

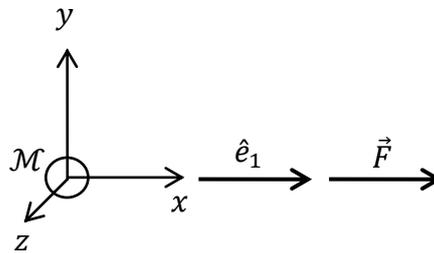
Dinamica dell'elemento

1. Il quesito. La massa $\mathcal{M} = 1\text{kg}$ è soggetta alla forza descritta dalla funzione vettoriale

$$1.1) \quad \vec{F}(t) = (At^3 + Bt^2 + Ct)\hat{e}_1$$

con condizioni iniziali definite da

$$1.2) \quad \begin{cases} x(t=0) = \dot{x}(t=0) = 0 \\ y(t=0) = \dot{y}(t=0) = 0 \\ z(t=0) = \dot{z}(t=0) = 0 \end{cases}$$



nel sistema di riferimento indicato in figura. Si chiede

- di trovare le funzioni cinematiche dell'elemento: spazio, velocità, accelerazione e quantità di moto;
- di ricavare la funzione energia cinetica;
- di calcolare il valore delle funzioni richieste, nonché della forza $\vec{F}(t)$, in corrispondenza degli istanti $t_1 = 3\text{s}$, $t_2 = 6\text{s}$, $t_3 = 8\text{s}$;

se i coefficienti della espressione **1.1** sono dati da

$$1.3) \quad \begin{cases} A = -1\text{Ns}^{-3} \\ B = 10\text{Ns}^{-2} \\ C = -20\text{Ns}^{-1} \end{cases}$$

In particolare la soluzione deve essere fornita secondo i seguenti metodi

- metodo analitico;
- integrazione numerica con metodo di Bezout;
- integrazione numerica con metodo di Cavalieri-Simpson.

Si richiede altresì di valutare, per ciascuna funzione calcolata con metodo numerico, l'errore commesso rispetto alla soluzione esatta.

2. Soluzione esatta. Il sistema differenziale da risolvere è il seguente

$$2.1) \quad \begin{cases} \mathcal{M}\ddot{x}(t) = \vec{F} \cdot \hat{e}_1 \\ \mathcal{M}\ddot{y}(t) = \vec{F} \cdot \hat{e}_2 \\ \mathcal{M}\ddot{z}(t) = \vec{F} \cdot \hat{e}_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{M}\ddot{x}(t) = At^3 + Bt^2 + Ct \\ \mathcal{M}\ddot{y}(t) = 0 \\ \mathcal{M}\ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

con le condizioni iniziali **1.2**. Integrando una volta si ha

$$2.2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{1}{\mathcal{M}} \left(\frac{At^4}{4} + \frac{Bt^3}{3} + \frac{Ct^2}{2} + \dot{x}(t=0) \right) \\ \dot{y}(t) = \dot{y}(t=0) \\ \dot{z}(t) = \dot{z}(t=0) \end{cases}$$

e integrando ancora abbiamo

$$2.3) \quad \begin{cases} x(t) = \frac{1}{\mathcal{M}} \left(\frac{At^5}{20} + \frac{Bt^4}{12} + \frac{Ct^3}{6} + t\dot{x}(t=0) + x(t=0) \right) \\ y(t) = t\dot{y}(t=0) + y(t=0) \\ z(t) = t\dot{z}(t=0) + y(t=0) \end{cases}$$

Imponendo le condizioni iniziali abbiamo allora che lo spazio, la velocità, la quantità di moto, l'accelerazione e l'energia cinetica sono date rispettivamente da

$$2.4) \quad \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathcal{M}} \left(\frac{At^5}{20} + \frac{Bt^4}{12} + \frac{Ct^3}{6} \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2.5) \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathcal{M}} \left(\frac{At^4}{4} + \frac{Bt^3}{3} + \frac{Ct^2}{2} \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2.6) \quad \vec{q}(t) = \mathcal{M}\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{At^4}{4} + \frac{Bt^3}{3} + \frac{Ct^2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

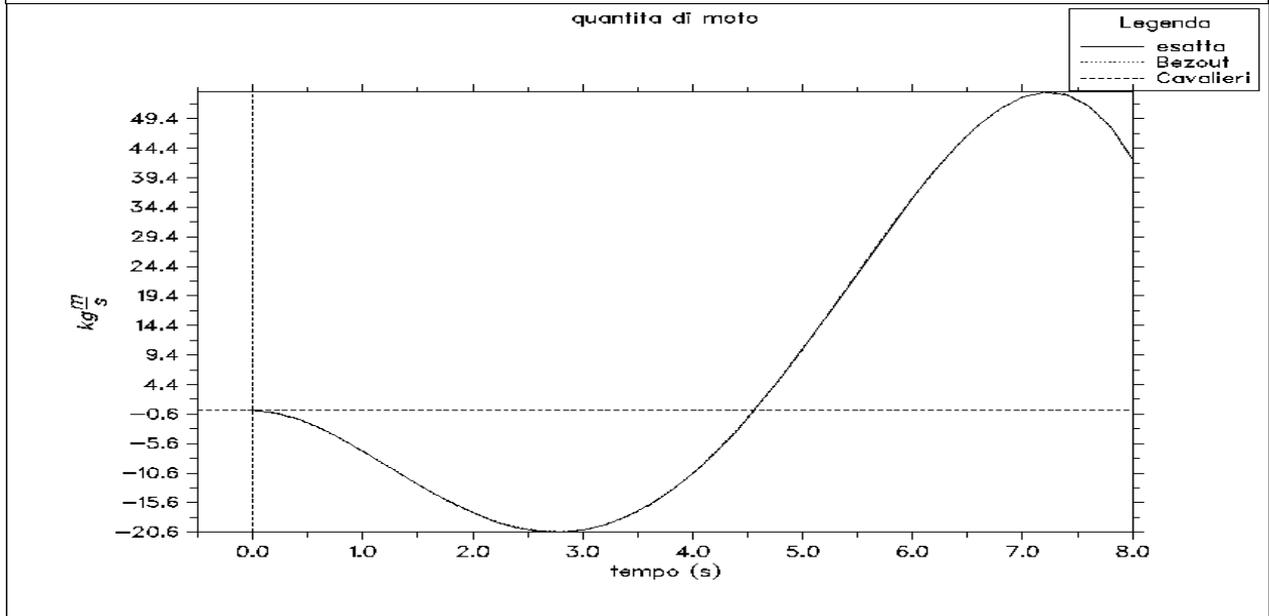
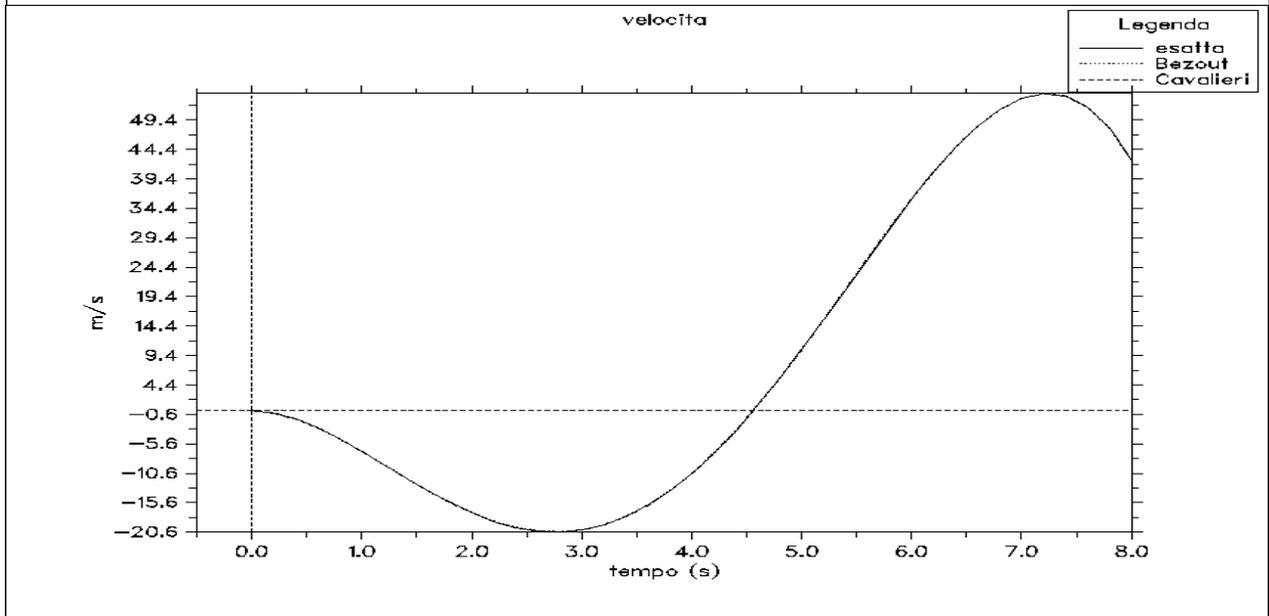
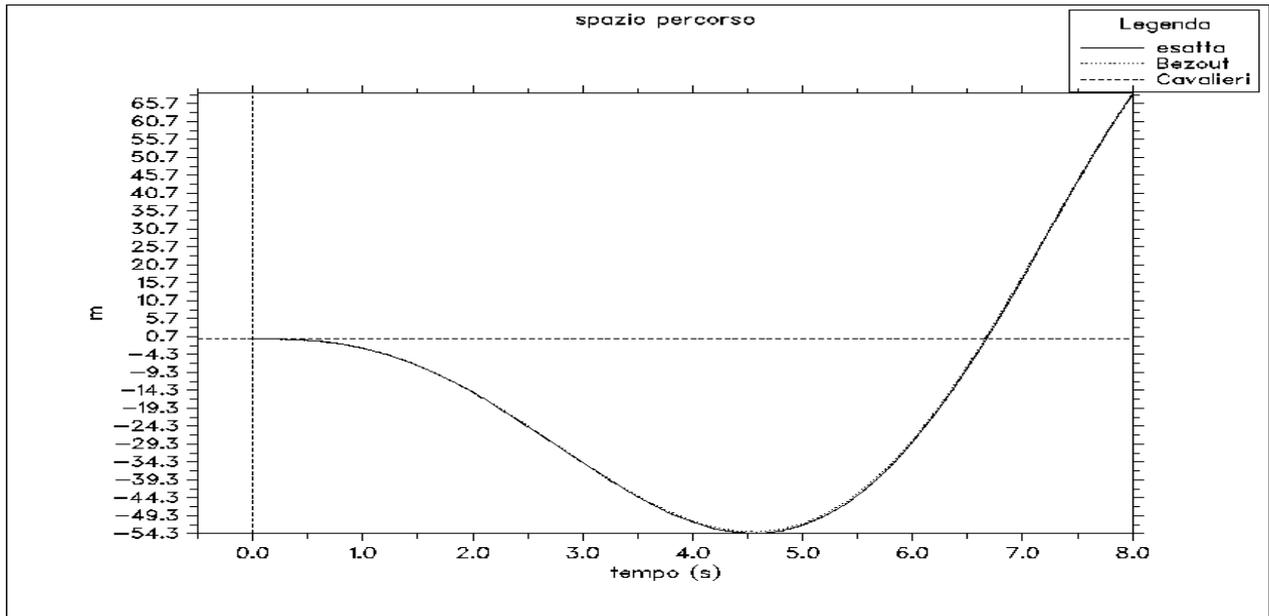
$$2.7) \quad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathcal{M}} (At^3 + Bt^2 + Ct) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

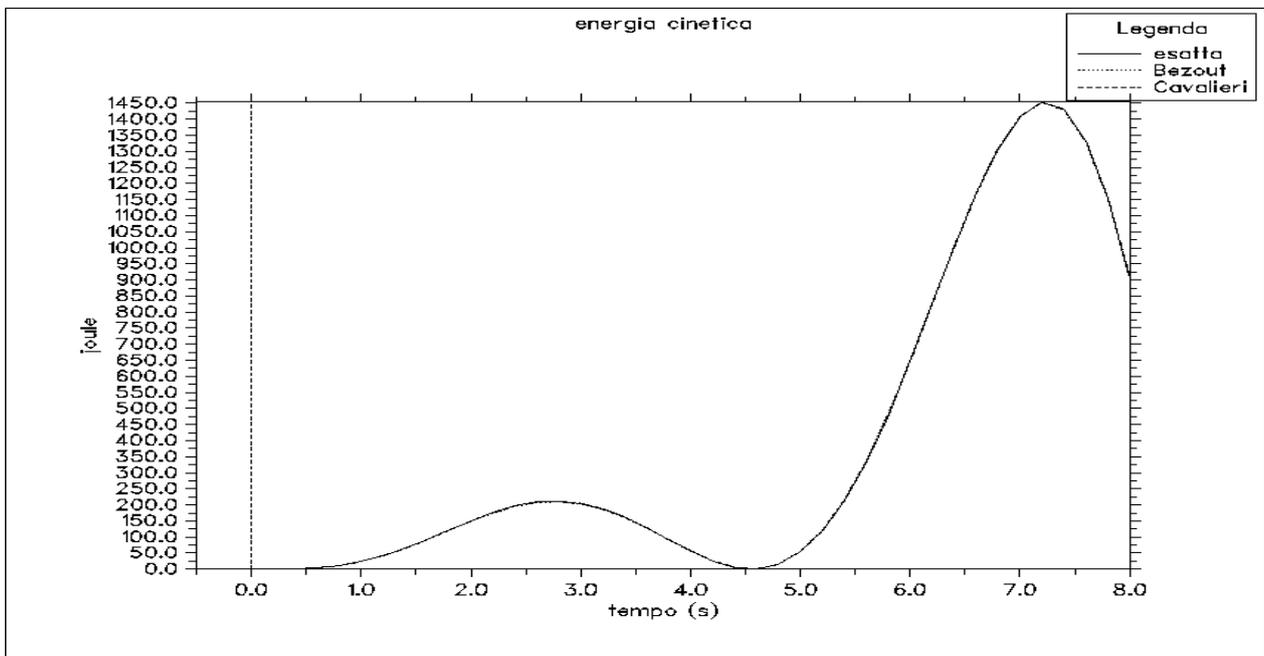
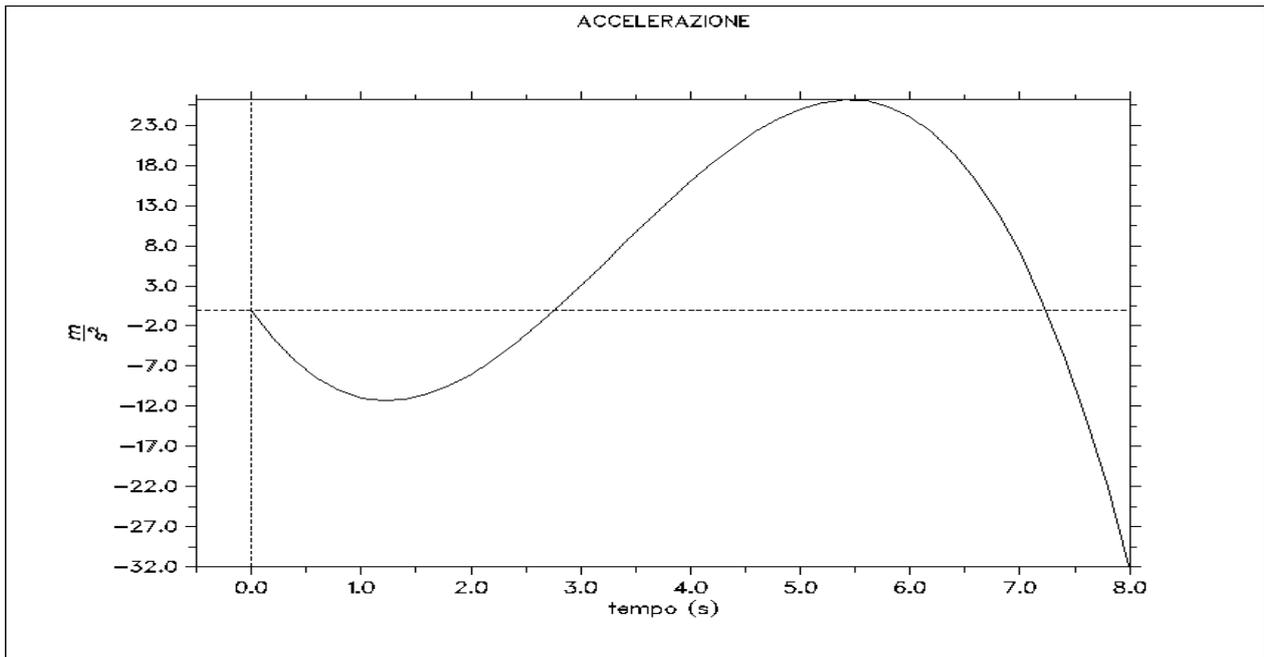
$$2.8) \quad E(t) = \frac{1}{2} \mathcal{M} v^2 = \frac{1}{2\mathcal{M}} \left(\frac{At^4}{4} + \frac{Bt^3}{3} + \frac{Ct^2}{2} \right)^2$$

Per gli istanti richiesti -considerando i coefficienti in **1.3**- il programma di calcolo (illustrato nel seguito) restituisce per le funzioni considerate e per il modulo della forza i valori di seguito tabulati.

istanti	spazio (m)	velocità (m/s)	quantità di moto (kg · m/s)	accelerazione (m/s ²)	energia cinetica (J)	forza (N)
t_1	-34,6500	-20,2500	-20,2500	3	205,0313	3
t_2	-28,8000	35,9998	35,9998	24	647,9994	24
t_3	68,2666	42,6666	42,6666	-32	910,2204	-32

Inoltre il programma disegna per le funzioni considerate i seguenti diagrammi, dove sono riportate anche le rispettive funzioni calcolate con i due metodi di integrazione numerica che illustrerò nei successivi paragrafi.





