Capitolo 1. Successioni numeriche

1.1. Successioni convergenti e divergenti. Sottosuccessioni.

Con la simbologia (a_n) indichiamo una successione infinita di numeri reali $a_1, a_2, \ldots$ che diciamo appunto **successione numerica**. Una successione numerica si dice **convergente** quando esiste un numero reale l tale che, preso un numero reale $\varepsilon > 0$ comunque piccolo, è possibile individuare un numero intero k per il quale si abbia

$$\forall n > k \Longrightarrow |a_n - l| < \varepsilon$$

Allora si dice che **la successione (a_n) converge a l** il che si traduce simbolicamente nella scrittura

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = l$$

Analogamente si dirà che **la successione numerica diverge a** $+\infty$ se preso un numero reale $L > 0$ comunque grande, esiste un numero intero k per il quale si abbia

$$\forall n > k \Longrightarrow a_n > L$$

il che si traduce simbolicamente nella scrittura

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = +\infty$$

Analogamente si definisce la divergenza a $-\infty$. Si parla poi di **successione infinitesima** quando si ha convergenza a zero. In ogni caso una successione che ammetta limite si dice **regolare**; se invece la successione numerica non converge e non diverge, allora si dirà che essa **non ammette limite** o che è **irregolare**.

Si parla di **successione infinita** quando la successione del valore assoluto dei suoi termini diverge (necessariamente a $+\infty$). Dunque la successione (a_n) è infinita se risulta $|a_n| \to +\infty$.

Si parla invece di **successione assolutamente convergente** quando la successione del valore assoluto dei suoi termini converge. Dunque la successione (a_n) è assolutamente convergente se risulta $|a_n| \to l$.

Sottosuccessioni. Data una successione (a_n) e una successione crescente di interi $p_1 < p_2 < p_3 \ldots$ definiamo **sottosuccessione** di (a_n) la successione (b_n) definita da

$$b_1 = a_{p_1}, b_2 = a_{p_2}, b_3 = a_{p_3} \ldots, b_n = a_{p_n}$$

1.2. Teoremi sui limiti.

Dalla definizione di limite discendono le seguenti proposizioni.

TEO. 1.2.1. Unicità del limite. Non è possibile che una successione numerica ammetta due limiti distinti. Se infatti così fosse (ragionando per assurdo), fissato comunque $\varepsilon > 0$, si dovrebbe individuare un numero k tale che per $n > k$ si abbia

$$\begin{cases} |a_n - l_1| < \varepsilon \\ |a_n - l_2| < \varepsilon \end{cases} \Longrightarrow |a_n - l_1| + |l_2 - a_n| < 2\varepsilon \Longrightarrow |a_n - l_1 + l_2 - a_n| < 2\varepsilon \Rightarrow |l_2 - l_1| < 2\varepsilon$$

Ma questa diseguaglianza non può valere, palesemente, $\forall\varepsilon$, cioè si è ottenuta una relazione assurda e dunque la tesi è dimostrata.

TEO. 1.2.2. Convergenza e divergenza. Non è possibile che una successione numerica sia contemporaneamente divergente (ad esempio a più infinito) e convergente. Se infatti così fosse avremmo definitivamente

$$|a_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - l < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon + l < a_n < \varepsilon + l$$
$$a_n > L$$

Per cui dovrebbe in particolare risultare definitivamente

$$L < a_n < \varepsilon + l$$

E questo dovrebbe aversi comunque si scelgano L, ε, il che è assurdo. Analogamente si dimostra la seguente proposizione.

TEO. 1.2.3. Divergenze. Non è possibile che una successione numerica sia contemporaneamente divergente a più infinito e a meno infinito.

TEO. 1.2.3. Valore assoluto. Se la successione numerica (a_n) converge a l, allora la successione $(|a_n|)$ converge a $|l|$. Infatti l'ipotesi ci dice che definitivamente si ha $|a_n - l| < \varepsilon$, ma poiché evidentemente $\big||a_n| - |l|\big| \leq |a_n - l|$, segue la tesi.

TEO. 1.2.4. Permanenza del segno. Se la successione (a_n) converge a l, allora i suoi termini hanno definitivamente lo stesso segno del limite. Infatti definitivamente si ha

$$|a_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - l < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon + l < a_n < \varepsilon + l$$

Per cui se $l < 0$, essendo ε arbitrariamente piccolo, deve aversi $-\varepsilon + l < a_n < 0$. Analogamente se $l > 0$, allora si avrà $0 < -\varepsilon + l < a_n$. Analogamente si dimostra che se una successione converge a più infinito, allora i suoi termini sono definitivamente positivi; se invece converge a meno infinito, allora i suoi termini sono definitivamente negativi.

TEO. 1.2.5. Del confronto. Date le due successioni convergenti $(a_n), (b_n)$ allora se risulta definitivamente $a_n < b_n$ segue che

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) \leq \lim_{n\to\infty}(b_n)$$

Infatti si avrà definitivamente

$$\begin{cases} -\varepsilon + \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) < a_n < \varepsilon + \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) \\ a_n < b_n \\ -\varepsilon + \lim\limits_{n\to\infty}(b_n) < b_n < \varepsilon + \lim\limits_{n\to\infty}(b_n) \end{cases} \Rightarrow -\varepsilon + \lim_{n\to\infty}(a_n) < b_n < \varepsilon + \lim_{n\to\infty}(b_n)$$

cioè $-2\varepsilon + \lim_{n\to\infty}(a_n) < \lim_{n\to\infty}(b_n)$, che dovendo valere per ogni ε comporta $\lim_{n\to\infty}(a_n) \leq \lim_{n\to\infty}(b_n)$. Naturalmente questo teorema si può facilmente estendere anche al caso in cui una o entrambe le successioni siano divergenti.

TEO. 1.2.6. Dei carabinieri. Date le tre successioni $(a_n), (b_n), (c_n)$ allora se risulta definitivamente $a_n < b_n < c_n$ e se $(a_n), (b_n)$ sono regolari e hanno lo stesso limite, segue che anche (c_n) è regolare è ha quello stesso limite. Dimostriamo il caso in cui il limite comune sia il limite finito l. Allora definitivamente si ha

$$\begin{cases} l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \\ l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon \\ \quad a_n < b_n < c_n \end{cases}$$

e dunque $\lim_{n \to \infty}(b_n) = l$.

Prima di dimostrare il prossimo teorema occorre dare alcune definizioni: una successione si dice **monotona non decrescente** se risulta $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni n; si dice **monotona non crescente** se risulta $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni n. Nel caso di diseguaglianze più restrittive si parlerà di successione monotona crescente e di successione monotona decrescente, rispettivamente.

TEO. 1.2.7. Limite di successioni monotone. Ogni successione monotona è regolare: se è crescente o non decrescente allora converge oppure diverge a più infinito; se è decrescente o non crescente allora converge oppure diverge a meno infinito. Nel primo caso il limite sarà l'estremo superiore dell'insieme infinito $\{a_n\}$; nel secondo caso sarà l'estremo inferiore.
Consideriamo il caso di una successione non decrescente limitata, cioè con estremo superiore finito (gli altri casi si dimostrano analogamente). Considerando la non decrescenza e le due proprietà dell'estremo superiore abbiamo che

- $a_n \leq \Lambda \ \ \forall\, n \,\epsilon\, \mathbb{N}$
- $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, k \,\epsilon\, \mathbb{N} \mid a_n > \Lambda - \varepsilon$
- $a_n \leq a_{n+1} \ \ \forall\, n \,\epsilon\, \mathbb{N}$

Considerando la seconda e la terza abbiamo

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, k \,\epsilon\, \mathbb{N} \mid \Lambda - \varepsilon < a_n\, \forall\, n > k$$

Considerando anche la prima concludiamo

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, k \,\epsilon\, \mathbb{N} \mid \Lambda - \varepsilon < a_n < \Lambda - \varepsilon\, \forall\, n > k$$

cioè appunto $\lim_{n \to \infty} a_n = \Lambda$.

TEO. 1.2.8. Limite delle sottosuccessioni. Se la successione (a_n) è regolare, allora ogni sua sottosuccessione è regolare e ammette lo stesso limite.
Considerando il caso di limite l finito. Riferendosi alla simbologia del paragrafo **1.1**, l'ipotesi ci permette di affermare che

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, k \epsilon \mathbb{N} \mid l - \varepsilon < a_{p_n} < l + \varepsilon \ \ \forall n > k$$

ovvero che

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, k \epsilon \mathbb{N} \mid l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon \ \ \forall n > k$$

cioè appunto $\lim_{n \to \infty} b_n = l$.

1.3. Criterio di convergenza Cauchy. Esiste una condizione necessaria e sufficiente alla convergenza per la verifica della quale non è richiesta la conoscenza del limite eventuale.

TEO. 1.3.1. Criterio di convergenza di Cauchy. La successione numerica (a_n) è convergente se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; k \in \mathbb{N} \mid \forall n > k \Longrightarrow \left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon \; \forall p \in \mathbb{N}$$

Dimostro il 'se' cioè la condizione sufficiente. Intanto si può rilevare che l'ipotesi ci per mette di dire che l'insieme infinito $\{a_n\}$ è un insieme limitato: per vederlo più chiaramente posso scrivere in forma esplicita il valore assoluto

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; k \in \mathbb{N} \mid \forall n > k \Longrightarrow \; a_n - \varepsilon < a_{n+p} < a_n + \varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

Allora $\{a_n\}$ ammette estremo superiore e estremo inferiore finiti. In particolare saranno finiti anche i due estremi

$$\lambda_n = \inf_{p \in \mathbb{N}} \{a_{n+p}\} \qquad \Lambda_n = \sup_{p \in \mathbb{N}} \{a_{n+p}\}$$

Consideriamo in particolare Λ_n. Le due proprietà dell'estremo superiore si scrivono

- $a_{n+p} \leq \Lambda_n \quad \forall p \in \mathbb{N}$
- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; k \; \in \mathbb{N} \mid \Lambda_n - \varepsilon < a_{n+k}$

Mettendo assieme le due proprietà abbiamo

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \; k \; \in \mathbb{N} \mid \Lambda_n - \varepsilon < a_{n+k} < \Lambda_n + \varepsilon$$

Adesso consideriamo l'ipotesi: in base ad essa abbiamo che definitivamente (cioè per n abbastanza grande) si ha $|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon/2$ ovvero $a_n - \varepsilon/2 < a_{n+k} < a_n + \varepsilon/2$ dunque

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \; k \; \in \mathbb{N} \mid \begin{cases} a_n - \varepsilon/2 < \Lambda_n + \varepsilon \\ \Lambda_n - \varepsilon < a_n + \varepsilon/2 \end{cases} \Rightarrow \Lambda_n - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < \Lambda_n + \frac{\varepsilon}{2}$$

Possiamo cioè scrivere che

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \; k \; \in \mathbb{N} \mid \; -\frac{\varepsilon}{2} < |a_n - \Lambda_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

che si traduce nel dire che

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - \Lambda_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \Lambda_n$$

Ma la successione (Λ_n) è monotona non decrescente e dunque, per il **TEO.1.2.4.**, ammette limite. Quindi anche la successione (a_n) ammette limite, ed essendo limitata, questo limite sarà finito.

Dimostriamo ore il 'solo se', cioè la condizione necessaria. Considerando la definizione di convergenza si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ k \in \mathbb{N} \ | \ \forall \ n > N \ \Longrightarrow \begin{cases} |l - a_n| < \varepsilon \\ |a_{n+p} - l| < \varepsilon \ \forall \ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Sommando membro a membro abbiamo

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ k \in \mathbb{N} \ | \ \forall \ n > N \ \Longrightarrow |a_{n+p} - l| + |l - a_n| < 2\varepsilon \ \ \forall \ k \in \mathbb{N}$$

Ma essendo $|a_{n+p} - a_n| < |a_{n+p} - l| + |l - a_n|$ abbiamo

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ k \in \mathbb{N} \ | \ \forall \ n > N \ \Longrightarrow |a_{n+p} - a_n| < 2\varepsilon \ \ \forall \ k \in \mathbb{N}$$

cioè la tesi.

1.4. Massimo limite e minimo limite.

Consideriamo la successione numerica (a_n) e definiamo le due successioni

$$(\lambda_n) = \left(\inf_{p \epsilon \mathbb{N}} \{a_{n+p}\} \right)$$
$$(\Lambda_n) = \left(\sup_{p \epsilon \mathbb{N}} \{a_{n+p}\} \right)$$

Intanto, essendo entrambe monotone (non decrescente e non crescente rispettivamente), le due successioni sono regolari. Ha dunque senso considerarne i limiti

$$\lim_{n \to \infty}{}^{\mathrm{I}} a_n \triangleq \lim_{n \to \infty} \lambda_n$$
$$\lim_{n \to \infty}{}^{\mathrm{II}} a_n \triangleq \lim_{n \to \infty} \Lambda_n$$

che chiamiamo **minimo limite** e **massimo limite** di (a_n).

TEO. 1.4.1. Criterio di regolarità del massimo e del minimo limite. La successione (a_n) ammette limite $l \ \epsilon \ \mathbb{N}^+$ se e solo se risulta

$$\lim_{n \to \infty}{}^{\mathrm{I}} a_n = l = \lim_{n \to \infty}{}^{\mathrm{II}} a_n$$

Per la dimostrazione consideriamo il caso di limite finito (gli altri due casi si dimostrano in modo simile). Partiamo dal 'se', cioè dalla condizione sufficiente. Per ipotesi abbiamo

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ k \in \mathbb{N} \ | \ \forall n > k \Longrightarrow \begin{cases} -\varepsilon + l < \lambda_n < \varepsilon + l \\ -\varepsilon + l < \Lambda_n < \varepsilon + l \end{cases}$$

D'altra parte abbiamo anche

$$\lambda_n < a_n < \Lambda_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

per cui, mettendo insieme le tre doppie diseguaglianze, si ha la tesi

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ k \in \mathbb{N} \ | \ \forall n > k \Longrightarrow -\varepsilon + l < a_n < \varepsilon + l$$

Ora dimostro il ‘solo se’, ovvero la condizione necessaria. Le due proprietà dell’estremo superiore ci consentono di scrivere

- $a_{n+k} \leq \Lambda_n \ \forall\, k_1 \in \mathbb{N}$
- $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, k_1 \in \mathbb{N} \mid \ a_{n+k_1} > \Lambda_n - \varepsilon \ \ \forall n \in \mathbb{N}$

Dunque abbiamo che

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, k_1 \in \mathbb{N} \mid \Lambda_n - \varepsilon < a_{n+k_1} < \Lambda_n + \varepsilon \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

D’altra parte abbiamo anche che in corrispondenza di quello stesso $\varepsilon > 0$ esiste un $k_2 \in \mathbb{N}$ per il quale $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \ \ \forall n > k_2$. Dunque si può scrivere che

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, k_2 \in \mathbb{N} \mid \begin{cases} \exists\, k_1 \in \mathbb{N} \mid \Lambda_n - \varepsilon < a_{n+k_1} < \Lambda_n + \varepsilon \ \ \forall n \in \mathbb{N} \\ l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \ \ \forall n > k_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, k_2 \in \mathbb{N} \mid \begin{cases} l - \varepsilon < \Lambda_n + \varepsilon \quad \forall n > k_2 \\ \Lambda_n - \varepsilon < l + \varepsilon \quad \forall n > k_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, k_2 \in \mathbb{N} \mid l - 2\varepsilon < \Lambda_n < l + 2\varepsilon \ \ \forall n > k_2$$

E dunque $\lim\limits_{n\to\infty}{}^{||}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \lambda_n = l$. Analogamente si dimostra che $\lim\limits_{n\to\infty}{}^{|}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n = l$.

