per la **6.23** (in cui si ponga $\varphi = 0$) le componenti della velocità angolare rispetto al sistema di riferimento mobile sono

$$\text{a.4.76) } \begin{cases} \omega_\xi = \dot{\theta} \\ \omega_\eta = \dot{\psi} \sin \theta \\ \omega_\zeta = \dot{\psi} \cos \theta \end{cases}$$

che sostituite nel **16.5** porgono

$$\begin{cases} J_\xi \ddot{\theta} - (J_\eta - J_\zeta) \dot{\psi} \sin \theta \dot{\psi} \cos \theta = M_{\Omega\xi}^a \\ J_\eta (\ddot{\psi} \sin \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta) - (J_\xi - J_\zeta) \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta = M_{\Omega\eta}^a \\ J_\zeta (\ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta) - (J_\eta - J_\xi) \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta = M_{\Omega\zeta}^a \end{cases}$$

Considerando poi la terza delle **a.4.75** si ha

$$\begin{cases} J_\xi \ddot{\theta} - (J_\eta - J_\zeta) \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta = M_{\Omega\xi}^a \\ -J_\eta \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta - (J_\xi - J_\zeta) \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta = M_{\Omega\eta}^a \\ -J_\zeta \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta - (J_\eta - J_\xi) \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta = M_{\Omega\zeta}^a \end{cases}$$

Si deve inoltre considerare che una sbarra lineare ha momento d'inerzia nullo rispetto al proprio asse – cioè $J_\zeta = 0$. Inoltre l'ellissoide di inerzia è giroscopico e quindi $J_\eta = J_\xi$; dunque

$$\text{a.4.77) } \begin{cases} J \ddot{\theta} - J \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta = M_{\Omega\xi}^a \\ -J \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta - J \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta = M_{\Omega\eta}^a \\ 0 = M_{\Omega\zeta}^a \end{cases}$$

Per quanto concerne il momento della forza attiva (la forza peso) si consideri che esso vale

$$\text{a.4.78) } \vec{M}_\Omega^a = \mathcal{M} \vec{g} \times \vec{G}\Omega = \frac{\mathcal{M}gl}{2} \sin \theta \hat{e}_1$$

Sostituendo nella **a.4.77** si trova

$$\text{a.4.79) } \begin{cases} J \ddot{\theta} - J \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta = M_{\Omega\xi}^a \\ -J \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta - J \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} - \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta = \frac{\mathcal{M}gl}{2J} \sin \theta \\ \dot{\theta} \dot{\psi} = -\dot{\theta} \dot{\psi} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Considerando il caso che sia $\dot{\psi} \neq 0$ allora si ha necessariamente $\dot{\theta} = 0$. Quindi in definitiva abbiamo trovato

$$\text{a.4.80) } \begin{cases} \ddot{\theta} - \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta = \frac{\mathcal{M}gl}{2J} \sin \theta \\ \dot{\theta} = 0 \\ \ddot{\psi} = 0 \end{cases}$$

Integrando si ha

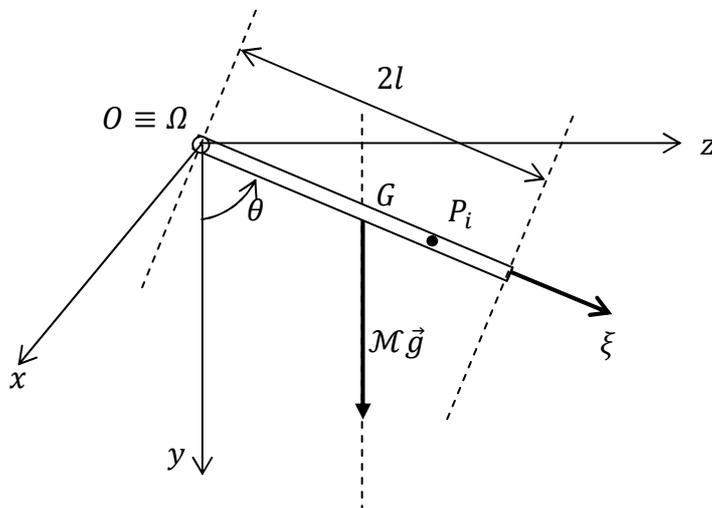
$$\text{a.4.81)} \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} - \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta = \frac{Mgl}{2J} \sin \theta \\ \theta = \theta_0 \\ \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi}_0^2 = \frac{Mgl}{2J \cos \theta_0} \\ \theta = \theta_0 \\ \psi = \dot{\psi}_0 t + \psi_0 \end{array} \right.$$

Dunque abbiamo trovato che la condizione per la quale si realizza il moto rotatorio uniforme è la prima delle **a.4.81** che porge $\psi = \dot{\psi}_0 t + \psi_0$.

Altri problemi dinamici per il corpo rigido sono nell'ultima parte del manoscritto da pagina 456.

Appendice5. Problemi di meccanica lagrangiana

A.5.1. Pendolo semplice. In O la sbarra di massa \mathcal{M} è vincolata a una cerniera che ne limita il moto sul piano yz .



Si richiede di

- a.5.1) determinare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità;
- a.5.2) scrivere le equazioni di Lagrange;
- a.5.3) determinare il periodo delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile.

Fissiamo intanto la coordinata lagrangiana come l'anomalia θ fra l'asse ξ della sbarra e l'asse verticale y del sistema di riferimento fisso, cioè poniamo

a.5.4) $q = \theta$

Le equazioni **19.11** si scrivono allora

a.5.5)
$$\begin{cases} x_i = 0 \\ y_i = \xi_i \cos \theta \\ z_i = \xi_i \sin \theta \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

dove si è schematizzata la sbarra continua in una successione di N punti materiali, essendo ξ_i la posizione lungo l'asse ξ del punto P_i . La matrice in **19.16**, essendo in questo caso $n = 1$, ha dimensioni $n \times 3N$ e si scrive

a.5.6)
$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial q} \quad \frac{\partial y_1}{\partial q} \quad \frac{\partial z_1}{\partial q} \quad \frac{\partial x_2}{\partial q} \quad \frac{\partial y_2}{\partial q} \quad \frac{\partial z_2}{\partial q} \quad \dots \quad \frac{\partial x_N}{\partial q} \quad \frac{\partial y_N}{\partial q} \quad \frac{\partial z_N}{\partial q} \right)$$

Sostituendo la **a.5.5** nella **a.5.6** si ha

a.5.7)
$$(0 \quad -\xi_1 \sin \theta \quad \xi_1 \cos \theta \quad 0 \quad -\xi_2 \sin \theta \quad \xi_2 \cos \theta \quad \dots \quad 0 \quad -\xi_N \sin \theta \quad \xi_N \cos \theta)$$

Si vede che questa matrice ha rango unitario per qualunque configurazione del sistema fisico, ovvero per qualunque valore di θ , non potendosi mai annullare contemporaneamente tutti i suoi

elementi¹. Poiché poi $n = 1$, segue che la condizione di indipendenza regolare del vincolo è verificata.

Calcoliamo ora le componenti lagrangiane della sollecitazione vincolare: detta \vec{f}^v la reazione vincolare della cerniera, sappiamo che essa è costituita da una forza – di verso e direzione incognita – applicata al punto della barra che si trova in $O \equiv \Omega$, a cui attribuiamo l'ascissa ξ_1 ; dunque la definizione **20.3**, applicata alla sollecitazione vincolare, porge

$$Q_\theta^v = f_x^v \frac{\partial x_1}{\partial q} + f_y^v \frac{\partial y_1}{\partial q} + f_z^v \frac{\partial z_1}{\partial q} = f_x^v \frac{\partial x_1}{\partial \theta} + f_y^v \frac{\partial y_1}{\partial \theta} + f_z^v \frac{\partial z_1}{\partial \theta}$$

Ma $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$, dunque si ha

$$\text{a.5.8) } Q_\theta^v = 0$$

Dunque la definizione **20.5** ci permette di asserire che il vincolo è perfetto (cioè è a lavoro virtuale nullo per ogni sistema di spostamenti virtuali); poiché esso costituisce poi l'unico vincolo², il sistema è olonomo.

Calcoliamo adesso le componenti lagrangiane della sollecitazione attiva, costituita dai pesi. Allora la definizione **20.3** porge

$$\begin{aligned} Q_\theta &= \sum_{i=1}^N \left(0 \frac{\partial x_i}{\partial \theta} + \frac{\mathcal{M}}{N} g \frac{\partial y_i}{\partial \theta} + 0 \frac{\partial z_i}{\partial \theta} \right) = \sum_{i=1}^N \left(0 + \frac{\mathcal{M}}{N} g \frac{\partial (\xi_i \cos \theta)}{\partial \theta} + 0 \right) = \\ &= - \sum_{i=1}^N \left(\frac{\mathcal{M}}{N} g \xi_i \sin \theta \right) = - \frac{\mathcal{M}g}{N} \sin \theta \sum_{i=1}^N (\xi_i) \end{aligned}$$

Considerando poi che la progressione aritmetica

$$\xi_1 = 0, \xi_2 = \frac{2l}{N}, \xi_3 = \frac{2l}{N} + \frac{2l}{N}, \xi_4 = \frac{2l}{N} + \frac{2l}{N} + \frac{2l}{N}, \dots, \xi_i = (i-1) \frac{2l}{N} \dots$$

ha somma

$$\sum_{i=1}^N (\xi_i) = \frac{\xi_1 + \xi_N}{2} N = \frac{\xi_N}{2} N = \frac{N-1}{2} \frac{2l}{N} N = (N-1)l$$

si ha in definitiva

$$\text{a.5.9) } Q_\theta = - \frac{\mathcal{M}gl}{N} \sin \theta (N-1) = - \frac{N-1}{N} \mathcal{M}gl \sin \theta$$

Essendo poi N un numero presumibilmente molto elevato possiamo porre senz'altro

$$\text{a.5.10) } Q_\theta = - \mathcal{M}gl \sin \theta$$

Allora – per la **20.4** – per il potenziale lagrangiano si ha

¹ Quando il coseno si annulla il seno ha modulo unitario, e viceversa.

² Probabilmente qui si dovrebbero intendere come vincoli anche tutti quelli che legano un elemento all'altro, e li tengono uniti a formare la sbarra. In questo caso le forze vincoli sono le forze scambiate da un elemento con quello precedente e quello successivo; e poiché le distanze reciproche non variano, queste forze vincolari sono a lavoro nullo. Però la esplicitazione formale di quanto detto è un po' macchinosa, e la evito.

$$\text{a.5.11)} \frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta} = Q_\theta = -\mathcal{M}gl \sin \theta$$

Quindi integrando otteniamo

$$\text{a.5.12)} U(\theta) = \mathcal{M}gl \cos \theta + c$$

e il sistema risulta dunque conservativo in senso lagrangiano in base alla **20.4**. Allora l'energia potenziale del sistema si scrive

$$\text{a.5.13)} \Pi(\theta) = -U(\theta) = -\mathcal{M}gl \cos \theta + c$$

Ponendo poi – come è lecito – $\Pi(0) = 0$ si ha

$$\text{a.5.14)} \Pi(\theta) = \mathcal{M}gl(1 - \cos \theta)$$

In base al teorema del lavoro virtuale (condizione **22.1**) le posizioni di equilibrio meccanico sono tutte e sole quelle per le quali si annulla la **a.5.10**, ovvero le due configurazioni

$$\text{a.5.15)} \begin{cases} \mathcal{C}_1^e: \theta = 0 \\ \mathcal{C}_2^e: \theta = \pi \end{cases}$$

La funzione **a.5.13** presenta un minimo relativo proprio in \mathcal{C}_1^e e dunque, per il teorema di Dirichlet, essa rappresenta una configurazione di equilibrio stabile; in \mathcal{C}_2^e si ha un punto di massimo relativo proprio dunque, per Liapunov, essa rappresenta una configurazione di equilibrio instabile.

*

Per esprimere le equazioni di Lagrange nella forma **21.14** dobbiamo individuare l'espressione dell'energia cinetica. Si ha

$$\text{a.5.16)} \mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\mathcal{M}}{N} v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\mathcal{M}}{N} (\dot{\theta} \xi_i)^2 = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^N \frac{\mathcal{M}}{N} \xi_i^2 = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 J_x$$

Per le derivate si ha

$$\text{a.5.17)} \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\theta}} = \dot{\theta} J_x \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\theta}} = \ddot{\theta} J_x \end{cases}$$

Sostituendo il tutto nella espressione **21.14** delle equazioni di Lagrange si ha

$$\text{a.5.18)} \ddot{\theta} J_x = Q_\theta$$

e considerando la **a.5.11** si ha in definitiva l'equazione di Lagrange

$$\text{a.5.19)} \ddot{\theta} J_x = -\mathcal{M}gl \sin \theta$$

L'equazione linearizzata **23.18** – nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile \mathcal{C}_1^e – si scrive in questo caso

$$\text{a.5.20)} g|_{\mathcal{C}_1^e} \ddot{\theta} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right|_{\mathcal{C}_1^e} \theta$$