Il codice scritto per questa esercitazione utilizza la seguente funzione di modulo per attribuire i valori all'array che descrive la velocità:

```
FUNCTION vel(t)
```

```
!questa funzione calcola la velocità nel tempo
```

```
!sezione dichiarativa
```

```
IMPLICIT NONE
```

```
REAL :: vel !dichiaro la funzione
```

```
!dichiaro gli argomenti fittizi
```

REAL ,INTENT(IN):: t !istante in cui si calcola l'accelerazione

!sezione esecutiva

vel = ((A/4)*(t**4))+((B/3)*(t**3))+((C/2)*(t**2)) !calcola vel(t)

RETURN

END FUNCTION vel

La seguente invece è la funzione di modulo utilizzata per assegnare i valori all'array utilizzato per l'accelerazione:

FUNCTION acc(t)

!questa funzione calcola l'accelerazione nel tempo

!sezione dichiarativa

IMPLICIT NONE

REAL :: acc !dichiaro la funzione

!dichiaro gli argomenti fittizi

REAL ,INTENT(IN):: t !istante in cui si calcola l'accelerazione

!sezione esecutiva

acc = (A*(t**3))+B*(t**2))+C*t !calcola a(t)

RETURN

END FUNCTION acc

Ecco in fine la funzione di modulo che calcola i valori da assegnare all'array dello spazio:

FUNCTION spa(t)

!questa funzione calcola lo spazio nel tempo

!sezione dichiarativa

IMPLICIT NONE

REAL :: spa !dichiaro la funzione

!dichiaro gli argomenti fittizi

REAL ,INTENT(IN):: t !istante in cui si calcola l'accelerazione

!sezione esecutiva

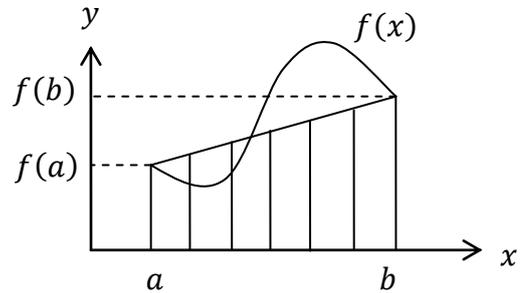
spa = ((A/20)*(t**5))+((B/12)*(t**4))+((C/6)*(t**3)) !calcola spa(t)

RETURN

3. Soluzione numerica con il metodo di Bezout. Data la funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la formula di integrazione di Bezout (detta anche del trapezio) si basa sulla approssimazione dell'area sottesa da essa con il trapezio indicato in figura. Dunque si pone:

$$3.1) \int_a^b f(x) dx \cong (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Considerando che nel nostro caso la variabile indipendente è rappresentata dal tempo e utilizzando una simbologia che richiami il calcolo automatico con array, la formula di Bezout si riscrive



$$3.2) \text{ primitiva}(t_{i+1}) = \text{primitiva}(t_i) + \text{delta_t} \cdot \frac{f(t_i) + f(t_{i+1})}{2}$$

La **3.2** può dunque essere usata tanto per ricavare la velocità dall'accelerazione, che lo spazio dalla velocità; in effetti nel codice scritto per questa esercitazione l'integrazione con Bezout costituisce una procedura di modulo usata in modo ricorsivo. Il testo della procedura è il seguente:

```

SUBROUTINE Bezout (funzione,primitiva)

!integra la funzione inviata con il metodo di Bezout
!(detto anche del trapezio)

IMPLICIT NONE

!dichiaro gli argomenti fittizi

REAL ,INTENT(IN),DIMENSION (fine_int)::funzione !integrando
REAL ,INTENT(OUT),DIMENSION (fine_int)::primitiva !primitiva

!dichiaro le variabili locali

INTEGER::i !indice del ciclo

!sezione esecutiva

!calcolo la primitiva

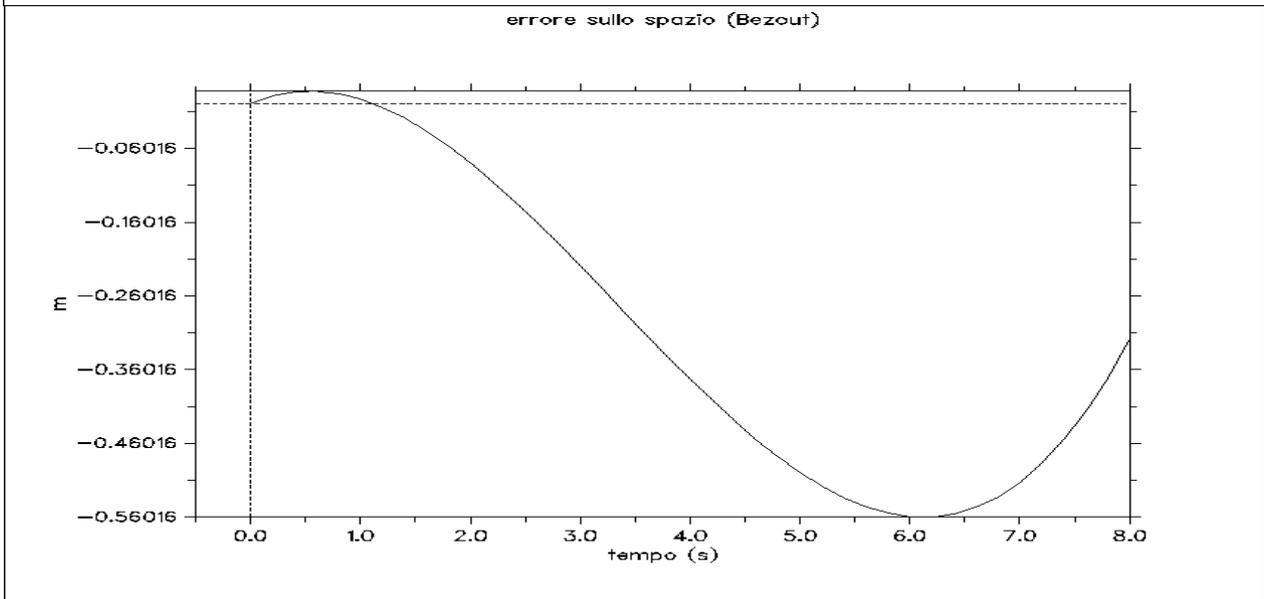
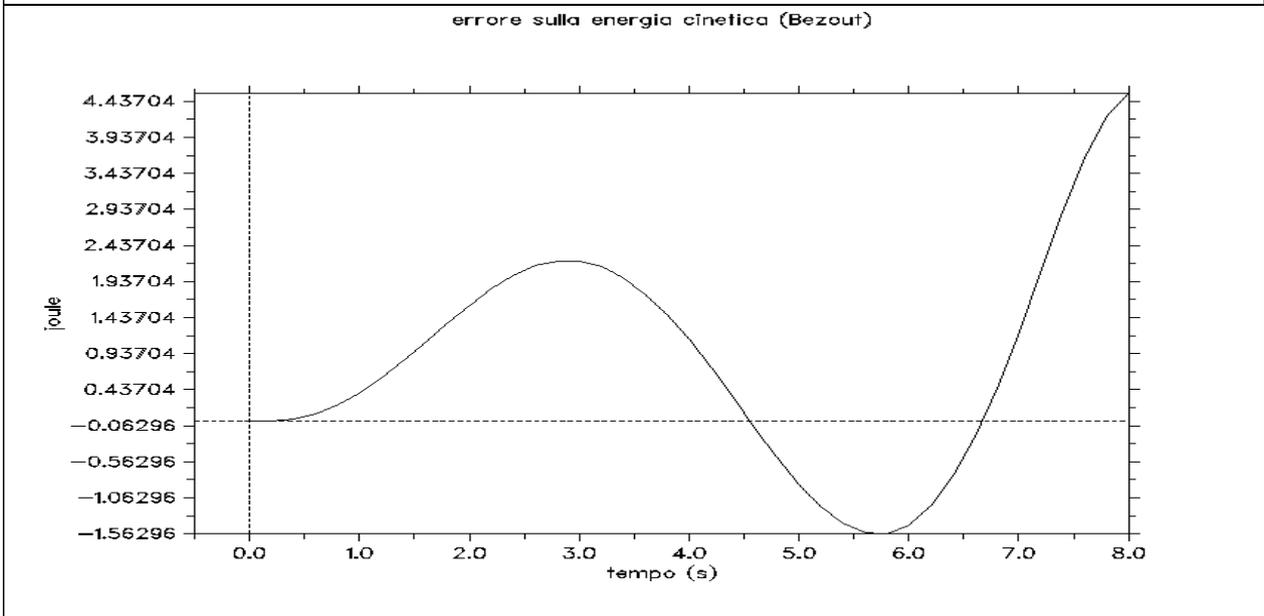
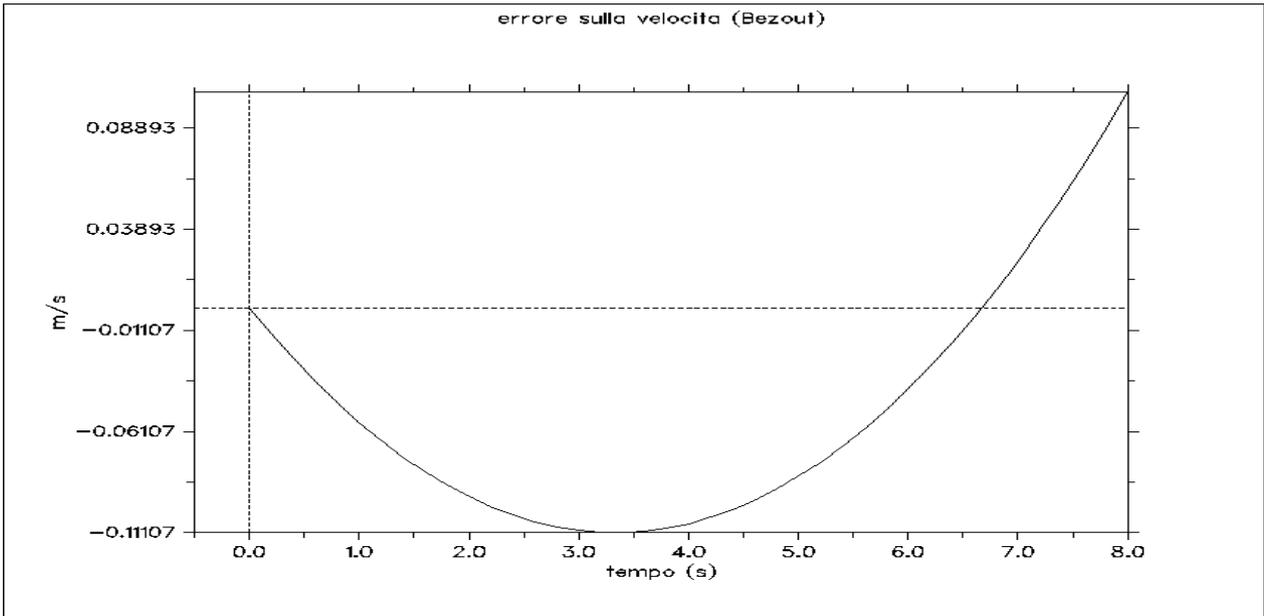
ciclo_integra: DO i=1,fine_int-1,1

    primitiva(i+1)=primitiva(i)+((funzione(i+1)+funzione(i))*(delta_t/2))

END DO ciclo_integra

RETURN

END SUBROUTINE Bezout
    
```



Una volta integrate l'accelerazione (per ottenere la velocità) e la velocità (per ottenere l'accelerazione) si ricavano immediatamente la quantità di moto e l'energia cinetica. Queste funzioni sono state inserite nei diagrammi riportati in precedenza, ma si vede che la differenza con la soluzione esatta non può essere apprezzata. E' invece utile calcolare le differenze (gli errori) fra le funzioni ottenute con il metodo di Bezout, e quelle esatte; diagrammando queste funzioni di errore si ottengono i grafici riportati sopra, molto più significativi.

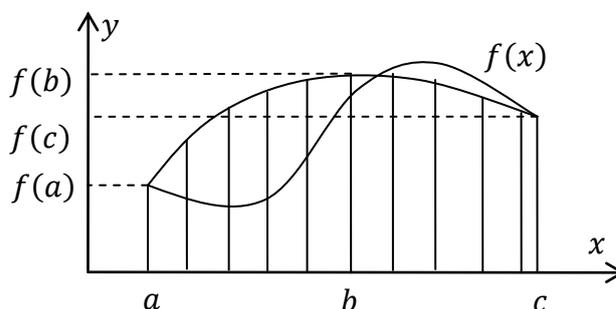
Per gli istanti richiesti -considerando i coefficienti in **1.3**- il programma di calcolo (illustrato nel seguito) restituisce per le funzioni calcolate col metodo di Bezout i valori di seguito tabulati.

istanti	spazio (m)	velocità (m/s)	quantità di moto (kg · m/s)	energia cinetica (J)
t_1	-34,4301	-20,1400	-20,1400	205,0313
t_2	-28,2403	36,0400	36,0400	647,9994
t_3	68,5862	42,5600	42,5600	910,2204

4. Soluzione numerica con il metodo di Cavalieri. Data la funzione $f: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ la formula di integrazione di Cavalieri (detta anche della parabola) si basa sulla approssimazione dell'area sottesa da essa con il settore di parabola indicato in figura. Dunque si pone:

$$4.1) \int_a^c f(x) dx \cong (c - a) \frac{f(a) + 4f(b) + f(c)}{3}$$

Considerando che nel nostro caso la variabile indipendente è rappresentata dal tempo e utilizzando una simbologia che richiami il calcolo automatico con array, la formula di Cavalieri si riscrive



$$4.2) \text{ primitiva}(t_{i+2}) = \text{primitiva}(t_i) + 2 \cdot \text{delta}_t \cdot \frac{f(t_i) + 4f(t_{i+1}) + f(t_{i+2})}{3}$$

Come nel caso del metodo di Bezout, la **4.2** può dunque essere usata tanto per ricavare la velocità dall'accelerazione, che lo spazio dalla velocità; in effetti nel codice scritto per questa esercitazione l'integrazione con Cavalieri costituisce una procedura di modulo usata in modo ricorsivo. Il testo della procedura è il seguente:

```
SUBROUTINE Cavalieri (funzione,primitiva)
```

```
!integra la funzione inviata con il metodo di Cavalieri  
!(detto anche della parabola)
```

```
IMPLICIT NONE
```

```
!dichiaro gli argomenti fittizi
```

```
REAL ,INTENT(IN),DIMENSION (fine_int)::funzione !integrand  
REAL ,INTENT(OUT),DIMENSION (fine_int)::primitiva !primitiva
```

!dichiaro le variabili locali

INTEGER::i !indice del ciclo

!sezione esecutiva

primitiva(1)= 0 !inizializza il primo valore

!calcolo la primitiva (elementi dispari dell'array)

ciclo_integra: DO i=1,fine_int-1,2

primitiva(i+2)=primitiva(i)+((funzione(i+2)+funzione(i+1)*4+funzione(i))*(delta_t/3))

END DO ciclo_integra

!calcolo la primitiva (elementi pari dell'array)

ciclo_integra2: DO i=2,fine_int-2,2

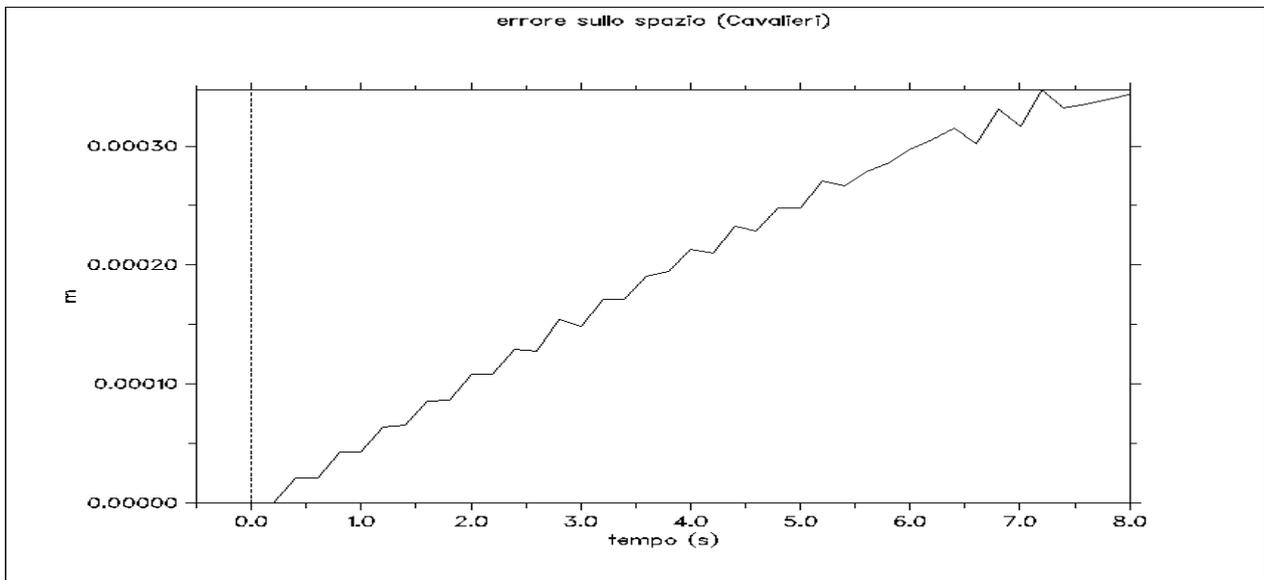
primitiva(i+2)=primitiva(i)+((funzione(i+2)+funzione(i+1)*4+funzione(i))*(delta_t/3))

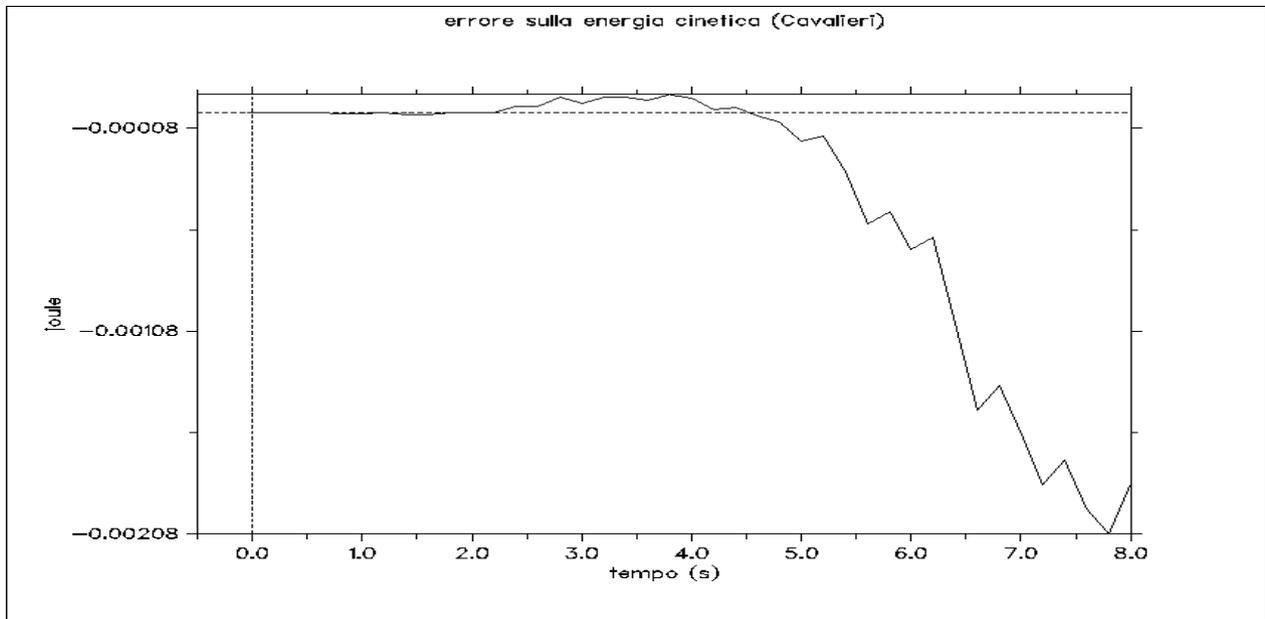
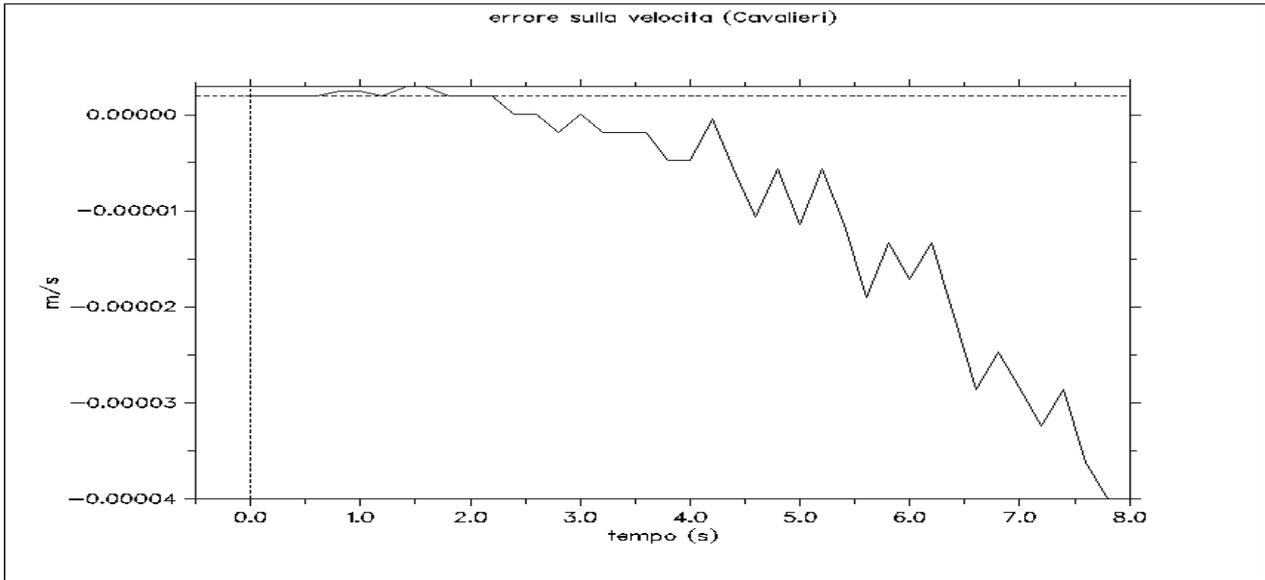
END DO ciclo_integra2

RETURN

END SUBROUTINE Cavalieri

Si ottengono così velocità e spazio, e da essi quantità di moto e energia cinetica. Gli errori rispetto alle rispettive funzioni esatte sono rappresentati nei grafici seguenti.