1.5. Operazioni sui limiti.

Date due successioni $(a_n), (b_n)$ e due costanti reali α, β, si considerino le seguenti tre successioni

$(\alpha a_n + \beta b_n)$	successione combinazione lineare
$(a_n b_n)$	successione prodotto
(a_n / b_n)	successione quoziente (nel caso in cui sia $b_n \neq 0, \forall n$)

Ci si chiede quale sia, rispetto alla convergenza, il comportamento delle tre successioni di cui sopra. A tal proposito si dimostrano i seguenti risultati.

TEO. 1.5.1. Limite della somma. Se risulta $a_n \to l$ e $b_n \to l'$ con l, l' finiti, allora

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n + \beta \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha l + \beta l'$$

Infatti l’ipotesi, per definizione di limite, comporta che preso comunque un $\varepsilon = 2\varepsilon_1|\alpha| = 2\varepsilon_2|\beta| > 0$, esiste un indice k tale per cui, non appena sia $n > k$, allora

$$|a_n - l| < \varepsilon \Rightarrow |a_n\alpha - l\alpha| < \varepsilon_1|\alpha| = \varepsilon/2$$
$$|b_n - l'| < \varepsilon \Rightarrow |b_n\beta - l'\beta| < \varepsilon_2|\beta| = \varepsilon/2$$

Sommando membro a membro si ha

$$|a_n\alpha - l\alpha| + |b_n\beta - l'\beta| < \varepsilon$$

e considerando poi che $|(a_n\alpha + b_n\beta) - (l\alpha + l'\beta)| < |a_n\alpha - l\alpha| + |b_n\beta - l'\beta|$ si ha la tesi.

TEO. 1.5.2. Limite del prodotto. Se risulta $a_n \to l$ e $b_n \to l'$ con l, l' finiti, allora

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = ll'$$

Si consideri infatti che

$$|a_n b_n - ll'| = |a_n b_n - a_n l' + a_n l' - ll'| = |a_n(b_n - l') + l'(a_n - l)| \leq$$
$$\leq |a_n||(b_n - l')| + |l'||(a_n - l)|$$

Data l'ipotesi su (a_n), si ha fra l'altro che tale successione è definitivamente limitata, cioè è possibile fissare un valore reale M tale che sia definitivamente $|a_n| < M$. Dunque definitivamente si ha

$$|a_n b_n - ll'| \leq M|(b_n - l')| + |l'||(a_n - l)|$$

Preso ora comunque un reale $\varepsilon > 0$, espresso in funzione di esso il reale

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{M + |l'|}$$

si ha definitivamente, per l'ipotesi, che

$$|a_n b_n - ll'| \leq M\bar{\varepsilon} + |l'|\bar{\varepsilon} = (M + |l'|)\bar{\varepsilon} = (M + |l'|)\frac{\varepsilon}{M + |l'|} = \varepsilon$$

e dunque la tesi.

TEO. 1.5.3. Limite del quoziente. Se risulta $a_n \to l$ e $b_n \to l'$ con l, l' finiti, e se inoltre $b_n \neq 0, \forall n$ e $l' \neq 0$, allora

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{l}{l'}$$

Si consideri infatti che

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{l}{l'}\right| = \left|\frac{a_n l' - b_n l}{b_n l'}\right| = \frac{|a_n l' - ll' + ll' - b_n l|}{|b_n||l'|} \leq \frac{|a_n l' - ll'| + |ll' - b_n l|}{|b_n||l'|} =$$
$$= \frac{|a_n - l||l'| + |l' - b_n||l|}{|b_n||l'|}$$

L'ipotesi di convergenza su (b_n) permette di asserire poi (come è facile verificare a partire dalla definizione di limite) che esiste una costante $M > 0$ tale che definitivamente sia $|b_n| > M$. Dunque definitivamente si ha intanto

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{l}{l'}\right| \leq \frac{|a_n - l||l'| + |l' - b_n||l|}{M|l'|}$$

Preso ora comunque un reale $\varepsilon > 0$, espresso in funzione di esso il reale

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon M|l'|}{|l| + |l'|}$$

si ha definitivamente, per l'ipotesi, che

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{l}{l'}\right| \leq \bar{\varepsilon}\frac{|l'| + |l|}{M|l'|} = \varepsilon$$

e dunque la tesi.

TEO. 1.5.4. Altre operazioni sui limiti. Procedendo in maniera analoga a quanto visto per i tre teoremi precedenti, si dimostra che

$$\begin{cases} a_n \to +\infty \\ b_n \; limitata \; inferiormente \end{cases} \Rightarrow a_n + b_n \to +\infty$$

$$\begin{cases} a_n \to -\infty \\ b_n \; limitata \; superiormente \end{cases} \Rightarrow a_n + b_n \to -\infty$$

$$\begin{cases} |a_n| \to +\infty \\ |b_n| \geq L > 0, \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow |a_n b_n| \to +\infty$$

$$\begin{cases} a_n \to 0 \\ |b_n| \leq M \epsilon \mathbb{R}^+, \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow a_n b_n \to 0$$

$$\begin{cases} a_n \to +\infty \\ a_n \neq 0, \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to 0$$

$$\begin{cases} a_n \to 0 \\ a_n \neq 0, \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \left|\frac{1}{a_n}\right| \to +\infty$$

$$\begin{cases} |a_n| \to +\infty \\ 0 < |b_n| \leq M \epsilon \mathbb{R}^+, \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to +\infty$$

$$\begin{cases} a_n \to 0 \\ |b_n| \geq L > 0, \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 0$$

Da notare che in ciascuna delle ipotesi in cui è coinvolta (b_n) non è specificato nulla sulla regolarità o meno della successione, la quale dunque potrebbe anche non avere limite.

1.6. Forme indeterminate.

Date due successioni regolari (infinitesime o infinite) $(a_n), (b_n)$ si parla di forme indeterminate nei seguenti quattro casi:

$$\begin{cases} a_n \to +\infty \\ b_n \to -\infty \end{cases} \Rightarrow a_n + b_n \to ?$$

$$\begin{cases} a_n \to 0 \\ b_n \to \pm\infty \end{cases} \Rightarrow a_n b_n \to ?$$

$$\begin{cases} a_n \to 0 \\ b_n \to 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to ?$$

$$\begin{cases} a_n \to \infty \\ b_n \to \infty \end{cases} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to ?$$

In ciascuno di questi quattro casi infatti non è possibile sapere a priori se la successione a destra della freccia è regolare, e quale limite abbia nel caso in cui lo sia. Quando dunque ci si imbatte in questi casi bisogna valutare volta per volta la natura della successione. Seguono degli esempi per ciascuna delle quattro forme indeterminate.

1) Forma $\infty - \infty$.

$$\begin{cases} a_n = (-1)^n + n \to +\infty \\ b_n = -n \to -\infty \end{cases} \Rightarrow a_n + b_n = (-1)^n \; irregolare$$

2) Forma 0∞.

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \to 0 \\ b_n = n \to +\infty \end{cases} \Rightarrow a_n b_n = (-1)^n \; irregolare$$

3) Forma 0/0.

$$\begin{cases} a_n \to \dfrac{1}{n} \\ b_n \to \dfrac{1}{n^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = n \to \infty$$

4) Forma ∞/∞.

$$\begin{cases} a_n = (-1)^n + n \to +\infty \\ b_n = -n \to -\infty \end{cases} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{(-1)^n + n}{-n} = \frac{(-1)^n}{-n} + \frac{n}{-n} = -\frac{(-1)^n}{n} - 1 \to -1$$

1.7. Confronto tra infinitesimi. Date due successioni infinitesime $(a_n), (b_n)$ allora si pongono le seguenti definizioni:

1) (a_n) è un infinitesimo di ordine superiore rispetto (b_n) se $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to 0$

2) (a_n) è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto (b_n) se $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to +\infty$

3) (a_n) è un infinitesimo dello stesso ordine rispetto (b_n) se definitivamente si ha $0 < \left|\frac{a_n}{b_n}\right| < M$

Nel primo caso si usa la simbologia $a_n = o(b_n)$, che si legge "(a_n) è un o (lettera) piccolo rispetto (b_n)".

Si può notare che nel 2° caso si ha anche che (b_n) è un infinitesimo di ordine superiore rispetto (a_n), infatti in base alla 5° relazione del **TEO 1.5.4** si ha che

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{\left|\frac{a_n}{b_n}\right|} = \left|\frac{b_n}{a_n}\right| \longrightarrow 0$$

Si nota altresì che nel 3° caso è incluso, in particolare, quello in cui $\left(\left|\frac{a_n}{b_n}\right|\right)$ è una successione convergente.

Si dice che (a_n) è un infinitesimo di ordine $\alpha \epsilon \mathbb{R}^+$ rispetto a (b_n) quando (a_n) è un infinitesimo dello stesso ordine rispetto $|b_n|^\alpha$.

1.8. Confronto tra infiniti. Date due successioni infinite $(a_n), (b_n)$ allora si pongono le seguenti definizioni:

1) (a_n) è un infinito di ordine superiore rispetto (b_n) se $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to +\infty$
2) (a_n) è un infinito di ordine inferiore rispetto (b_n) se $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to 0$
3) (a_n) è un infinito dello stesso ordine rispetto (b_n) se definitivamente si ha $0 < \left|\frac{a_n}{b_n}\right| < M$

Nel 1° caso si ha anche che $(1/a_n)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto $(1/b_n)$, infatti in base al 5° caso del **TEO 1.5.4** si ha che

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{\left|\frac{a_n}{b_n}\right|} = \left|\frac{1}{a_n}\right| / \left|\frac{1}{b_n}\right| \longrightarrow 0$$

Allo stesso modo nel 2° caso si ha che $(1/b_n)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto $(1/a_n)$.

Non si usa una simbologia specifica per gli infiniti, ma si ricorre a quella già introdotta per gli infinitesimi. Così ad esempio nel 1° caso si scriverà $\frac{1}{a_n} = o\left(\frac{1}{b_n}\right)$.

Si dice che (a_n) è un infinito di ordine $\alpha \epsilon \mathbb{R}^+$ rispetto a (b_n) quando (a_n) è un infinito dello stesso ordine rispetto $|b_n|^\alpha$.

1.9. Confronto tra successioni. Date due successioni generiche $(a_n), (b_n)$ si dice che

1) $a_n = O(b_n)$ se esiste $M \epsilon \mathbb{R}^+$ tale che risulti definitivamente $0 < |a_n/b_n| < M$, e si legge "(a_n) è un o (lettera) grande rispetto (b_n)"
2) $a_n \sim b_n$ se $\frac{a_n}{b_n} \to 1$

Naturalmente in entrambi i casi di cui sopra si deve ammettere che sia definitivamente $b_n \neq 0$.

1.10. Alcuni limiti di successioni numeriche. Riporto la discussione sulla regolarità e sui limiti di alcune successioni numeriche notevoli.

TEO. 1.10.1. Comunque si scelga $\alpha > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} 1/n^{\alpha} = 0$$

La successione è monotona decrescente dunque, per il **TEO. 1.2.7**, risulta regolare; quindi converge o diverge a meno infinito. Poiché però i suoi termini sono positivi, allora deve necessariamente convergere. Bisogna dimostrare che esiste un indice k a partire dal quale gli elementi della successione sono minori di un comunque piccolo $\varepsilon > 0$:

$$1/n^{\alpha} < \varepsilon \Leftrightarrow n^{\alpha} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \sqrt[\alpha]{\frac{1}{\varepsilon}} \Rightarrow k = \sqrt[\alpha]{\frac{1}{\varepsilon}}$$

TEO. 1.10.2. Comunque si scelga $\alpha > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} = +\infty$$

Intanto si osserva che questa successione risulta monotona crescente e dunque è regolare, con limite finito o $+\infty$. Bisogna dunque dimostrare che comunque si sceglie $L > 0$ è possibile trovare un k ϵ $\mathbb{N}$ tale per cui $n^{\alpha} > L \ \ \forall n > k$. Basta allora rilevare che

$$\begin{cases} k^{\alpha} = L \Leftrightarrow k = \sqrt[\alpha]{L} \\ n^{\alpha} > k^{\alpha} \ \ \forall n > k \end{cases} \Rightarrow n^{\alpha} > L \ \ \forall n > k = \sqrt[\alpha]{L}$$

TEO. 1.10.3. Data la successione (x^n) $x \epsilon \mathbb{R}$ si comporta in modo diverso a seconda del valore della base. Si in particolare

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 \Leftarrow |x| < 1 \\ 1 \Leftarrow x = 1 \\ +\infty \Leftarrow x > 1 \\ non\ esiste \Leftarrow x \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} |x^n| = +\infty$$

Per $|x|$ < 1 si ha

$$|x^n| < \varepsilon \Leftrightarrow |x|^n < \varepsilon \Leftrightarrow \log_{|x|}|x|^n > \log_{|x|}\varepsilon \Leftrightarrow n > \log_{|x|}\varepsilon$$

dove l'inversione del segno di disuguaglianza è giustificata dal fatto che per $|x| < 1$ la funzione $\log_{|x|}y$ è decrescente. Allora concludiamo che

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ |x^n| < \varepsilon \ \ \forall n > \log_{|x|}\varepsilon$$

Per $x = 1$ si ha evidentemente la tesi essendo la successione in questo caso una successione costante.

Per x > 1 si ha

$$x^n > L \Leftrightarrow \log_x x^n > \log_x L \Leftrightarrow n > \log_x L$$

e dunque abbiamo che

$$\forall L > 0 \Longrightarrow x^n > L\ \forall n > \log_x L$$

Per $\boldsymbol{x \leq -1}$ si ha che la sottosuccessione $(x^n)_{n\,dispari}$ ammette limite $-\infty$, mentre la sottosuccessione $(x^n)_{n\,pari}$ ammette limite $+\infty$. Dunque la successione (x^n) non è regolare, perché se così fosse, in base al teorema **1.2.8.**, si dovrebbe avere $+\infty = -\infty$, che è un assurdo.