Si consideri poi che per la **20.12** si ha

$$\text{a.5.21)} g(\theta) = \sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} 0 \\ -\xi_i \sin \theta \\ \xi_i \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\xi_i \sin \theta \\ \xi_i \cos \theta \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N m_i \xi_i^2 = J_x$$

e che derivando il potenziale **a.5.12** si trova

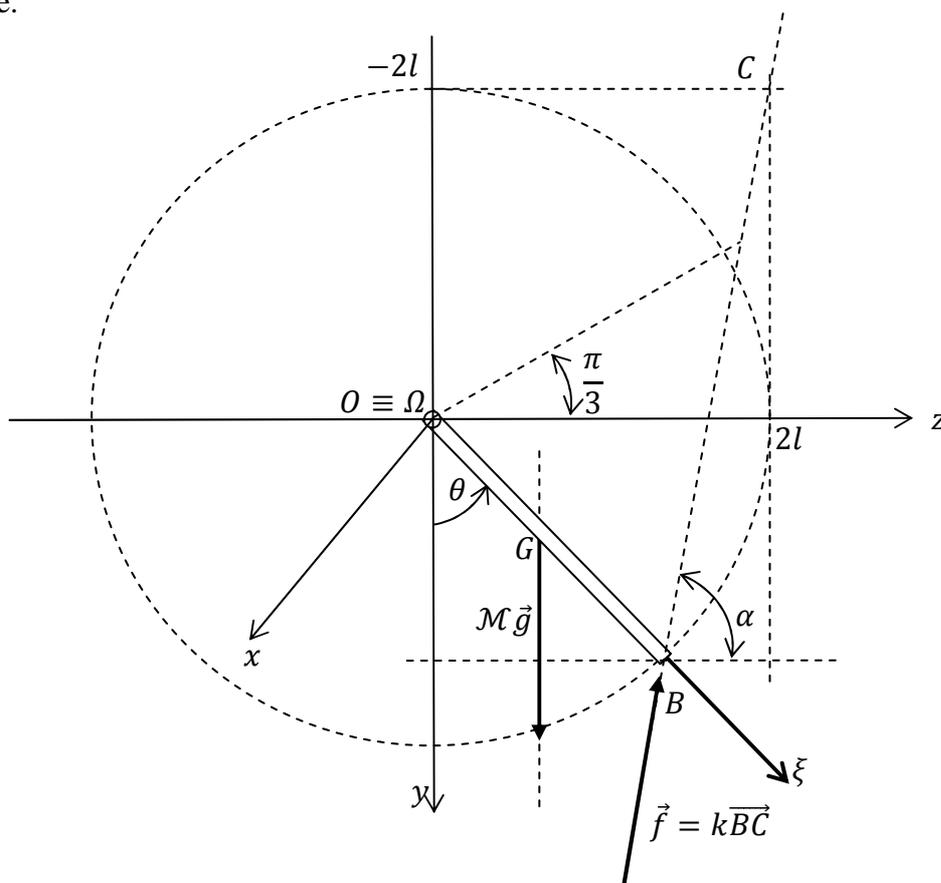
$$\text{a.5.22)} \frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta} = -\mathcal{M}gl \sin \theta \Rightarrow \frac{\partial^2 U(\theta)}{\partial \theta^2} = -\mathcal{M}gl \cos \theta$$

Sostituendo le **a.5.21** e **a.5.22** nella **a.5.20** si ha in definitiva l'equazione di Lagrange linearizzata

$$\text{a.5.20)} J_x \ddot{\theta} = -\mathcal{M}gl \theta$$

la quale è risolta da un moto sinusoidale.

A.5.2. Pendolo semplice con forza elastica. Si consideri la barra del problema precedente e si applichi al suo estremo B una forza elastica di centro $C \equiv (0, -2l, 2l)$ definita e di costante elastica k . Si chiede il valore da attribuire a k affinché la configurazione $\theta = 2\pi/3$ sia di equilibrio stabile.



In questo caso la sollecitazione attiva è costituita dai pesi e dalla forza elastica, allora per la componente lagrangiana della sollecitazione la definizione **20.3** porge

$$Q_\theta = \sum_{i=1}^N \left(0 \frac{\partial x_i}{\partial \theta} + \frac{\mathcal{M}}{N} g \frac{\partial y_i}{\partial \theta} + 0 \frac{\partial z_i}{\partial \theta} \right) + 0 \frac{\partial x_i}{\partial \theta} + f_y \frac{\partial y_N}{\partial \theta} + f_z \frac{\partial z_N}{\partial \theta} =$$

$$= -\mathcal{M}gl \sin \theta + f_y 2l \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} + f_z 2l \frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} = -\mathcal{M}gl \sin \theta - f_y 2l \sin \theta + f_z 2l \cos \theta$$

Bisogna ricavare le due componenti non nulle della forza elastica. Guardando la figura si ha

$$\text{a.5.21) } \begin{cases} \overline{BC} \cos \alpha = 2l(1 - \sin \theta) \\ \overline{BC} \sin \alpha = 2l(1 + \cos \theta) \end{cases}$$

Dunque le componenti della forza elastica si scrivono

$$\text{a.5.22) } \begin{cases} f_z = k\overline{BC} \cos \alpha = 2lk(1 - \sin \theta) \\ f_y = -\overline{BC} \sin \alpha = -2lk(1 + \cos \theta) \end{cases}$$

Sostituendo le **a.5.22** nella espressione della componente della sollecitazione si ha

$$\text{a.5.23) } Q_\theta = -\mathcal{M}gl \sin \theta + 4l^2k(\sin \theta + \cos \theta)$$

Allora – per la **20.4** – per il potenziale lagrangiano si ha

$$\text{a.5.24) } \frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta} = Q_\theta = -\mathcal{M}gl \sin \theta + 4l^2k(\sin \theta + \cos \theta)$$

Quindi integrando otteniamo

$$\text{a.5.25) } U(\theta) = \mathcal{M}gl \cos \theta + 4l^2k(-\cos \theta + \sin \theta) + c$$

e il sistema risulta dunque conservativo in senso lagrangiano in base alla **20.4**. Allora l'energia potenziale del sistema si scrive

$$\text{a.5.26) } \Pi(\theta) = -U(\theta) = -\mathcal{M}gl \cos \theta - 4l^2k(-\cos \theta + \sin \theta) + c$$

In base al teorema del lavoro virtuale (condizione **22.1**) le posizioni di equilibrio meccanico sono tutte e sole quelle per le quali si annulla la **a.5.23**, ovvero quelle per cui

$$\text{a.5.27) } \tan \theta = -\frac{4lk}{4lk - \mathcal{M}g}$$

Affinché si abbia equilibrio per $\theta = 2\pi/3$ – come richiesto dalla traccia – deve dunque risultare

$$\sqrt{3} = \frac{4lk}{4lk - \mathcal{M}g} \Leftrightarrow 4lk(\sqrt{3} - 1) - \mathcal{M}g\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{\mathcal{M}g\sqrt{3}}{4l(\sqrt{3} - 1)}$$

che razionalizzando si scrive

$$\text{a.5.28) } k = \frac{\mathcal{M}g}{l} \frac{3+\sqrt{3}}{8}$$

In corrispondenza a questo valore della costante elastica l'energia potenziale **a.5.26** si scrive

$$\text{a.5.29) } \Pi(\theta) = -U(\theta) = -\mathcal{M}gl \left(\cos \theta + \frac{3+\sqrt{3}}{2} (-\cos \theta + \sin \theta) \right) + c$$

e le sue derivate sono

$$\frac{\partial \Pi(\theta)}{\partial \theta} = -\mathcal{M}gl \left(-\sin \theta + \frac{3+\sqrt{3}}{2} (\sin \theta + \cos \theta) \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 \Pi(\theta)}{\partial \theta^2} = -\mathcal{M}gl \left(-\cos \theta + \frac{3+\sqrt{3}}{2} (\cos \theta - \sin \theta) \right)$$

Quindi nella configurazione di equilibrio si ha

$$\frac{\partial^2 \Pi \left(\frac{2\pi}{3} \right)}{\partial \theta^2} = -\mathcal{M}gl \left(\frac{1}{2} - \frac{3+\sqrt{3}}{2} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) = \mathcal{M}gl(1+\sqrt{3}) > 0$$

Il segno della derivata seconda ci dice che la posizione è di equilibrio stabile.

*

Per esprimere le equazioni di Lagrange nella forma **21.14** dobbiamo individuare l'espressione dell'energia cinetica. Si ha

$$\text{a.5.30) } \mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\mathcal{M}}{N} v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\mathcal{M}}{N} (\dot{\theta} \xi_i)^2 = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^N \frac{\mathcal{M}}{N} \xi_i^2 = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 J_x$$

Per le derivate si ha

$$\text{a.5.31) } \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\theta}} = \dot{\theta} J_x \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\theta}} = \ddot{\theta} J_x \end{cases}$$

Sostituendo il tutto nella espressione **21.14** delle equazioni di Lagrange si ha

$$\text{a.5.32) } \ddot{\theta} J_x = Q_\theta$$

e considerando la **a.5.23** si ha in definitiva l'equazione di Lagrange

$$\text{a.5.33) } \ddot{\theta} J_x = -\mathcal{M}gl \sin \theta + 4l^2 k (\sin \theta + \cos \theta)$$

L'equazione linearizzata **23.18** – nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile \mathcal{C}^e – si scrive in questo caso

$$\text{a.5.34) } g|_{\mathcal{C}^e} \ddot{\theta} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right|_{\mathcal{C}^e} \theta$$

Si consideri poi che per la **20.12** si ha

$$\text{a.5.35) } g(\theta) = \sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} 0 \\ -\xi_i \sin \theta \\ \xi_i \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\xi_i \sin \theta \\ \xi_i \cos \theta \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N m_i \xi_i^2 = J_x$$

e che derivando il potenziale **a.5.25** si trova

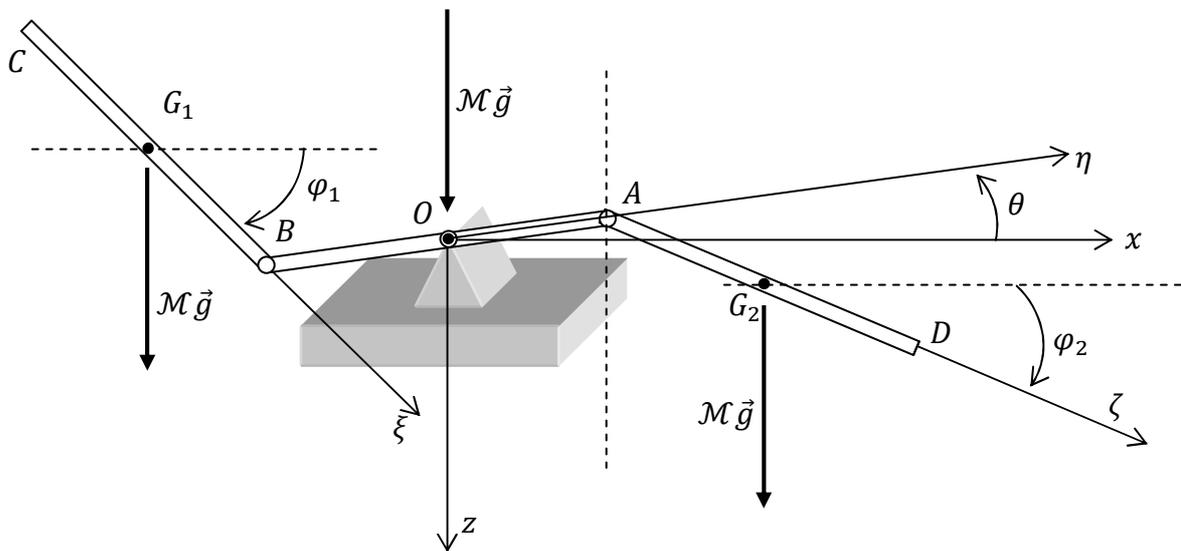
$$\text{a.5.36) } \frac{\partial^2 U(\theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{\partial^2 \Pi(\theta)}{\partial \theta^2} = \mathcal{M}gl \left(-\cos \theta + \frac{3+\sqrt{3}}{2} (\cos \theta - \sin \theta) \right)$$

Sostituendo le **a.5.35** e **a.5.36** nella **a.5.34** si ha in definitiva l'equazione di Lagrange linearizzata

$$\text{a.5.37) } J_x \ddot{\theta} = -\mathcal{M}gl(1 + \sqrt{3})\theta$$

la quale è risolta da un moto sinusoidale.

A.5.3. Sistema articolato. Si consideri il sistema costituito dalle tre barre vincolate come in figura. Le tre lunghezze siano di $2l$ e le tre masse siano \mathcal{M} .



Si chiede di

- determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e la relativa stabilità;
- scrivere le equazioni di Lagrange del sistema;

Come coordinate lagrangiane si considerino le tre anomalie indicate in figura e **si assumano per tutte e tre positive le rotazioni antiorarie**. Si introducano poi l'asse ξ , con origine in C ; l'asse η con origine in O ; l'asse ζ con origine in A . Vediamo ora l'espressione delle equazioni **19.11** per il segmento CB :

$$\text{a.5.38) } \begin{cases} x_i = -l \cos \theta + (\xi_i - 2l) \cos \varphi_1 \\ y_i = 0 \\ z_i = l \sin \theta - (\xi_i - 2l) \sin \varphi_1 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Per il segmento BA si ha invece

$$\text{a.5.39) } \begin{cases} x_i = \eta_i \cos \theta \\ y_i = 0 \\ z_i = -\eta_i \sin \theta \end{cases} \quad i = N + 1, N + 2, \dots, 2N$$

Per il segmento AD si ha infine

$$\text{a.5.40) } \begin{cases} x_i = l \cos \theta + \zeta_i \cos \varphi_2 \\ y_i = 0 \\ z_i = -l \sin \theta - \zeta_i \sin \varphi_2 \end{cases} \quad i = 2N + 1, 2N + 2, \dots, 3N$$

Restano così definite le posizioni dei $3N$ elementi in cui abbiamo scomposto il sistema; a ognuno dei quali attribuiamo una massa $m_i = \mathcal{M}/N$.