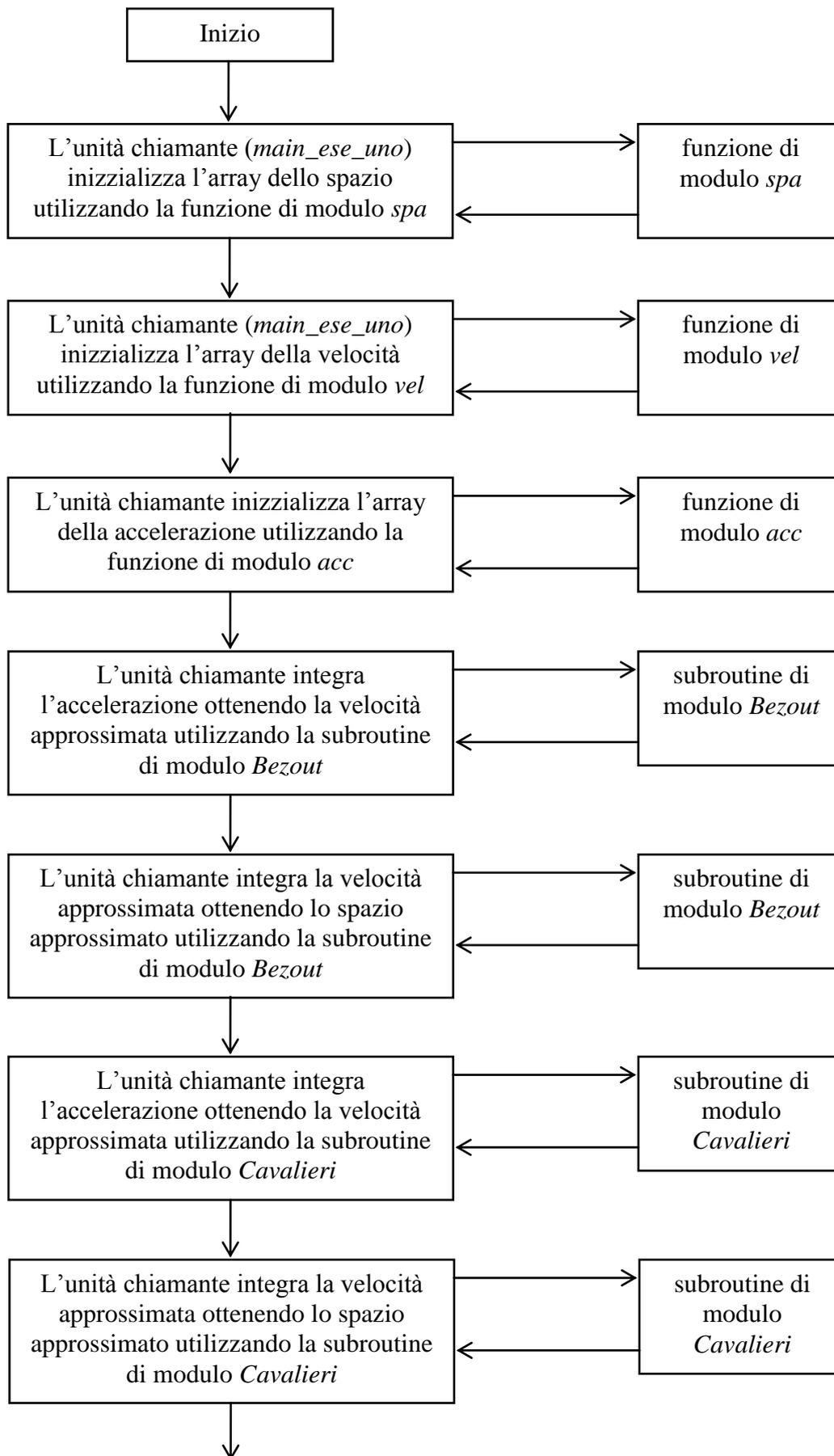


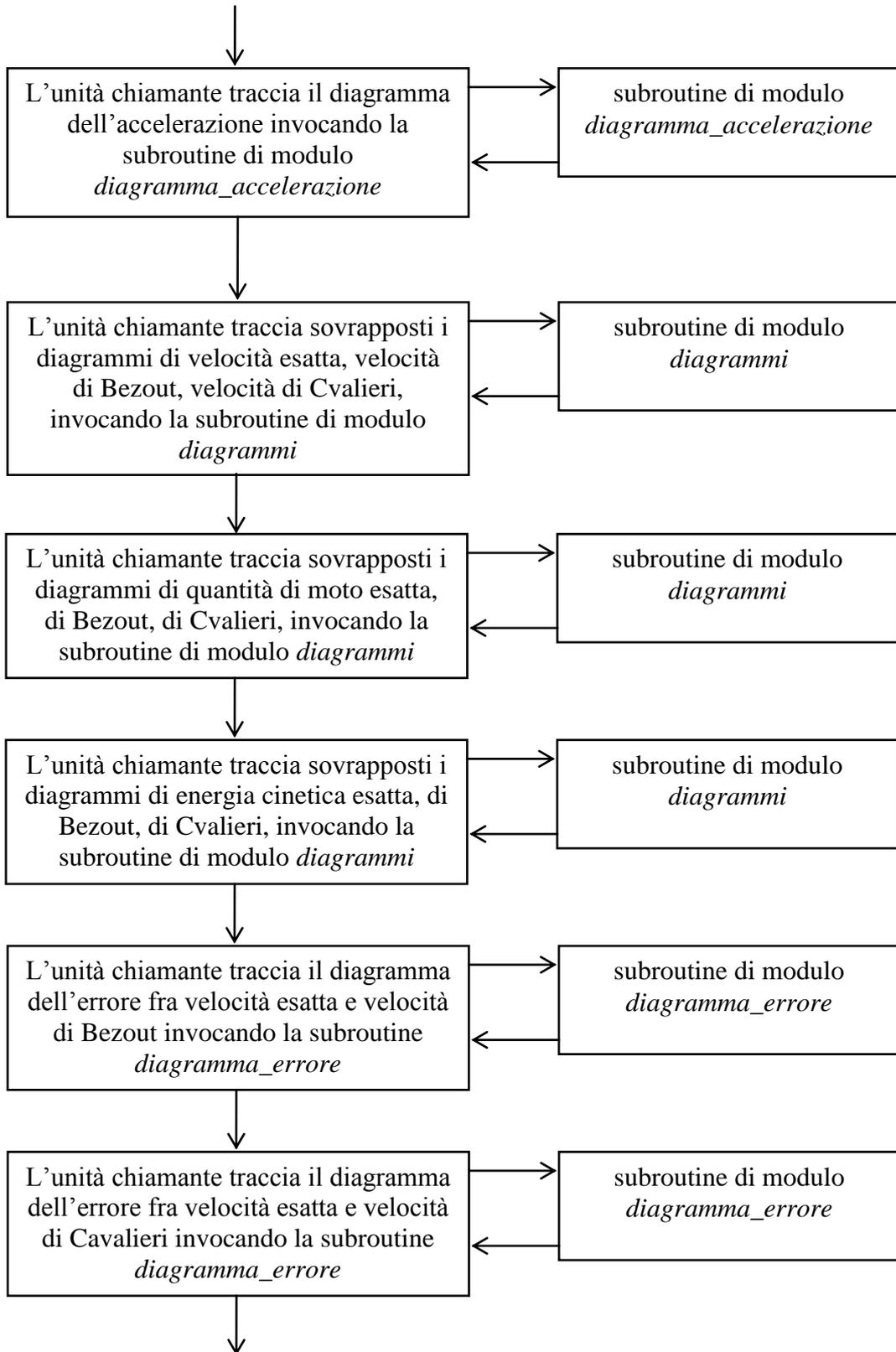


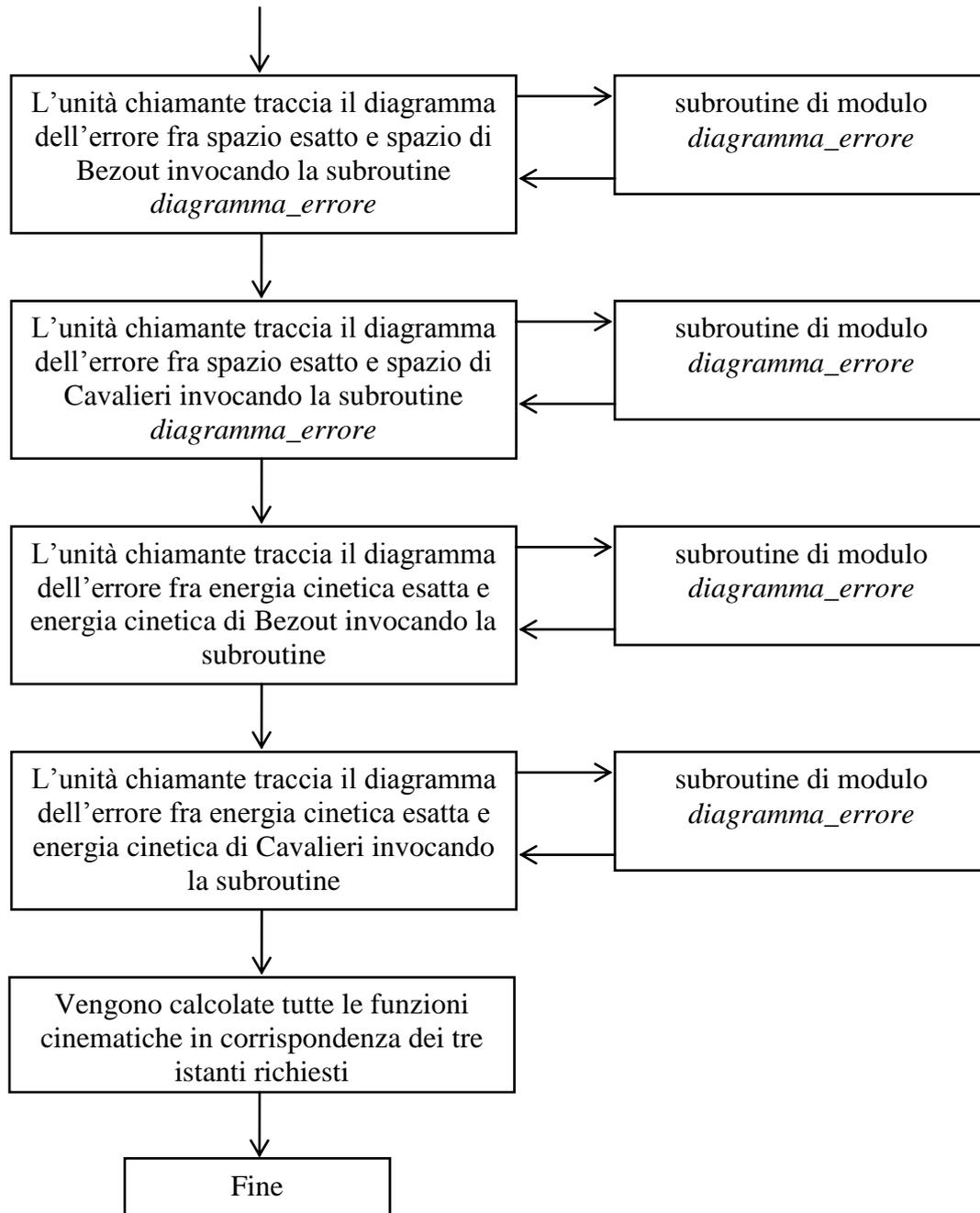
Per gli istanti richiesti -considerando i coefficienti in **1.3**- il programma di calcolo (illustrato nel seguito) restituisce per le funzioni calcolate col metodo di Bezout i valori di seguito tabulati.

istanti	spazio (m)	velocità (m/s)	quantità di moto (kg · m/s)	energia cinetica (J)
t_1	-34,6501	-20,2500	-20,2500	205,0312
t_2	-28,8003	36,0000	36,0000	648,0001
t_3	68,2662	42,6666	42,6666	910,2223

5. Algoritmo risolutivo. Riporto il diagramma di flusso del codice usato per risolvere questa esercitazione.







6. Codice dell'unità chiamante. Riporto il codice della unità principale *main_ese_uno*:

```

PROGRAM main_ese_uno

USE DISLIN !libreria grafica
USE mod_ese_uno !modulo con costanti e procedure

!sezione dichiarativa

IMPLICIT NONE

REAL::t !una variabile di ciclo
INTEGER::i !indice dei cicli
CHARACTER(len=10):: chiusura !serve per chiudere il programma

```

!dichiaro gli array di tutte le grandezze cinematiche

```
REAL,DIMENSION(1:fine_INT)::accelerazione
REAL,DIMENSION(fine_INT)::velocita_esatta
REAL,DIMENSION(fine_INT)::spazio_esatto
REAL,DIMENSION(fine_INT)::quantita_moto_esatta
REAL,DIMENSION(fine_INT)::energia_cinetica_esatta
```

```
REAL,DIMENSION(fine_INT)::velocita_Bezout
REAL,DIMENSION(fine_INT)::spazio_Bezout
REAL,DIMENSION(fine_INT)::quantita_moto_Bezout
REAL,DIMENSION(fine_INT)::energia_cinetica_Bezout
```

```
REAL,DIMENSION(fine_INT)::velocita_Cavalieri
REAL,DIMENSION(fine_INT)::spazio_Cavalieri
REAL,DIMENSION(fine_INT)::quantita_moto_Cavalieri
REAL,DIMENSION(fine_INT)::energia_cinetica_Cavalieri
```

!sezione esecutiva

CALL BMPMOD (300,'inch','resolution') !fisso risoluzione dell'immagine in formato .bmp

!inizializzo l'array accelerazione

```
ciclo_uno: DO i=1,fine_int,1
```

```
    t= delta_t*i-delta_t
    accelerazione(i)=acc(t)
```

```
END DO ciclo_uno
```

```
accelerazione(1)=0
```

!inizializzo l'array velocita_esatta

```
ciclo_due: DO i=1,fine_int,1
```

```
    t= delta_t*i-delta_t
    velocita_esatta(i)= vel(t)
```

```
END DO ciclo_due
```

!inizializzo l'array spazio_esatto

```
ciclo_tre: DO i=1,fine_int,1
```

```
    t= delta_t*i-delta_t
    spazio_esatto(i)=spa(t)
```

```
END DO ciclo_tre
```

!inizializzo il primo valore di ciascun array non esatto

```
velocita_Bezout(1)=0
velocita_Cavalieri(1)=0
spazio_Bezout(1)=0
```

spazio_Cavalieri(1)=0

!integro l'accelerazione secondo Bezout

CALL Bezout(accelerazione,velocita_Bezout)
CALL Bezout(velocita_Bezout,spazio_Bezout)

!integro l'accelerazione secondo Cavalieri

spazio_Cavalieri(2)=spazio_esatto(2) !necessario per il metodo di Cavalieri
velocita_Cavalieri(2)=velocita_esatta(2) !necessario per il metodo di Cavalieri

CALL Cavalieri(accelerazione,velocita_Cavalieri)
CALL Cavalieri(velocita_Cavalieri,spazio_Cavalieri)

!inizializzo gli array della quant. e della energ.

ciclo_quattro: DO i=1,fine_int,1

 quantita_moto_esatta(i)=velocita_esatta(i)
 quantita_moto_Bezout(i)=velocita_Bezout(i)
 quantita_moto_Cavalieri(i)=velocita_Cavalieri(i)

 energia_cinetica_esatta(i)=(velocita_esatta(i)**2)*0.5
 energia_cinetica_Bezout(i)=(velocita_Bezout(i)**2)*0.5
 energia_cinetica_Cavalieri(i)=(velocita_Cavalieri(i)**2)*0.5

END DO ciclo_quattro

!traccio il grafico della accelerazione

CALL diagramma_accelerazione (accelerazione)

!traccio i diagrammi delle velocita

CALL diagrammi (velocita_esatta,velocita_Bezout,velocita_Cavalieri,'velocita'&
, 'm/s',5.)

!traccio i diagrammi degli spazi

CALL diagrammi (spazio_esatto,spazio_Bezout,spazio_Cavalieri,'spazio percorso'&
, 'm',5.)

!traccio i diagrammi delle quantita di moto

CALL diagrammi (quantita_moto_esatta,quantita_moto_Bezout,quantita_moto_Cavalieri,'quantita di moto'&
, '\$kg\frac{m}{s}\$',5.)