TEO. 1.10.4. Comunque si scelga $x > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$$

Peso arbitrariamente un intero $p < n$, allora possiamo scrivere

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x^p}{p!}\frac{x}{p+1}\frac{x}{p+2}\frac{x}{p+3}\dots\frac{x}{n} < \frac{x^p}{p!}\left(\frac{x}{p+1}\right)^{n-p}$$

Considerando poi che si può scrivere

$$\frac{x}{p+1} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow p+1 > 2x \Leftrightarrow p > 2x-1$$

si ha che, per $n > p > 2x-1$, allora

$$\frac{x^n}{n!} < \frac{x^p}{p!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-p} = \frac{(2x)^p}{p!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Ma per il **TEO 1.10.3** la successione $(1/2)^n$ converge a zero; dunque anche la successione $\frac{(2x)^p}{p!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge a zero. Infatti $\forall \varepsilon = \varepsilon' \frac{(2x)^p}{p!} > 0$ esiste $k | \forall n > k \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon'$ ovvero $\frac{(2x)^p}{p!}\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon$. Possiamo allora invocare il **TEO 1.2.6** (dei carabinieri) e concludere che, poiché

$$0 < \frac{x^n}{n!} < \frac{(2x)^p}{p!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

allora la tesi è verificata.

TEO. 1.10.5. Fattoriale. Si dimostra che

$$\lim_{n\to\infty} n! = +\infty$$

infatti comunque si prenda un reale $L > 0$ basta scegliere un indice $n > L$ per avere $n! > L$. Da cui la tesi, per definizione stessa di divergenza.

TEO. 1.10.6. Numero di Nepero. La successione

$$a_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

converge a un numero irrazionale e (detto numero di Nepero), le cui prime 16 cifre sono

$$e = 2{,}718281828459045\,...$$

In questa sede mi limito a dimostrare che la successione in esame è convergente, e che il suo limite ha un valore compreso fra 2 e 3. Consideriamo allora l'insieme degli elementi della successione:

$$\begin{gathered} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 + \frac{1}{1!} = 2 \\ a_2 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 2{,}5 \\ a_3 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 2.666\,... \end{gathered}$$

Si rileva allora che la successione, data la sua struttura additiva, è crescente; e che i suoi termini sono ≥ 1. Si consideri ora banalmente che

$$\begin{gathered} 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 > 2 \cdot 2 = 2^2 \\ 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 > 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \\ 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 > 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 \\ \ldots \\ n! > 2^{n-1} \end{gathered}$$

e dunque si ha

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Considerando poi la teoria delle progressioni geometriche abbiamo

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

e dunque possiamo concludere che

$$a_n < 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Concludendo: la successione è crescente, dunque (**TEO. 1.2.7**) o diverge a $+\infty$ oppure converge; ma dovendo essere i suoi valori, per quanto appena visto, minori di 3, allora la successione converge a un numero compreso fra 2 e 3.

TEO. 1.10.7. Numero di Nepero. Si dimostra che

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

A tale scopo si cercherà di verificare la definizione generale di limite. Si consideri intanto che, in base alla formula del binomio di Newton, si ha

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}=$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\dots\frac{n-k+1}{n}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<$$
$$<1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

Ma per quanto visto nella dimostrazione del **TEO 1.10.6** segue che

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e,\ \ \forall n>0$$

Adesso si consideri invece che, sempre per il teorema citato, $\forall\varepsilon>0\ \exists\nu|\forall n>\nu$ allora

$$e-\varepsilon<\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{k!}<e$$

Si consideri allora la successione a due indici

$$c_{n,\nu}=1+\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

Essa risulta monotòna crescente rispetto n e tende evidentemente a $\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{k!}$, cosa che permette di asserire che definitivamente risulta

$$\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{k!}-\varepsilon<c_{n,\nu}$$

D'altra parte è anche banalmente vero che

$$c_{n,\nu}<1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Quindi, in conclusione, si può affermare che $\forall\varepsilon>0\ \exists\nu|\forall n>\nu$ allora

$$e-2\varepsilon<\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{k!}-\varepsilon<c_{n,\nu}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$$

Ciò che verifica la tesi.

TEO. 1.10.8. Comunque si scelga $x>0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$$

Per $0 < x < 1$ si verifica facilmente che la successione è monotòna crescente. Dunque la tesi si prova verificando che l'unità sia l'estremo superiore dell'insieme $\{x, x^{1/2}, x^{1/3}, \dots\}$. A tale scopo si devono verificare le due proprietà dell'estremo superiore. È anche immediato provare che $x^{1/n} < 1$. Scelto poi comunque un ε si ha

$$x^{1/n} > 1-\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n}\ln x > \ln(1-\varepsilon) \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln x} \Leftrightarrow n > \frac{\ln x}{\ln(1-\varepsilon)}$$

e dunque le due proprietà dell'estremo superiore sono effettivamente verificate.

Per $x = 1$ la tesi è immediata.

Per $x > 1$ la successione è monotòna decrescente. Quindi basta provare che 1 è l'estremo inferiore dei termini della successione. Intanto evidentemente $x^{1/n} \geq 1$; inoltre scelto comunque un ε si ha

$$x^{1/n} < 1+\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n}\ln x < \ln(1+\varepsilon) \Leftrightarrow n > \frac{\ln x}{\ln(1-\varepsilon)}$$

e dunque le due proprietà dell'estremo inferiore sono verificate.

TEO. 1.10.9. Comunque si scelga $x > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$$

Per $0 < x < 1$ si verifica facilmente che la successione è monotòna crescente. Inoltre

$$x^{1/n} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n}\ln x < \ln 1 = 0$$

per cui 1 verifica la prima proprietà dell'estremo superiore. Si osserva poi che $\forall\varepsilon > 0$ si ha

$$x^{1/n} > 1-\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n}\ln x > \ln(1-\varepsilon) \Leftrightarrow n > \frac{\ln x}{\ln(1-\varepsilon)}$$

e quindi anche la seconda proprietà dell'estremo superiore è verificata. Si può concludere allora con la tesi, in base al **TEO. 1.2.7**.

Per $x = 1$ la tesi è banalmente verificata. Per $x > 1$ la successione è monotòna decrescente. Inoltre

$$x^{1/n} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n}\ln x > \ln 1 = 0$$

per cui 1 verifica la prima proprietà dell'estremo inferiore. Si osserva poi che $\forall\varepsilon > 0$ si ha

$$x^{1/n} < 1+\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n}\ln x < \ln(1+\varepsilon) \Leftrightarrow n > \frac{\ln x}{\ln(1+\varepsilon)}$$

e quindi anche la seconda proprietà dell'estremo inferiore è verificata. Si può concludere allora con la tesi, in base al **TEO. 1.2.7**.

TEO. 1.10.10. Se (a_n) è una successione regolare, è regolare anche la successione (e^{a_n}) e in particolare

$$\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = \begin{cases} e^l, & se\ a_n \to l \in \mathbb{R} \\ +\infty, & se\ a_n \to +\infty \\ 0, & se\ a_n \to -\infty \end{cases}$$

Per $a_n \to l \in \mathbb{R}$ se dimostro che $\frac{e^{a_n}}{e^l} \longrightarrow 1$, allora posso applicare il **TEO 1.5.2** e ottenere la tesi:

$$\lim_{n\to\infty}(e^{a_n}) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{e^{a_n}}{e^l}\right)(e^l)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{a_n}}{e^l}\lim_{n\to\infty} e^l = e^l$$

Si consideri allora che

$$\left|\frac{e^{a_n}}{e^l} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |e^{a_n - l} - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < e^{a_n - l} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow \ln(1-\varepsilon) < a_n - l < \ln(1+\varepsilon)$$

Allora poiché per ipotesi comunque si scelga $\bar{\varepsilon} > 0$, si ha definitivamente $\bar{\varepsilon} < a_n - l < \bar{\varepsilon}$, in particolare abbiamo che comunque si sceglie ε segue $\ln(1-\varepsilon) < a_n - l < \ln(1+\varepsilon)$, cioè appunto la tesi.

Per $a_n \to +\infty$ abbiamo che comunque prendo $k' > 0$ allora

$$a_n > k' \Leftrightarrow e^{a_n} > e^{k'}$$

Quindi comunque prendo $k > 0$, posto $k' = \ln k$, si ha

$$a_n > k' \Leftrightarrow e^{a_n} > e^{k'} = k$$

cioè la tesi.

Per $a_n \to 0$ abbiamo che comunque prendo $\varepsilon > 0$ allora

$$-\varepsilon < a_n < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \ln a_n < e^{-k} = \frac{1}{e^k}$$

Quindi preso comunque $\varepsilon > 0$, posto $k = \ln 1/\varepsilon$, si ha

$$e^{a_n} < \frac{1}{e^k} = \frac{1}{e^{\ln 1/\varepsilon}} = \varepsilon$$

cioè la tesi.

TEO. 1.10.11. Se (a_n) è una successione regolare a elementi positivi, anche la successione $(\ln a_n)$ è regolare, e in particolare

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \begin{cases} \ln l\,, & se\ a_n \to l \in \mathbb{R}^+ \\ +\infty, & se\ a_n \to +\infty \\ -\infty, & se\ a_n \to 0 \end{cases}$$

Per $a_n \to l \in \mathbb{R}^+$ si deve dimostrare che $\forall \varepsilon > 0$ si ha definitivamente

$$-\varepsilon < \ln a_n - \ln l < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \ln\frac{a_n}{l} < \varepsilon \Leftrightarrow e^{-\varepsilon} < \frac{a_n}{l} < e^{\varepsilon}$$

D'altra parte l'ipotesi, considerando anche il **TEO 1.5.3**, comporta che comunque si scelga $\varepsilon' > 0$ si abbia definitivamente

$$1 - \varepsilon' < \frac{a_n}{l} < 1 + \varepsilon'$$

Considerando allora che

$$1 - \varepsilon' > e^{-\varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon' < 1 - e^{-\varepsilon}$$
$$1 + \varepsilon' < e^{\varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon' < e^{\varepsilon} - 1$$

non appena si scelga $\varepsilon' = MIN\left\{1 - e^{-\varepsilon}, e^{\varepsilon} - 1\right\}$, risulta $e^{-\varepsilon} < \frac{a_n}{l} < e^{\varepsilon}$, e dunque la tesi.

Per $a_n \to +\infty$ abbiamo che comunque prendo $k' > 0$ allora

$$a_n > k' \Leftrightarrow e^{a_n} > e^{k'}$$

Quindi comunque prendo $k > 0$, posto $k' = e^k$, si ha

$$a_n > k' \Leftrightarrow \ln a_n > \ln k' = k$$

cioè la tesi.

Per $a_n \to 0$ abbiamo che comunque prendo $\varepsilon > 0$ allora

$$a_n < \varepsilon \Leftrightarrow \ln a_n < \ln \varepsilon$$

Quindi preso comunque $k > 0$, posto $\ln \varepsilon = -k \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{1}{e^k}$, si ha

$$\ln a_n < -k$$

cioè la tesi.

TEO. 1.10.12. Se (a_n) è una successione regolare a elementi positivi e $\alpha\epsilon\mathbb{R}^+$, anche la successione $({a_n}^{\alpha})$ è regolare, e in particolare

$$\lim_{n\to\infty} {a_n}^{\alpha} = \begin{cases} l^{\alpha}, & se\ a_n \to l \\ +\infty, & se\ a_n \to +\infty \end{cases}$$

Considerando che $\ln {a_n}^{\alpha} = \alpha \ln a_n$ e tenendo presente il **TEO. 1.10.1** e il **TEO. 1.5.2** si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \ln {a_n}^{\alpha} = \lim_{n\to\infty} \alpha \ln a_n = \lim_{n\to\infty} \alpha \lim_{n\to\infty} \ln a_n = \alpha \ln l$$

D'altra parte, considerando anche il **TEO. 1.10.10**, si ha

$$\lim_{n\to\infty} e^{\ln a_n{}^{\alpha}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n{}^{\alpha}} = e^{\alpha \ln l} = e^{\ln l^{\alpha}} = l^{\alpha}$$

TEO. 1.10.13. Potenza del numero di Nepero. Si dimostra che $\forall h \epsilon \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{h}{n}\right)^n = e^h$$

Si consideri infatti che

$$\left(1+\frac{h}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{h}{n+1}\right)^n \left(1+\frac{h}{n+1}\right) > \left(1+\frac{h}{n+1}\right)^n > \left(1+\frac{h}{n}\right)^n$$

Dunque la successione è monotòna crescente, ciò che comporta, per il **TEO. 1.2.7**, che sia regolare. Ma allora, per il **TEO. 1.2.8**, il suo limite coincide con quello di una sua qualunque sottosuccessione. Considerando allora la sottosuccessione che si ottiene prendendo gli elementi con indici $h, 2h, 3h, 4h$ ... Essa coincide con la successione di elementi

$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^h$$

Applicando allora il **TEO. 1.10.12** al **TEO . 1.10.7** abbiamo la tesi.

TEO. 1.10.14. Si dimostra che $\forall \alpha \, \epsilon \, \mathbb{R}^+$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \mathrm{n}}{n^{\alpha}} = 0$$

Conviene riportarci a logaritmi decimali. Considerando allora che

$$\ln \mathrm{n} = \frac{\log_{10} \mathrm{n}}{\log_{10} \mathrm{e}}$$

abbiamo

$$\frac{\ln \mathrm{n}}{n^{\alpha}} = \frac{1}{n^{\alpha}} \frac{\log_{10} \mathrm{n}}{\log_{10} \mathrm{e}}$$

Ora si tenga presente che, in base alla regola sulla caratteristica dei logaritmi decimali[1], risulta $\log_{10} \mathrm{n} < n$ per $n > 1$, dunque

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \frac{\log_{10} \mathrm{n}^{\frac{\alpha}{2}}}{\log_{10} \mathrm{e}} < \frac{1}{n^{\alpha}} \frac{\mathrm{n}^{\frac{\alpha}{2}}}{\log_{10} \mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{n}^{\frac{\alpha}{2}} \log_{10} \mathrm{e}}$$

[1] Vedi ad esempio Brasca-Levi, Logaritmi, Avvertenze *II*.

ovvero

$$\frac{\alpha}{2n^{\alpha}}\frac{\log_{10} \mathrm{n}}{\log_{10} \mathrm{e}} < \frac{1}{n^{\alpha}}\frac{\mathrm{n}^{\frac{\alpha}{2}}}{\log_{10} \mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{n}^{\frac{\alpha}{2}}\log_{10} \mathrm{e}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{\log_{10} \mathrm{e}}$$

Ora, in base al **TEO. 1.10.12**, abbiamo che $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \longrightarrow 0^{\frac{\alpha}{2}} = 0$; inoltre il **TEO. 1.5.2** permette di affermare che $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{\log_{10} \mathrm{e}} \longrightarrow 0\frac{1}{\log_{10} \mathrm{e}} = 0$. Tenendo poi in considerazione che

$$0 < \frac{\alpha}{2n^{\alpha}}\frac{\log_{10} \mathrm{n}}{\log_{10} \mathrm{e}} < \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{\log_{10} \mathrm{e}}$$

e applicando poi il **TEO. 1.2.6**, si conclude con la tesi.

TEO. 1.10.15. Si dimostra che $\forall\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\alpha}} = 1$$

Infatti si scrive

$$\sqrt[n]{n^{\alpha}} = e^{\ln \sqrt[n]{n^{\alpha}}} = e^{\frac{\alpha}{n}\ln n}$$

In base al **TEO. 1.10.15** abbiamo $\frac{1}{n}\ln n \longrightarrow 0$; quindi, considerando il **TEO. 1. 5. 2**, abbiamo anche $\frac{\alpha}{n}\ln n \longrightarrow 0$: e in definitiva il **TEO. 1.10.10** ci permette di scrivere

$$e^{\frac{\alpha}{n}\ln n} \longrightarrow e^{0} = 1$$

cioè la tesi.