La matrice in **19.16**, essendo in questo caso $n = 3$, ha dimensioni $3n \times 9N$ e si scrive

$$\text{a.5.41) } M = (M_1 | M_2 | M_3)$$

dove le tre sottomatrici sono date da

$$\text{a.5.42) } M_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial z_1}{\partial \varphi_1} & \dots & \frac{\partial x_N}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial y_N}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial z_N}{\partial \varphi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta} & \frac{\partial z_1}{\partial \theta} & \dots & \frac{\partial x_N}{\partial \theta} & \frac{\partial y_N}{\partial \theta} & \frac{\partial z_N}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial z_1}{\partial \varphi_2} & \dots & \frac{\partial x_N}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial y_N}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial z_N}{\partial \varphi_2} \end{pmatrix}$$

$$\text{a.5.43) } M_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{N+1}}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial y_{N+1}}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial z_{N+1}}{\partial \varphi_1} & \dots & \frac{\partial x_{2N}}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial y_{2N}}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial z_{2N}}{\partial \varphi_1} \\ \frac{\partial x_{N+1}}{\partial \theta} & \frac{\partial y_{N+1}}{\partial \theta} & \frac{\partial z_{N+1}}{\partial \theta} & \dots & \frac{\partial x_{2N}}{\partial \theta} & \frac{\partial y_{2N}}{\partial \theta} & \frac{\partial z_{2N}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_{N+1}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial y_{N+1}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial z_{N+1}}{\partial \varphi_2} & \dots & \frac{\partial x_{2N}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial y_{2N}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial z_{2N}}{\partial \varphi_2} \end{pmatrix}$$

$$\text{a.5.44) } M_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{2N+1}}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial y_{2N+1}}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial z_{2N+1}}{\partial \varphi_1} & \dots & \frac{\partial x_{3N}}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial y_{3N}}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial z_{3N}}{\partial \varphi_1} \\ \frac{\partial x_{2N+1}}{\partial \theta} & \frac{\partial y_{2N+1}}{\partial \theta} & \frac{\partial z_{2N+1}}{\partial \theta} & \dots & \frac{\partial x_{3N}}{\partial \theta} & \frac{\partial y_{3N}}{\partial \theta} & \frac{\partial z_{3N}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_{2N+1}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial y_{2N+1}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial z_{2N+1}}{\partial \varphi_2} & \dots & \frac{\partial x_{3N}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial y_{3N}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial z_{3N}}{\partial \varphi_2} \end{pmatrix}$$

Considerando la **a.5.38** la **a.5.42** si scrive

$$\text{a.5.45) } \begin{pmatrix} (\xi_1 - 2l) \sin \varphi_1 & 0 & -(\xi_1 - 2l) \cos \varphi_1 & \dots & (\xi_N - 2l) \sin \varphi_1 & 0 & -(\xi_N - 2l) \cos \varphi_1 \\ & l \sin \theta & 0 & l \cos \theta & \dots & l \sin \theta & 0 & l \cos \theta \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Considerando la **a.5.39** la **a.5.43** si scrive

$$\text{a.5.46) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\eta_{N+1} \sin \theta & 0 & \eta_{N+1} \cos \theta & \dots & -\eta_{2N} \sin \theta & 0 & \eta_{2N} \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Considerando la **a.5.40** la **a.5.44** si scrive

$$\text{a.5.47) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -l \sin \theta & 0 & -l \cos \theta & \dots & -l \sin \theta & 0 & -l \cos \theta \\ -\zeta_{2N+1} \sin \varphi_2 & 0 & -\zeta_{2N+1} \cos \varphi_2 & \dots & -\zeta_{3N} \sin \varphi_2 & 0 & -\zeta_{3N} \cos \varphi_2 \end{pmatrix}$$

In base alla **20.3** le componenti lagrangiane della sollecitazione si scrivono

$$a.5.48) \begin{cases} Q_{\varphi_1} = \sum_{i=1}^N \left(m_i g \frac{\partial z_i}{\partial \varphi_1} \right) + \sum_{i=N+1}^{2N} \left(m_i g \frac{\partial z_i}{\partial \varphi_1} \right) + \sum_{i=2N+1}^{3N} \left(m_i g \frac{\partial z_i}{\partial \varphi_1} \right) \\ Q_{\theta} = \sum_{i=1}^N \left(m_i g \frac{\partial z_i}{\partial \theta} \right) + \sum_{i=N+1}^{2N} \left(m_i g \frac{\partial z_i}{\partial \theta} \right) + \sum_{i=2N+1}^{3N} \left(m_i g \frac{\partial z_i}{\partial \theta} \right) \\ Q_{\varphi_2} = \sum_{i=1}^N \left(m_i g \frac{\partial z_i}{\partial \varphi_2} \right) + \sum_{i=N+1}^{2N} \left(m_i g \frac{\partial z_i}{\partial \varphi_2} \right) + \sum_{i=2N+1}^{3N} \left(m_i g \frac{\partial z_i}{\partial \varphi_2} \right) \end{cases}$$

In base poi alle **a.5.45**, **a.5.46**, **a.5.47** si ha

$$a.5.48) \begin{cases} Q_{\varphi_1} = -\sum_{i=1}^N (m_i g (\xi_i - 2l) \cos \varphi_1) \\ Q_{\theta} = \sum_{i=1}^N (m_i g l \cos \theta) + \sum_{i=N+1}^{2N} (m_i g \eta_i \cos \theta) + \sum_{i=2N+1}^{3N} (m_i g (-l \cos \theta)) \\ Q_{\varphi_2} = -\sum_{i=2N+1}^{3N} (m_i g \zeta_i \cos \varphi_2) \end{cases}$$

Si tenga poi presente che $m_i = \mathcal{M}/N$ e con ulteriori rimaneggiamenti si ha

$$a.5.49) \begin{cases} Q_{\varphi_1} = -\frac{\mathcal{M}}{N} g \cos \varphi_1 (\sum_{i=1}^N \xi_i - 2lN) \\ Q_{\theta} = \frac{\mathcal{M}}{N} g \cos \theta \sum_{i=N+1}^{2N} \eta_i \\ Q_{\varphi_2} = -\frac{\mathcal{M}}{N} g \cos \varphi_2 \sum_{i=2N+1}^{3N} \zeta_i \end{cases}$$

Si consideri ancora che

$$\sum_{i=N+1}^{2N} \eta_i = -l + \left(-l + \frac{2l}{N}\right) + \left(-l + \frac{2l}{N} + \frac{2l}{N}\right) + \dots + 0 + \dots + \left(l - \frac{2l}{N} - \frac{2l}{N}\right) + \left(l - \frac{2l}{N}\right) + l = 0$$

$$\sum_{i=2N+1}^{3N} \zeta_i = Nl$$

e dunque le **a.5.50** si scrivono

$$a.5.50) \begin{cases} Q_{\varphi_1} = \mathcal{M} g l \cos \varphi_1 \\ Q_{\theta} = 0 \\ Q_{\varphi_2} = -\mathcal{M} g l \cos \varphi_2 \end{cases}$$

Allora – per la **20.4**– per il potenziale lagrangiano si ha

$$a.5.51) \begin{cases} \frac{\partial U(\varphi_1, \theta, \varphi_2)}{\partial \varphi_1} = Q_{\varphi_1} = \mathcal{M} g l \cos \varphi_1 \\ \frac{\partial U(\varphi_1, \theta, \varphi_2)}{\partial \theta} = Q_{\theta} = 0 \\ \frac{\partial U(\varphi_1, \theta, \varphi_2)}{\partial \varphi_2} = Q_{\varphi_2} = -\mathcal{M} g l \cos \varphi_2 \end{cases}$$

Quindi integrando otteniamo

$$a.5.52) U(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = \mathcal{M} g l (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2)$$

e il sistema risulta dunque conservativo in senso lagrangiano in base alla **20.4**. Allora l'energia potenziale del sistema si scrive

a.5.53) $\Pi(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = -U(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = -\mathcal{M}gl(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2)$
 e le sue derivate prime e seconde si scrivono

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi(\varphi_1, \theta, \varphi_2)}{\partial \varphi_1} = -\mathcal{M}gl \cos \varphi_1 \\ \frac{\partial \Pi(\varphi_1, \theta, \varphi_2)}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \Pi(\varphi_1, \theta, \varphi_2)}{\partial \varphi_2} = \mathcal{M}gl \cos \varphi_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1^2} = \mathcal{M}gl \sin \varphi_1 \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1 \partial \theta} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta \partial \varphi_1} = 0 \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_2 \partial \varphi_1} = 0 \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_2 \partial \theta} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta \partial \varphi_2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_2^2} = -\mathcal{M}gl \sin \varphi_2 \end{array} \right.$$

Dunque le configurazioni di equilibrio, definite dalle derivate prime – o alternativamente dalle **a.5.50** secondo il teorema dei lavori virtuali – sono tutte e sole quelle indicate in tabella.

configurazione di equilibrio	φ_1	θ	φ_2	H	natura dell'equilibrio
C_1^e	$\frac{\pi}{2}$	qualunque	$\frac{\pi}{2}$	$\mathcal{M}gl \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	sella
C_2^e			$-\frac{\pi}{2}$	$\mathcal{M}gl \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	stabile
C_3^e	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$	$\mathcal{M}gl \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	instabile
C_4^e			$-\frac{\pi}{2}$	$\mathcal{M}gl \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	sella

Si vede che il valore di θ è indifferente all'equilibrio, dunque al fine della determinazione della natura degli equilibri non deve essere e in definitiva si deve valutare l'hessiano seguente:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_2 \partial \varphi_1} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_2^2} \end{pmatrix} = \mathcal{M}gl \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Dunque l'unica configurazione di equilibrio stabile è la C_2^e , mentre la C_3^e è configurazione di equilibrio instabile.

*

Per scrivere le equazioni di Lagrange nella forma **21.14** dobbiamo ricavare l'espressione dell'energia cinetica del sistema. In base alla **12.23** si hanno per i tre segmenti le energie cinetiche

$$\text{a.5.54) } \begin{cases} \mathcal{T}_{CB} = \frac{1}{2} \mathcal{M} v_{G_1}^2 + \frac{1}{2} \dot{\varphi}_1^2 J \\ \mathcal{T}_{BA} = \frac{1}{2} \mathcal{M} v_O^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 J = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 J \\ \mathcal{T}_{AD} = \frac{1}{2} \mathcal{M} v_{G_2}^2 + \frac{1}{2} \dot{\varphi}_2^2 J \end{cases}$$

Si osserva poi ancora che

$$\begin{aligned} \vec{v}_{G_1} &= \vec{v}_B + \dot{\varphi}_1 \hat{e}_2 \times \overline{BG_1} = \dot{\theta} \hat{e}_2 \times \overline{OB} + \dot{\varphi}_1 \hat{e}_2 \times \overline{BG_1} = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & \dot{\theta} & 0 \\ -l \cos \theta & 0 & l \sin \theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & \dot{\varphi}_1 & 0 \\ -l \cos \varphi_1 & 0 & -l \sin \varphi_1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} l \sin \theta \\ 0 \\ \dot{\theta} l \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}_1 l \sin \varphi_1 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_1 l \cos \varphi_1 \end{pmatrix} = \\ &= l \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \\ \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + \dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow v_{G_1}^2 = l^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\theta} \cos(\varphi_1 + \theta)) \\ \vec{v}_{G_2} &= \vec{v}_A + \dot{\varphi}_2 \hat{e}_2 \times \overline{AG_2} = \dot{\theta} \hat{e}_2 \times \overline{OA} + \dot{\varphi}_2 \hat{e}_2 \times \overline{AG_2} = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & \dot{\theta} & 0 \\ l \cos \theta & 0 & -l \sin \theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & \dot{\varphi}_2 & 0 \\ l \cos \varphi_2 & 0 & -l \sin \varphi_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta} l \sin \theta \\ 0 \\ -\dot{\theta} l \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}_2 l \sin \varphi_2 \\ 0 \\ -\dot{\varphi}_2 l \cos \varphi_2 \end{pmatrix} = \\ &= l \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 - \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \\ -\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 - \dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow v_{G_2}^2 = l^2 (\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\varphi}_2 \dot{\theta} \cos(\varphi_2 - \theta)) \end{aligned}$$

Sostituendo quanto trovato nelle **a.5.54** si ha

$$\text{a.5.55) } \begin{cases} \mathcal{T}_{CB} = \frac{1}{2} \mathcal{M} l^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\theta} \cos(\varphi_1 + \theta)) + \frac{1}{2} \dot{\varphi}_1^2 J \\ \mathcal{T}_{BA} = \frac{1}{2} \mathcal{M} v_O^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 J = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 J \\ \mathcal{T}_{AD} = \frac{1}{2} \mathcal{M} l^2 (\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\varphi}_2 \dot{\theta} \cos(\varphi_2 - \theta)) + \frac{1}{2} \dot{\varphi}_2^2 J \end{cases}$$

e dunque l'energia cinetica totale si scrive

$$\text{a.5.56) } \mathcal{T} = \frac{1}{2} \mathcal{M} l^2 \left(\frac{5}{3} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{5}{3} \dot{\varphi}_2^2 + \frac{8}{3} \dot{\theta}^2 + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\theta} \cos(\varphi_1 + \theta) + 2\dot{\varphi}_2 \dot{\theta} \cos(\varphi_2 - \theta) \right)$$

Le derivate della energia cinetica si scrivono

$$\text{a.5.57) } \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \varphi_1} = \frac{1}{2} \mathcal{M} l^2 (-2\dot{\varphi}_1 \dot{\theta} \sin(\varphi_1 + \theta)) \\ \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \mathcal{M} l^2 (-2\dot{\varphi}_1 \dot{\theta} \sin(\varphi_1 + \theta) - 2\dot{\varphi}_2 \dot{\theta} \sin(\varphi_2 - \theta)) \\ \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \varphi_2} = \frac{1}{2} \mathcal{M} l^2 (-2\dot{\varphi}_2 \dot{\theta} \sin(\varphi_2 - \theta)) \end{cases}$$

$$\text{a.5.58) } \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\varphi}_1} = \mathcal{M} l^2 \left(\frac{5}{3} \dot{\varphi}_1 + \dot{\theta} \cos(\varphi_1 + \theta) \right) \\ \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\theta}} = \mathcal{M} l^2 \left(\frac{8}{3} \dot{\theta} + \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 + \theta) + \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \theta) \right) \\ \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\varphi}_2} = \mathcal{M} l^2 \left(\frac{5}{3} \dot{\varphi}_2 + \dot{\theta} \cos(\varphi_2 - \theta) \right) \end{cases}$$

Sostituendo le derivate **a.5.57** e **a.5.58** nelle equazioni di Lagrange **21.14** si trova

$$\text{a.5.59) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{3}\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\theta} \cos(\varphi_1 + \theta) - \dot{\theta}^2 \sin(\varphi_1 + \theta) = \frac{g}{l} \cos \varphi_1 \\ \frac{8}{3}\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 + \theta) + \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \theta) - \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 + \theta) - \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \theta) = 0 \\ \frac{5}{3}\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\theta} \cos(\varphi_2 - \theta) + \dot{\theta}^2 \sin(\varphi_2 - \theta) = -\frac{g}{l} \cos \varphi_2 \end{array} \right.$$