!traccio i diagrammi delle energie cinetiche

CALL diagrammi (energia_cinetica_esatta,energia_cinetica_Bezout, energia_cinetica_Cavalieri,'energia cinetica'&
, 'joule',50.)

!traccio i diagrammi degli errori sulla velocita

CALL diagramma_errore (velocita_esatta,velocita_Bezout,'errore sulla'&
& velocita (Bezout)', 'm/s',0.05)

```
CALL diagramma_errore (velocita_esatta,velocita_Cavalieri,'errore sulla&
& velocita (Cavalieri)', 'm/s',0.00001)
```

!traccio i diagrammi degli errori sullo spazio

```
CALL diagramma_errore (spazio_esatto,spazio_Bezout,'errore sullo&
& spazio (Bezout)', 'm',0.1)
```

```
CALL diagramma_errore (spazio_esatto,spazio_Cavalieri,'errore sullo&
& spazio (Cavalieri)', 'm',0.0001)
```

!traccio i diagrammi degli errori sulla quantità di moto

```
CALL diagramma_errore (quantita_moto_esatta,quantita_moto_Bezout,'errore sulla&
& quantita di moto (Bezout)', '$kg\frac{m}{s}$',0.05)
```

```
CALL diagramma_errore (quantita_moto_esatta,quantita_moto_Cavalieri,'errore sulla&
& quantita di moto (Cavalieri)', '$kg\frac{m}{s}$',0.00001)
```

!traccio i diagrammi degli errori sulla energia cinetica

```
CALL diagramma_errore (energia_cinetica_esatta,energia_cinetica_Bezout,'errore sulla&
& energia cinetica (Bezout)', 'joule ',0.5)
```

```
CALL diagramma_errore (energia_cinetica_esatta,energia_cinetica_Cavalieri,'errore sulla&
& energia cinetica (Cavalieri)', 'joule',0.001)
```

```
!100 FORMAT (F6.3)
```

```
WRITE (*,*) " "
```

```
WRITE (*,*)"Per t=3s,6s,8s lo spazio esatto vale rispettivamente"
```

```
WRITE (*,*) spazio_esatto(16), spazio_esatto(31), spazio_esatto(41)
```

```
WRITE (*,*) " "
```

```
WRITE (*,*)"Per t=3s,6s,8s la velocita' esatta vale rispettivamente"
```

```
WRITE (*,*) velocita_esatta(16), velocita_esatta(31), velocita_esatta(41)
```

```
WRITE (*,*) " "
```

```
WRITE (*,*)"Per t=3s,6s,8s la quantita' di moto esatta vale rispettivamente"
```

```
WRITE (*,*) quantita_moto_esatta(16), quantita_moto_esatta(31), quantita_moto_esatta(41)
```

```
WRITE (*,*) " "
```

```
WRITE (*,*)"Per t=3s,6s,8s la accelerazione vale rispettivamente"
```

```
WRITE (*,*) accelerazione(16), accelerazione(31), accelerazione(41)
```

```
WRITE (*,*) " "
```

```
WRITE (*,*)"Per t=3s,6s,8s la energia cinetica esatta vale rispettivamente"
```

```
WRITE (*,*) energia_cinetica_esatta(16), energia_cinetica_esatta(31), energia_cinetica_esatta(41)
```

```
WRITE (*,*) " "
```

```
WRITE (*,*)"Per t=3s,6s,8s lo spazio secondo Bezout vale rispettivamente"
```

```
WRITE (*,*) spazio_Bezout(16), spazio_Bezout(31), spazio_Bezout(41)
```

```

WRITE (*,*)" "
WRITE (*,*)"Per t=3s,6s,8s la velocita' secondo Bezout vale rispettivamente"
WRITE (*,*) velocita_Bezout(16), velocita_Bezout(31), velocita_Bezout(41)

WRITE (*,*)" "
WRITE (*,*)"Per t=3s,6s,8s la quantita' di moto secondo Bezout vale rispettivamente"
WRITE (*,*) quantita_moto_Bezout(16), quantita_moto_Bezout(31), quantita_moto_Bezout(41)

WRITE (*,*)" "
WRITE (*,*)"Per t=3s,6s,8s la energia cinetica secondo Bezout vale rispettivamente"
WRITE (*,*) energia_cinetica_esatta(16), energia_cinetica_esatta(31), energia_cinetica_esatta(41)

WRITE (*,*)" "
WRITE (*,*)"Per t=3s,6s,8s lo spazio secondo Cavalieri vale rispettivamente"
WRITE (*,*) spazio_Cavalieri(16), spazio_Cavalieri(31), spazio_Cavalieri(41)

WRITE (*,*)" "
WRITE (*,*)"Per t=3s,6s,8s la velocita' secondo Cavalieri vale rispettivamente"
WRITE (*,*) velocita_Cavalieri(16), velocita_Cavalieri(31), velocita_Cavalieri(41)

WRITE (*,*)" "
WRITE (*,*)"Per t=3s,6s,8s la quantita' di moto secondo Cavalieri vale rispettivamente"
WRITE (*,*) quantita_moto_Cavalieri(16), quantita_moto_Cavalieri(31), quantita_moto_Cavalieri(41)

WRITE (*,*)" "
WRITE (*,*)"Per t=3s,6s,8s la energia cinetica secondo Cavalieri vale rispettivamente"
WRITE (*,*) energia_cinetica_Cavalieri(16), energia_cinetica_Cavalieri(31), energia_cinetica_Cavalieri(41)

WRITE (*,*)"Per chiudere il programma premi una lettera qualunque."
WRITE (*,*)"Tutti i dati andranno persi."
READ (*,*) chiusura

STOP

END PROGRAM main_ese_uno

```

7. Codice del modulo. Riporto il codice del modulo *mod_ese_uno* contenente le procedure utilizzate per questa esercitazione:

```

MODULE mod_ese_uno

!sezione dichiarativa

IMPLICIT NONE

!fisso i valori delle costanti fisiche del problema

REAL, PARAMETER:: m = 1. !la massa dell'elemento in kg

!lecco i coefficienti della funzione che descrive la forza

REAL, PARAMETER:: A = -1. !N*s^-3
REAL, PARAMETER:: B = 10. !N*s^-2
REAL, PARAMETER:: C = -20. !N*s^-1

!scrivo i parametri temporali

```

```

REAL , PARAMETER:: tempo = 8. !secondi di osservazione
REAL , PARAMETER:: delta_t= 0.2 !s, intervallo di integrazione
REAL , PARAMETER:: fine_re=(tempo/delta_t)+1.
INTEGER , PARAMETER:: fine_int=INT(fine_re)

```

!fisso il formato di output per i diagrammi

```

CHARACTER(len=4):: formato ='bmp '

```

!scrivo le subroutine

CONTAINS

```

!-----

```

```

SUBROUTINE Bezout (funzione,primitiva)

```

```

!integra la funzione inviata con il metodo di Bezout
!(detto anche del trapezio)

```

```

IMPLICIT NONE

```

!dichiaro gli argomenti fittizi

```

REAL ,INTENT(IN),DIMENSION (fine_int)::funzione !integrande
REAL ,INTENT(OUT),DIMENSION (fine_int)::primitiva !primitiva

```

!dichiaro le variabili locali

```

INTEGER::i !indice del ciclo

```

!sezione esecutiva

!calcolo la primitiva

```

ciclo_integra: DO i=1,fine_int-1,1

```

```

    primitiva(i+1)=primitiva(i)+((funzione(i+1)+funzione(i))*(delta_t/2))

```

```

END DO ciclo_integra

```

```

RETURN

```

```

END SUBROUTINE Bezout

```

```

!-----

```

```

SUBROUTINE Cavalieri (funzione,primitiva)

```

```

!integra la funzione inviata con il metodo di Cavalieri
!(detto anche della parabola)

```

```

IMPLICIT NONE

```

!dichiaro gli argomenti fittizi

```

REAL ,INTENT(IN),DIMENSION (fine_int)::funzione !integrande

```

```

REAL ,INTENT(OUT),DIMENSION (fine_int)::primitiva !primitiva

!dichiaro le variabili locali

INTEGER::i !indice del ciclo

!sezione esecutiva

primitiva(1)= 0 !inizializza il primo valore

!calcolo la primitiva (elementi dispari dell'array)

ciclo_integra: DO i=1,fine_int-1,2

    primitiva(i+2)=primitiva(i)+((funzione(i+2)+funzione(i+1)*4+funzione(i))*(delta_t/3))

END DO ciclo_integra

!calcolo la primitiva (elementi pari dell'array)

ciclo_integra2: DO i=2,fine_int-2,2

    primitiva(i+2)=primitiva(i)+((funzione(i+2)+funzione(i+1)*4+funzione(i))*(delta_t/3))

END DO ciclo_integra2

RETURN

END SUBROUTINE Cavalieri

!-----

SUBROUTINE diagramma_accelerazione (accelerazione)

!traccia il diagramma della accelerazione

IMPLICIT NONE

!dichiaro gli argomenti fittizi

REAL ,INTENT(IN),DIMENSION (fine_int)::accelerazione !da plottare

!dichiaro le variabili locali

INTEGER:: i !indice del ciclo

REAL ::max !valore massimo della accelerazione
REAL ::min !valore minimo dell'accelerazione

REAL , DIMENSION (fine_int):: x !contiene i valori delle ascisse

!sezione esecutiva

!inizializzo l'array delle ascisse

x(1)=0.

```

```

ciclo_ascisse: DO i=2,fine_int,1

    x(i)=x(i-1)+delta_t

END DO ciclo_ascisse

CALL METAFI (formato) !indico il formato dell'output
CALL SCRMOD ('revers') !scritta nera su fondo bianco

CALL DISINI

CALL TEXMOD ('ON') !chiedo di poter scrivere le formule in maniera grafica
CALL PAGERA !traccio un bordo per il piano xy
CALL DUPLX !font a doppio spessore

CALL AXSPOS (450,1800) !coordinate angolo basso sinistra
CALL AXSLEN (2200,1500)!lunghezza dei due assi in pixel

CALL NAME ('tempo (s)','x') !nome delle ascisse
CALL NAME ('$\\frac{m}{s^2}$','y') !nome delle ordinate

CALL TITLIN ('ACCELERAZIONE',1) !prima riga del titolo

max=MAXVAL(accelerazione) !il massimo della funzione
min=MINVAL(accelerazione) !il minimo valore della accelerazione

CALL GRAF (-0.5,8.,0.,1.,min,max,min,5.)

CALL TITLE !stampa il titolo di cui sopra

CALL CURVE (x,accelerazione,fine_int) !plotto accelerazione

CALL DASH !tratteggio per gli assi coordinati
CALL XAXGIT !traccio la retta y=0
CALL YAXGIT !traccio la retta x=0

CALL DISFIN

RETURN

END SUBROUTINE diagramma_accelerazione

!-----

SUBROUTINE diagrammi (funzione_esatta,funzione_Bezout,&
funzione_Cavalieri,titolo, unita_misura, passo)

!traccia insieme i tre diagrammi di ciascuna funzione
!ad esempio la velocit... esatta, quella di Beout
!e quella di Cavalieri

IMPLICIT NONE

!dichiaro gli argomenti fittizi

!funzioni da plottare

```

```
REAL ,INTENT(IN),DIMENSION (fine_int)::funzione_esatta
REAL ,INTENT(IN),DIMENSION (fine_int)::funzione_Bezout
REAL ,INTENT(IN),DIMENSION (fine_int)::funzione_Cavalieri
```

!titolo, unita di misura e passo della griglia delle ordinate

```
CHARACTER(len=*),INTENT(in):: titolo !nome funzione plottata
CHARACTER(len=*),INTENT(in):: unita_misura !unita di misura
REAL :: passo !indica il passo della griglia dell'asse y
```

!dichiaro le variabili locali

```
INTEGER:: i !indice del ciclo
CHARACTER(len=30):: stringa !e' la stringa su cui si scrivere la legenda
```

```
REAL ::max_esatta !valore massimo funzione esatta
REAL ::max_Bezout !omologo per la funz. di Bezout
REAL ::max_Cavalieri !omologo per la funz. di Cavalieri
REAL ::max !massimo dei massimi
```

```
REAL ::min_esatta !valore minimo funzione esatta
REAL ::min_Bezout !omologo per la funz. di Bezout
REAL ::min_Cavalieri !omologo per la funz. di Cavalieri
REAL ::min !minimo dei minimi
```

```
REAL , DIMENSION (fine_int):: x !contiene valori ascisse
```

!sezione esecutiva

!inizializzo l'array delle ascisse

```
x(1)=0.
```

```
ciclo_ascisse: DO i=2,fine_int,1
```

```
    x(i)=x(i-1)+delta_t
```

```
END DO ciclo_ascisse
```

```
CALL METAFL (formato) !indico il formato dell'output
CALL SCRMOD ('revers') !scritta nera su fondo bianco
```

```
CALL DISINI
```

```
CALL TEXMOD ('ON') !chiedo di poter scrivere le formule in maniera grafica
CALL PAGERA !traccio un bordo per il piano xy
CALL DUPLX !font a doppio spessore
```

```
CALL AXSPOS (450,1800) !coordinate angolo basso sinistra
CALL AXSLEN (2200,1500)!lunghezza dei due assi in pixel
```

```
CALL NAME ('tempo (s)','x') !nome delle ascisse
CALL NAME (unita_misura,'y') !nome delle ordinate
```

```
CALL TITLIN (titolo,1) !prima riga del titolo
```

!calcolo l'estremo superiore delle ordinate

```

max_esatta=MAXVAL(funzione_esatta)
max_Bezout=MAXVAL(funzione_Bezout)
max_Cavalieri=MAXVAL(funzione_Cavalieri)
max=AMAX1(max_esatta,max_Bezout,max_Cavalieri)

min_esatta=MINVAL(funzione_esatta)
min_Bezout=MINVAL(funzione_Bezout)
min_Cavalieri=MINVAL(funzione_Cavalieri)
min=AMIN1(min_esatta,min_Bezout,min_Cavalieri)

CALL GRAF (-0.5,8.,0.,1.,min,max,min,passo)

CALL TITLE !stampa il titolo di cui sopra

limpongo che le tre curve abbiano linee diverse

CALL CHNCRV ('LINE')

!plotto le tre curve

CALL CURVE (x,funzione_esatta,fine_int)
CALL CURVE (x,funzione_Bezout,fine_int)
CALL CURVE (x,funzione_Cavalieri,fine_int)

!definisco la legenda

CALL LEGINI(stringa,3,10) !carattere, righe, lunghezza

!definisco il contenuto della legenda

CALL LEGLIN(stringa,'esatta',1)
CALL LEGLIN(stringa,'Bezout',2)
CALL LEGLIN(stringa,'Cavalieri',3)

CALL LEGTIT('Legenda') !titolo della legenda

CALL LEGEND(stringa,3) !posizione in alto a destra

CALL DASH !tratteggio per gli assi coordinati
CALL XAXGIT !traccio la retta y=0
CALL YAXGIT !traccio la retta x=0

CALL DISFIN

RETURN

END SUBROUTINE diagrammi

!-----

SUBROUTINE diagramma_errore (funzione_esatta,funzione_approssimata,&
titolo,unita_misura,passo)

!traccia il diagramma dell'errore fra la funzione esatta e quella
!approssimata (con Bezout o con Cavalieri)

```

IMPLICIT NONE

!dichiaro gli argomenti fittizi

REAL ,INTENT(IN),DIMENSION (fine_int)::funzione_esatta
REAL ,INTENT(IN),DIMENSION (fine_int)::funzione_approssimata
CHARACTER(len=*):: titolo !nome funzione plottata
CHARACTER(len=*):: unita_misura !unita di misura

!dichiaro le variabili locali

INTEGER::i !indice del ciclo

REAL ::max !valore massimo dell'errore
REAL ::min !valore minimo
REAL :: passo !indica il passo della griglia dell'asse y

REAL , DIMENSION (fine_int):: errore !funzione da plottare
REAL , DIMENSION (fine_int):: x !contiene i valori delle ascisse

!sezione esecutiva

!inizializzo l'array delle ascisse

x(1)=0

ciclo_ascisse: DO i=2,fine_int,1

 x(i)=x(i-1)+delta_t

END DO ciclo_ascisse

!inizializzo l'array errore

ciclo_errore: DO i=1,fine_int,1

 errore(i)=funzione_esatta(i)-funzione_approssimata(i)

END DO ciclo_errore

CALL METAFL (formato) !indico il formato dell'output
CALL SCRMOD ('revers') !scritta nera su fondo bianco

CALL DISINI

CALL TEXMOD ('ON') !chiedo di poter scrivere le formule in maniera grafica
CALL PAGERA !traccio un bordo per il piano xy
CALL DUPLX !font a doppio spessore
CALL LABDIG (5,'y') !chiedo tre cifre decimali per i numeri dell'asse y

CALL AXSPOS (450,1800) !coordinate angolo basso sinistra
CALL AXSLEN (2200,1500)!lunghezza dei due assi in pixel

CALL NAME ('tempo (s)','x') !nome delle ascisse
CALL NAME (unita_misura,'y')!nome delle ordinate

CALL TITLIN (titolo,1) !prima riga del titolo

max=MAXVAL(errore) !il massimo della funzione

min=MINVAL(errore) !il minimo della funzione

CALL GRAF (-0.5,8.,0.,1.,min,max,min,passo)

CALL TITLE !stampa il titolo di cui sopra

CALL CURVE (x,errore,fine_int) !plotto l'errore

CALL DASH !tratteggio per gli assi coordinati

CALL XAXGIT !traccio la retta y=0

CALL YAXGIT !traccio la retta x=0

CALL DISFIN

RETURN

END SUBROUTINE diagramma_errore

!-----

FUNCTION vel(t)

!questa funzione calcola la velocità nel tempo

!sezione dichiarativa

IMPLICIT NONE

REAL :: vel !dichiaro la funzione

!dichiaro gli argomenti fittizi

REAL ,INTENT(IN):: t !istante in cui si calcola l'accelerazione

!sezione esecutiva

vel = ((A/4)*(t**4))+((B/3)*(t**3))+((C/2)*(t**2)) !calcola vel(t)

RETURN

END FUNCTION vel

!-----

FUNCTION acc(t)

!questa funzione calcola l'accelerazione nel tempo

!sezione dichiarativa

IMPLICIT NONE

REAL :: acc !dichiaro la funzione

```

!dichiaro gli argomenti fittizi

REAL ,INTENT(IN):: t !istante in cui si calcola l'accelerazione

!sezione esecutiva

acc = (A*(t**3))+(B*(t**2))+(C*t) !calcola a(t)

RETURN

END FUNCTION acc

!-----

FUNCTION spa(t)

!questa funzione calcola lo spazio nel tempo

!sezione dichiarativa

IMPLICIT NONE

REAL :: spa !dichiaro la funzione

!dichiaro gli argomenti fittizi

REAL ,INTENT(IN):: t !istante in cui si calcola l'accelerazione

!sezione esecutiva

spa = ((A/20)*(t**5))+((B/12)*(t**4))+((C/6)*(t**3)) !calcola spa(t)

RETURN

END FUNCTION spa

!-----

END MODULE mod_ese_uno

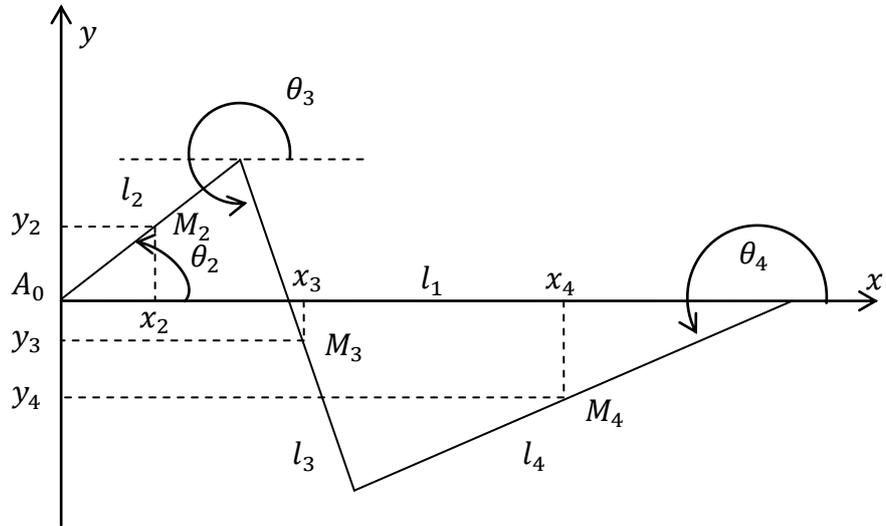
```

Configurazione del quadrilatero articolato

1. Il quesito. E' assegnato il quadrilatero articolato le cui aste sono definite dalle seguenti misure

$$1.1) \quad \begin{cases} l_2 = 0.2m \\ l_3 = 0.7m \\ l_4 = 0.5m \\ l_1 = 0.8m \end{cases}$$

Si assuma come sistema di coordinate quello indicato in figura, ovvero gli angoli assoluti delle aste, presi con segno (anomalia), e le coordinate dei baricentri di ciascuna asta, rispetto al sistema di riferimento A_0, x, y .