1.11. Tabelle riassuntive.

In quanto segue riassumo i risultati trovati per le operazioni sui limiti e i limiti notevoli, con riferimento ai teoremi in cui i risultati sono stati dimostrati.

Operazioni sui limiti	
TEO. 1.5.1. Limite della somma.	Se risulta $a_n \to l$ e $b_n \to l'$ con l, l' finiti, allora $$\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha\lim_{n\to\infty} a_n + \beta\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha l + \beta l'$$
TEO. 1.5.2. Limite del prodotto.	Se risulta $a_n \to l$ e $b_n \to l'$ con l, l' finiti, allora $$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = ll'$$
TEO. 1.5.3. Limite del quoziente.	Se risulta $a_n \to l$ e $b_n \to l'$ con l, l' finiti, allora $$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = ll'$$

TEO. 1.5.4. Altre operazioni sui limiti.	$\begin{cases} a_n \to +\infty \\ b_n \text{ limitata inferiormente} \end{cases} \Rightarrow a_n + b_n \to +\infty$ $\begin{cases} a_n \to -\infty \\ b_n \text{ limitata superiormente} \end{cases} \Rightarrow a_n + b_n \to -\infty$ $\begin{cases} \lvert a_n \rvert \to +\infty \\ \lvert b_n \rvert \geq L > 0, \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \lvert a_n b_n \rvert \to +\infty$ $\begin{cases} a_n \to 0 \\ \lvert b_n \rvert \leq M \epsilon \mathbb{R}^+, \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow a_n b_n \to 0$ $\begin{cases} a_n \to +\infty \\ a_n \neq 0, \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to 0$ $\begin{cases} a_n \to 0 \\ a_n \neq 0, \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \left\lvert \frac{1}{a_n} \right\rvert \to +\infty$ $\begin{cases} \lvert a_n \rvert \to +\infty \\ 0 < \lvert b_n \rvert \leq M \epsilon \mathbb{R}^+, \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \left\lvert \frac{a_n}{b_n} \right\rvert \to +\infty$ $\begin{cases} a_n \to 0 \\ \lvert b_n \rvert \geq L > 0, \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 0$

Limiti notevoli	
TEO. 1.10.1.	Comunque si scelga $\alpha > 0$ si ha $\lim_{n \to \infty} 1/n^\alpha = 0$
TEO. 1.10.2.	Comunque si scelga $\alpha > 0$ si ha $\lim_{n \to \infty} n^\alpha = +\infty$
TEO. 1.10.3.	Data la successione (x^n) $x \epsilon \mathbb{R}$ si comporta in modo diverso a seconda del valore della base. Si in particolare $\lim_{n \to \infty} x^n = \begin{cases} 0 \Leftarrow \lvert x \rvert < 1 \\ 1 \Leftarrow x = 1 \\ +\infty \Leftarrow x > 1 \\ non\ esiste \Leftarrow x \leq -1 \end{cases}$ $\lim_{n \to \infty} \lvert x^n \rvert = +\infty$
TEO. 1.10.4.	Comunque si scelga $x > 0$ si ha $\lim_{n \to \infty} x^n / n! = 0$
TEO. 1.10.5. Fattoriale.	Si dimostra che $\lim_{n \to \infty} n! = +\infty$

TEO. 1.10.6. Numero di Nepero.	La successione $$a_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$ converge a un numero irrazionale e (detto numero di Nepero), le cui prime 16 cifre sono $$e = 2{,}718281828459045\ldots$$
TEO. 1.10.8.	Comunque si scelga $x > 0$ si ha $$\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$$
TEO. 1.10.9.	Comunque si scelga $x > 0$ si ha $$\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$$
TEO. 1.10.10.	Se (a_n) è una successione regolare, è regolare anche la successione (e^{a_n}) e in particolare $$\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = \begin{cases} e^l, & se\ a_n \to l \in \mathbb{R} \\ +\infty, & se\ a_n \to +\infty \\ 0, & se\ a_n \to -\infty \end{cases}$$
TEO. 1.10.11.	Se (a_n) è una successione regolare a elementi positivi, anche la successione $(\ln a_n)$ è regolare, e in particolare $$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \begin{cases} \ln l, & se\ a_n \to l \in \mathbb{R}^+ \\ +\infty, & se\ a_n \to +\infty \\ -\infty, & se\ a_n \to 0 \end{cases}$$
TEO. 1.10.12.	Se (a_n) è una successione regolare a elementi positivi e $\alpha\epsilon\mathbb{R}^+$, anche la successione $({a_n}^\alpha)$ è regolare, e in particolare $$\lim_{n\to\infty} {a_n}^\alpha = \begin{cases} l^\alpha, & se\ a_n \to l \\ +\infty, & se\ a_n \to +\infty \end{cases}$$
TEO. 1.10.13. Potenza del numero di Nepero.	Si dimostra che $\forall h\epsilon\mathbb{N}$ $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{h}{n}\right)^n = e^h$$
TEO. 1.10.14.	Si dimostra che $\forall \alpha\ \epsilon\ \mathbb{R}^+$ $$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \mathrm{n}}{n^\alpha} = 0$$

TEO. 1.10.15.	Si dimostra che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$$

Capitolo 2. Successioni di funzioni

2.1. Convergenza puntuale e convergenza uniforme.

Consideriamo le funzioni $f_n: I \to \mathbb{R}, x \to f_n(x),\ \ n = 1,2,3 \ldots$ Allora definisco **successione di funzioni** la sequenza infinita di funzioni

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x) \ldots f_n(x) \ldots$$

che indico sinteticamente $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o più semplicemente (f_n). Si osserva che una successione di funzioni presenta una duplice dipendenza nel senso che l'indice n individua il termine, poi la variabile x definisce il valore assunto dal temine stesso.

DEF. 2.1.1. Convergenza puntiforme. Data la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita in $I \epsilon \mathbb{R}$, e data la funzione $f: I \to \mathbb{R}$, allora si dice che la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente alla funzione $f: I \to \mathbb{R}$ se risulta

2.1) $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall x \,\epsilon\, I$

ovvero se risulta

2.2) $\quad \forall x \,\epsilon\, I \ e \ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, k(x,\varepsilon) \mid |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n > k$

ESE. 2.1.1. Consideriamo la successione di funzioni $(x^k)_{n\in\mathbb{N}}$ con intervallo di definizione $[0,1/2]$. Voglio dimostrare che essa converge puntualmente a zero. Si consideri infatti che

$$x^k < \varepsilon \Leftrightarrow \log_x x^k > \log_x \varepsilon \Leftrightarrow k > \log_x \varepsilon = \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$$

Dunque si può affermare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\ k \epsilon \mathbb{N} \mid |x^n| < \varepsilon$$

Basta infatti scegliere $k > \log_x \varepsilon$. Per cui la convergenza puntuale è dimostrata.

DEF. 2.1.2. Convergenza uniforme. Data la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita in $I \epsilon \mathbb{R}$, e data la funzione $f: I \to \mathbb{R}$, allora si dice che la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente alla funzione $f: I \to \mathbb{R}$ se risulta

2.3) $\quad \forall x \,\epsilon\, I \ e \ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, k(\varepsilon) \mid |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n > k$

cioè se

2.4) $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, k(\varepsilon) \mid \sup_{x\epsilon I}\{|f_n(x) - f(x)| : x \,\epsilon\, I\} < \varepsilon \quad \forall n > k$

cioè se

2.5) $\quad \lim_{n\to\infty} \sup_{x\epsilon I}\{|f_n(x) - f(x)| : x \,\epsilon\, I\} = 0$

La differenza fra convergenza puntuale e convergenza uniforme è che nel primo caso l'indice k è funzione sia di ε che di x, mentre nel secondo caso non si ha dipendenza da x. E' evidente che **la convergenza uniforme comporta quella puntuale**, infatti la **2.3** implica la **2.1**.

Operativamente per verificare la convergenza uniforme si calcola il limite **2.5** e si verifica che tenda a zero.

ESE. 2.1.2. Riprendiamo la successione di funzioni $(x^k)_{n\in\mathbb{N}}$ con intervallo di definizione $[0,1/2]$. Evidentemente si ha

$$\sup_{x\epsilon I}\{|f_n(x)-f(x)|: x\,\epsilon\, I\}=\frac{1}{2^k}$$

Poiché, come è immediato verificare, $\lim_{k\to\infty}(1/2^k)=0$, in base alla **2.5** la convergenza uniforme è verificata.

ESE. 2.1.3. Sappiamo che la converga uniforme implica in particolare quella puntuale. La convergenza puntuale, viceversa, può sussistere senza che vi sia convergenza uniforme. Si consideri ancora la successione $(x^k)_{n\in\mathbb{N}}$ definita questa volta nell'intervallo $[0,1]$. Si verifica che essa converge puntualmente alla funzione

$$f(x)=\begin{cases}0 \Leftarrow x\,\epsilon\,[0,1[\\ 1 \Leftarrow\ x=1\end{cases}$$

La convergenza uniforme tuttavia non è verificata infatti si ha

$$\sup_{x\epsilon I}\{|f_n(x)-f(x)|: x\,\epsilon\, I\}=1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_{x\epsilon I}\{|f_n(x)-f(x)|: x\,\epsilon\, I\}=1$$

e dunque, per la **2.5**, non si ha convergenza uniforme.

ESE. 2.1.4. Consideriamo la successione di funzioni $(x^n(1-x)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ con intervallo di definizione $I=[0,1]$. Intanto la convergenza puntuale a zero è verificata essendo

$$\lim_{n\to\infty}(x^n(1-x)^n)=0\quad\forall\, x\,\epsilon\,[0,1]$$

Resta da verificare la convergenza uniforme a zero. Allora si consideri che, con un semplice studio di funzione, risulta

$$\sup_{x\epsilon I}\{|f_n(x)-f(x)|: x\,\epsilon\, I\}=\frac{1}{2^{2n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_{x\epsilon I}\{|f_n(x)-f(x)|: x\,\epsilon\, I\}=0$$

e dunque la convergenza è anche uniforme.

ESE. 2.1.5. Consideriamo la successione di funzioni $\left(\frac{(1+x)^n}{(2+x)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ con intervallo di definizione $I=[0,+\infty[$. Intanto la convergenza puntuale a zero è verificata. Infatti

$$\frac{(1+x)^n}{(2+x)^n}<\varepsilon \Leftrightarrow \log_{\frac{(1+x)}{(2+x)}}\frac{(1+x)^n}{(2+x)^n}>\log_{\frac{(1+x)}{(2+x)}}\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln\frac{(1+x)}{(2+x)}}$$

e dunque possiamo scrivere che

$$\forall \varepsilon \; \exists \; k(\varepsilon, x) \mid \forall \; x \in I \quad \left|\frac{(1+x)^n}{(2+x)^n}\right| < \varepsilon$$

Basta infatti scegliere

$$k(\varepsilon, x) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \frac{(1+x)}{(2+x)}}$$

Si osservi ora che

$$\frac{\ln \varepsilon}{\ln \frac{(1+x)}{(2+x)}} \leq \frac{\ln \varepsilon}{\ln \frac{1}{2}}$$

Dunque abbiamo che

$$\frac{(1+x)^n}{(2+x)^n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln \frac{1}{2}}$$

Per cui nel limite non si ha più la dipendenza di k da x e la convergenza, secondo la **2.3**, risulta uniforme.

2.2. Teoremi sulla convergenza uniforme.

In questo paragrafo raccolgo alcuni importanti teoremi relativi a successioni di funzioni, nelle cui ipotesi è inclusa quella di convergenza uniforme.

TEO. 2.2.1. Di continuità del limite. Data la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale per cui $f_n \epsilon C^0(I)$, allora se si ha convergenza uniforme verso la funzione f in I, risulta $f \epsilon C^0(I)$.

DIM. Si consideri un generico $\bar{x} \epsilon I$ e un generico indice $\bar{k}$. Allora l'ipotesi di continuità della generica funzione della successione comporta che $\forall \frac{\varepsilon}{3} > 0$ esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$|f_{\bar{k}}(x) - f_{\bar{k}}(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \epsilon [\bar{x} - \delta(\varepsilon), \bar{x} + \delta(\varepsilon)]$$

D'altra parte l'ipotesi di convergenza uniforme comporta in particolare che $\forall \frac{\varepsilon}{3} > 0$ esiste $\nu(\varepsilon)$ tale che $\forall k > \nu(\varepsilon)$

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \epsilon [\bar{x} - \delta(\varepsilon), \bar{x} + \delta(\varepsilon)]$$

Adesso si veda che è possibile scrivere in generale

$$\begin{gathered} |f(x) - f(\bar{x})| = \\ = |f(x) - f_{\bar{k}}(x) + f_{\bar{k}}(x) - f_{\bar{k}}(\bar{x}) + f_{\bar{k}}(\bar{x}) - f(\bar{x})| \leq \\ \leq |f(x) - f_{\bar{k}}(x)| + |f_{\bar{k}}(x) - f_{\bar{k}}(\bar{x})| + |f_{\bar{k}}(\bar{x}) - f(\bar{x})| \end{gathered}$$

Allora assunto $\bar{k} > \nu(\varepsilon)$, e mettendo insieme questi tre risultati, abbiamo che

$$\begin{cases} |f_{\bar{k}}(x) - f_{\bar{k}}(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{3} \\ |f_{\bar{k}}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ |f(x) - f(\bar{x})| \leq |f(x) - f_{\bar{k}}(x)| + |f_{\bar{k}}(x) - f_{\bar{k}}(\bar{x})| + |f_{\bar{k}}(\bar{x}) - f(\bar{x})| \end{cases}, \forall x \epsilon [\bar{x} - \delta(\varepsilon), \bar{x} + \delta(\varepsilon)]$$

Sostituendo poi la seconda diseguaglianza nella terza abbiamo

$$\begin{cases} |f_{\bar{k}}(x) - f_{\bar{k}}(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{3} \\ |f(x) - f(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{3} + |f_{\bar{k}}(x) - f_{\bar{k}}(\bar{x})| + \frac{\varepsilon}{3} \end{cases}, \forall x \epsilon [\bar{x} - \delta(\varepsilon), \bar{x} + \delta(\varepsilon)]$$

e sostituendo la prima abbiamo infine

$$|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon, \forall x \epsilon [\bar{x} - \delta(\varepsilon), \bar{x} + \delta(\varepsilon)]$$

che è la continuità del limite in $\bar{x}$, e data la genericità di $\bar{x} \epsilon I$, segue la tesi.

TEO. 2.2.3. Di inversione dei limiti. Data la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale per cui esiste per ogni n il limite $\lim_{x\to x_0} f_n(x)$, allora se si ha convergenza uniforme verso la funzione f in I, risulta

2.6) $\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0}(\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)$

il che, in particolare, comporta che, in queste ipotesi, il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ esiste (cosa non scontata).