Appendice6. Sintesi di meccanica lagrangiana

CINEMATICA	
Coordinate cartesiane	
19.22)	$\begin{cases} x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), \dots, x_N(t) \\ y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t), \dots, y_N(t) \\ z_1(t), z_2(t), z_3(t), z_4(t), \dots, z_N(t) \end{cases}$
Condizioni di vincolo	
19.23)	$\begin{cases} \varphi_1(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_N, y_N, z_N) = 0 \\ \varphi_2(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_N, y_N, z_N) = 0 \\ \dots \\ \varphi_k(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_N, y_N, z_N) = 0 \end{cases}$
Vincoli indipendenti regolari e vincoli regolari	
<p>I vincoli sono indipendenti regolari se la matrice</p> $M(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_N, y_N, z_N) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} & & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_N} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_N} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_N} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_N} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_N} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_N} & \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_N} & \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_N} \end{pmatrix}$	
<p>ha rango k, cioè le sue righe sono L.I. Allora, per il teorema del Dini, il sistema 19.23 può essere esplicitato rispetto a k delle coordinate cartesiane, che risultano espresse in funzione delle altre $n = 3N - k$. Si dice allora che il sistema ha n gradi di libertà, nel senso che sono sufficienti n parametri scalari per definire la configurazione del sistema.</p> <p>Se la matrice non ha nessuna riga nulla si dice che i vincoli sono regolari. Evidentemente vincoli indipendenti regolari sono anche regolari. Queste condizioni devono valere per ogni configurazione.</p>	
Coordinate lagrangiane	
19.11)	<p>In un sistema con n gradi di libertà le $3N$ coordinate cartesiane sono esprimibili in funzione di n sole di esse, attraverso l'esplicitazione del sistema 19.23. In queste condizioni è possibile definire n parametri geometrici q_1, q_2, \dots, q_n tali da individuare univocamente la configurazione del sistema.</p> $\overline{OP}_i = \overline{OP}_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$
Velocità	
19.12)	$\vec{v}_i(t) = \frac{d\overline{OP}_i(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k} \frac{dq_k(t)}{dt} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$

Accelerazioni	
19.13)	$\vec{a}_i(t) = \frac{d^2 \vec{OP}_i(t)}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n \left(\frac{\partial^2 \vec{OP}_i}{\partial q_h \partial q_k} \frac{dq_h(t)}{dt} \frac{dq_k(t)}{dt} \right) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \vec{OP}_i}{\partial q_k} \frac{d^2 q_k(t)}{dt^2} \right) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$
Componenti lagrangiane dell'atto di moto	
19.14)	$\frac{dq_1(t)}{dt}, \frac{dq_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dq_n(t)}{dt}$
Componenti lagrangiane dello spostamento virtuale	
19.16)	$\begin{pmatrix} \delta_{1x} \\ \delta_{1y} \\ \delta_{1z} \\ \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \\ \delta_{2z} \\ \dots \\ \delta_{Nx} \\ \delta_{Ny} \\ \delta_{Nz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial OP_{1x}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{1x}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{1x}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{1y}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{1y}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{1y}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{1z}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{1z}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{1z}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{2x}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{2x}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{2x}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{2y}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{2y}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{2y}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{2z}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{2z}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{2z}}{\partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial OP_{Nx}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{Nx}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{Nx}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{Ny}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{Ny}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{Ny}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial OP_{Nz}}{\partial q_1} & \frac{\partial OP_{Nz}}{\partial q_2} & \frac{\partial OP_{Nz}}{\partial q_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \dots \\ \delta q_n \end{pmatrix}$
Vincoli indipendenti regolari	
<p>La condizione di indipendenza regolare si traduce nella condizione che la matrice della 19.16 abbia rango massimo, ovvero rango n.</p>	
DINAMICA	
Lavoro virtuale	
20.2)	$L_v = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k$
Componenti lagrangiane della sollecitazione	
20.3)	$Q_k \triangleq \sum_{i=1}^N \left(f_{ix} \frac{\partial OP_{ix}}{\partial q_k} + f_{iy} \frac{\partial OP_{iy}}{\partial q_k} + f_{iz} \frac{\partial OP_{iz}}{\partial q_k} \right)$

Conservatività in senso lagrangiano (definizione generalizzata)	
20.4)	<p>Una sollecitazione agente su un sistema con vincoli di posizione indipendenti regolari risulta conservativa in senso lagrangiano (definizione generalizzata) se</p> $\exists U = U(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \text{ tale che } \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$
La conservatività in senso lagrangiano implica quella secondo la definizione classica 12.4 .	
Sistema olonomo	
20.5)	<p>Si definisce tale ogni sistema a vincoli tutti perfetti, ovvero tali per cui il lavoro della relativa sollecitazione vincolare sia nulla per ogni sistema di spostamenti virtuali. Si dimostra che un sistema è olonomo se e solo se</p> $Q_k^v = \left(\sum_{i=1}^N f_{hx}^v \frac{\partial O P_{ix}}{\partial q_k} \right) + \left(\sum_{i=1}^N f_{hy}^v \frac{\partial O P_{iy}}{\partial q_k} \right) + \left(\sum_{i=1}^N f_{hz}^v \frac{\partial O P_{iz}}{\partial q_k} \right) = 0, \quad k = 1, 2, 3 \dots n$ <p>dove la v sta per vincolare.</p>
Equazioni di Lagrange	
20.13)	$\sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n \left(\frac{\partial g_{hj}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kj}}{\partial q_h} \right) \frac{dq_j(t)}{dt} \frac{dq_h(t)}{dt} + \sum_{j=1}^n g_{jk} \frac{d^2 q_j(t)}{dt^2} = Q_k \quad k = 1, 2, 3 \dots n$
20.12)	$g_{jk}(q_1, q_2, \dots, q_n) \triangleq \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \overrightarrow{O P_i}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{O P_i}}{\partial q_k}$
21.14)	$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_h} = Q_h \quad h = 1, 2, \dots, n$
21.16.b)	<p>Per sollecitazioni conservative</p> $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_h} = \frac{\partial U}{\partial q_h} \quad h = 1, 2, \dots, n$
Energia cinetica	
21.2)	$\mathcal{T}(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(g_{jk}(q_1, q_2, \dots, q_n) \frac{dq_k(t)}{dt} \frac{dq_j(t)}{dt} \right)$

STATICA

Equilibrio meccanico (teorema del lavoro virtuale)

22.1)

Condizione necessaria e sufficiente affinché una configurazione \mathcal{C}^e sia di equilibrio meccanico, è che siano nulle tutte le componenti lagrangiane di sollecitazione relative alla configurazione \mathcal{C}^e , in corrispondenza di un atto di moto nullo. Ovvero che risulti

$$Q_k(q_1^e, q_2^e, \dots, q_n^e; 0, 0, \dots, 0; t) = 0, \forall t > 0 \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Equilibrio stabile

La configurazione di equilibrio \mathcal{C}^e individuata dai valori $q_1^e, q_2^e, \dots, q_n^e$ delle variabili lagrangiane, si dice di equilibrio stabile se presi comunque piccoli due numeri reali positivi $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ allora esistono due numeri reali positivi δ_1, δ_2 tali che, se risulta

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (q_k^e - \tilde{q}_k)^2} < \delta_1 \quad \sqrt{\sum_{k=1}^n (\tilde{q}_k)^2} < \delta_2$$

allora segue che

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (q_k^e - \tilde{q}_k(t))^2} < \delta_1 \quad \forall t > 0$$
$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (\tilde{q}_k(t))^2} < \delta_2 \quad \forall t > 0$$

dove si intende che le funzioni $\tilde{q}_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$ sono la soluzione delle equazioni di Lagrange in corrispondenza della configurazione iniziale individuata dalle coordinate Lagrangiane $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n$ e dall'atto di moto dato da $\dot{\tilde{q}}_1, \dot{\tilde{q}}_2, \dots, \dot{\tilde{q}}_n$.

Teorema di Dirichlet

Data una sollecitazione conservativa in senso lagrangiano, allora ogni n -pla $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n$ in corrispondenza della quale si realizza un minimo relativo proprio per l'energia potenziale Π del sistema¹, individua una configurazione di equilibrio stabile.

¹ Anche nella meccanica lagrangiana si definisce energia potenziale l'opposto del potenziale lagrangiano U , definito in **20.4**, in analogia con quanto visto in **11.11** per la trattazione generale.

LINEARIZZAZIONE	
Premessa	
<p>Si assuma ora che sia C_0 una configurazione di equilibrio stabile e che sia l'origine delle coordinate lagrangiane, ovvero che sia</p> <p>23.6) $C_0 \equiv (0,0, \dots, 0)$</p> <p>e assumiamo inoltre nullo il potenziale lagrangiano in C_0</p> <p>23.7) $U(0,0, \dots, 0) = 0$</p> <p>posizione che può sempre essere fatta, essendo il potenziale definito a meno di una costante additiva arbitraria.</p>	
Energia cinetica linearizzata	
23.17)	$T^*(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) = \frac{1}{2} (\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dots \quad \dot{q}_n) \begin{pmatrix} g_{11} _{C_0} & g_{12} _{C_0} & & g_{1n} _{C_0} \\ g_{21} _{C_0} & g_{22} _{C_0} & & g_{2n} _{C_0} \\ & & \ddots & \\ g_{n1} _{C_0} & g_{n2} _{C_0} & & g_{nn} _{C_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix}$
Potenziale linearizzato	
23.16)	$U^*(q_1, q_2, \dots, q_n) = \frac{1}{2} (q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_1} \Big _{C_0} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} \Big _{C_0} & & \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_n} \Big _{C_0} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_1} \Big _{C_0} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_2} \Big _{C_0} & & \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_n} \Big _{C_0} \\ & & \ddots & \\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_1} \Big _{C_0} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_2} \Big _{C_0} & & \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_n} \Big _{C_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix}$
Equazioni di Lagrange linearizzate	
23.18)	$\begin{pmatrix} g_{11} _{C_0} & g_{12} _{C_0} & & g_{1n} _{C_0} \\ g_{21} _{C_0} & g_{22} _{C_0} & & g_{2n} _{C_0} \\ & & \ddots & \\ g_{n1} _{C_0} & g_{n2} _{C_0} & & g_{nn} _{C_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \dots \\ \ddot{q}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_1} \Big _{C_0} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} \Big _{C_0} & & \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_n} \Big _{C_0} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_1} \Big _{C_0} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_2} \Big _{C_0} & & \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_n} \Big _{C_0} \\ & & \ddots & \\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_1} \Big _{C_0} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_2} \Big _{C_0} & & \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_n} \Big _{C_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix}$

Ricerca delle soluzioni delle 23.18

Si impone che la matrice del sistema lineare seguente abbia determinante nullo ottenendo n valori per ω_i^2 .

$$\begin{pmatrix} \left(g_{11}|_{c_0} \omega_i^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_1} \Big|_{c_0} \right) & \left(g_{12}|_{c_0} \omega_i^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} \Big|_{c_0} \right) & \left(g_{1n}|_{c_0} \omega_i^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_n} \Big|_{c_0} \right) \\ \left(g_{21}|_{c_0} \omega_i^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_1} \Big|_{c_0} \right) & \left(g_{22}|_{c_0} \omega_i^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_2} \Big|_{c_0} \right) & \left(g_{2n}|_{c_0} \omega_i^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_n} \Big|_{c_0} \right) \\ & \ddots & \\ \left(g_{n1}|_{c_0} \omega_i^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_1} \Big|_{c_0} \right) & \left(g_{n2}|_{c_0} \omega_i^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_2} \Big|_{c_0} \right) & \left(g_{nn}|_{c_0} \omega_i^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_n} \Big|_{c_0} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{1i} \\ \mathcal{B}_{2i} \\ \dots \\ \mathcal{B}_{ni} \end{pmatrix} = 0$$

Per ciascuno di essi si risolve il sistema lineare in $\mathcal{B}_{1i}, \mathcal{B}_{2i}, \dots, \mathcal{B}_{ni}$ e si sostituiscono i valori ottenuti nelle funzioni

23.48)

$$q_k = \sum_{i=1}^n \mathcal{B}_{ki} \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Dove gli sfasamenti φ_i vanno calcolati in funzione delle c.i.

Appendice7. Geometria delle masse

A.7.1.Introduzione. Si descrivono qui tre enti matematici utili alla descrizione della forma di un corpo e della distribuzione della sua massa. Essi sono

- momenti statici (o momenti del primo ordine)
- centro di massa
- momenti di inerzia (o momenti del secondo ordine)

Per l'esatto significato fisico di queste entità si rimanda ad altre sezioni del testo.

A.7.2. Centro di massa. Consideriamo un sistema di n punti materiali, distribuiti nello spazio, aventi rispettivamente le masse¹ m_1, m_2, \dots, m_n , essendo (x_i, y_i, z_i) la posizione dell' i -mo punto materiale rispetto a un fissato sistema di riferimento cartesiano $RC(O; x, y, z)$. Definisco centro di massa (o baricentro o centro di gravità) del sistema il punto G di coordinate

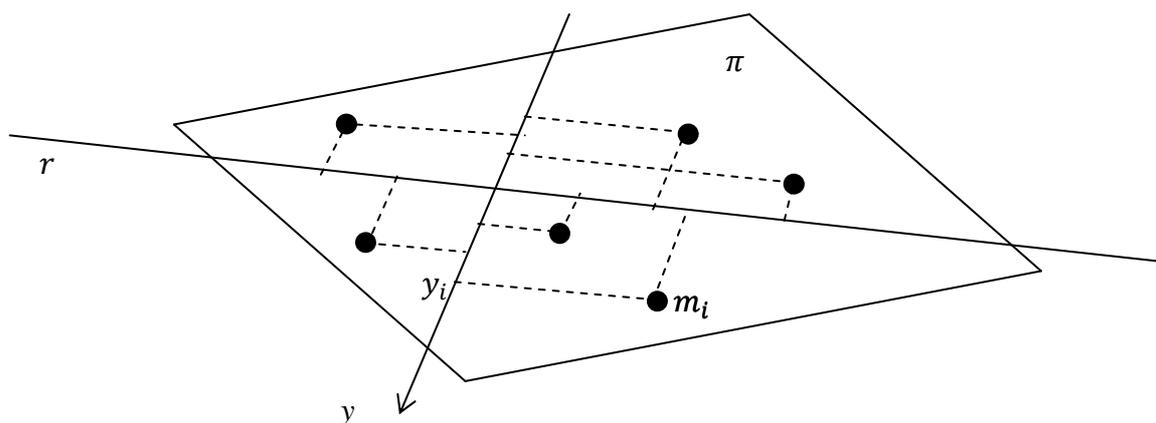
$$a.7.1) \quad x_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\mathcal{M}} \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\mathcal{M}} \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\mathcal{M}}$$

essendo $\mathcal{M} = \sum_{i=1}^n m_i$ la massa totale del sistema. Nel caso di una distribuzione continua di massa la A.7.1 si scrive

$$a.7.2) \quad x_G = \frac{\iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\mathcal{M}} \quad y_G = \frac{\iiint_{\Omega} y \rho(x, y, z) dx dy dz}{\mathcal{M}} \quad z_G = \frac{\iiint_{\Omega} z \rho(x, y, z) dx dy dz}{\mathcal{M}}$$

essendo $\rho(x, y, z)$ la densità di massa del corpo nel punto (x, y, z) e Ω il dominio occupato dal corpo stesso.