Allora si chiede di determinare le configurazioni del quadrilatero per una rotazione della manovella assegnata data da

$$1.2) \quad \theta_2 = 20^\circ$$

Si chiede inoltre di rappresentare la traiettoria del punto M_3 di mezzeria della biella (asta l_3) al variare in $[0, 2\pi]$ dell'angolo θ_2 di rotazione della manovella (asta l_2).

2. Equazioni di vincolo. Il vettore delle coordinate lagrangiane sovrabbondanti è dato da

$$2.1) \quad \{q\}^T = \{x_2 \quad y_2 \quad \theta_3 \quad x_3 \quad y_3 \quad \theta_4 \quad x_4 \quad y_4 \quad \theta_2\}^T$$

il quale viene sottoposto alla partizione

$$2.2) \quad \{q\}^T = \{u|v\}^T = \{x_2 \quad y_2 \quad \theta_3 \quad x_3 \quad y_3 \quad \theta_4 \quad x_4 \quad y_4 | \theta_2\}^T$$

Le equazioni di vincolo, immediatamente deducibili dalla figura sono

$$2.3) \quad \{\Psi(q)\} = \{\Psi(u|v)\} = \begin{pmatrix} x_2 - \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \\ y_2 - \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \\ x_3 - \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 - x_2 - \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \\ y_3 - \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 - y_2 - \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \\ x_4 - x_3 - \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 - \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 \\ y_4 - y_3 - \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 - \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 \\ x_4 - l_1 + \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 \\ y_4 + \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 \end{pmatrix} = 0$$

Lo jacobiano relativo alle coordinate dipendenti si scrive dunque

$$2.4) \quad [\Psi_u(u)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_4} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_4} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_4} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_4} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_4} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_4} \\ \frac{\partial \Psi_8}{\partial x_2} & \frac{\partial \Psi_8}{\partial y_2} & \frac{\partial \Psi_8}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \Psi_8}{\partial x_3} & \frac{\partial \Psi_8}{\partial y_4} & \frac{\partial \Psi_8}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \Psi_8}{\partial x_4} & \frac{\partial \Psi_8}{\partial y_4} \end{bmatrix}$$

e a conti fatti si ha

$$2.5) \quad [\Psi_u(u)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{l_3}{2} \cos \theta_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 & -1 & 0 & \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l_3}{2} \cos \theta_3 & 0 & -1 & -\frac{l_4}{2} \cos \theta_4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_4}{2} \sin \theta_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

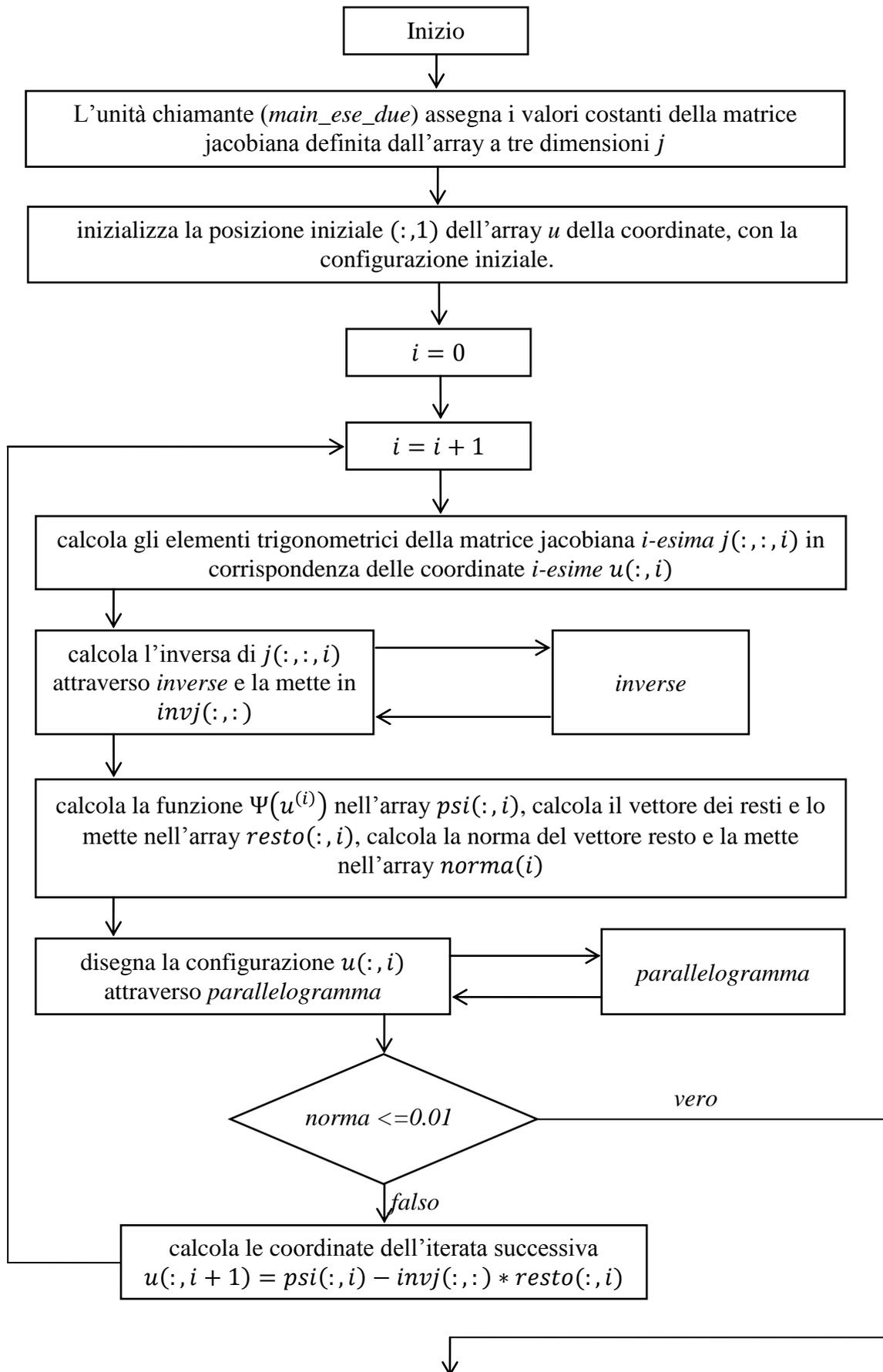
3. Metodo di Newton-Raphson. Il metodo numerico in parola applicato alla funzione vettoriale **2.3** di 8 elementi in 9 variabili, di cui la nona considerata costante, porge

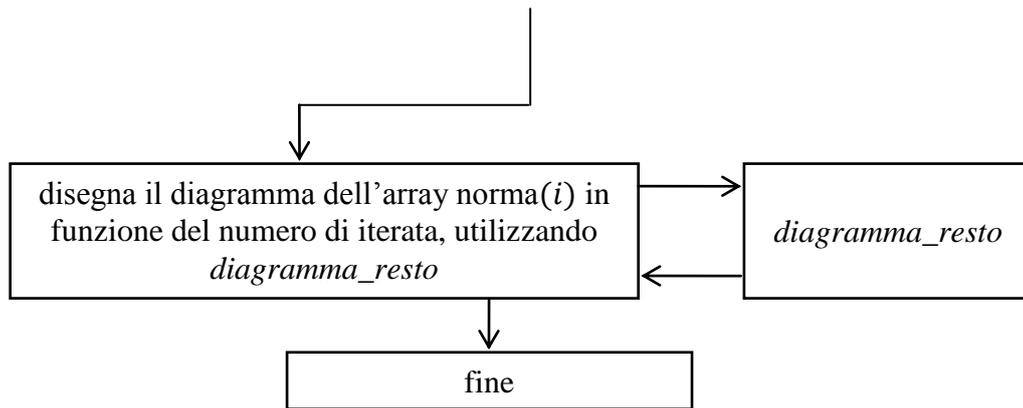
$$3.1) \quad \{u^{(i+1)}\} = \{u^{(i)}\} - [\Psi_u(u)]^{-1} \{\Psi(u^{(i)} | \theta_2)\}$$

Ovvero, per esteso

$$3.2) \quad \begin{pmatrix} x_2^{(i+1)} \\ y_2^{(i+1)} \\ \theta_3^{(i+1)} \\ x_3^{(i+1)} \\ y_3^{(i+1)} \\ \theta_4^{(i+1)} \\ x_4^{(i+1)} \\ y_4^{(i+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^{(i)} \\ y_2^{(i)} \\ \theta_3^{(i)} \\ x_3^{(i)} \\ y_3^{(i)} \\ \theta_4^{(i)} \\ x_4^{(i)} \\ y_4^{(i)} \end{pmatrix} - [\Psi_u(u^{(i)})]^{-1} \begin{pmatrix} x_2^{(i)} - \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \\ y_2^{(i)} - \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \\ x_3^{(i)} - \frac{l_3}{2} \cos \theta_3^{(i)} - x_2^{(i)} - \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \\ y_3^{(i)} - \frac{l_3}{2} \sin \theta_3^{(i)} - y_2^{(i)} - \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \\ x_4^{(i)} - x_3^{(i)} - \frac{l_3}{2} \cos \theta_3^{(i)} - \frac{l_4}{2} \cos \theta_4^{(i)} \\ y_4^{(i)} - y_3^{(i)} - \frac{l_3}{2} \sin \theta_3^{(i)} - \frac{l_4}{2} \sin \theta_4^{(i)} \\ x_4^{(i)} - l_1 + \frac{l_4}{2} \cos \theta_4^{(i)} \\ y_4^{(i)} + \frac{l_4}{2} \sin \theta_4^{(i)} \end{pmatrix}$$

dove -lo si ricorda- l'anomalia θ_2 è assegnata dalla **1.2**. Assegnata dunque una configurazione iniziale $\{u^{(1)}\}$ la **3.2** consente di calcolare la configurazione successiva $\{u^{(2)}\}$, che sostituita a sua volta nella **3.2** permette di calcolare la configurazione $\{u^{(3)}\}$, e via di seguito. Si dimostra che questo procedimento fornisce configurazioni via via più vicine a quella che annulla il vettore **2.3** delle equazioni di vincolo.





Il criterio per interrompere le iterazioni è quello di valutare la norma del secondo vettore a secondo membro della **3.2**, detto **vettore dei resti**. Evidentemente quando essa si stabilizza ad un valore prossimo a zero il metodo ha fornito la sua soluzione.

4. Algoritmo risolutivo. Per applicare il metodo numerico descritto, al problema della configurazione del parallelogramma sono state scritte in Fortran le seguenti unità:

- l'unità chiamante *main_ese_due*, la quale si occupa di calcolare la **3.2**;
- il modulo *mod_ese_due* contenente le costanti geometriche **1.1,1.2** del problema nonché le procedure di modulo seguenti
 - subroutine *inverse* (scaricata dal sito della ODU University) la quale si occupa di invertire la matrice jacobiana **2.5**;
 - subroutine *parallelogramma* la quale permette di rappresentare nel piano A_0, x, y la configurazione del parallelogramma alla generica iterazione del metodo;
 - subroutine *diagramma_resto* la quale esegue il grafico della norma del vettore resto in funzione del numero di iterazione.

Il diagramma di flusso complessivo sviluppato dal codice è indicato in figura. Si aggiunge che il programma realizza le seguenti ulteriori operazioni di output non indicate nel diagramma:

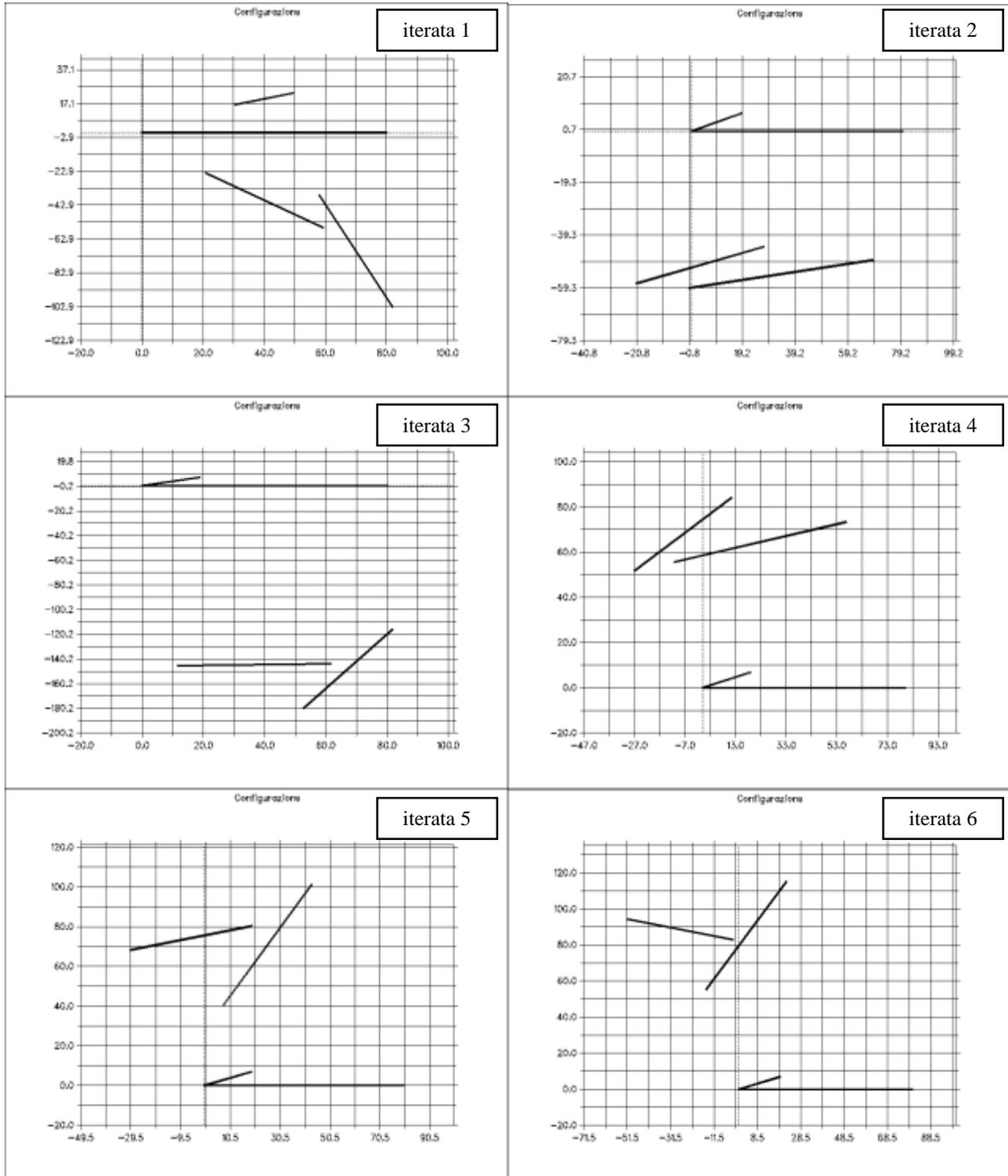
- ad ogni iterazione stampa sul monitor la configurazione, la matrice jacobiana, la sua inversa, il vettore dei resti e la sua norma;
- alla fine del flusso stampa sullo schermo il valore massimo e il minimo della norma del vettore dei resti.