DIM. Definisco la successione numerica

$$l_n = \lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

e introduco la simbologia

$$l = \lim_{x\to x_0} l_n$$

Ciò posto, le due ipotesi ci dicono che $\forall \frac{\varepsilon}{3} > 0$ esiste un $\nu_1(\varepsilon)$ e un $\delta(\varepsilon)$ per cui si ha

$$\begin{cases} |f(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall k > \nu_1(\varepsilon), \forall x \epsilon I \\ |f_k(x) - l_k| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall k \epsilon \mathbb{N}, \forall x \epsilon [\bar{x} - \delta(\varepsilon), \bar{x} + \delta(\varepsilon)] \end{cases}$$

Inoltre $\forall \frac{\varepsilon}{3} > 0$ esiste un $\nu_2(\varepsilon)$ per cui

$$|l_k - l| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall k > \nu_2(\varepsilon)$$

Posto allora $\nu(\varepsilon) = MAX\{\nu_1(\varepsilon), \nu_2(\varepsilon)\}$ si ha in particolare che

$$\begin{cases} |f(x) - f_k(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3} \\ |f_k(x) - l_k| < \dfrac{\varepsilon}{3} \\ |l_k - l| < \dfrac{\varepsilon}{3} \end{cases} \qquad \forall k > \nu(\varepsilon),\ \ \forall x \epsilon [\bar{x} - \delta(\varepsilon), \bar{x} + \delta(\varepsilon)]$$

Si consideri allora che

$$|f_k(x) - l| = |f(x) - f_k(x) + f_k(x) - l_k + l_k - l| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - l_k| + |l_k - l|$$

e dunque

$$|f(x) - l| < \varepsilon \qquad \forall x \epsilon [\bar{x} - \delta(\varepsilon), \bar{x} + \delta(\varepsilon)]$$

che è appunto la tesi.

TEO. 2.2.4. Di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Data la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale per cui $f_n \epsilon C^0([a,b])$, allora se si ha convergenza uniforme verso la funzione f in $[a,b]$, risulta

2.7) $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)dx$

DIM. Intanto, per il teorema **2.2.1**, risulta $f \epsilon C^0([a,b])$ e dunque ha senso considerare l'integrale di f in $[a,b]$. L'ipotesi di convergenza uniforme ci permette di affermare che $\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}$ tale che

2.8) $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \ \forall n > k, \forall x \epsilon I$

D'altra parte si ha

2.9) $\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx$

Considerando insieme la **2.8** e la **2.9** abbiamo allora che $\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq \varepsilon|b - a| \quad \forall n > k$$

Il che equivale alla tesi.

ESE. 2.2.1. Voglio mostrare come la tesi del teorema **2.2.4** non valga necessariamente nel caso in cui la convergenza sia solo puntuale. Consideriamo la successione di funzioni $\left(nxe^{-nx^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ definite in tutto $\mathbb{R}$. Per un qualunque $\varepsilon > 0$ si ha

$$\left|nxe^{-nx^2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{n|x|}{e^{nx^2}} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|x|}{\varepsilon} < \frac{e^{nx^2}}{n} \Leftrightarrow \ln\frac{|x|}{\varepsilon} < \ln\frac{e^{nx^2}}{n} \Leftrightarrow \ln\frac{|x|}{\varepsilon} < nx^2 - \ln n$$

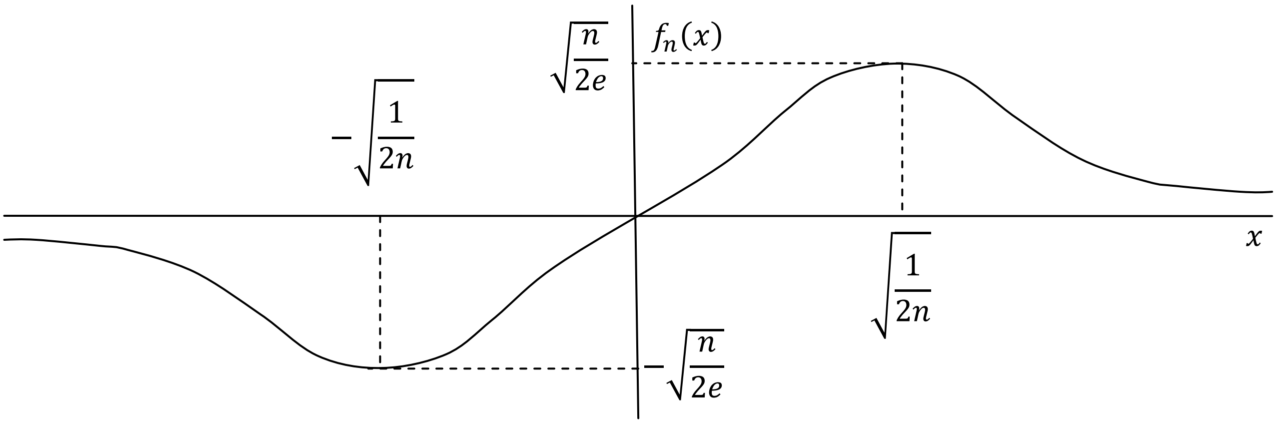
Essendo poi definitivamente

$$n > \ln n \Leftrightarrow -n < -\ln n \Leftrightarrow nx^2 - n < nx^2 - \ln n \Leftrightarrow n(x^2-1) < nx^2 - \ln n$$

abbiamo

$$\ln\frac{|x|}{\varepsilon} < n(x^2-1) \Leftrightarrow n > \frac{\ln\frac{|x|}{\varepsilon}}{(x^2-1)} \Rightarrow \left|nxe^{-nx^2}\right| < \varepsilon$$

Dunque la convergenza puntuale è dimostrata su tutto. Per valutare la convergenza uniforme alla funzione nulla faccio un rapido studio di funzione che porta ai risultati indicati in figura.



Poiché allora $\sup_{x\epsilon\mathbb{R}}|f_n(x)| = \sqrt{n/2e} \to +\infty$ la convergenza uniforme si ha solo in insiemi di definizione del tipo $[a,b]$ con $a,b>0$ oppure con $a,b<0$. Per esempio non si ha convergenza uniforme in $I=[0,1]$. Considerando allora tale intervallo abbiamo

$$\int_0^1 nxe^{-nx^2}\,dx = n\int_0^1 \frac{x}{-2nx}\,de^{-nx^2} = -\frac{1}{2}\int_0^1 de^{-nx^2} = -\frac{1}{2}\left(e^{-nx^2}\right)_0^1 = \frac{1}{2}(1-e^{-n})$$

Dunque si ha

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nxe^{-nx^2}\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-e^{-n}) = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\left(nxe^{-nx^2}\right)dx = 0$$

e effettivamente la tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale non risulta verificata.

TEO. 2.2.5. Di passaggio al limite sotto il segno di derivata. Data la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

1) $f_n \epsilon C^1(I)$
2) esiste $\bar{x}\epsilon I$ tale che la successione numerica $\left(f_n(\bar{x})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
3) $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in I verso una funzione F

allora risulta che

1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in I verso una funzione f
2) $f: I \to \mathbb{R}$ è derivabile, con derivata continua
3) $Df = F$

Il teorema si dice di passaggio al limite sotto il segno di derivata perché la seconda parte della tesi si scrive anche

2.10) $Df = D(\lim_{n\to+\infty} f_n) = \lim_{n\to+\infty} Df_n = F$

DIM. Procedo secondo la scaletta seguente

1) dimostro che f_n converge puntualmente in I verso una certa funzione f
2) dimostro che la convergenza è uniforme (tesi 1)
3) dimostro poi le tesi 2 e 3

Intanto il teorema fondamentale del calcolo integrale applicato al generico elemento f_n della serie di funzioni, in virtù dell'ipotesi 1, porge

$$f_n(x) = f_n(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{x} f_n'(\xi)d\xi$$

D'altra parte il **TEO. 2.2.4**, stante l'ipotesi 3, permette di scrivere

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\bar{x}}^{x} f_n'(\xi)d\xi = \int_{\bar{x}}^{x} \lim_{n\to\infty} f_n'(\xi)d\xi = \int_{\bar{x}}^{x} F(\xi)d\xi$$

e posto, in base all'ipotesi 2, $l = \lim_{n\to\infty} f_n(\bar{x})$, abbiamo trovato che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(f_n(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{x} f_n'(\xi)d\xi\right) = l + \int_{\bar{x}}^{x} F(\xi)d\xi$$

ovvero abbiamo provato la convergenza puntuale di f_n verso la funzione

$$f(x) = l + \int_{\bar{x}}^{x} F(\xi)d\xi$$

Ora provo che la convergenza è anche uniforme. A tale scopo si osservi che

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|f_n(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{x} f_n'(\xi)d\xi - l - \int_{\bar{x}}^{x} F(\xi)d\xi\right| \leq$$
$$\leq |f_n(\bar{x}) - l| + \left|\int_{\bar{x}}^{x} \big(f_n'(\xi) - F(\xi)\big)d\xi\right| \leq |f_n(\bar{x}) - l| + \int_{\bar{x}}^{x} |f_n'(\xi) - F(\xi)|d\xi \leq$$
$$\leq |f_n(\bar{x}) - l| + \int_{\bar{x}}^{x} |f_n'(\xi) - F(\xi)|d\xi \leq |f_n(\bar{x}) - l| + |I| \max_{x\epsilon I}\{|f_n'(x) - F(x)|\}$$

D'altra parte l'ipotesi 2 e l'ipotesi 3 ci dicono che

$$\forall\varepsilon > 0 \begin{cases} \exists\nu_1(\varepsilon) \,|\, |f_n(\bar{x}) - l| < \dfrac{\varepsilon}{2} & \forall n > \nu_1(\varepsilon) \\ \exists\nu_2(\varepsilon) \,|\, \max\limits_{x\epsilon I}\{|f_n'(x) - F(x)|\} < \dfrac{\varepsilon}{2} & \forall n > \nu_2(\varepsilon) \end{cases}$$

Dunque posto $\nu(\varepsilon) = max\{\nu_1(\varepsilon), \nu_2(\varepsilon)\}$ segue che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu(\varepsilon) | |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

il che prova la convergenza uniforme verso f. Osservando poi che evidentemente

$$Df(x) = D\left(l + \int_{\bar{x}}^{x} F(\xi) d\xi\right) = F(x), \quad \forall x \epsilon I$$

restano immediatamente provate le tesi 2,3.

ESE. 2.2.2. Con questo esempio voglio dimostrare che se cade l'ipotesi di convergenza uniforme di $(Df_n)_{n\in\mathbb{N}}$ allora la **2.10** può non essere vera. Consideriamo la successione $\left(xe^{-n^2x^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Intanto ne studio la convergenza puntuale ipotizzando una convergenza verso la funzione nulla. Per un qualunque $\varepsilon > 0$ si ha

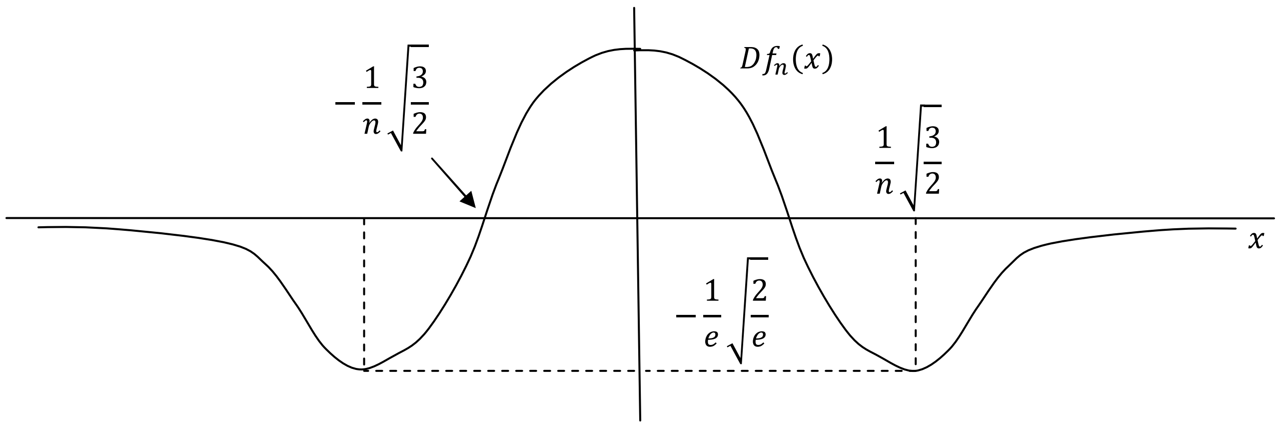
$$\left|xe^{-n^2x^2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x|e^{-n^2x^2} < \varepsilon \Leftrightarrow e^{-n^2x^2} < \frac{\varepsilon}{|x|} \Leftrightarrow -n^2 < \frac{1}{x^2}\ln\frac{\varepsilon}{|x|} \Leftrightarrow n > \sqrt{-\frac{1}{x^2}\ln\frac{\varepsilon}{|x|}}$$

per ogni $x \mid |x| > \varepsilon$. Questo permette di confermare la convergenza puntuale verso la funzione nulla in $\mathbb{R} - \{0\}$. Poiché poi $\left(xe^{-n^2x^2}\right)_{x=0} = 0$ la convergenza puntuale verso la funzione nulla si estende anche all'origine delle ascisse[1]. Dunque la prima delle ipotesi del teorema **2.2.5** è verificata. Ora calcolo la successione delle derivate:

$$D\left(xe^{-n^2x^2}\right) = e^{-n^2x^2} - 2x^2e^{-n^2x^2}n^2 = (1 - 2x^2n^2)e^{-n^2x^2}$$

Uno studio di funzione permette di tracciare il grafo riportato dal quale si evince che la successione delle funzioni $(1 - 2x^2n^2)e^{-n^2x^2}$ non può convergere uniformemente in $\mathbb{R}$ essendo

$$\sup_{n\epsilon\mathbb{N}}\left|(1 - 2x^2n^2)e^{-n^2x^2}\right| = 1 + \frac{2}{e\sqrt{e}}$$



Dunque la seconda ipotesi del teorema **2.2.5** non è verificata. Ora vediamo se la tesi è verificata: si ha per quanto visto che

[1] In realtà la convergenza è anche uniforme infatti si trova $\sup_{\mathbb{R}}\left|xe^{-n^2x^2}\right| = \left(xe^{-n^2x^2}\right)_{x=\frac{1}{n\sqrt{2}}} = \frac{1}{n\sqrt{2e}} \to 0$.

$$D\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = D\left(\lim_{n\to\infty} xe^{-n^2x^2}\right) = D(0) = 0 \quad \forall x\epsilon\mathbb{R}$$
$$\lim_{n\to\infty} Df_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-2x^2n^2}{e^{n^2x^2}}\right) = \begin{cases} 0 \; per \; x \neq 0 \\ 1 \; per \; x = 0 \end{cases}$$

Dunque $D(\lim_{n\to\infty} f_n(x)) \neq \lim_{n\to\infty} Df_n(x)$ e effettivamente la tesi non risulta verificata.