A.7.3. Momenti statici. Dalle distribuzioni spaziali di massa passiamo a una distribuzione di massa nel piano. Sia r una retta non orientata del piano π e sia y una retta orientata, sempre di π , ad essa ortogonale.



Allora definisco momento statico del sistema di masse rispetto alla retta r la quantità

$$a.7.3) \quad S_r \triangleq \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

¹ Si tenga presente che si parla di momenti statici anche nel caso in cui si abbia a che fare con volumi o con aree, piuttosto che con masse. La definizione è la stessa, naturalmente cambiano le dimensioni del momento statico stesso.

Se la distribuzione delle masse è continua il momento statico **a.7.3** si scrive

$$a.7.4) S_r = \iiint_{\Omega} y\rho(x, y, z) dx dy dz$$

Se introduciamo nel piano π un sistema di riferimento $RC(O; x, y)$ allora possiamo calcolare il momento statico del sistema di masse rispetto l'asse x , usando l'asse y per calcolare le distanze; analogamente possiamo calcolare il momento statico del sistema di masse rispetto l'asse y , usando l'asse x per calcolare le distanze. Abbiamo dunque i momenti statici

$$a.7.5) \begin{cases} S_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i \\ S_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i \end{cases}$$

Ricordando allora la definizione **A.7.1** di centro di massa, nel piano si trova il seguente legame tra momenti statici e centro di massa

$$a.7.6) \begin{cases} x_G = \frac{S_y}{M} \\ y_G = \frac{S_x}{M} \end{cases}$$

A.7.4. Proprietà di ubicazione del centro di massa. Ecco delle regole che permettono in alcuni casi di determinare la posizione del centro di massa senza dover effettuare il calcolo indicato in **a.7.1** o **a.7.2**.

- 1) Il baricentro di due elementi materiali si trova sul segmento che li congiunge. Con riferimento alla figura sussiste la seguente relazione:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

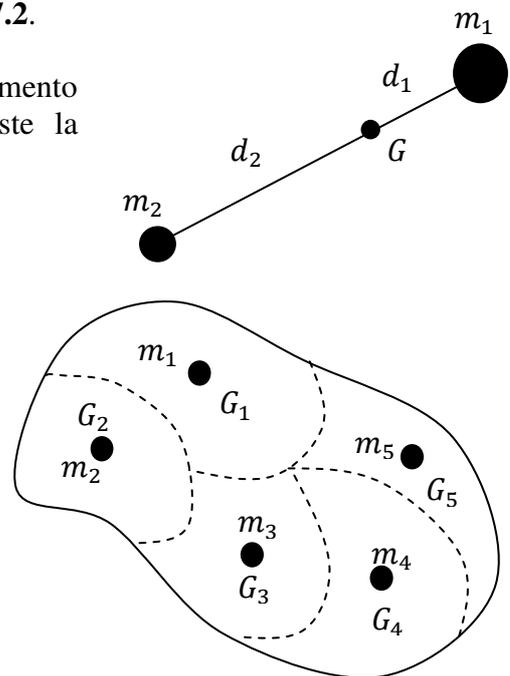
- 2) Se si divide un corpo in n parti di massa $m_1, m_2 \dots m_n$ aventi rispettivamente i centri di massa $G_1, G_2 \dots G_n$, allora il baricentro del corpo coincide con il baricentro dello schema particellare che si ottiene concentrando la massa m_i nel punto G_i .

- 3) Se un corpo si trova tutto su una retta, allora il suo baricentro si trova su quella retta.

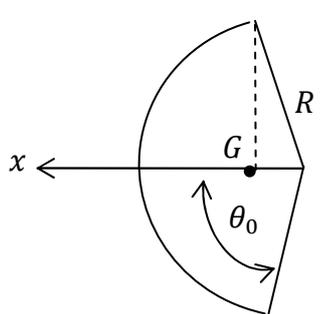
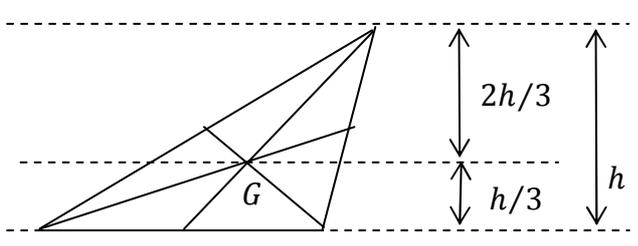
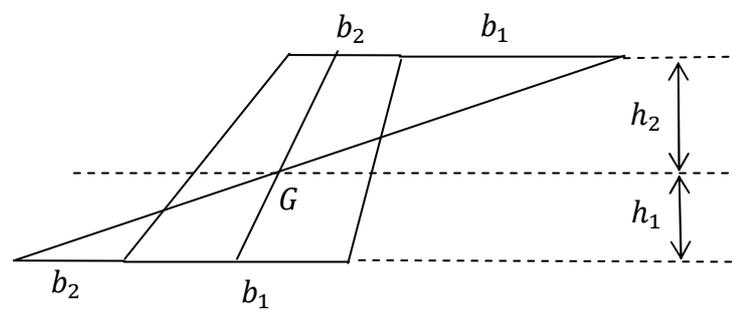
- 4) Se un corpo si trova tutto su un piano, allora il suo baricentro si trova su quel piano.

- 5) In presenza di un asse di simmetria, il baricentro si trova su tale asse; in presenza di un piano di simmetria, il baricentro si trova su tale piano.

- 6) Se la frontiera di un corpo è una figura convessa (cioè 'bombata') allora il baricentro cade dentro la frontiera stessa.



- 7) Se i punti di un corpo subiscono spostamenti tutti paralleli a una retta, allora la distanza del baricentro da tale retta non muta; stesso discorso nel caso di spostamenti tutti paralleli a un piano.
- 8) Se un corpo con densità costante ρ presenta una cavità
- si calcola prima il baricentro del corpo pensato senza cavità;
 - si calcola il baricentro di un corpo avente la forma della cavità e densità $-\rho$;
 - si calcola il baricentro del sistema particellare costituito dalle due masse (di cui una negativa) concentrate nei rispettivi baricentri.

Alcuni baricentri	
arco di circonferenza	
$x_G = \frac{R \sin \theta_0}{\theta_0}$	
Triangolo	
<p>Il baricentro coincide con l'intersezione delle mediane e dista da ciascuna base 1/3 della rispettiva altezza.</p>	
Trapezio	
$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\frac{b_1}{2} + b_2}{\frac{b_2}{2} + b_1}$	

settore circolare	
<p>Il baricentro coincide con quello dell'arco di circonferenza avente stessa ampiezza e raggio pari a due terzi di quello del segmento circolare stesso.</p> $x_G = \frac{2R \sin \theta_0}{3\theta_0}$	
$A = \theta_0 R^2$	
$S_y = \frac{2}{3} R^3 \sin \theta_0$	
segmento circolare	
$x_G = \frac{2R \sin^3 \varphi}{3(\varphi - \sin \varphi \cos \varphi)}$	
$A = R^2 (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi)$	
$S_y = \frac{2}{3} R^3 \sin^3 \varphi$	
cerchio con foro circolare	
$x_G = \frac{R}{3}$	
prismi e cilindri	
<p>Il baricentro si trova sul punto medio del segmento che unisce i baricentri delle basi.</p>	
piramidi e coni	
<p>Il baricentro coincide con quello della sezione ottenuta con un piano parallelo alla base e distante da essa 1/4 dell'altezza</p>	

A.7.5. Momento di inerzia e raggio di girazione rispetto a una retta. Dato un corpo occupante un dominio Ω e una retta non orientata r , diciamo momento di inerzia del corpo rispetto a r l'integrale

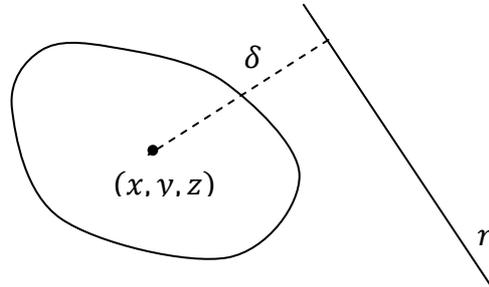
$$a.7.7) J_r \triangleq \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) \delta^2(x, y, z) dx dy dz$$

dove $\rho = \rho(x, y, z)$ è la funzione che descrive la densità del corpo e $\delta = \delta(x, y, z)$ è la funzione che indica la distanza del punto (x, y, z) da r .

In base al teorema della media integrale esiste un valore ρ_r assunto da $\delta = \delta(x, y, z)$ tale per cui

$$a.7.8) J_r = \mathcal{M} \rho_r^2$$

essendo $\mathcal{M} = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz$ la massa complessiva del corpo. Il valore ρ_r prende il nome di **raggio di girazione** del corpo rispetto alla retta r .



A.7.6. Momento di inerzia rispetto ad assi concorrenti in un medesimo punto.

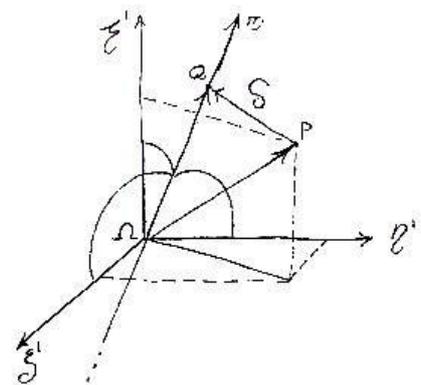
Sia r la generica retta solidale al corpo rigido e passante per Ω . Fissato il sistema di riferimento $R\Gamma^l(\Omega; \xi^l, \eta^l, \zeta^l)$ solidale al corpo rigido, siano $\alpha^l, \beta^l, \gamma^l$ i coseni direttori di r rispetto, nell'ordine, agli assi ξ^l, η^l, ζ^l . Si dimostra allora che

$$a.7.9) J_r = J_{\xi^l} \alpha^l{}^2 + J_{\eta^l} \beta^l{}^2 + J_{\zeta^l} \gamma^l{}^2 - 2J_{\xi^l \eta^l} \alpha^l \beta^l - 2J_{\xi^l \zeta^l} \alpha^l \gamma^l - 2J_{\eta^l \zeta^l} \beta^l \gamma^l$$

dove si è posto

$$a.7.10) \begin{cases} J_{\xi^l \eta^l} \triangleq \iiint_{\Omega} \rho(\xi^l, \eta^l, \zeta^l) \xi^l \eta^l d\xi^l d\eta^l d\zeta^l \\ J_{\xi^l \zeta^l} \triangleq \iiint_{\Omega} \rho(\xi^l, \eta^l, \zeta^l) \xi^l \zeta^l d\xi^l d\eta^l d\zeta^l \\ J_{\eta^l \zeta^l} \triangleq \iiint_{\Omega} \rho(\xi^l, \eta^l, \zeta^l) \eta^l \zeta^l d\xi^l d\eta^l d\zeta^l \end{cases}$$

L'integrale $J_{\xi^l \eta^l}$ è definito **prodotto d'inerzia** del corpo rispetto agli assi ξ^l, η^l e analogamente si definiscono gli altri due integrali. Per definire i coseni direttori $\alpha^l, \beta^l, \gamma^l$ è necessario attribuire un verso a r ; tuttavia è facile rilevare che J_r non dipende da tale verso: se infatti si cambia verso a r , nessuno degli addendi cambia di segno.