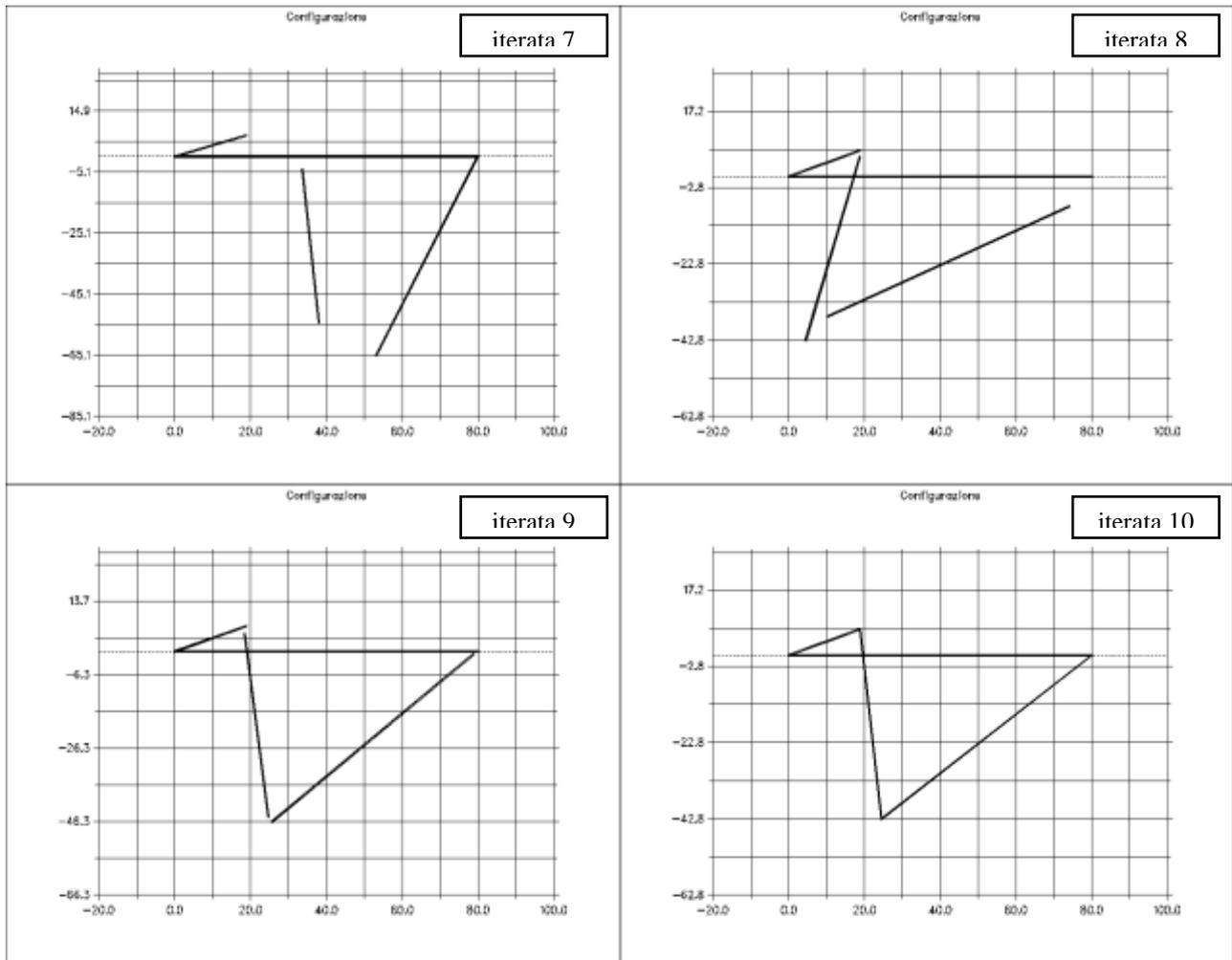
Si osserva altresì che ciascuno degli array utilizzati presenta un indice aggiuntivo che assume il valore del numero di iterata; se si considera ad esempio la matrice jacobiana, questo permette di registrare nel relativo array tutti i valori assunti da essa nel corso delle iterate. L'unico array per cui tale accorgimento abbia un impiego in questo programma è *norma*, che anziché avere un solo valore, è un array monodimensionale, e ciò consente di disegnarne il grafico. Per gli altri non c'è un impiego pratico, se non quello di prevedere una stampa delle configurazioni solo alla fine del ciclo indefinito (come effettivamente pensavo inizialmente di fare); oppure quello di avere in memoria i valori assunti nel corso delle iterate dalle varie funzioni.

5. Prima esecuzione. Sappiamo dal metodo grafico, illustrato in seguito, che le configurazioni possibili per il parallelogramma sono due. Quale delle due venga fornita dal programma dipenderà dalla configurazione assegnata iniziale. Si assegni la configurazione iniziale

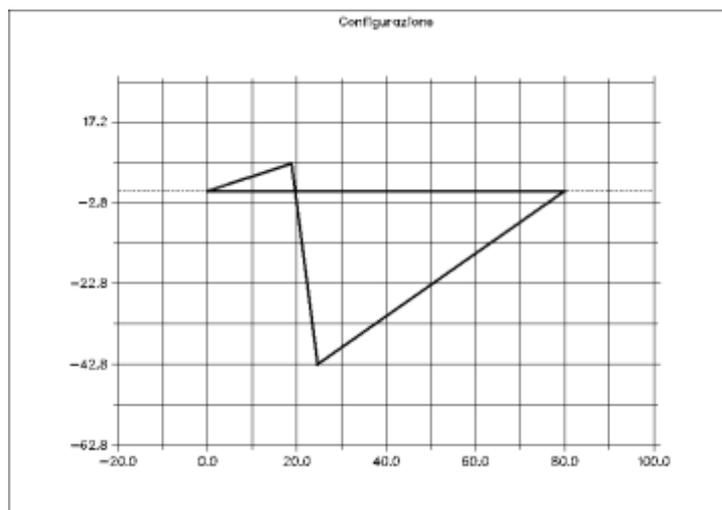
5.1) $x_2 = 40$ $y_2 = 20$ $\theta_3 = -40^\circ$ $x_3 = 40$ $y_3 = -40$ $\theta_4 = 110^\circ$ $x_4 = 70$ $y_4 = -70$

con le lunghezze espresse in centimetri. Il programma effettua 11 iterazioni (compresa la prima configurazione) per soddisfare la condizione $norma \leq 0,01$.





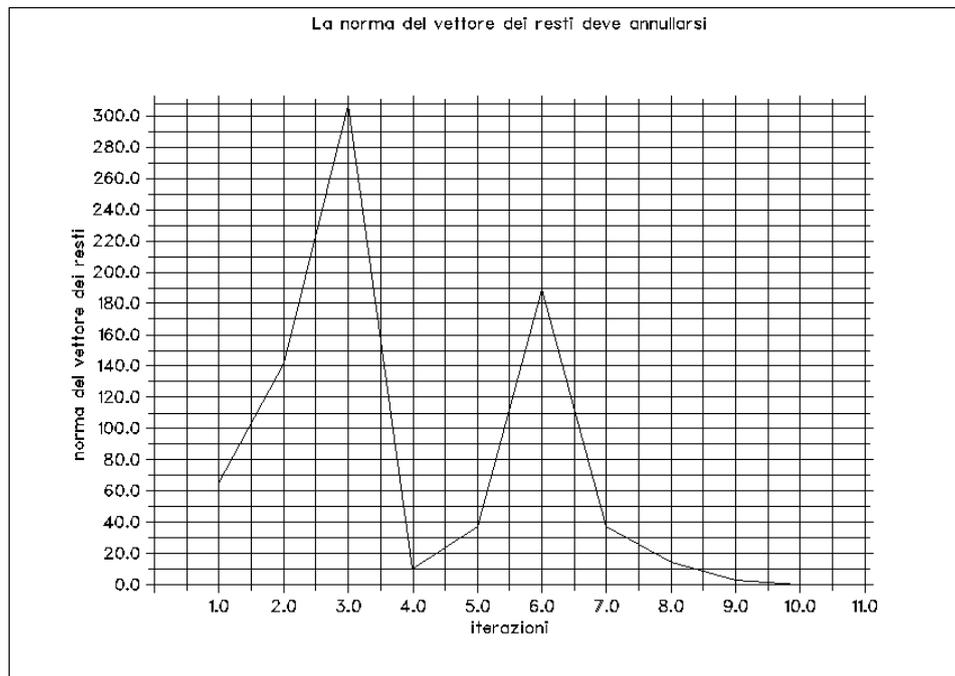
L'ultima iterata perviene alla configurazione seguente:



alla quale corrispondono le coordinate (in centimetri e gradi)

x_2	y_2	θ_3	x_3	y_3	θ_4	x_4	y_4
9.396926	3.420213	-83.30455	21.708654	-17.989153	397.71222	52.31173	-21.409353

Per la norma del vettore dei resti si ottiene il seguente andamento.



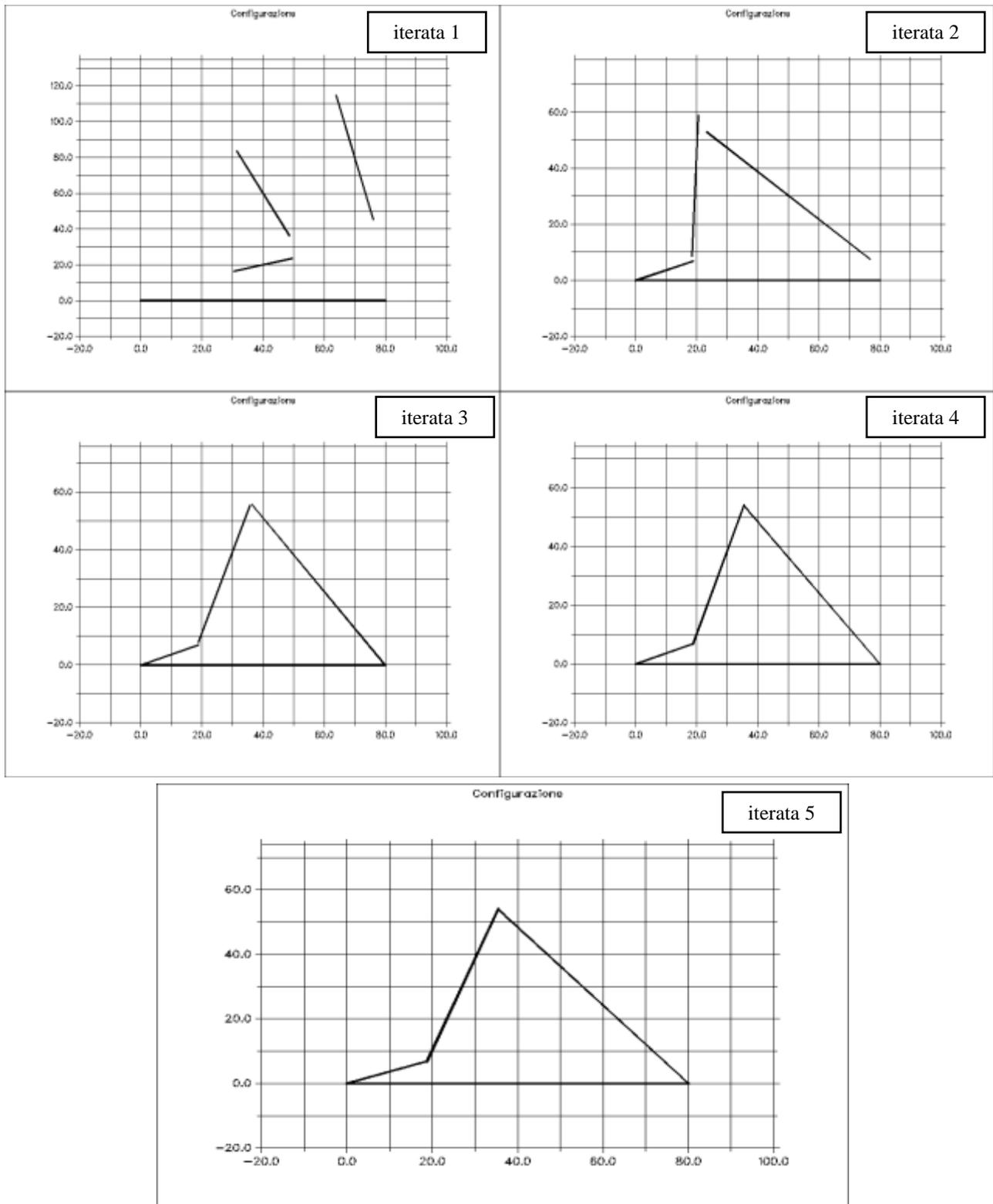
Il programma inoltre stampa su prompt le matrici e il vettore dei resti per alcune iterata. Riporto qualcuno di questi dati.

i	vettore dei resti	norma
1	30.603 16.580 2.162 36.804 10.642 1.769 36.201 -15.938	65.20431
2	0.000 0.000 -6.030 -33.391 94.286 -4.135 -33.391 94.286	141.64392
3	-0.000 -0.000 2.470 44.500-212.804 -2.252 44.500-212.804	307.4781
4	-0.000 -0.000 -2.685 -2.636 -6.432 2.354 -2.636 -6.432	10.459149
5	-0.000 -0.000 3.619 21.944 -14.332 -3.118 21.944 -14.332	37.372982
6	-0.000 -0.000 1.250 -63.084 117.990 -0.162 -63.084 117.990	189.21909
7	-0.000 -0.000 0.376 24.251 -10.468 0.756 24.251 -10.468	37.36419
8	-0.000 -0.000 -0.414 -9.995 1.192 -0.285 -9.995 1.192	14.244634
9	-0.000 -0.000 0.011 -0.049 -2.077 0.052 -0.049 -2.077	2.9379098
10	-0.000 -0.000 -0.002 -0.053 -0.008 -0.001 -0.053 -0.008	0.07611848
11	-0.000 -0.000 0.000 0.000 -0.000 0.000 0.000 -0.000	0.00008695498

6. Seconda esecuzione. Cercando di ottenere la seconda configurazione congruente possibile, faccio girare il programma con le seguenti coordinate di innesco:

$$6.1) \quad x_2 = 40 \quad y_2 = 20 \quad \theta_3 = 110^\circ \quad x_3 = 40 \quad y_3 = 60 \quad \theta_4 = -80^\circ \quad x_4 = 70 \quad y_4 = 80$$

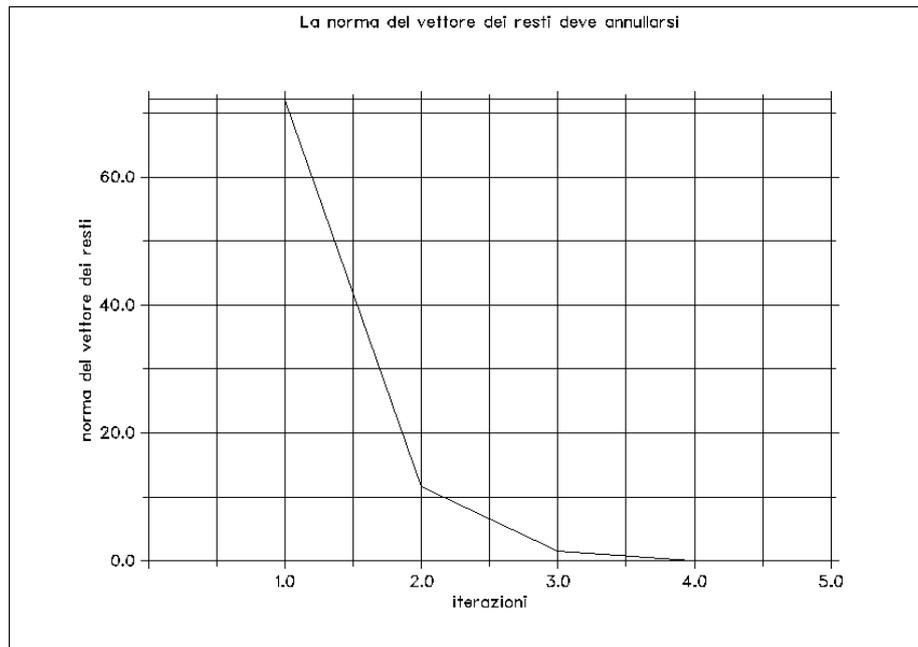
In questo caso si ha convergenza in 5 iterate: le configurazioni sono le seguenti.



La configurazione finale è

x_2	y_2	θ_3	x_3	y_3	θ_4	x_4	y_4
9.396926	3.4202013	70.55076	27.118143	30.413828	-50.46595	57.72122	26.993628

Il diagramma della norma del vettore dei resti, che segue, testimonia la rapida convergenza.



7. Secondo quesito. Il seguente algoritmo consente di ottenere la configurazione congruente del parallelogramma in funzione di θ_2 , ovvero esplicita la funzione **2.3** rispetto alle variabili indipendenti, in modo numerico; quindi permette in particolare di esprimere le coordinate del punto $M3 \equiv (x_3, y_3)$ in funzione di θ_2 , ciò che risponde al secondo questo proposto. L'algoritmo utilizza i seguenti codici in Fortran:

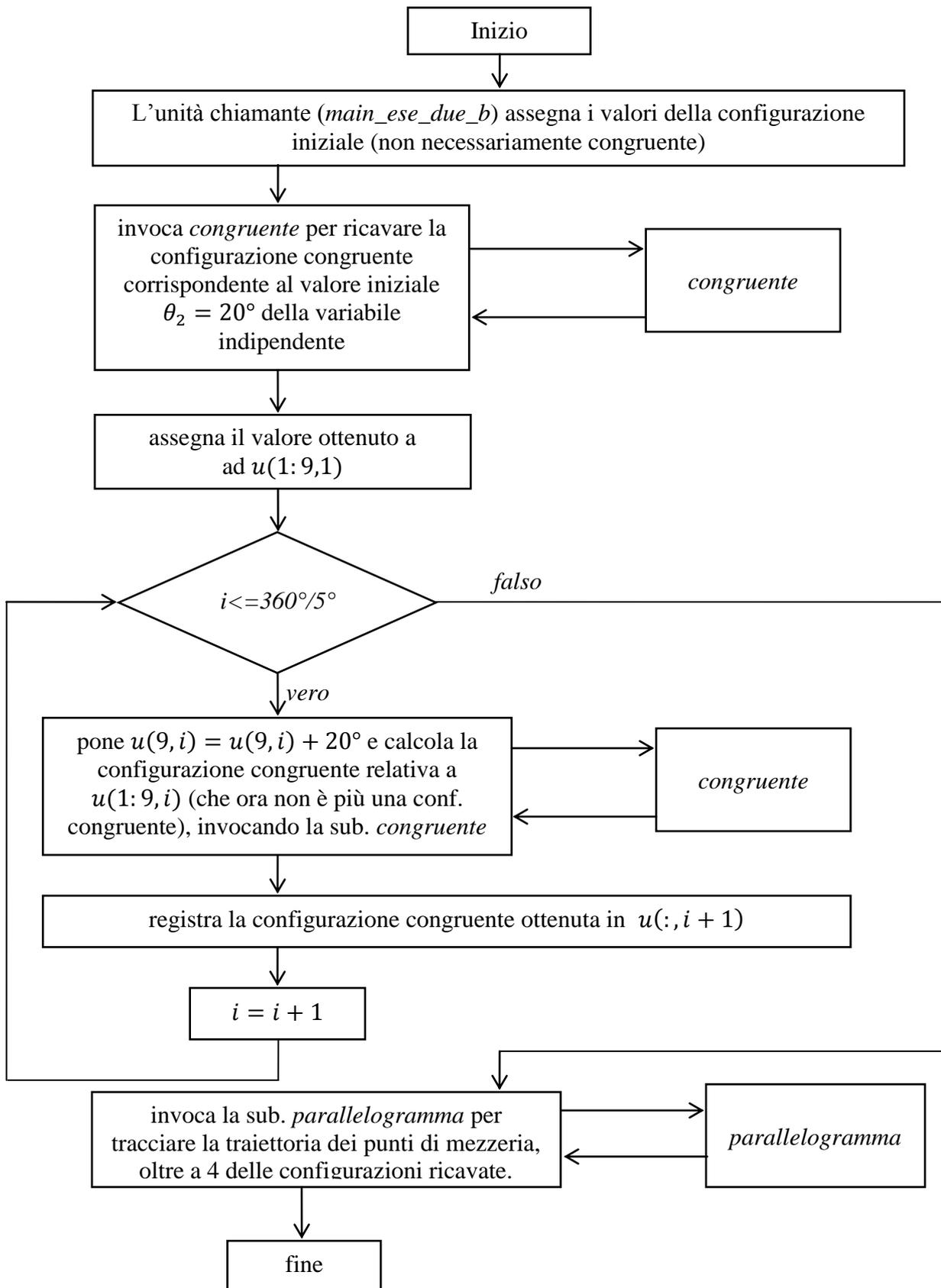
- l'unità chiamante *main_ese_due_b* la quale si occupa principalmente di utilizzare le subroutine del modulo;
- il modulo *mod_ese_due_b* il quale contiene le seguenti subroutine:
 - *inverse* si occupa di invertire la matrice jacobiana;
 - *parallelogramma* traccia le traiettorie dei punti di mezzeria delle aste al variare di θ_2 ;
 - *congruente* calcola la configurazione congruente relativa ad ogni valore di θ_2 , usando il metodo di Newton-Raphson e partendo ogni volta dalla configurazione congruente precedentemente calcolata, in cui la manovella viene sconnessa per aumentare l'angolo θ_2 .