2.3. Condizioni sufficienti per la convergenza uniforme.

In presenza di monotonia, rispetto alla variabile x o rispetto all'indice n, esistono due enunciati che forniscono delle condizioni sufficienti alla convergenza uniforme.

TEO. 2.3.1. Del Dini: monotonia rispetto all'indice. Data la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se risulta che

1) $f_n\epsilon C^0([a,b])$
2) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente verso f in $[a,b]$
3) $f\epsilon C^0([a,b])$
4) fissato comunque $x\epsilon[a,b]$ segue $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \;\; \forall n\epsilon\mathbb{N}$ (oppure $f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \;\; \forall n\epsilon\mathbb{N}$)

allora la convergenza è anche uniforme.

DIM. Definisco in $[a,b]$ una nuova successione di funzioni

$$g_n(x) = f_n(x) - f(x)$$

Per le ipotesi 1,3 le g_n sono continue in $[a,b]$, dunque, indicando con A un intorno di x, abbiamo

$$\forall\varepsilon > 0 \exists A(\varepsilon,n) \sqsubseteq [a,b] \; e \; contenente \; x \mid |g_n(x) - g_n(y)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall y\epsilon A(\varepsilon,n)$$

dove si è evidenziata la dipendenza dell'intorno A dall'indice n, oltre che dal reale ε. D'altra parte, per l'ipotesi 2, la successione di elementi g_n soddisfa anche la convergenza puntuale verso la funzione nulla. Dunque

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\nu(x,\varepsilon) | \forall n \geq \nu(x,\varepsilon) \Rightarrow |g_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Considerando insieme queste due diseguaglianze possiamo allora asserire che

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\nu(x,\varepsilon), A\big(\varepsilon,\nu(x,\varepsilon)\big) | \begin{cases} \left|g_{\nu(x,\varepsilon)}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \left|g_{\nu(x,\varepsilon)}(x) - g_{\nu(x,\varepsilon)}(y)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall y\epsilon A(\varepsilon,n) \end{cases}$$

Sommando membro a membro

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\nu(x,\varepsilon), A\big(\varepsilon,\nu(x,\varepsilon)\big) | \left|g_{\nu(x,\varepsilon)}(y)\right| < \varepsilon, \;\; \forall y\epsilon A\big(\varepsilon,\nu(x,\varepsilon)\big)$$

dove si è considerato che

$$\left|g_{\nu(x,\varepsilon)}(x)\right| + \left|g_{\nu(x,\varepsilon)}(x) - g_{\nu(x,\varepsilon)}(y)\right| < \left|g_{\nu(x,\varepsilon)}(x) - g_{\nu(x,\varepsilon)}(x) + g_{\nu(x,\varepsilon)}(y)\right| = \left|g_{\nu(x,\varepsilon)}(y)\right|$$

L'ipotesi 4 di monotonia comporta in ogni caso che sia $|g_n(x)| \geq |g_{n+1}(x)|\ \forall n \epsilon \mathbb{N}$ e dunque in particolare $\left|g_{\nu(x,\varepsilon)}(x)\right| \geq |g_k(x)|,\ \forall k > \nu(x,\varepsilon)$. Allora abbiamo trovato sin qui che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu(x,\varepsilon), A\big(\varepsilon, \nu(x,\varepsilon)\big) | |g_k(y)| < \varepsilon,\ \ \forall y \epsilon A(\varepsilon,k), \forall k > \nu(x,\varepsilon)$$

Ora consideriamo una successione di punti $x_1, x_2, \ldots, x_r \epsilon [a,b]$ tali che sia

$$[a,b] = \bigcup_{i=1}^{r} A\big(\varepsilon, \nu(x_i,\varepsilon)\big)$$

anche se la possibilità di costruire questa successione andrebbe verificata, ma la cosa sembra plausibile. Posto allora $\nu(\varepsilon) = max\{\nu(x_i,\varepsilon), i = 1,2 \ldots r\}$ abbiamo

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu(\varepsilon) | |g_k(y)| < \varepsilon,\ \ \forall y \epsilon [a,b],\ \ \forall k > \nu(\varepsilon)$$

che è appunto la tesi.

TEO. 2.3.2. Monotonia rispetto alla variabile. Data la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, non necessariamente continue, se risulta che

1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente verso f in $[a,b]$
2) $f \epsilon C^0([a,b])$
3) fissato comunque $n \epsilon \mathbb{R}$ segue $f_n(x_1) \leq f_n(x_2)\ \forall\, x_1 < x_2$ (oppure $f_n(x_1) \geq f_n(x_2)\ \forall\, x_1 < x_2$)

allora la convergenza è anche uniforme.

DIM. Si divide l'intervallo $[a,b]$ in parti uguali attraverso i punti di suddivisione

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_h = b$$

Data l'ipotesi di convergenza puntuale sappiamo che $\forall \varepsilon > 0$ esiste un intero ν_i tale che

$$|f_k(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon \qquad \forall k > \nu_i$$

Posto allora $\nu = max\{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_h\}$ segue che

2.11) $|f_k(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon \qquad \forall k > \nu, \forall i \epsilon \{1,2, \ldots h\}$

Per l'ipotesi di continuità d'altra parte abbiamo che $\forall \varepsilon > 0$ possiamo sempre pensare di scegliere h abbastanza grande da avere

2.12) $|f(x_{i+1}) - f(x)| < \varepsilon$

qualunque sia i. Adesso assumiamo che la monotonia sia di tipo crescente, allora, preso $x \epsilon [x_i, x_{i+1}]$, abbiamo

2.13) $f_k(x_i) \leq f_k(x) \leq f_k(x_{i+1}) \Leftrightarrow \begin{cases} f_k(x) - f_k(x_{i+1}) < 0 \\ f_k(x) - f_k(x_i) > 0 \end{cases}$

La prima disequazione delle 2.13 ci permette di scrivere allora che

$$f_k(x) - f(x) = \big(f_k(x) - f_k(x_{i+1})\big) + f_k(x_{i+1}) - f(x_{i+1}) + f(x_{i+1}) - f(x) <$$
$$< \big(f_k(x_{i+1}) - f(x_{i+1})\big) + \big(f(x_{i+1}) - f(x)\big)$$

E considerando le 2.11, 2.12 abbiamo che $\forall \varepsilon > 0$ esiste un indice $\nu > 0$ tale che

2.14) $f_k(x) - f(x) < \big(f_k(x_{i+1}) - f(x_{i+1})\big) + \big(f(x_{i+1}) - f(x)\big) < 2\varepsilon$

Analogamente la seconda delle 2.13 ci permette di scrivere

$$f_k(x) - f(x) = \big(f_k(x) - f_k(x_i)\big) + f_k(x_i) - f(x_i) + f(x_i) - f(x) >$$
$$> \big(f_k(x_i) - f(x_i)\big) + \big(f(x_i) - f(x)\big)$$

E considerando le 2.11, 2.12 abbiamo che $\forall \varepsilon > 0$ esiste un indice $\nu > 0$ tale che

2.15) $f_k(x) - f(x) > \big(f_k(x_i) - f(x_i)\big) + \big(f(x_i) - f(x)\big) > -2\varepsilon$

Le 2.14 e 2.15 verificano in definitiva la tesi.

Capitolo 3. Serie numeriche

3.1. Serie convergenti e divergenti. Si definisce serie numerica associata alla successione numerica $(u_k)_{k\epsilon\mathbb{N}}$ la somma degli infiniti elementi della successione. Si adotta la seguente simbologia

3.1) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k \triangleq u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$

Gli addendi $u_1 + u_2$ ... sono detti **termini della serie**. La successione numerica $(\sum_{k=1}^{n} u_k)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ è detta poi **successione delle somme parziali** e si indica anche $(S_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$. Si pongono allora le seguenti definizioni:

- se $(S_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ è regolare con limite $S\epsilon\overline{\mathbb{R}}$ allora si dice che la serie $\sum_{k=1}^{n} u_k$ è regolare con somma S; se in particolare S è finito si dice che la serie numerica è convergente; altrimenti si dice che diverge;
- se $(S_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ non è regolare allora si dice che $\sum_{k=1}^{n} u_k$ non ammette somma, ovvero che è irregolare.

3.2. Criterio generale di convergenza. Applicando il criterio di convergenza di Cauchy alla successione delle somme parziali si ottiene immediatamente una condizione necessarie e sufficiente per la convergenza della relativa serie numerica. Qui dimostro questa affermazione e espongo anche una condizione necessaria per la convergenza.

TEO. 3.2.1. Criterio generale di convergenza. Data la serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ essa risulta convergente se e solo se

3.2) $\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists k \in \mathbb{N} \mid \forall n > k \implies \left|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}\right| < \varepsilon \ \ \forall p\epsilon\mathbb{N}$

DIM. Per dimostrare il teorema consideriamo la successione $(S_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ delle somme parziali. In base al criterio di convergenza di Cauchy (teorema **1.3.1** a pag 4) tale successione risulta convergente se e solo se

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists k \in \mathbb{N} \mid \forall n > k \implies \left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon \ \ \forall p\epsilon\mathbb{N}$$

Ma essendo $S_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_k$ la condizione di cui sopra si scrive

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists k \in \mathbb{N} \mid \forall n > k \implies \left|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}\right| < \varepsilon \ \ \forall p\epsilon\mathbb{N}$$

Poiché poi la convergenza di una serie numerica coincide con la convergenza della successione delle sue somme parziali, segue la tesi.

TEO. 3.2.2. Condizione necessaria di convergenza. Data la serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ una condizione necessaria per la sua convergenza è che risulti

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} u_k = 0$$

DIM. Per dimostrare la proposizione occorre dimostrare che la convergenza della serie numerica implica la convergenza a zero della successione dei termini della serie stessa. Ma se la serie è convergente allora, per il criterio generale di convergenza risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists k \in \mathbb{N} \mid \ \forall n > k \ \Longrightarrow \ |u_{n+1}| < \varepsilon$$

avendo assunto $p = 1$. E dunque la tesi è dimostrata.

3.3. Serie a termini di segno costante. Convergenza assoluta.

Per le serie i cui termini non cambiano di segno è possibile dimostrare la regolarità e anche fornire qualche indicazione sulla natura della loro somma.

TEO. 3.3.1. Serie a termini di segno costante. Se i termini della serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ soddisfano la diseguaglianza

$$u_k \geq 0, \ \ \forall k \epsilon \mathbb{N} \quad [u_k \leq 0, \ \ \forall k \epsilon \mathbb{N}]$$

allora la serie numerica è regolare e inoltre per la sua somma si ha

$$S = \sup_{\mathbb{N}}\{S_n\} \quad \left[S = \inf_{\mathbb{N}}\{S_n\}\right]$$

DIM. Dimostriamo il caso in cui si abbiano termini non negativi. Allora la successione delle somme parziali $(S_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ è evidentemente non decrescente; questo, in base al teorema **1.2.7** di pag 3, comporta che $(S_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ sia regolare e in particolare che sia

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sup_{\mathbb{N}}\{S_n\}$$

e dunque appunto $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sup_{\mathbb{N}}\{S_n\}$.

DEF. 3.3.1. Assoluta convergenza. La serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ si dice assolutamente convergente quando risulta convergente la serie $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$.

TEO. 3.3.2. Convergenza e assoluta convergenza. Se la serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ è assolutamente convergente allora è anche convergente.

DIM. Se la serie $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$ è convergente, allora per il criterio generale di convergenza si ha che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists k \in \mathbb{N} \mid \ \forall n > k \ \Longrightarrow \ \left||u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p}|\right| < \varepsilon \ \ \forall p \epsilon \mathbb{N}$$

Tuttavia è evidente che

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \leq \left||u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p}|\right|$$

Dunque si conclude che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists k \in \mathbb{N} \mid \ \forall n > k \ \Longrightarrow \ |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon \ \ \forall p \epsilon \mathbb{N}$$

ovvero che, per il criterio generale di convergenza stesso, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ converge.

TEO. 3.3.2. Corollario. Se la serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ è assolutamente convergente a zero allora è anche convergente a zero.

DIM. La convergenza assoluta a zero della successione $(\sum_{k=1}^{n} |u_k|)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ comporta che sia

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists k \in \mathbb{N} \mid \ \forall n > k \ \Rightarrow \ \big||u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|\big| < \varepsilon$$

che comporta la convergenza a zero della successione $(\sum_{k=1}^{n} u_k)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ essendo

$$|u_1 + u_2 + \cdots + u_n| \leq \big||u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|\big|$$

3.4. Proprietà associativa della somma infinita.

Discuto qui la consistenza o meno della proprietà associativa nel caso in cui si abbia una somma di infiniti termini.

DEF. 3.4.1. Serie dedotta per associazione di termini. Data la serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ e la generica successione crescente di numeri naturali $v_1 < v_2 < v_3$ ... allora definita la successione

$$\begin{gathered} a_1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{v_1} \\ a_2 = u_{v_1+1} + u_{v_1+2} + \cdots + u_{v_3} \\ a_3 = u_{v_2+1} + u_{v_2+2} + \cdots + u_{v_3} \\ \ldots \end{gathered}$$

si dice che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è stata dedotta dalla serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ per associazione dei termini.

TEO. 3.4.1. Proprietà associativa della somma infinita. Data la serie regolare $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ di somma S, ogni serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ da essa dedotta per associazione di termini è anch'essa regolare e ha la sua stessa somma.

DIM. Sia $(S_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ la successione delle somme parziali di $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ e $(T_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ la successione delle somme parziali di $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Allora si ha

$$\begin{gathered} T_1 = a_1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{v_1} = S_{v_1} \\ T_2 = a_1 + a_2 = \left(u_1 + u_2 + \cdots + u_{v_1}\right) + \left(u_{v_1+1} + u_{v_1+2} + \cdots + u_{v_3}\right) = S_{v_2} \\ T_2 = a_1 + a_2 + a_3 = \left(u_1 + \cdots + u_{v_1}\right) + \left(u_{v_1+1} + \cdots + u_{v_3}\right) + \left(u_{v_2+1} + \cdots + u_{v_3}\right) = S_{v_3} \\ \ldots \end{gathered}$$

Ma allora $(T_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di $(S_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$, e dunque, per il teorema **1.2.8** di pagina 3, risulta essere regolare e avere lo stesso limite. Quindi effettivamente $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$.

TEO. 3.4.2. Linearità della somma infinita. Date le due serie numeriche $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, convergenti rispettivamente alle somme A, B, allora la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$, con $\alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}$, risulta avere somma $\alpha A + \beta B$.

DIM. La dimostrazione si basa sulla proprietà distributiva rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare della operazione di limite. Infatti si ha

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} a_k = A \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} A_n = A \\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k = B \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} B_n = B \end{cases} \Rightarrow \lim_{k\to\infty}(\alpha A_n + \beta B_n) = \alpha A_n + \beta B_n = \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$$

3.5. Proprietà commutativa della somma infinita. Vediamo ora se anche la proprietà commutativa della somma si estende alla somma infinita.