Per dimostrare la **a.7.8** si parte dalla definizione **a.7.7**, che con questo sistema di riferimento si scrive

$$a.7.11) J_r = \iiint_{\Omega} \rho(\xi^l, \eta^l, \zeta^l) \delta^2(\xi^l, \eta^l, \zeta^l) d\xi^l d\eta^l d\zeta^l$$

e si osserva che, aiutandoci con la figura, risulta $\delta(\xi^l, \eta^l, \zeta^l) = |\overline{PQ}|$, essendo P il punto di coordinate (ξ^l, η^l, ζ^l) e Q la proiezione del punto P su r . D'altra parte vale la relazione vettoriale

$$A.7.12) \quad \overline{\Omega P} + \overline{PQ} = \overline{\Omega Q} \Rightarrow \overline{PQ} = \overline{\Omega Q} - \overline{\Omega P}$$

In questa equazione il vettore $\overline{\Omega P}$ è completamente noto e da esso è possibile ricavare anche il vettore $\overline{\Omega Q}$. Si ha infatti che

$$\overline{\Omega Q} = \left(\overline{\Omega P} \cdot \begin{pmatrix} \alpha^l \\ \beta^l \\ \gamma^l \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \alpha^l \\ \beta^l \\ \gamma^l \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \xi^l \\ \eta^l \\ \zeta^l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha^l \\ \beta^l \\ \gamma^l \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \alpha^l \\ \beta^l \\ \gamma^l \end{pmatrix} = (\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l) \begin{pmatrix} \alpha^l \\ \beta^l \\ \gamma^l \end{pmatrix}$$

Sostituendo quanto ottenuto nella **A.7.12** abbiamo

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= (\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l) \begin{pmatrix} \alpha^l \\ \beta^l \\ \gamma^l \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi^l \\ \eta^l \\ \zeta^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l) \alpha^l - \xi^l \\ (\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l) \beta^l - \eta^l \\ (\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l) \gamma^l - \zeta^l \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta^2(\xi^l, \eta^l, \zeta^l) &= |\overline{PQ}|^2 = (\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l)^2 \alpha^l{}^2 + \xi^l{}^2 - 2(\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l) \alpha^l \xi^l + \\ &+ (\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l)^2 \beta^l{}^2 + \eta^l{}^2 - 2(\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l) \beta^l \eta^l + \\ &+ (\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l)^2 \gamma^l{}^2 + \zeta^l{}^2 - 2(\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l) \gamma^l \zeta^l = \\ &= (\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l)^2 (\alpha^l{}^2 + \beta^l{}^2 + \gamma^l{}^2) + (\xi^l{}^2 + \eta^l{}^2 + \zeta^l{}^2) - \\ &\quad - 2(\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l) (\alpha^l \xi^l + \beta^l \eta^l + \gamma^l \zeta^l) \end{aligned}$$

Si osservi ora che nel primo addendo compare, come secondo termine, il modulo del versore di r , che dunque pari a uno. Dunque, sommando poi il primo e il terzo addendo, abbiamo

$$\begin{aligned} \delta^2(\xi^l, \eta^l, \zeta^l) &= (\xi^l{}^2 + \eta^l{}^2 + \zeta^l{}^2) - (\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l)^2 = \\ &= \xi^l{}^2 + \eta^l{}^2 + \zeta^l{}^2 - \xi^l{}^2 \alpha^l{}^2 - \eta^l{}^2 \beta^l{}^2 - \zeta^l{}^2 \gamma^l{}^2 - 2\xi^l \alpha^l \eta^l \beta^l - 2\xi^l \alpha^l \zeta^l \gamma^l - 2\eta^l \beta^l \zeta^l \gamma^l = \\ &= \xi^l{}^2 (\beta^l{}^2 + \gamma^l{}^2) + \eta^l{}^2 (\alpha^l{}^2 + \gamma^l{}^2) + \zeta^l{}^2 (\alpha^l{}^2 + \beta^l{}^2) - 2\xi^l \alpha^l \eta^l \beta^l - 2\xi^l \alpha^l \zeta^l \gamma^l - 2\eta^l \beta^l \zeta^l \gamma^l = \\ &= \alpha^l{}^2 (\eta^l{}^2 + \zeta^l{}^2) + \beta^l{}^2 (\xi^l{}^2 + \zeta^l{}^2) + \gamma^l{}^2 (\xi^l{}^2 + \eta^l{}^2) - 2\xi^l \eta^l \alpha^l \beta^l - 2\xi^l \zeta^l \alpha^l \gamma^l - 2\eta^l \zeta^l \beta^l \gamma^l \end{aligned}$$

Sostituendo quanto ottenuto nella **A.7.11** abbiamo

$$\begin{aligned} J_r &= \alpha^l{}^2 \iiint_{\Omega} \rho(\xi^l, \eta^l, \zeta^l) (\eta^l{}^2 + \zeta^l{}^2) d\xi^l d\eta^l d\zeta^l + \beta^l{}^2 \iiint_{\Omega} \rho(\xi^l, \eta^l, \zeta^l) (\xi^l{}^2 + \zeta^l{}^2) d\xi^l d\eta^l d\zeta^l + \\ &+ \gamma^l{}^2 \iiint_{\Omega} \rho(\xi^l, \eta^l, \zeta^l) (\xi^l{}^2 + \eta^l{}^2) d\xi^l d\eta^l d\zeta^l - 2\alpha^l \beta^l \iiint_{\Omega} \rho(\xi^l, \eta^l, \zeta^l) \xi^l \eta^l d\xi^l d\eta^l d\zeta^l - \\ &\quad - 2\alpha^l \gamma^l \iiint_{\Omega} \rho(\xi^l, \eta^l, \zeta^l) \xi^l \zeta^l d\xi^l d\eta^l d\zeta^l - 2\eta^l \zeta^l \iiint_{\Omega} \rho(\xi^l, \eta^l, \zeta^l) \eta^l \zeta^l d\xi^l d\eta^l d\zeta^l \end{aligned}$$

Tenendo presente le definizioni **A.7.10** e **A.7.11** abbiamo la tesi.

A.7.6. Teorema di Huyghens. Sia r la generica retta solidale al corpo e r_G la retta a essa parallela passante per il centro di massa. Allora se d è la distanza fra le due rette e \mathcal{M} è la massa complessiva del corpo, risulta

$$A.7.12) \quad J_r = J_{r_G} + \mathcal{M}d^2$$

Per dimostrare questa proprietà indichiamo P il generico punto del corpo, Q la sua proiezione su r_G e R quella su r . Poiché i tre punti P, Q, R si trovano sullo stesso piano e questo è ortogonale a entrambe le rette, segue che R è anche la proiezione di Q su r , e dunque $\overline{QR} = d$. Ma consideriamo il triangolo QRP : per il teorema del coseno abbiamo

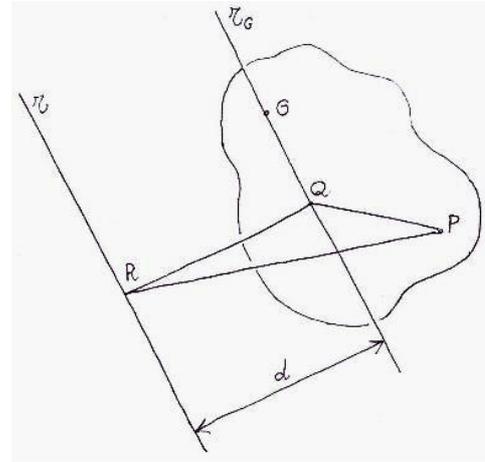
$$\begin{aligned}\overline{PR}^2 &= \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2 - 2\overline{PQ}\overline{QR} \cos \widehat{RQP} \\ &= \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2 - 2\overline{QP} \cdot \overline{QR} \\ &= \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2 - 2\overline{QP} \cdot \overline{QR}\end{aligned}$$

Considerando allora che

$$J_r = \iiint_{\Omega} \rho(P) \overline{PR}^2 dV$$

abbiamo

$$\begin{aligned}J_r &= \iiint_{\Omega} \rho(P) (\overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2 - 2\overline{QP} \cdot \overline{QR}) dV = \\ &= \iiint_{\Omega} \rho(P) \overline{PQ}^2 dV + d^2 \iiint_{\Omega} \rho(P) dV - 2\overline{QR} \cdot \iiint_{\Omega} \rho(P) \overline{QP} dV\end{aligned}$$



Si osservi che il vettore \overline{QR} può essere portato fuori dall'operatore integrale, nel terzo addendo, perché in realtà non varia al variare di P . Ricordando le definizioni **A.7.7** e **A.7.2** abbiamo allora

$$J_r = J_{r_G} + d^2 \mathcal{M} - 2\overline{QR} \cdot \overline{QG}$$

Ma essendo $\overline{QR} \perp \overline{QG}$ si ha la tesi.

A.7.7. Ellissoide di inerzia. Sia Ω un punto qualunque dello spazio solidale al corpo rigido; sia r la generica retta passante per Ω e solidale al corpo rigido; sia Λ il punto generico della retta r . Data allora un'arbitraria costante positiva χ , definisco ellissoide d'inerzia del corpo rispetto al punto Ω il luogo² dei punti Λ che soddisfano la condizione

$$\text{a.7.13) } |\overline{\Omega\Lambda}| = \sqrt{\frac{\chi}{J_r}}$$

Fissando un sistema di riferimento $R\Gamma^l(\Omega; \xi^l, \eta^l, \zeta^l)$ è possibile scrivere la **A.7.13** nella forma

$$\text{a.7.14) } J_{\xi^l} \xi^{l2} + J_{\eta^l} \eta^{l2} + J_{\zeta^l} \zeta^{l2} - 2J_{\xi^l \eta^l} \xi^l \eta^l - 2J_{\xi^l \zeta^l} \xi^l \zeta^l - 2J_{\eta^l \zeta^l} \eta^l \zeta^l = \chi$$

ovvero nella forma

$$\text{a.7.15) } (\xi^l \quad \eta^l \quad \zeta^l) \begin{pmatrix} J_{\xi^l} & -J_{\xi^l \eta^l} & -J_{\xi^l \zeta^l} \\ -J_{\xi^l \eta^l} & J_{\eta^l} & -J_{\eta^l \zeta^l} \\ -J_{\xi^l \zeta^l} & -J_{\eta^l \zeta^l} & J_{\zeta^l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^l \\ \eta^l \\ \zeta^l \end{pmatrix} = \chi$$

² Si deve pensare che la retta r ruota attorno al punto Ω mentre il punto Λ è libero di scorrere su di essa; al variare dell'orientamento spaziale di r poi varierà il valore di J_r .

Questa superficie risulta essere effettivamente un ellissoide centrato in Ω e con assi, in generale, non coincidenti con quelli del sistema di riferimento, che per altro è stato orientato in modo arbitrario.

Seguono i passaggi che permettono di ottenere la **A.7.14** dalla **A.7.13**. Posto $\Lambda \equiv (\xi^l, \eta^l, \zeta^l)$ e ricordando la **A.7.9**, abbiamo

$$\text{a.7.16)} \sqrt{\xi^l{}^2 + \eta^l{}^2 + \zeta^l{}^2} = \sqrt{\frac{\chi}{J_{\xi^l} \alpha^l{}^2 + J_{\eta^l} \beta^l{}^2 + J_{\zeta^l} \gamma^l{}^2 - 2J_{\xi^l \eta^l} \alpha^l \beta^l - 2J_{\xi^l \zeta^l} \alpha^l \gamma^l - 2J_{\eta^l \zeta^l} \beta^l \gamma^l}}$$

Si consideri ora che, detto \hat{r} il versore della retta r , risulta

$$\xi^l = \overline{\Omega\Lambda} \cdot \hat{r} = |\overline{\Omega\Lambda}| \alpha^l = \sqrt{\xi^l{}^2 + \eta^l{}^2 + \zeta^l{}^2} \alpha^l \Rightarrow \alpha^l{}^2 = \frac{\xi^l{}^2}{\xi^l{}^2 + \eta^l{}^2 + \zeta^l{}^2}$$

Analogamente si ha

$$\beta^l{}^2 = \frac{\eta^l{}^2}{\xi^l{}^2 + \eta^l{}^2 + \zeta^l{}^2} \quad \gamma^l{}^2 = \frac{\zeta^l{}^2}{\xi^l{}^2 + \eta^l{}^2 + \zeta^l{}^2}$$

Sostituendo queste tre relazioni nella **A.7.16** abbiamo

$$\sqrt{\xi^l{}^2 + \eta^l{}^2 + \zeta^l{}^2} = \sqrt{\chi \frac{\xi^l{}^2 + \eta^l{}^2 + \zeta^l{}^2}{J_{\xi^l} \xi^l{}^2 + J_{\eta^l} \eta^l{}^2 + J_{\zeta^l} \zeta^l{}^2 - 2J_{\xi^l \eta^l} \xi^l \eta^l - 2J_{\xi^l \zeta^l} \xi^l \zeta^l - 2J_{\eta^l \zeta^l} \eta^l \zeta^l}}$$

Semplificando e elevando al quadrato otteniamo la **A.7.14**.

A.7.8. Assi principali e assi centrali di inerzia. Sia Ω il generico punto solidale al corpo. Allora si pongono le seguenti definizioni.

Asse principale di inerzia relativo al punto Ω	ognuno degli assi di simmetria dell'ellissoide di inerzia con centro nel punto Ω
Piano principale di inerzia relativo al punto Ω	ognuno dei piani individuati da due degli assi principali di inerzia relativi al punto Ω
Terna principale di inerzia relativa al punto Ω	ogni terna cartesiana ortogonale che sia centrata in Ω e che abbia gli assi sovrapposti a tre degli assi ³ di simmetria dell'ellissoide relativo al punto Ω ; in questo teso le terne principali di inerzia sono indicate $R\Gamma(\Omega; \xi, \eta, \zeta) = R\Gamma(\Omega; \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$

³ Un ellissoide ha sempre almeno tre assi di simmetria: se i tre semiassi sono diversi fra loro, gli assi di simmetria sono solo tre; se ve ne sono due uguali, allora gli assi di simmetria sono infiniti a uno; se sono tutti e tre uguali, allora gli assi di simmetria sono infiniti a due.

Momento principale di inerzia relativo al punto Ω	ogni momento di inerzia del corpo che sia calcolato rispetto a un asse principale di inerzia relativo al punto Ω
--	---

Se in particolare il punto Ω coincide con il baricentro G del corpo, allora si fanno le definizioni seguenti.