Evidentemente la subroutine *congruente* usa le stesse linee di codice del programma *main_ese_due*. Si può notare tra l'altro che abbiamo una subroutine di modulo (*congruente*) che invoca un'altra subroutine (*inverse*), contenuta nello stesso modulo.

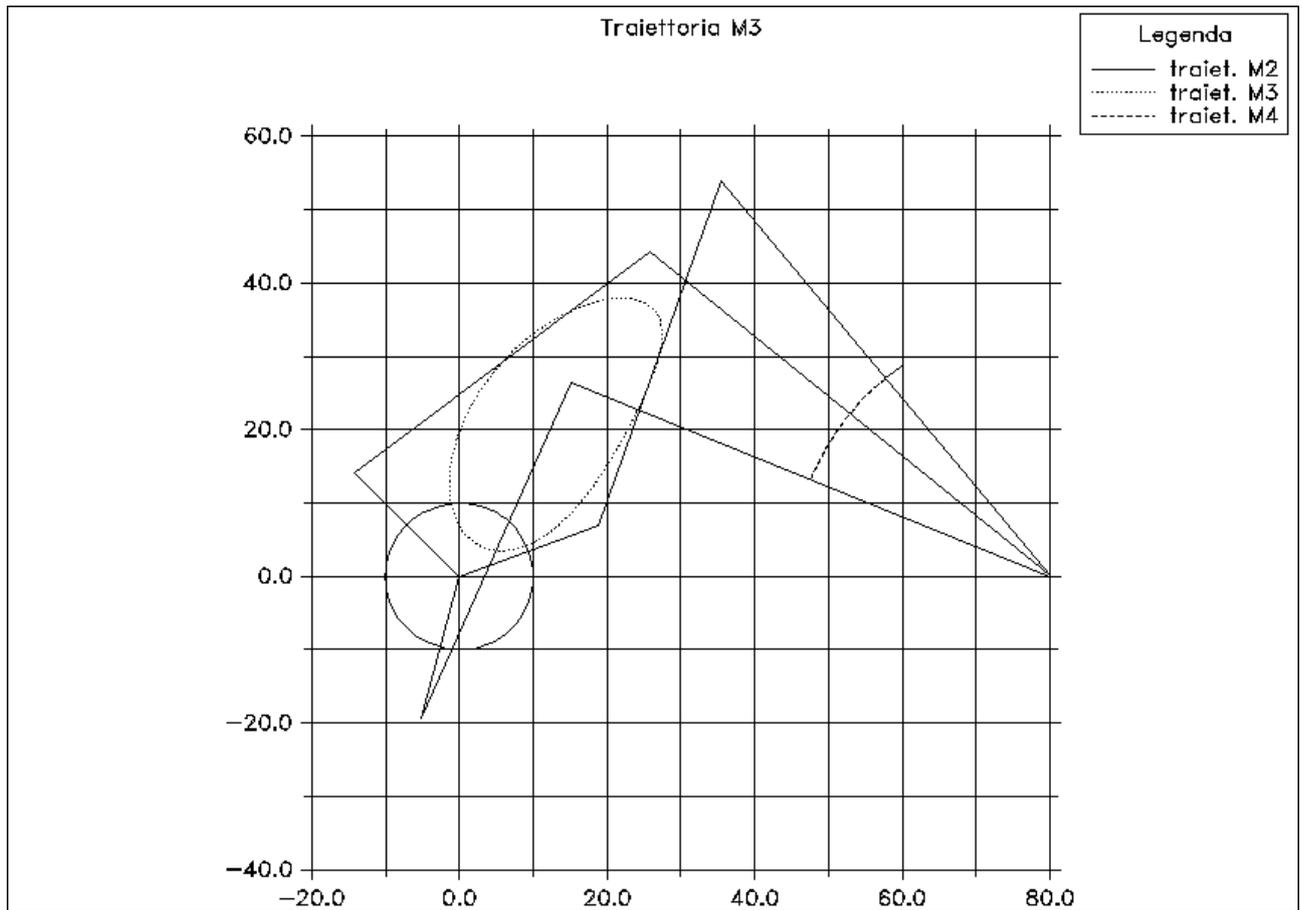
Per innescare il programma utilizzo una configurazione simile a quella congruente ottenuta alla fine della seconda esecuzione; uso cioè la configurazione

$$6.1) \quad x_2 = 9 \quad y_2 = 3 \quad \theta_3 = 70^\circ \quad x_3 = 27 \quad y_3 = 30 \quad \theta_4 = -50^\circ \quad x_4 = 57 \quad y_4 = 26 \quad \theta_2 = 20^\circ$$

Alcune delle configurazioni congruenti che vengono trovate a partire da questa aumentando ogni volta di 5° l'angolo di manovella θ_2 -fino a completare un giro- sono riportate in tabella.



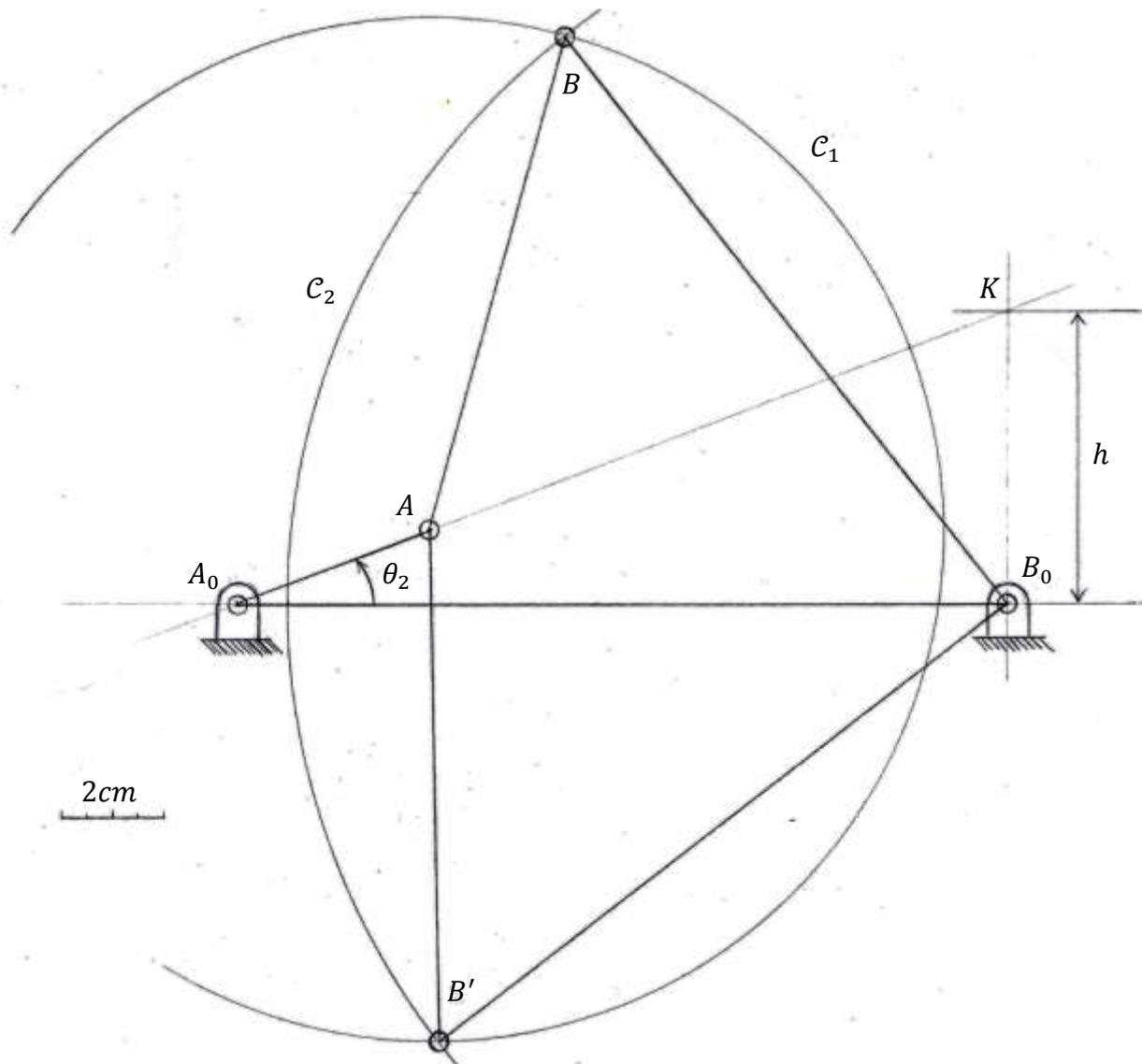
x_2	y_2	θ_3	x_3	y_3	θ_4	x_4	y_4	θ_2
9.396926	3.4202013	70.552284	27.117907	30.415138	-50.46702	57.72098	26.994938	20.
-7.660443	6.427878	36.89523	4.6724825	27.864597	-37.768875	52.332924	21.43672	140.
-1.736486	-9.848077	67.979324	5.900556	3.480062	-22.383488	47.637043	13.328138	260.
9.396929	3.4201934	70.55079	27.118134	30.413813	-50.465927	57.721207	26.99362	380.



Naturalmente la prima è l'ultima configurazione coincidono, e si può vedere quanto siano simili per esse i valori restituiti dal programma. Riporto allora il diagramma della traiettoria dei punti di mezz'ora, calcolati in base a $360^\circ:5^\circ = 72$ iterazioni.; sono tracciate anche le quattro configurazioni indicate in tabella.

8. Soluzione grafica del primo quesito. Fisso una scala di rappresentazione $\sigma_L = 0,05m/cm$ ottenendo per i quattro lati del parallelogramma le misure

$$8.1) \begin{cases} \overline{A_0A} = \frac{l_2}{\sigma_L} = \frac{0.2}{0.05} cm = 4cm \\ \overline{AB} = \frac{l_3}{\sigma_L} = \frac{0.7}{0.05} cm = 14cm \\ \overline{BB_0} = \frac{l_4}{\sigma_L} = \frac{0.5}{0.05} cm = 10cm \\ \overline{B_0A_0} = \frac{l_1}{\sigma_L} = \frac{0.8}{0.05} cm = 16cm \end{cases}$$



Si segue quindi questa costruzione:

- si traccia a partire da A_0 un segmento orizzontale di lunghezza 16cm , individuando così il punto B_0 ;
- si traccia da B_0 un segmento verticale di altezza $h = \overline{A_0B_0} \tan \theta_2 = 5.82\text{cm}$ individuando il punto K ;
- la manovella si troverà sulla retta per A_0, K e resta dunque individuato il punto A , posto su tale retta, a distanza 4cm da A_0 ;
- traccio la circonferenza C_1 con centro in A e raggio $\overline{AB} = 14\text{cm}$;
- traccio la circonferenza C_2 con centro in B_0 e raggio $\overline{BB_0} = 10\text{cm}$.

Restano così individuati i due punti B, B' e dunque le due configurazioni congruenti A_0, A, B, B_0 e A_0, A, B', B_0 .

9. Codice dell'unità chiamante per il primo quesito.

!programma principale per la seconda esercitazione di meccanica applicata
!usa il modulo mod_ese_uno
!11/10/2012

```

PROGRAM main_ese_due

USE DISLIN !libreria grafica
USE mod_ese_due

!sezione dichiarativa

IMPLICIT NONE

!dichiaro il vettore delle coordinate dipendenti
REAL,DIMENSION(8,100)::u

!dichiaro la funzione delle equazioni di vincolo
REAL,DIMENSION(8,100)::psi

!dichiaro la matrice jacobiana e la sua inversa
REAL,DIMENSION (8,8,100)::J
REAL(KIND=8),DIMENSION (8,8)::invj

!dichiaro il vettore dei resti
REAL,DIMENSION(8,100)::resto

!dichiaro la norma del vettore dei resti
REAL,DIMENSION(100):: norma

!dichiaro i valori di innesco delle coordinate
REAL::x2 =40
REAL::y2 =20
REAL::theta3 =-40*(3.1415927/180)
REAL::x3 =40
REAL::y3 =-40
REAL::theta4=110*(3.1415927/180)
REAL::x4=70
REAL::y4=-70

!altre variabili di lavoro

REAL(KIND=8),DIMENSION(8,8)::matrix
INTEGER::i !indici dei cicli
CHARACTER(len=10):: chiusura !serve per chiudere il programma

!sezione esecutiva

CALL BMPMOD (300,'inch','resolution') !fisso risoluzione dell'immagine in formato .bmp

!inizializzo i valori d'innesco di u

u(1,1) = x2
u(2,1) = y2
u(3,1) = theta3
u(4,1) = x3

```

$u(5,1) = y3$
 $u(6,1) = \text{theta4}$
 $u(7,1) = x4$
 $u(8,1) = y4$

!inizializzo la matrice jacobiana con i valori costanti

$j(:, :, :) = 0$

$j(1,1,:) = 1$
 $j(2,2,:) = 1$
 $j(3,1,:) = -1$
 $j(3,4,:) = 1$
 $j(4,2,:) = -1$
 $j(4,5,:) = 1$
 $j(5,4,:) = -1$
 $j(5,7,:) = 1$
 $j(6,5,:) = -1$
 $j(6,8,:) = 1$
 $j(7,7,:) = 1$
 $j(8,8,:) = 1$

!inizializzo il vettore resto

resto=0

!ciclo del metodo Newton-Raphson

i=0

ciclo: DO

i=i+1

$x2 = u(1,i)$
 $y2 = u(2,i)$
 $\text{theta3} = u(3,i)$
 $x3 = u(4,i)$
 $y3 = u(5,i)$
 $\text{theta4} = u(6,i)$
 $x4 = u(7,i)$
 $y4 = u(8,i)$

!calcolo la matrice jacobiana

$j(3,3,i) = (0.5)*l3*\text{SIN}(\text{theta3})$
 $j(4,3,i) = -(0.5)*l3*\text{COS}(\text{theta3})$
 $j(5,3,i) = (0.5)*l3*\text{SIN}(\text{theta3})$
 $j(5,6,i) = (0.5)*l4*\text{SIN}(\text{theta4})$
 $j(6,3,i) = -(0.5)*l3*\text{cos}(\text{theta3})$
 $j(6,6,i) = -(0.5)*l4*\text{cos}(\text{theta4})$
 $j(7,6,i) = -(0.5)*l4*\text{sin}(\text{theta4})$
 $j(8,6,i) = (0.5)*l4*\text{cos}(\text{theta4})$

!calcolo l'inversa della matrice jacobiana

```
matrix(:,i)=j(:,i)
```

```
CALL inverse(matrix,invj,8)
```

```
!calcolo la funzione psi
```

```
psi(1,i) = x2 - ((0.5)*l2*cos(theta2))  
psi(2,i) = y2 - (0.5)*l2*sin(theta2)  
psi(3,i) = x3 - (l3*0.5)*cos(theta3) - x2 - (l2*0.5)*cos(theta2)  
psi(4,i) = y3 - (l3/2.)*sin(theta3) - y2 - (l2*0.5)*sin(theta2)  
psi(5,i) = x4 - x3 - (0.5)*l3*cos(theta3) - (0.5)*l4*cos(theta4)  
psi(6,i) = y4 - y3 - (0.5)*l3*sin(theta3) - (0.5)*l4*sin(theta4)  
psi(7,i) = x4 - l1 + (0.5)*l4*cos(theta4)  
psi(8,i) = y4 + (0.5)*l4*sin(theta4)
```

```
!calcola il vettore resto
```

```
resto(:,i)=MATMUL(invj,psi(:,i))
```

```
!calcola la norma del resto
```

```
norma(i)=SQRT(DOT_PRODUCT(resto(:,i),resto(:,i)))
```

```
100 FORMAT(8F8.3)
```

```
WRITE(*,*) " "  
WRITE(*,*) "ITERATA",i  
WRITE(*,*) " "  
WRITE(*,*) "Le coordinate sono"  
WRITE(*,*) "theta2=", theta2*180/3.1415927  
WRITE(*,*) "x2=", u(1,i)  
WRITE(*,*) "y2=", u(2,i)  
WRITE(*,*) "theta3=", u(3,i)*180/3.1415927  
WRITE(*,*) "x3=", u(4,i)  
WRITE(*,*) "y3=", u(5,i)  
WRITE(*,*) "theta4=", u(6,i)*180/3.1415927  
WRITE(*,*) "x4=", u(7,i)  
WRITE(*,*) "y4=", u(8,i)  
WRITE(*,*) " "  
WRITE(*,*) "La matrice jacobiana vale"  
WRITE(*,100) j(1,:,i)  
WRITE(*,100) j(2,:,i)  
WRITE(*,100) j(3,:,i)  
WRITE(*,100) j(4,:,i)  
WRITE(*,100) j(5,:,i)  
WRITE(*,100) j(6,:,i)  
WRITE(*,100) j(7,:,i)  
WRITE(*,100) j(8,:,i)  
WRITE(*,*) " "  
WRITE(*,*) "La sua inversa vale"  
WRITE(*,100) invj(1,:)   
WRITE(*,100) invj(2,:)   
WRITE(*,100) invj(3,:)   
WRITE(*,100) invj(4,:)   
WRITE(*,100) invj(5,:)   
WRITE(*,100) invj(6,:)   
WRITE(*,100) invj(7,:)
```

```

WRITE(*,*) " "
WRITE(*,100) invj(8,:)

WRITE(*,*) "Il vettore dei resti vale"
WRITE(*,100) resto(:,i)
WRITE(*,*) " "
WRITE(*,*) "La sua norma vale", norma(i)

!disegno il parallelogramma alla iterata i

CALL parallelogramma(x2,y2,x3,y3,theta3,x4,y4,theta4,i)

!verifico il valore della norma e in caso esco

IF (norma(i)<=0.01) EXIT ciclo

!calcola le coordinate della iterata successiva

u(1:8,i+1)=u(1:8,i)-resto(1:8,i)

END DO ciclo

iter_i = i
iter_r = REAL(iter_i)

!Traccio il diagramma del resto

CALL diagramma_resto (norma)

WRITE (*,*)"Per chiudere il programma premi una lettera qualunque."
WRITE (*,*)"Tutti i dati andranno persi."
READ (*,*) chiusura

STOP

END PROGRAM main_ese_due

```

10. Codice del modulo per il primo quesito.

```

!modulo per la seconda esercitazione di meccanica apl.
!invocato dal programma main_ese_uno
!12/10/2011

MODULE mod_ese_due

!sezione dichiarativa

IMPLICIT NONE

!dichiaro le costanti geometriche del quadrilatero

REAL(KIND=8), PARAMETER:: l2=20.
REAL(KIND=8), PARAMETER:: l3=50.
REAL(KIND=8), PARAMETER:: l4=70.
REAL(KIND=8), PARAMETER:: l1=80.

REAL(KIND=8), PARAMETER:: theta2=20*(3.1415927/180)

```

!dichiaro il numero di iterazioni

INTEGER:: iter_i !intero

REAL:: iter_r !relae

!fisso il formato di output per i diagrammi

CHARACTER(len=4):: formato ='bmp '

!scrivo le subroutine

CONTAINS

!-----

subroutine inverse(a,c,n)

!=====

! Inverse matrix

! Method: Based on Doolittle LU factorization for Ax=b

! Alex G. December 2009

!-----

! input ...