DEF. 3.5.1. Serie dedotta per alterazione dell'ordine dei termini. Data la serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ e la successione v_1, v_2, v_3 ... data dalla generica permutazione dei numeri naturali, allora definita la successione

$$a_1 = u_{v_1}, a_2 = u_{v_2}, a_3 = u_{v_3} \dots$$

diciamo che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è stata dedotta dalla $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ per alterazione dell'ordine dei termini.

TEO. 3.5.3. Proprietà commutativa della somma infinita. Se $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ è una serie a termini di segno costante (e dunque regolare) allora ogni serie da essa dedotta alterando l'ordine dei termini presenta la sua stessa somma.

DIM. Intanto, come indicato nella stessa tesi, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ è regolare, essendo a termini di segno costante, per il teorema **3.3.1**. Dunque se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è una serie da essa dedotta per alterazione dell'ordine dei termini, segue che anche essa è regolare, essendo una serie a termini di segno costante. Ora, considerando la simbologia introdotta nella definizione **3.5.1**, definiamo la successione $(m_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ i cui elementi soddisfino la condizione

$$m_n \mid u_{m_n} = max\{u_{v_1}, u_{v_2}, \dots u_{v_n}\} = max\{a_1, a_2, \dots a_n\}$$

Allora, indicando $(S_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ la successione delle somme parziali di $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ e $(T_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ la successione delle somme parziali di $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, è evidente che risulta

$$S_{m_n} \geq T_n \;\; \forall n\epsilon\mathbb{N}$$

Dunque, in base al teorema del confronto (teorema **1.2.5** di pagina 2), deve aversi $S \geq T$[1]. Ripetendo poi questo ragionamento considerando questa volta $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ come serie dedotta alterando l'ordine dei termini della serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, si trova $T \geq S$; e dunque non può che essere $T = S$.

TEO. 3.5.4. Proprietà commutativa della somma infinita. Se $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ è una serie assolutamente convergente (e dunque convergente) allora ogni serie da essa dedotta alterando l'ordine dei termini presenta la sua stessa somma.

DIM. Intanto, come indicato nella stessa tesi, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ risulta convergente per il teorema **3.3.2**, essendo assolutamente convergente. Ora consideriamo le quattro serie

---

[1] Si osservi che $(S_{m_n})_{k\epsilon\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di $(S_n)_{k\epsilon\mathbb{N}}$ e dunque, per il teorema **1.2.8**, ha il suo stesso limite.

1) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = (S_k)_{k\epsilon\mathbb{N}} = S$
2) $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| = (S_k^a)_{k\epsilon\mathbb{N}} = S^a$
3) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = (T_k)_{k\epsilon\mathbb{N}} = T$
4) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = (T_k^a)_{k\epsilon\mathbb{N}} = T^a$

dove si fa riferimento alla simbologia introdotta nella definizione **3.5.1**. Se ora considero la successione $(m_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ i cui elementi soddisfino la condizione

$$m_n \mid \{u_1, u_2, \dots u_{m_n}\} \supseteq \{a_1, a_2, \dots a_n\}$$

indicando r_n i termini che verificano la condizione

$$\{r_1, r_2, \dots r_n\} = \{u_1, u_2, \dots u_{m_n}\} - \{a_1, a_2, \dots a_n\}$$

abbiamo evidentemente che $S_{m_n} = T_n + R_n$ avendo posto $R_n = \sum_{k=1}^{n} r_k$. Considerando poi le serie dei valori assoluti si ha anche $S_n^a = T_n^a + R_n^a$. D'altra parte la serie 4 é ottenuta dalla serie 2 per alterazione dell'ordine dei termini; e poiché le due serie sono entrambe a termini di segno costante, per il teorema **3.5.3** deve risultare

$$S^a = \lim_{n\to\infty} S_n^a = \lim_{n\to\infty} T_n^a = T^a$$

e dunque si ha

$$\lim_{n\to\infty} (T_n^a + R_n^a) = \lim_{n\to\infty} T_n^a + \lim_{n\to\infty} R_n^a = T^a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n^a = R^a = 0$$

Dunque la serie $(R_k)_{k\epsilon\mathbb{N}}$ converge assolutamente a zero. Ma sappiamo che questo comporta, per il teorema **3.3.2**, che $(R_k)_{k\epsilon\mathbb{N}}$ converge a zero. Dunque si ha

$$\begin{cases} S_{m_n} = T_n + R_n \\ R_n \to 0 \end{cases} \Longrightarrow S = T$$

Si osservi che $(S_{m_n})_{n\epsilon\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di $(S_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ e dunque, per il teorema **1.2.8**, ha il suo stesso limite.

3.6. Prodotto di due serie.

Vediamo

3.6. Criteri di convergenza assoluta.

Assegnata la serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ fornisco ora, senza dimostrazione, una serie di condizioni sufficienti alla sua convergenza assoluta, e dunque per il teorema **3.3.2**, alla sua convergenza.

TEO. 3.6.1. Criterio del confronto. Sia data la serie $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ a termini di segno positivo. Si ha

- $\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} p_k \ \text{è } convergente \\ \exists C > 0 \mid |u_k| \le C p_k \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{cases} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k \ converge\ assolutamente$
- $\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} p_k \ \text{è } divergente \\ \exists C > 0 \mid |u_k| \ge C p_k \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{cases} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k \ non\ converge\ assolutamente$

TEO. 3.6.2. Criterio dell'ordine di infinitesimo. Dato $\alpha \ni \mathbb{R}^+$, se risulta che u_k è un infinitesimo di ordine α rispetto a $1/k$ per $k \to \infty$, cioè se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(u_k)^\alpha}{1/k} = 0$$

allora si ha che

- $\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k \ converge\ assolutamente$
- $\alpha \leq 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k \ non\ converge\ assolutamente$

TEO. 3.6.3. Criterio della radice. Se risulta che

$$\sqrt[k]{|u_k|} < 1 \quad \forall k \epsilon \mathbb{N}$$

allora la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ converge assolutamente. Se risulta invece che

$$\exists v \epsilon \mathbb{N} \ | \ \sqrt[k]{|u_k|} \geq 1 \quad \forall k > v$$

allora la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ non converge assolutamente.

TEO. 3.6.4. Criterio del rapporto. Se risulta che

- $u_k \neq 0 \quad \forall k \epsilon \mathbb{N}$
- $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = l \epsilon [0, \infty]$

si ha che

- $l < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ è $assolutamente\ convergente$
- $l > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ non è $assolutamente\ convergente$
- $l = 1 \Rightarrow nulla\ si\ pu$ò $affermare$

3.7. Criteri di convergenza non assoluta.

Assegnata la serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ fornisco ora, senza dimostrazione, una serie di condizioni sufficienti alla sua convergenza. Questi criteri possono essere usati ad esempio quando i criteri di convergenza assoluta non provano la convergenza assoluta e dunque la convergenza. Rispetto ad essi però i seguenti criteri sono applicabili solo a tipologie particolari di serie numeriche, dunque sono criteri di seconda scelta.

TEO. 3.7.1. Primo criterio di convergenza non assoluta. Se risulta che

- la successione delle somme parziali di $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ è limitata
- la successione $(c_k)_{k\epsilon\mathbb{N}}$ è non negativa, non crescente, tendente a zero

allora $\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$ converge.

TEO. 3.7.2. Secondo criterio di convergenza non assoluta. Se risulta che

- la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ è convergente
- la successione $(c_k)_{k\epsilon\mathbb{N}}$ è non crescente è limitata

allora $\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$ converge.

TEO. 3.7.3. Terzo criterio di convergenza non assoluta. Se risulta che

- la successione $(c_k)_{k\epsilon\mathbb{N}}$ è non negativa, non crescente, tendente a zero

allora

- $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}c_k$ converge
- le sue somme parziali di ordine dispari approssimano la somma per eccesso
- le sue somme parziali di ordine pari approssimano la somma per difetto

3.8. Due serie numeriche notevoli.

Discuto in questo paragrafo la serie geometrica e la serie armonica generalizzata.

DEF. 3.8.1. Serie geometrica. Chiamo serie geometrica la serie numerica

3.3) $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = 1 + x + x^2 + \cdots x^{k-1} + \cdots$

ovvero la somma infinita dei termini della progressione geometrica di ragione x.

TEO. 3.8.1. Serie geometrica. Considerata la serie geometrica **3.3** si ha che

1) $x \leq -1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$ $\quad non$ è $regolare$
2) $-1 < x < +1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$ $\quad converge\ con\ somma\ \ 1/(1-x)$
3) $x \geq 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$ $\quad diverge$

DIM. Dall'algebra sappiamo che

$$1 - x^n = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots x^{n-1}) \Leftrightarrow 1 + x + x^2 + \cdots x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

Dunque il generico termine della successione delle somme parziali della serie geometrica si scrive

$$S_n = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$$

Abbiamo così l'espressione della successione di somme parziali della serie geometrica. Allora

1) $x \leq -1 \Rightarrow (x^n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ non è $regolare$ $\Rightarrow (S_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ non è $regolare$
2) $-1 < x < +1 \Rightarrow \frac{x^n}{1-x} \longrightarrow 0 \Rightarrow S_n \longrightarrow \frac{1}{1-x}$

Se invece $x \geq 1$ poiché risulta $x^k \geq k$ segue che $x^k \longrightarrow \infty$, per il teorema del confronto.

DEF. 3.8.2. Serie armonica generalizzata. Chiamo serie armonica generalizzata di parametro α la serie

3.3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$

Nel caso particolare in cui sia $\alpha = 1$ si parla semplicemente di serie armonica.

TEO. 3.8.2. Serie armonica generalizzata. Data la serie **3.3** si ha che

1) $0 < \alpha \leq 1 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}\ diverge\ a + \infty$
2) $\alpha > 1 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}\ converge$

DIM. In base al **TEO 3.3.1** la serie armonica, in quanto serie a termini di segno costante (positivo), è regolare, dunque o diverge a $+\infty$, o converge. Distinguiamo due casi, in funzione del valore di α.

1) Procedo dimostrando che non è verificata la condizione di convergenza indicata nel **TEO 3.2.2**. Si osservi allora che

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^\alpha} > n\frac{1}{(n+n)^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{2^\alpha} > \frac{1}{2^\alpha}$$

Capitolo 4. Serie di funzioni in campo reale

4.1. Serie di funzioni. Convergenza. Data la successione di funzioni $(f_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ definite in $I \subseteq \mathbb{R}$, posto

$$S_1(x) = f_1(x)$$
$$S_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$S_3(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$
$$\dots$$
$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$$
$$\dots$$

resta definita in $I \subseteq \mathbb{R}$ la successione di funzioni $(S_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ il cui limite si indica

4.1) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$

Il limite **4.1** prende il nome di **serie di funzioni** di termine generale f_n, mentre la successione $(S_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ prende il nome di **successione delle somme parziali** associata alla serie.

Se $(S_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ converge puntualmente a $S(x)$ in I allora si dice che la serie di funzioni **4.1 converge puntualmente** in I e che ha somma $S(x)$. In modo analogo, se la successione $(S_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $S(x)$ in I, allora si dice che la serie **4.1 converge uniformemente** in I e che ha somma $S(x)$.

La serie **4.1 converge assolutamente** in I quando la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ converge puntualmente in I.

La serie **4.1 converge totalmente** in I quando esiste una successione numerica convergente $(M_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ a termini non negativi tale per cui si abbia

4.2) $|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x\epsilon I, \forall n\epsilon\mathbb{N}$

TEO. 4.1.1. Criterio di convergenza di Cauchy. Il criterio di convergenza di Cauchy illustrato per le successioni numeriche nel paragrafo **1.3** e per le serie numeriche nel paragrafo **3.2**, può essere applicato alle successioni di funzioni e, dunque, alle serie di funzioni, per verificare la convergenza puntuale e uniforme. In particolare possiamo affermare che la serie di funzioni **4.1** risulta puntualmente convergente in x se e solo se

4.3) $\forall\varepsilon > 0\ \exists k = k(\varepsilon, x) \mid \left|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)\right| < \varepsilon\ \ \forall n > k(\varepsilon, x), \forall p\epsilon\mathbb{N}$

Se poi k è indipendente da x, e dipende dunque solo da ε, la convergenza è anche uniforme.

TEO. 4.1.2. Legame fra le convergenze. È possibile dimostrare le seguenti condizioni sufficienti:

1) $convergenza\ totale \Rightarrow convergenza\ assoluta$
2) $convergenza\ assoluta \Rightarrow convergenza\ puntuale$
3) $convergenza\ totale \Rightarrow convergenza\ uniforme$
4) $convergenza\ uniforme \Rightarrow convergenza\ puntuale$

Queste 4 implicazioni possono essere usate per costruire la seguente tabella, che è ad esse equivalente.

<table>
<tr><th>convergenza totale</th><th>convergenza uniforme</th><th>convergenza puntuale</th><th>convergenza assoluta</th></tr>
<tr><td>VERO</td><td>VERO</td><td>VERO</td><td>VERO</td></tr>
<tr><td rowspan="5">FALSO</td><td rowspan="2">VERO</td><td rowspan="2">VERO</td><td>VERO</td></tr>
<tr><td>FALSO</td></tr>
<tr><td rowspan="3">FALSO</td><td>VERO</td><td>VERO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">FALSO</td><td>VERO</td></tr>
<tr><td>FALSO</td></tr>
</table>

DIM. Considero la **tesi 1.** Se la serie **4.1** converge totalmente allora possiamo scrivere

4.4) $$|f_n(x)| + |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| \leq M_n + M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots + M_{n+p}$$

comunque si scelgano $n, p \epsilon \mathbb{R}$. Questa relazione scrive anche

$$\left| |f_n(x)| + |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| \right| \leq |M_n + M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots + M_{n+p}|$$

Ma se la successione $(M_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ è convergente, in base al criterio di convergenza di Cauchy per successioni numeriche (teorema **1.3.1**), possiamo affermare che $\forall \varepsilon > 0\ \exists k \epsilon \mathbb{N}$ tale che

$$\left| |f_n(x)| + |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| \right| \leq |M_n + M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots + M_{n+p}| < \varepsilon \quad \forall n > k, \forall p \epsilon \mathbb{N}$$

il che comporta, in base al criterio di convergenza di Cauchy per serie di funzioni, la convergenza uniforme in x della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ e dunque, in particolare la sua convergenza puntuale, e dunque, per definizione, la convergenza assoluta della serie **4.1**.

Considero la **tesi 2**. In caso di convergenza assoluta il criterio di Cauchy porge

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k = k(\varepsilon, x) \mid \left| |f_n(x)| + |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| \right| < \varepsilon\ \ \forall n > k(\varepsilon, x), \forall p \epsilon \mathbb{N}$$

Ma essendo

$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq \left| |f_n(x)| + |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| \right|$$

comunque si scelgano x, n, p, segue che

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k = k(\varepsilon, x) \mid |f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon\ \ \forall n > k(\varepsilon, x), \forall p \epsilon \mathbb{N}$$

ovvero la convergenza puntuale.