Ellissoide centrale di inerzia	è l'ellissoide di inerzia relativo al baricentro
Asse centrale di inerzia	ognuno degli assi di simmetria dell'ellissoide centrale di inerzia
Piano centrale di inerzia	ogni piano passante per il baricentro che contenga almeno due assi centrali di inerzia
Terna centrale di inerzia	ogni terna cartesiana ortogonale avente centro nel baricentro e assi sovrapposti a tre assi centrali di inerzia; in questo testo ci riferiamo alla terna centrale di inerzia con la simbologia $R\Gamma(G; \xi, \eta, \zeta) = R\Gamma(G; \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$
Momento centrale di inerzia	ogni momento di inerzia che sia calcolato rispetto a un asse centrale di inerzia

È possibile dimostrare (ma per questo rimando al manoscritto di Meccanica Razionale) le seguenti due proposizioni:

Un asse centrale di inerzia è anche asse principale rispetto a ogni suo punto
Un piano centrale di inerzia è anche piano principale di inerzia rispetto a ogni suo punto

A.7.9. Ricerca degli assi principali di inerzia: metodo matematico. Dato il generico sistema di riferimento $R\Gamma^l(\Omega; \xi^l, \eta^l, \zeta^l) = R\Gamma^l(\Omega; \hat{e}_1^l, \hat{e}_2^l, \hat{e}_3^l)$, l'ellissoide di inerzia centrato in Ω , come abbiamo visto ha equazione

$$a.7.17) \begin{pmatrix} \xi^l & \eta^l & \zeta^l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi^l} & -J_{\xi^l \eta^l} & -J_{\xi^l \zeta^l} \\ -J_{\xi^l \eta^l} & J_{\eta^l} & -J_{\eta^l \zeta^l} \\ -J_{\xi^l \zeta^l} & -J_{\eta^l \zeta^l} & J_{\zeta^l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^l \\ \eta^l \\ \zeta^l \end{pmatrix} = \chi$$

Stante allora la definizione di terna principale di inerzia, segue che la seconda terna $R\Gamma(\Omega; \xi, \eta, \zeta) = R\Gamma(G; \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ è terna principale se e solo se rispetto a essa l'equazione dell'ellissoide di inerzia si riconduce alla forma canonica

$$\text{a.7.18)} \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \chi$$

La ricerca degli assi principali dunque non è altro che la ricerca di quegli assi di riferimento rispetto ai quali

Richiamo allora alcune nozioni di algebra lineare. Sia Λ un punto dell'ellissoide le cui coordinate rispetto a $R\Gamma$ siano date dal vettore colonna X , mentre quelle rispetto a $R\Gamma^1$ siano date dal vettore Y . Ma il punto è lo stesso, dunque deve risultare

$$(\hat{\varepsilon}_1 \quad \hat{\varepsilon}_2 \quad \hat{\varepsilon}_3)X = (\hat{\varepsilon}_1^1 \quad \hat{\varepsilon}_2^1 \quad \hat{\varepsilon}_3^1)Y$$

Se ora indico P la matrice 3×3 le cui colonne sono le coordinate dei versori di $R\Gamma^1$ rispetto a quelli di $R\Gamma$, posso anche scrivere

$$\text{a.7.19)} (\hat{\varepsilon}_1 \quad \hat{\varepsilon}_2 \quad \hat{\varepsilon}_3)P = (\hat{\varepsilon}_1^1 \quad \hat{\varepsilon}_2^1 \quad \hat{\varepsilon}_3^1) \Leftrightarrow (\hat{\varepsilon}_1 \quad \hat{\varepsilon}_2 \quad \hat{\varepsilon}_3) = (\hat{\varepsilon}_1^1 \quad \hat{\varepsilon}_2^1 \quad \hat{\varepsilon}_3^1)P^T$$

e dunque, sostituendo questa in quella precedente, si ha

$$(\hat{\varepsilon}_1 \quad \hat{\varepsilon}_2 \quad \hat{\varepsilon}_3)X = (\hat{\varepsilon}_1 \quad \hat{\varepsilon}_2 \quad \hat{\varepsilon}_3)PY \Leftrightarrow (\hat{\varepsilon}_1 \quad \hat{\varepsilon}_2 \quad \hat{\varepsilon}_3)(X - PY) = 0$$

Poiché i versori di un sistema di riferimento ortogonale sono L.I. la equazione indicata è soddisfatta se e solo se $(X - PY) = 0$ ovvero se e solo se

$$\text{a.7.20)} X = PY \Leftrightarrow P^T X = Y$$

Nelle **a.7.20** e **a.7.19** si è tenuto conto che la matrice P , in quanto matrice di passaggio di base fra due basi ortogonali, è tale per cui la trasposta coincide con l'inversa.

Vediamo allora come si esprime la equazione **a.7.17** quando si effettua un cambio del sistema di riferimento.

$$Y^T \begin{pmatrix} J_{\xi^1} & -J_{\xi^1\eta^1} & -J_{\xi^1\zeta^1} \\ -J_{\xi^1\eta^1} & J_{\eta^1} & -J_{\eta^1\zeta^1} \\ -J_{\xi^1\zeta^1} & -J_{\eta^1\zeta^1} & J_{\zeta^1} \end{pmatrix} Y = \chi \Leftrightarrow (P^T X)^T \begin{pmatrix} J_{\xi^1} & -J_{\xi^1\eta^1} & -J_{\xi^1\zeta^1} \\ -J_{\xi^1\eta^1} & J_{\eta^1} & -J_{\eta^1\zeta^1} \\ -J_{\xi^1\zeta^1} & -J_{\eta^1\zeta^1} & J_{\zeta^1} \end{pmatrix} P^T X = \chi \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow X^T P M P^T X = \chi$$

avendo indicato M la matrice dei momenti di inerzia. D'altra parte questa stessa equazione si scrive anche $X^T \tilde{M} X = \chi$, dove \tilde{M} è la matrice dei momenti di inerzia calcolati rispetto ai nuovi assi di riferimento. Confrontando le due equazioni dell'ellissoide abbiamo $X^T P M P^T X = X^T \tilde{M} X$ da cui

$$X^T P M P^T X - X^T \tilde{M} X = 0 \Leftrightarrow (X^T P M P^T - X^T \tilde{M}) X = 0$$

Dovendo questa relazione valere comunque si scelga X , deve essere necessariamente

$$X^T P M P^T - X^T \tilde{M} = 0 \Leftrightarrow X^T (P M P^T - \tilde{M}) = 0$$

e ragionando come sopra si conclude che

$$a.7.21) \quad PMP^T = \tilde{M} \Leftrightarrow M = P^T \tilde{M}P$$

Ora diciamo che la matrice \tilde{M} sia una la matrice diagonale della **A.7.18**. Allora si ha

$$M = P^T \tilde{M}P = P^T \begin{pmatrix} J_\xi P_1 \\ J_\eta P_2 \\ J_\zeta P_3 \end{pmatrix} = (P^1 \quad P^2 \quad P^3) \begin{pmatrix} J_\xi P_1 \\ J_\eta P_2 \\ J_\zeta P_3 \end{pmatrix} = (J_\xi P^1 P_1 \quad J_\eta P^2 P_2 \quad J_\zeta P^3 P_3)$$

dove si è indicato con P^1 la prima colonna di P , con P_1 la prima riga, e così via. Moltiplicando ora a destra per P^1 si ha

$$MP^1 = J_\xi P^1 P_1 P^1 + J_\eta P^2 P_2 P^1 + J_\zeta P^3 P_3 P^1$$

Ma in una matrice ortogonale la trasposta coincide con l'inversa e dunque si ha

$$MP^1 = J_\xi P^1$$

Analogamente si ricavano le relazioni $MP^2 = J_\eta P^2$ e $MP^3 = J_\zeta P^3$. Tutto questo per concludere che per avere il sistema di riferimento rispetto al quale l'ellissoide ha equazione nella forma canonica **a.7.18**, ovvero per avere un sistema di riferimento con assi sovrapposti agli assi principali di inerzia, dobbiamo cercare quegli assi i cui vettori direttori abbiano coordinate Y , rispetto al sistema di riferimento di partenza, tali per cui

$$a.7.22) \quad MY = \lambda Y \Leftrightarrow (M - \lambda I)Y = 0$$

Se Y soddisfa questa relazione allora il vettore coordinate di un vettore direttore di un asse principale di inerzia il cui momento di inerzia relativo è λ . Ma il sistema lineare **a.7.22** è omogeneo, dunque affinché vi sia almeno una soluzione oltre quella nulla, si deve richiedere che il determinante della matrice dei coefficienti sia nullo. In conclusione la ricerca degli assi principali di inerzia si riconduce alla soluzione della equazione di terzo grado in λ

$$a.7.23) \quad \det(M - \lambda I) = 0$$

le cui soluzioni sono i momenti principali di inerzia, che sostituiti nel sistema lineare **a.7.22** forniscono i vettori direttori delle relative direzioni principali di inerzia. Riepilogo il procedimento nella tabella seguente.

Ricerca degli assi centrali di inerzia e dei relativi momenti di inerzia	
prima fase	<p style="text-align: center;">Si risolve l'equazione</p> $\det(\mathbb{M} - \lambda I) = 0$ <p style="text-align: center;">di terzo grado in λ, dove \mathbb{M} è la matrice</p> $\mathbb{M} = \begin{pmatrix} J_{\xi^1} & -J_{\xi^1\eta^1} & -J_{\xi^1\zeta^1} \\ -J_{\xi^1\eta^1} & J_{\eta^1} & -J_{\eta^1\zeta^1} \\ -J_{\xi^1\zeta^1} & -J_{\eta^1\zeta^1} & J_{\zeta^1} \end{pmatrix}$ <p style="text-align: center;">essendo $R\Gamma^1(\Omega; \xi^1, \eta^1, \zeta^1)$ il sistema di riferimento di partenza.</p>
seconda fase	<p style="text-align: center;">Le soluzioni della prima fase sono i momenti principali di inerzia che sostituiti nel sistema lineare</p> $(\mathbb{M} - \lambda I)Y = 0$ <p style="text-align: center;">permettono di ricavare le coordinate, rispetto $R\Gamma^1(\Omega; \xi^1, \eta^1, \zeta^1)$, dei vettori direttori dei relativi assi principali di inerzia.</p>

A.7.10. Ricerca degli assi principali di inerzia: metodo semplificato. Se conosciamo già una direzione principale di inerzia (e dunque un piano principale di inerzia), come succede ad esempio nel caso di figure piane, le quali giacciono su un loro piano centrale di inerzia, conviene disporre il sistema di riferimento $R\Gamma^1(\Omega; \xi^1, \eta^1, \zeta^1)$ in modo che un asse, diciamo l'asse ζ^1 , sia già sovrapposto all'asse principale noto.

Si fissi dunque l'anomalia θ (angolo con verso positivo assegnato) con il verso positivo indicato in figura. Allora il momento di inerzia rispetto all'asse r risulta dato, in base alla **a.7.9**, da

$$J_r = J_{\xi^1}\alpha^2 + J_{\eta^1}\beta^2 - 2J_{\xi^1\eta^1}\alpha\beta = J_{\xi^1}\cos^2\theta + J_{\eta^1}\sin^2\theta - 2J_{\xi^1\eta^1}\cos\theta\sin\theta$$

ovvero da

$$\text{a.7.24) } J_r = J_{\xi^1}\cos^2\theta + J_{\eta^1}\sin^2\theta - J_{\xi^1\eta^1}\sin 2\theta$$

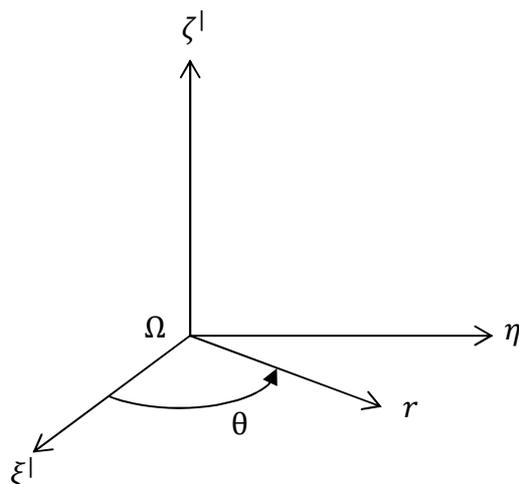
Per ricavare le direzioni principali del piano $\xi^1\eta^1$ (che possono essere o due, o infinite) è sufficiente, se si pensa alla forma dell'ellissoide, cercare i punti estremali della funzione trigonometrica ottenuta, cioè i valori di θ per i quali si annulla la derivata. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{dJ_r(\theta)}{d\theta} &= -J_{\xi^1}2\cos\theta\sin\theta + J_{\eta^1}2\sin\theta\cos\theta - J_{\xi^1\eta^1}2\cos 2\theta = \\ &= (-J_{\xi^1} + J_{\eta^1})\sin 2\theta - J_{\xi^1\eta^1}2\cos 2\theta = 0 \end{aligned}$$

A questo punto escludendo il caso in cui sia $J_{\xi^l} = J_{\eta^l} \Leftrightarrow -J_{\xi^l} + J_{\eta^l} = 0$ (nel quale, considerando che l'ellissoide ha allora due semiassi uguali, segue che tutte le direzioni del piano sono principali), si trova l'equazione

$$\text{A.7.25) } \quad \tan 2\theta = \frac{2J_{\xi^l\eta^l}}{J_{\eta^l} - J_{\xi^l}}$$

la quale fornisce due direzioni ortogonali (visto che il periodo della funzione tangente è pari a un angolo piatto), come ci si aspetta. Sostituendo poi questi due valori dell'anomalia nella A.7.24 si ottengono i relativi momenti di inerzia. Riassumo in questa tabella.



Ricerca degli assi centrali di inerzia e dei relativi momenti di inerzia nota una direzione principale	
1	Orientiamo il sistema di riferimento $R\Gamma^l(\Omega; \xi^l, \eta^l, \zeta^l)$ in modo che l'asse ζ^l sia sovrapposto alla direzione principale nota
2	Si introduce l'anomalia θ con verso positivo che da ξ^l va a η^l (ad esempio)
3	Se $J_{\eta^l} = J_{\xi^l}$ ogni valore di θ individua una direzione principale (caso dell'ellissoide rotondo)
4	Se $J_{\eta^l} \neq J_{\xi^l}$ le due soluzioni θ_1, θ_2 della equazione $\tan 2\theta = \frac{2J_{\xi^l\eta^l}}{J_{\eta^l} - J_{\xi^l}}$ forniscono le due direzioni principali di inerzia (ortogonali fra loro)
5	Sostituendo θ_1, θ_2 nella equazione $J_r = J_{\xi^l} \cos^2 \theta + J_{\eta^l} \sin^2 \theta - J_{\xi^l\eta^l} \sin 2\theta$ si ricavano i momenti principali relativi alle due direzioni principali trovate.

A.7.11. Ricerca degli assi principali di inerzia: criteri geometrici. È possibile semplificare la ricerca degli assi principali di inerzia utilizzando, se possibile, le seguenti proprietà legate alla geometria del corpo, per la cui dimostrazione si rimanda al Bordoni.

Se un corpo possiede un **piano di simmetria ortogonale**, allora tale piano è piano centrale di inerzia e dunque è anche piano principale di inerzia rispetto ad ogni suo punto. La retta ortogonale a tale piano e passante per il baricentro è asse centrale di inerzia e dunque è anche asse principale di inerzia rispetto a ogni suo punto.

Se un corpo possiede **due piani di simmetria ortogonale**, allora la loro intersezione è asse centrale di inerzia e dunque anche asse principale di inerzia rispetto a ogni suo punto.

Nel caso di **figura piana** il piano della stessa è piano centrale di inerzia. Inoltre si ha

$$J_{\zeta^l} = J_{\xi^l} + J_{\eta^l}$$

dove si intende che l'asse ζ^l è quello ortogonale al piano della figura.

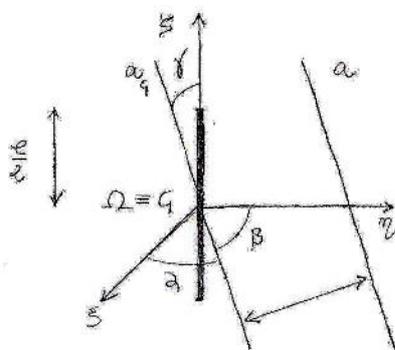
Nel caso di una figura piana [tridimensionale] il momento di inerzia rispetto a un asse a non cambia se si divide la figura in strisce [fette] parallele a r , e le si trasla parallelamente ad r .

Nel caso di una figura piana se si moltiplicano le strisce di cui sopra tutte per il medesimo fattore, il momento di inerzia rispetto a r risulta moltiplicato per lo stesso fattore.

Seguono i momenti di inerzia di alcune figure geometriche e di alcuni solidi. Si osservi che questi enti sono privi di massa e dunque, nelle applicazioni pratiche, questi momenti di inerzia andranno moltiplicati per la densità di massa del corpo (questa operazione è legittima solo nel caso in cui si abbia densità di massa costante).

Alcuni momenti di inerzia

segmento

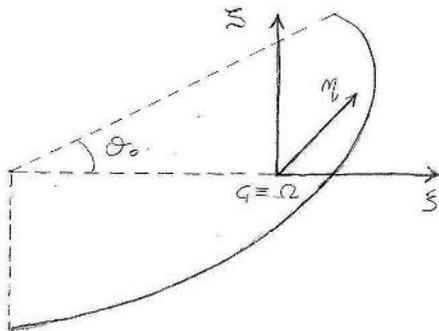


$$j_z = 0, \quad j_x = j_y = \frac{e^3}{12}$$

$$j_{a_x} = \frac{e^3}{12} (\alpha^2 + \beta^2)$$

$$j_{a_z} = \frac{e^3}{12} (\alpha^2 + \beta^2) + e d^2$$

arco di circonferenza

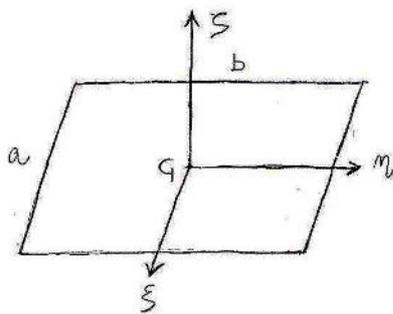


$$j_S = 2R\theta_0 \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^2 \sin^2 \theta_0}{4\theta_0} \right] = 2R\theta_0 \rho_S^2$$

$$j_S = 2R\theta_0 \left[R^2 - \frac{R^2 \sin^2 \theta_0}{\theta_0^2} \right] = 2R\theta_0 \rho_S^2$$

$$j_G = j_S - j_S$$

rettangolo



$$j_S = ab \frac{b^2}{12} = ab \rho_S^2$$

$$j_\eta = ab \frac{a^2}{12} = ab \rho_\eta^2$$

$$j_S = ab \frac{a^2 + b^2}{12} = ab \rho_S^2$$

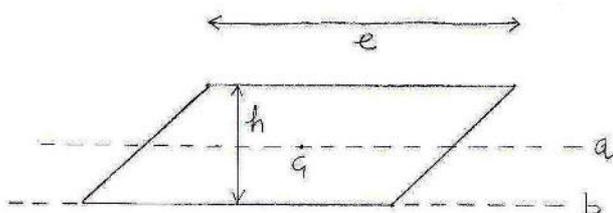
quadrato

$$j_S = j_\eta = a^2 \frac{a^2}{12} = a^2 \rho^2$$

$$j_S = a^2 \frac{a^2}{6} = a^2 \rho_S^2$$

L'asse S è uno giro scapico.

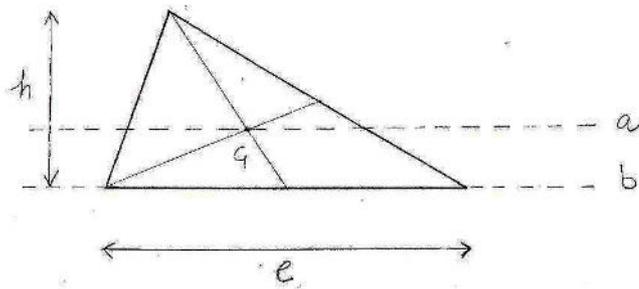
parallelogramma



$$j_a = h e \frac{h^2}{12} = h e \rho_a^2$$

$$j_b = h e \frac{h^2}{3} = h e \rho_b^2$$

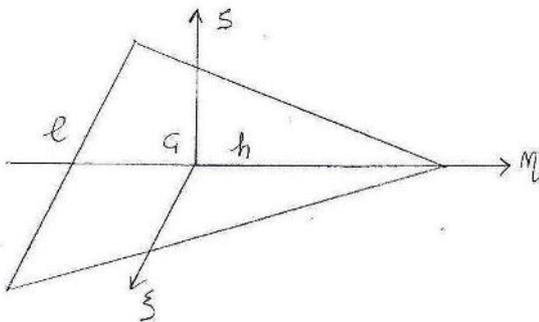
triangolo



$$j_a = \frac{he}{2} \frac{h^2}{18} = \frac{he}{2} s_a^2$$

$$j_b = \frac{he}{2} \frac{h^2}{6} = \frac{he}{2} s_b^2$$

triangolo isoscele



$$j_S = \frac{he}{2} \frac{h^2}{18} = \frac{he}{2} s_S^2$$

$$j_M = \frac{he}{2} \frac{e^2}{24} = \frac{he}{2} s_M^2$$

$$j_S = j_S + j_M$$

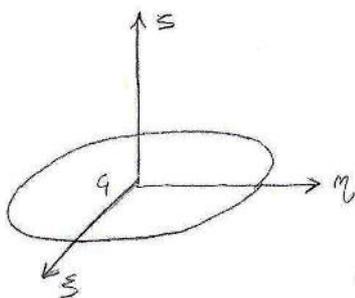
triangolo equilatero

$$j_S = j_M = \frac{\sqrt{3}e^2}{2} \frac{e^2}{24} = \frac{\sqrt{3}e^2}{2} s^2$$

l'asse S è, come
già esprime.

$$j_S = \frac{\sqrt{3}e^2}{2} \frac{e^2}{12} = \frac{\sqrt{3}e^2}{2} s^2$$

cerchio

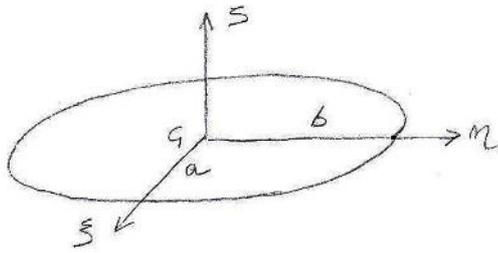


$$j_S = \pi R^2 \frac{R^2}{4} = \pi R^2 s^2 = j_M$$

$$j_S = \pi R^2 \frac{R^2}{2} = \pi R^2 s_S^2$$

l'asse S è, come
già esprime.

ellisse

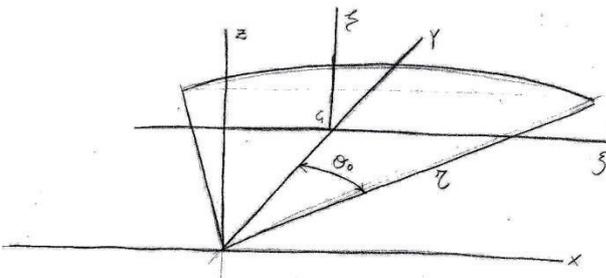


$$j_{\xi} = \pi ab \frac{b^2}{4} = \pi ab s_{\xi}$$

$$j_{\eta} = \pi ab \frac{a^2}{4} = \pi ab s_{\eta}$$

$$j_s = j_{\xi} + j_{\eta}$$

settore circolare



$$j_x = \frac{r^4}{4} (\theta_0 + \sin \theta_0 \cos \theta_0)$$

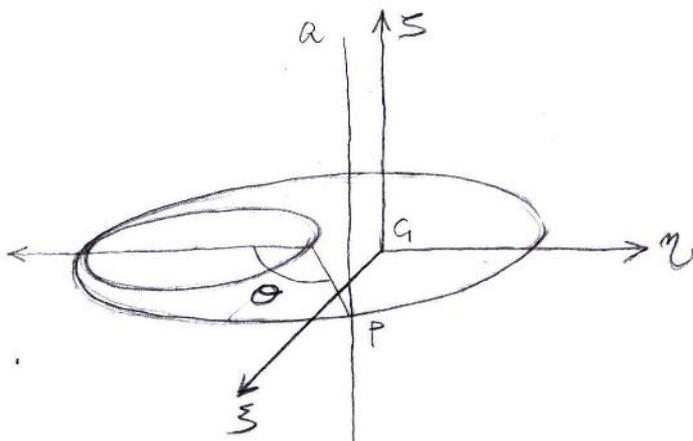
$$j_z = \frac{r^4}{2} \theta_0$$

$$j_y = \frac{r^4}{4} (\theta_0 - \sin \theta_0 \cos \theta_0)$$

$$j_{\xi} = \frac{r^4}{4} (\theta_0 + \sin \theta_0 \cos \theta_0) - \frac{4r^4 \sin^2 \theta_0}{9\theta_0}$$

$$j_{\zeta} = \frac{r^4}{2} \theta_0 - \frac{4r^4 \sin^2 \theta_0}{9\theta_0}$$

cerchio con foro circolare



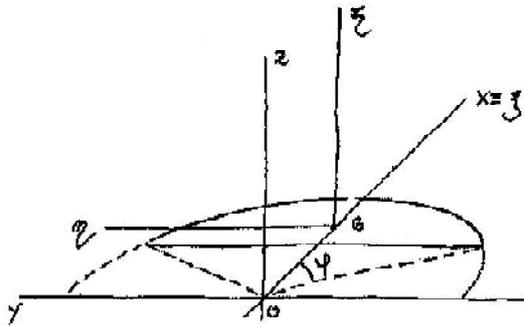
$$J_{\xi} = \frac{29}{30} MR^2$$

$$J_{\eta} = \frac{5}{4} MR^2$$

$$J_{\zeta} = \frac{37}{18} MR^2$$

$$J_a = \frac{37 + 8 \cos \theta}{6} MR^2$$

segmento circolare



$$J_{\xi} = J_x$$

$$J_{\eta} = J_y - \frac{4r^4}{9} \left(\frac{\sin^6 \varphi}{\varphi - \sin \varphi \cos \varphi} \right)$$

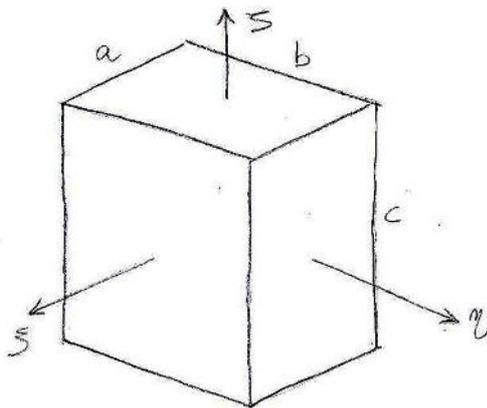
$$J_{\zeta} = J_z - \frac{4r^4}{9} \left(\frac{\sin^6 \varphi}{\varphi - \sin \varphi \cos \varphi} \right)$$

$$J_x = \frac{r^4}{6} \left(\varphi - \frac{2}{3} \sin^3 \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \varphi \right)$$

$$J_y = \frac{r^4}{4} \left(\varphi - 2 \sin \varphi \cos^3 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi \right)$$

$$J_z = \frac{r^4}{6} \left(3\varphi + 2 \sin^3 \varphi \cos \varphi - 3 \sin \varphi \cos \varphi \right)$$

parallelepipedo retto

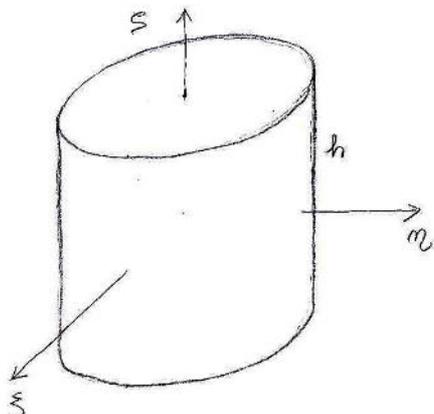


$$j_{\xi} = abc \frac{b^2 + c^2}{12}$$

$$j_{\eta} = abc \frac{a^2 + c^2}{12}$$

$$j_{\zeta} = abc \frac{a^2 + b^2}{12}$$

cilindro circolare



$$j_{\xi} = \pi R^2 h \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) = j_{\eta}$$

$$j_{\zeta} = \pi R^2 h \frac{R^2}{2}$$

L'asse ξ è un asse giroscopico.

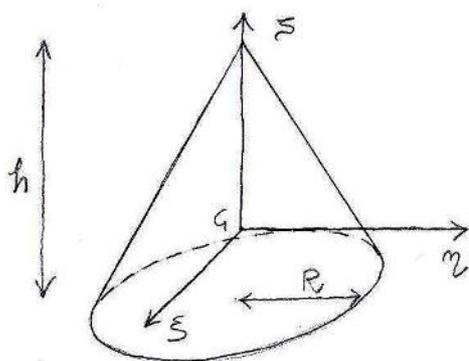
palla e sfera

Palla : $j = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{2}{5} R^2$

Sfera : $j = 4 \pi R^2 \frac{2}{3} R^2$

Ogni asse baricentrale è asse centrale di inerzia nonché asse giroscopico.

cono circolare



$$J_{\xi} = J_z = \frac{3}{20} M (R^2 + \frac{h^2}{4})$$

$$J_{\xi} = \frac{3}{10} M R^2$$