Considero la **tesi 3**. Considerando la **4.4** abbiamo evidentemente che la convergenza totale comporta anche

$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq M_n + M_{n+1} + \cdots + M_{n+p}$$

e dunque la convergenza della successione numerica $(M_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ permette, in base al criterio di Cauchy per successioni numeriche, di scrivere

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists k = k(\varepsilon, x) \mid \left|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)\right| < \varepsilon\ \ \forall n > k(\varepsilon), \forall p\epsilon\mathbb{N}$$

il che coincide con la convergenza uniforme di $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ in I.

La **tesi 4** è di evidente dimostrazione■

ESE. 4.1.1. Convergenza totale. Studiare la convergenza della serie di funzioni

4.5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx)\quad x\epsilon\mathbb{R}$

Dovendo essere $|\cos(nx)| \leq 1$ si ha

$$\left|\frac{1}{n^2}\cos(nx)\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

Ma la successione $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ è convergente (a zero), dunque sussiste la convergenza totale e, per il teorema **4.1.2**, anche la convergenza uniforme e le convergenze puntuale e assoluta.

ESE. 4.1.2. Convergenza totale. Studiare la convergenza della serie di funzioni

4.6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^4+3n^4}\quad x\epsilon\mathbb{R}$

Provo a vedere se riesco a dimostrare la convergenza totale. A tale scopo studio l'andamento del generico termine della serie. Per la derivata si ha

$$D\frac{x}{x^4+3n^4} = \frac{1}{x^4+3n^4} - \frac{4x^4}{(x^4+3n^4)^2} = \frac{3n^4-3x^4}{(x^4+3n^4)^2}$$

Dunque, facendo delle rapide considerazioni sul segno della derivata, e tenendo presente l'antisimmetria della funzione, rispetto l'asse delle ordinate, e l'andamento asintotico rispetto all'asse delle ascisse per $|x| \longrightarrow +\infty$, si ha che la funzione assume il valore assoluto massimo per $x = \pm n$. Tale estremo vale

$$\max_{\mathbb{R}}|f(x)| = \frac{n}{n^4+3n^4} = \frac{1}{4n^3}$$

Dunque possiamo scrivere che

$$|f(x)| \leq \frac{1}{4n^3}\quad \forall x\epsilon\mathbb{R}$$

Ma la successione numerica a termini positivi $\left(\frac{n}{4n^4}\right)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ converge (a zero), dunque, in base alla definizione di convergenza totale, la serie **4.6** è totalmente convergente (e quindi anche uniformemente, assolutamente e puntualmente convergente).

4.2. Teoremi sulla convergenza uniforme. Dal teorema **2.2.1.** sulle successioni di funzioni deriva immediatamente il teorema analogo per serie di funzioni.

TEO. 4.2.1. Di continuità del limite. Data la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ tale per cui sia $f_n \epsilon C^0(I)$, allora se essa converge uniformemente in I alla somma $S(x)$, segue che $S \epsilon C^0(I)$.

TEO. 4.2.2. Di integrazione per serie. Data la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ tale per cui sia $f_n \epsilon C^0([a,b])$, allora se essa converge uniformemente in I alla somma $S(x)$, segue che

4.7) $\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$

DIM. Intanto per il teorema precedente la somma $S(x)$ è continua in $[a,b]$ pertanto ammette primitiva, e quindi ha senso considerarne l'integrale definito. L'ipotesi di convergenza uniforme ci dice che definitivamente risulta

$$\left|\sum_{n=1}^{n} f_k(x) - S(x)\right| < \varepsilon \quad \forall x \epsilon [a,b]$$

comunque si scelga $\varepsilon > 0$. Integrando ambo i membri della diseguaglianza si ha dunque

$$\int_a^b \left|\sum_{n=1}^{n} f_k(x) - S(x)\right| dx < \int_a^b \varepsilon dx \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{n} f_k(x) - S(x)\right) dx\right| < \varepsilon(b-a)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che l'integrale del valore assoluto di una funzione è evidentemente minore o uguale al valore assoluto dell'integrale della stessa funzione. Ora considerando la proprietà distributiva dell'operatore integrale rispetto alla somma abbiamo

$$\left|\sum_{n=1}^{n}\left(\int_a^b f_k(x)\,dx\right) - \int_a^b S(x)\,dx\right| < \varepsilon(b-a)$$

Questo dimostra la convergenza della serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_k(x)\,dx\right)$ all'integrale $\int_a^b S(x)\,dx$, ovvero la tesi. Naturalmente si può anche sfruttare direttamente il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale per successioni di funzioni (teorema **2.2.4**) il quale, applicato alla successione delle somme parziali (che verificano le sue ipotesi) permette di scrivere che

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} S_n(x)\right)dx = \int_a^b S(x)dx \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\int_a^b \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,dx = \int_a^b S(x)dx \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b S(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_k(x)dx\right) = \int_a^b S(x)dx$$

che è appunto la tesi ■

TEO. 4.2.2. Di derivazione per serie. Data la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ tale per cui sia $f_n \epsilon C^1([a,b])$, allora se

- $(S_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ converge puntualmente in $[a,b]$ verso una funzione $S(x)$
- $(DS_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ converge uniformemente in $[a,b]$ verso una funzione $\Sigma(x)$

allora segue che

- la convergenza di $(S_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ verso $S(x)$ è uniforme
- $DS(x) = \Sigma(x)$

ovvero

4.8) $DS(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(Df_k(x)\right)$

DIM. Osservato che le proprietà ipotizzate per le funzioni f_n valgono anche per la successione delle somme parziali (poiché la somma di funzioni continue è una funzione continua e la somma di funzione derivabili è anch'essa una funzione derivabile), allora applicando il teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata (teorema **2.2.5**) alla successione di funzioni $(S_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ si ha la tesi■

Capitolo 5. Serie di potenze in campo reale

5.1. Serie di potenze e raggio di convergenza. Data la successione numerica $(a_k)_{k\epsilon\mathbb{N}}$ definisco serie di potenze di coefficienti $a_0, a_1, \dots a_n, \dots$ la serie di funzioni

5.1) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n +$

Definito allora l'insieme

5.2) $X = \{x\epsilon\mathbb{R} \mid \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \ \ converge\}$

chiamo **raggio di convergenza** della serie **5.1**, e lo indico ρ, il numero reale definito da

5.3) $\rho = \sup\{X\}$

Poiché in $x = 0$ la serie di potenze **5.1** è convergente qualunque siano i suoi coefficienti, possiamo dire che per ogni serie di potenze il raggio di convergenza soddisfa la diseguaglianza $\rho \geq 0$.

TEO. 5.1.1. Raggio di convergenza. Una serie di potenze ha raggio di convergenza $\rho > 0$ se e solo se

- converge assolutamente $\forall x\epsilon\mathbb{R} \mid |x| < \rho$
- non converge $\forall x\epsilon\mathbb{R} \mid |x| > \rho$

Ha invece raggio di convergenza $\rho = 0$ se e solo se

- converge in $x = 0$
- non converge $\forall x \neq 0$

Se $\rho \neq 0$ allora la serie di potenze converge totalmente in ogni intervallo simmetrico $[-a, a] \subset]-\rho, \rho[$. Nulla si può dire inoltre sulla convergenza della serie di potenze nei punti $x = \pm\rho$.

ESE. 5.1.1. Serie geometrica. La serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, in base a quanto visto nel paragrafo **3.8**, risulta convergere $\forall x\epsilon\mathbb{R} \mid |x| < 1$. Segue che il suo raggio di convergenza è $\rho = 1$. Inoltre in $x = -\rho$ non è regolare e in $x = \rho$ non converge.

ESE. 5.1.2. Consideriamo la serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$. Per $x\epsilon]-1,1[$ si ha

$$\sqrt[k]{\left|\frac{1}{k} x^k\right|} = \frac{|x|}{\sqrt[k]{k}} < \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \leq 1$$

dove si è verificato (con un semplice studio di funzione) che $\sqrt[k]{k} \geq 1 \ \forall k\epsilon\mathbb{N}$. Ma allora il criterio della radice (teorema **3.6.3**) permette di affermare che la serie di potenze converge in $[-1,1]$. Per $x\epsilon]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$ si ha

$$\left|\frac{1}{k} x^k\right| = \frac{1}{k}|x|^k > \frac{1}{k}$$

Ma la serie armonica diverge e dunque, per il criterio del confronto (teorema **3.6.1**) possiamo concludere che la serie diverge in $]-\infty,-1[\,\cup\,]1,\infty[$. In definitiva, per il teorema **5.1.1**, il raggio di convergenza è $\rho = 1$. In $x = -1$ la serie non è regolare, per $x = 1$ la serie diverge.

5.2. Criteri di convergenza.

I seguenti criteri trovano impiego nella ricerca del raggio di convergenza di una serie di potenze data.

TEO. 5.2.1. Criterio di Cauchy-Hadamard. Data la serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ allora se esiste il limite

5.4) $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = l$

il raggio di convergenza della serie è dato da

5.5) $\rho = \begin{cases} +\infty \Leftarrow l = 0 \\ \frac{1}{l} \Leftarrow 0 < l < +\infty \\ 0 \Leftarrow l = +\infty \end{cases}$

TEO. 5.2.2. Criterio di D'Alambert. Data la serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ allora se esiste il limite

5.4) $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = l$

il raggio di convergenza della serie è dato da

5.5) $\rho = \begin{cases} +\infty \Leftarrow l = 0 \\ \frac{1}{l} \Leftarrow 0 < l < +\infty \\ 0 \Leftarrow l = +\infty \end{cases}$

5.3. Derivazione e integrazione di serie di potenze.

Data la serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ allora la serie

5.6) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$

ottenuta derivandone i termini, viene detta **serie derivata** della $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Analogamente la serie

5.7) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$

ottenuta integrandone i termini, viene detta **serie integrata** della $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

TEO. 5.3.1. Serie derivata. Ogni serie di potenze ha lo stesso raggio di convergenza della sua serie derivata.

TEO. 5.3.2. Derivazione di serie di potenze. Data la serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ di raggio di convergenza $\rho > 0$, allora se si ha che

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \forall x \epsilon]-\rho, \rho[$$

segue che

$$\frac{dS(x)}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} \quad \forall x \epsilon]-\rho, \rho[$$

DIM. Sappiamo intanto che il raggio di convergenza della serie derivata è uguale a quello della serie di partenza (teorema **5.3.1**). Sappiamo dunque che la serie e la su serie derivata convergono totalmente in qualunque insieme chiuso incluso in $]-\rho, \rho[$. Valgono dunque le ipotesi del teorema di derivazione per serie (teorema **4.2.2**) il che comporta la tesi■

TEO. 5.3.3. Integrazione di serie di potenze. Data la serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ di raggio di convergenza $\rho > 0$, allora se si ha che

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \forall x \epsilon]-\rho, \rho[$$

segue che

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} \quad \forall x \epsilon]-\rho, \rho[$$

DIM. Considerando la serie integrata come serie di partenza e la serie di partenza come serie derivata abbiamo intanto, per il teorema **5.3.1**, che le due serie hanno lo stesso raggio di convergenza. Considerando poi che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ converge totalmente (e dunque uniformemente) in ogni insieme chiuso incluso in $]-\rho, \rho[$, valgono le ipotesi del teorema di integrazione per serie (teorema **4.2.2**) e dunque si ha la tesi■

5.4. Punto iniziale non nullo.

Chiamo serie di potenze di punto iniziale x_0 ogni serie di funzioni del tipo

5.8) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$

Dunque le serie di potenze studiate sin qui sono un caso particolare delle **5.8**: sono in effetti serie di potenze di punto iniziale zero o, come si dice anche, serie di potenze centrate in zero. Comunque per studiare serie di potenze del tipo **5.8** ci si può ricondurre allo studio delle serie di potenze centrate in zero operando il cambio di variabile $y = x - x_0$. Ciò posto se otteniamo, nella nuova variabile, un raggio di convergenza ρ, questo significa che la **5.8** converge assolutamente

5.9) $\forall x: |x - x_0| < \rho \Leftrightarrow -\rho + x_0 < x < \rho + x_0$

cioè l'insieme all'interno del quale si realizza la convergenza è simmetrico rispetto al punto x_0 piuttosto che rispetto all'origine del sistema di riferimento. È possibile allora generalizzare il teorema **5.1.1** nel seguente.

TEO. 5.4.1. Raggio di convergenza. La serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ha raggio di convergenza $\rho > 0$ se e solo se

- converge assolutamente $\forall x$: $|x - x_0| < \rho$
- non converge $\forall x$: $|x - x_0| > \rho$

Ha invece raggio di convergenza $\rho = 0$ se e solo se

- converge in $x = x_0$
- non converge $\forall x \neq x_0$

Se $\rho \neq 0$ allora la serie di potenze converge totalmente in ogni intervallo

$$[x_0 - a, x_0 + a] \subset]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$$

Nulla si può dire inoltre sulla convergenza della serie di potenze nei punti $x = x_0 \pm \rho$.

TEO. 5.4.2. Criterio di Abel. Sia data la serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ avente raggio di convergenza $\rho > 0$. Allora se risulta che la serie di potenze converge in $x = x_0 + \rho$ si trova che essa converge uniformemente in ogni intervallo del tipo

$$[x_0 - \rho + \varepsilon, x_0 + \rho] \quad \forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < \rho$$

Analogamente se risulta che la serie di potenze converge in $x = x_0 - \rho$ si trova che essa converge uniformemente in ogni intervallo del tipo

$$[x_0 - \rho, x_0 + \rho - \varepsilon] \quad \forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < \rho$$

Capitolo 6. Serie di Taylor

6.1. Sviluppo in serie. La funzione $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ si dice

sviluppabile in serie di potenze di punto iniziale $x_0 \epsilon (a, b)$, *nell'intervallo* (a, b)

se esiste

una serie di potenze, centrata in x_0, *che converga verso* f *in* (a, b)

Si osserva dunque che la serie di potenze dovrà avere un raggio di convergenza ρ tale che sia $(a, b) \subseteq]-\rho, \rho[$ dove eventualmente gli estremi possono esser inclusi.

TEO. 6.1.1. Condizione necessaria. Sia $f:]-\rho, \rho[\to \mathbb{R}$ la somma della serie di potenze $\sum_0^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$; allora si dimostra che

- $f(x) \epsilon C^\infty (]-\rho, \rho[)$
- la sua derivata di ordine m vale

$$D^m f(x) = \sum_m^{+\infty} k(k-1) \dots (k-m+1)\, a_k (x - x_0)^{k-m}$$

- i coefficienti della serie di potenze di cui f è la somma sono

$$a_0 = f(x_0)$$
$$a_1 = f'(x_0)$$
$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$
$$a_3 = \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}$$
$$\dots$$
$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

DIM. In base al teorema **5.3.2** abbiamo che la serie derivata della serie di potenze data converge verso $f'(x)$, con lo stesso raggio di convergenza (teorema **5.3.1**). Cioè

$$f'(x) = \sum_1^{+\infty} k\, a_k (x - x_0)^{k-1} \quad \forall x \epsilon]-\rho, \rho[$$

Applicando in maniera indefinita i teoremi **5.3.2** e **5.3.1** si ottiene la seconda tesi, laddove la prima