! a(n,n) - array of coefficients for matrix A

! n - dimension

! output ...

! c(n,n) - inverse matrix of A

! comments ...

! the original matrix a(n,n) will be destroyed

! during the calculation

!=====

implicit none

integer n

double precision a(n,n), c(n,n)

double precision L(n,n), U(n,n), b(n), d(n), x(n)

double precision coeff

integer i, j, k

! step 0: initialization for matrices L and U and b

! Fortran 90/95 allows such operations on matrices

L=0.0

U=0.0

b=0.0

! step 1: forward elimination

do k=1, n-1

do i=k+1,n

coeff=a(i,k)/a(k,k)

L(i,k) = coeff

do j=k+1,n

a(i,j) = a(i,j)-coeff*a(k,j)

end do

end do

end do

! Step 2: prepare L and U matrices

! L matrix is a matrix of the elimination coefficient

! + the diagonal elements are 1.0

```

do i=1,n
  L(i,i) = 1.0
end do
! U matrix is the upper triangular part of A
do j=1,n
  do i=1,j
    U(i,j) = a(i,j)
  end do
end do

! Step 3: compute columns of the inverse matrix C
do k=1,n
  b(k)=1.0
  d(1) = b(1)
! Step 3a: Solve Ld=b using the forward substitution
  do i=2,n
    d(i)=b(i)
    do j=1,i-1
      d(i) = d(i) - L(i,j)*d(j)
    end do
  end do
! Step 3b: Solve Ux=d using the back substitution
  x(n)=d(n)/U(n,n)
  do i = n-1,1,-1
    x(i) = d(i)
    do j=n,i+1,-1
      x(i)=x(i)-U(i,j)*x(j)
    end do
    x(i) = x(i)/u(i,i)
  end do
! Step 3c: fill the solutions x(n) into column k of C
  do i=1,n
    c(i,k) = x(i)
  end do
  b(k)=0.0
end do
end subroutine inverse

!-----

SUBROUTINE parallelogramma (x2,y2,x3,y3,theta3,x4,y4,theta4,iterata)

!sezione dichiarativa

!dichiaro gli argomenti fittizi

!dichiaro le coordinate

REAL,INTENT(IN)::x2,y2,x3,y3,theta3,x4,y4,theta4

!dichiaro il numero di iterata

INTEGER,INTENT(IN)::iterata

!dichiaro le variabili locali

!dichiaro e assegno gli estremi dei lati l2

```

REAL::I2A0x
REAL::I2A0y
REAL::I2Ax
REAL::I2Ay

!dichiaro e assegno gli estremi del lato I3

REAL::I3Ax
REAL::I3Ay
REAL::I3Bx
REAL::I3By

!dichiaro e assegno gli estremi del lato I4

REAL::I4Bx
REAL::I4By
REAL::I4B0x
REAL::I4B0y

!dichiaro e assegno gli estremi del lato I1

REAL::I1B0x
REAL::I1B0y
REAL::I1A0x
REAL::I1A0y

!dichiaro il minimo e il massimo delle ascisse e delle ordinate

REAL:: xmin
REAL:: xmax
REAL:: ymin
REAL:: ymax

!sezione esecutiva

!assegno gli estremi dei lati I2

$I2A0x = x2 - (0.5 * I2 * \cos(\theta2))$
 $I2A0y = y2 - (0.5 * I2 * \sin(\theta2))$
 $I2Ax = x2 + (0.5 * I2 * \cos(\theta2))$
 $I2Ay = y2 + (0.5 * I2 * \sin(\theta2))$

!assegno gli estremi del lato I3

$I3Ax = x3 - 0.5 * I3 * \cos(\theta3)$
 $I3Ay = y3 - 0.5 * I3 * \sin(\theta3)$
 $I3Bx = x3 + 0.5 * I3 * \cos(\theta3)$
 $I3By = y3 + 0.5 * I3 * \sin(\theta3)$

!assegno gli estremi del lato I4

$I4Bx = x4 - 0.5 * I4 * \cos(\theta4)$
 $I4By = y4 - 0.5 * I4 * \sin(\theta4)$
 $I4B0x = x4 + 0.5 * I4 * \cos(\theta4)$
 $I4B0y = y4 + 0.5 * I4 * \sin(\theta4)$

!assegno gli estremi del lato l1

l1B0x = 80.
l1B0y = 0
l1A0x = 0
l1A0y = 0

!calcolo l'ascissa minima e quella massima

xmin = MIN(l2A0x,l2Ax, l3Ax, l3Bx, l4Bx, l4B0x, l1B0x, l1A0x)
xmax = MAX(l2A0x,l2Ax, l3Ax, l3Bx, l4Bx, l4B0x, l1B0x, l1A0x)

!calcolo l'ascissa minima e quella massima

ymin = MIN(l2A0y,l2Ay, l3Ay, l3By, l4By, l4B0y, l1B0y, l1A0y)
ymax = MAX(l2A0y,l2Ay, l3Ay, l3By, l4By, l4B0y, l1B0y, l1A0y)

!alcune istruzioni grafiche

CALL METAFL (formato) !indico il formato dell'output
CALL SCRMOD ('revers') !scritta nera su fondo bianco

CALL DISINI !richiama alcune impostazioni di default

CALL PAGERA !traccio un bordo per il piano xy
CALL DUPLX !font a doppio spessore

CALL AXSPOS (450,1800) !coordinate angolo basso sinistra
CALL AXSLEN (2200,1500)!lunghezza dei due assi in pixel

CALL NAME (' ', 'x') !nome delle ascisse
CALL NAME (' ', 'y') !nome delle ordinate

CALL TITLIN ("Configurazione",1) !prima riga del titolo

CALL GRAF (xmin-20.,xmax+20.,xmin-20,20.,ymin-20.,ymax+20.,ymin-20.,20.)

CALL GRID (2,2) !impone una griglia sul piano coordinato

CALL TITLE !stampa il titolo di cui sopra

CALL DASH !tratteggio per gli assi coordinati
CALL XAXGIT !traccio la retta y=0
CALL YAxGIT !traccio la retta x=0

CALL MYLINE (1,1) !impone una linea continua
CALL LINWID (8) !spessore della linea

!disegno ciascuno dei lati indicando gli estremi

CALL RLINE (l2A0x, l2A0y, l2Ax, l2Ay)
CALL RLINE (l3Ax, l3Ay, l3Bx, l3By)
CALL RLINE (l4Bx, l4By, l4B0x, l4B0y)
CALL RLINE (l1B0x, l1B0y, l1A0x, l1A0y)

CALL DISFIN

```
END SUBROUTINE parallelogramma
```

```
!-----
```

```
SUBROUTINE diagramma_resto (norma)
```

```
!sezione dichiarativa
```

```
!dichiaro gli argomenti fittizi
```

```
REAL,INTENT(IN),DIMENSION(iter_i):: norma
```

```
!dichiaro le variabili locali
```

```
INTEGER::i !indice del ciclo
```

```
REAL,DIMENSION(iter_i)::x !qui metto le ascisse
```

```
REAL:: max !il massimo della norma
```

```
REAL:: min !il minimo della norma
```

```
!sezione esecutiva
```

```
!inizializzo l'array delle ascisse
```

```
x(1)=1.
```

```
ciclo_ascisse: DO i=2,iter_i,1
```

```
    x(i)=x(i-1)+1.
```

```
END DO ciclo_ascisse
```

```
WRITE(*,*) x
```

```
CALL METAFL (formato) !indico il formato dell'output
```

```
CALL SCRMOD ('revers') !scritta nera su fondo bianco
```

```
CALL DISINI
```

```
CALL PAGERA !traccio un bordo per il piano xy
```

```
CALL DUPLX !font a doppio spessore
```

```
CALL AXSPOS (450,1800) !coordinate angolo basso sinistra
```

```
CALL AXSLEN (2200,1500)!lunghezza dei due assi in pixel
```

```
CALL NAME ('iterazioni','x') !nome delle ascisse
```

```
CALL NAME ('norma del vettore dei resti','y') !nome delle ordinate
```

```
CALL TITLIN ("La norma del vettore dei resti deve annullarsi",1) !prima riga del titolo
```

```
max=MAXVAL(norma) !il massimo della funzione
```

```
min=MINVAL(norma) !il minimo valore della funzione
```

```
WRITE(*,*) "il minimo della norma del vettore dei resti vale", min
```

```
WRITE(*,*) "il massimo della norma del vettore dei resti vale", max
```

```
CALL GRAF (0.,x(iter_i),1.,1.0,min,max,0.,20.)
```

```
CALL GRID (2,2) !impone una griglia sul piano coordinato
```

```
CALL TITLE !stampa il titolo di cui sopra
```

```
CALL CURVE (x,norma,iter_i) !plotto il diagramma del resto
```

```
CALL DASH !tratteggio per gli assi coordinati
```

```
CALL XAXGIT !traccio la retta y=0
```

```
CALL YAXGIT !traccio la retta x=0
```

```
CALL DISFIN
```

```
END SUBROUTINE diagramma_resto
```

```
!-----
```

```
END MODULE mod_ese_due
```

Cinematica del primo ordine del manovellismo

1. Il quesito. E' assegnato un manovellismo ordinario centrato con le seguenti caratteristiche geometriche

$$1.1) \quad \begin{cases} \overline{A_0A} = 0.2m \\ \overline{AB} = 0.5m \\ \overline{AC} = 0.3m \\ \overline{BC} = 0.4m \end{cases}$$

La manovella ruoti in senso antiorario con velocità angolare costante data da

$$1.2) \quad \omega_2 = \frac{360 \text{ giri}}{\text{minuto}} = \frac{6 \text{ giri}}{s} = \frac{12\pi}{s} \cong \frac{37.67 \text{ rad}}{s}$$

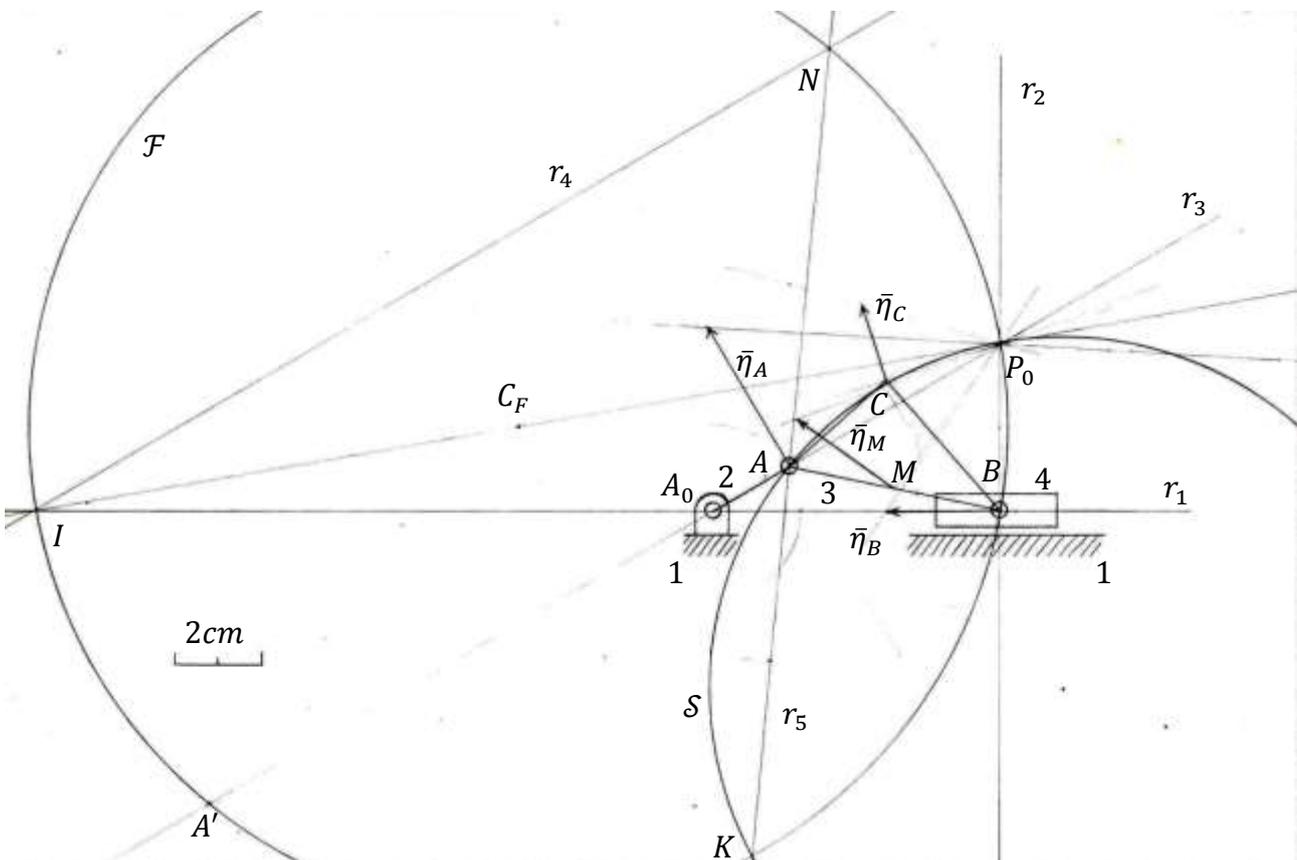
La configurazione iniziale sia quella di *punto morto* esterno; dato allora l'istante definito da

$$1.3) \quad t_1 = \frac{1}{72} s$$

si chiede per tale istante di determinare attraverso il metodo dei poli

- la configurazione del manovellismo;
- la posizione dei poli P_0, K ;
- le velocità dei punti B, C, M , essendo quest'ultimo il punto di mezzzeria della biella;
- la velocità angolare ω_3 della biella.

Si chiede di ripetere il calcolo delle velocità utilizzando il metodo dei diagrammi polari.



Si chiede altresì di rappresentare la base e la rulletta, attraverso il metodo del trasporto.

2. Scale di rappresentazione. Introduco la scala di rappresentazione delle lunghezze

$$2.1) \quad \sigma_L = \frac{10^{-1}m}{cm}$$

e quella delle velocità

$$2.2) \quad \sigma_V = 2 \frac{m}{s} \frac{1}{cm}$$

3. Metodo dei poli. All'istante t_1 la manovella ha descritto un angolo

$$3.1) \quad \theta_2 = \omega_2 t_1 = \frac{6giri}{s} \frac{1}{72} s = 30^\circ$$

Posiziono la manovella secondo quest'angolo e ricavo la posizione congruente della biella, considerando che il punto B è vincolato ad appartenere alla retta r_1 .

- Per ricavare il **c.d.i.r.** P_0 si consideri che la velocità di B deve essere parallela alla retta r_1 , dunque P_0 deve trovarsi sulla retta r_2 . D'altra parte la velocità di A è ortogonale alla manovella e dunque P_0 deve appartenere anche alla retta r_3 ; la sua posizione resta così individuata dalla intersezione delle due rette citate.

Si può osservare che P_0 può essere ricavato anche invocando il teorema di Aronhold-Kennedy, tenendo presente che il c.d.i.r. del moto assoluto della manovella è A_0 , quello del moto relativo della biella rispetto la manovella è A , dunque P_0 deve trovarsi su r_3 ; inoltre il c.d.i.r. del moto assoluto dello stantuffo si trova all'infinito lungo r_2 , quello del moto relativo della biella rispetto lo stantuffo è B , dunque P_0 deve trovarsi sulla retta r_2 . Se ne conclude che l'intersezione fra r_2, r_3 individua P_0 .

- Per ricavare la **circonferenza dei flessi** \mathcal{F} si consideri che il punto B deve appartenere ad essa, avendo una traiettoria rettilinea; inoltre \mathcal{F} passa per P_0 . Si consideri ora la prima formula di Euler-Savary applicata al punto A : se chiamo A' il punto di flesso della normale alla traiettoria di A , abbiamo che $A' \in r_3$ e inoltre

$$3.2) \quad P_0 A^2 = A A_0 \cdot A A' \Rightarrow A A' = \frac{P_0 A^2}{A A_0}$$

Misurando sul disegno i segmenti $P_0 A, A A_0$ abbiamo

$$\begin{cases} P_0 A = 5,6cm \\ A A_0 = 2cm \end{cases} \Rightarrow A A' = \frac{31,36cm^2}{2cm} = 15,68cm$$

La circonferenza dei flessi è dunque la circonferenza passante per P_0, B, A' e il suo centro è il punto di intersezione degli assi dei due segmenti $P_0 B, P_0 A'$.

- Il **polo dei flessi** I è individuato dalla retta r_1 della traiettoria dello stantuffo, ma è anche individuato dalla retta per P_0 e C_F .

- Per individuare il **polo delle accelerazioni** si consideri che l'accelerazione di A ha direzione r_3 ; si considera allora la retta r_4 parallela ad r_3 e passante per I , la quale individua su \mathcal{F} il punto N .

Allora, per una costruzione studiata, la retta r_5 per N e per A individua su \mathcal{F} il centro delle accelerazioni K .

- La **circonferenza di stazionarietà** \mathcal{S} passa per K e per A , che ha accelerazione tutta normale, essendo per ipotesi costante la rotazione della manovella. Passa inoltre per P_0 , e dunque resta univocamente individuata.

- La **velocità** di A è nota in direzione (direzione ortogonale alla manovella), in verso (quello che indica la rotazione antioraria), e in modulo, essendo evidentemente

$$3.3) \quad v_A = \omega_2 \overline{A_0 A} = 37.67 \frac{rad}{s} 0.20m = 7.54 \frac{m}{s}$$

Considerando la scala delle velocità indicata in 2.2 allora il vettore che rappresenta questa velocità nel disegno ha modulo

$$3.4) \quad \eta_A = \frac{v_A}{\sigma_V} = \frac{\frac{7.54m}{s}}{2 \frac{m}{s cm}} = 3.77cm$$

Tenendo presente che il campo delle velocità è un campo circolare, dunque completamente definito da un angolo, è immediato disegnare i vettori che rappresentano le velocità di B, C, M ; in particolare, misurando le loro lunghezze sul disegno e considerando la scala delle velocità σ_V abbiamo

$$3.5) \quad \begin{cases} \eta_B = 2.6cm \\ \eta_M = 2.8cm \\ \eta_C = 1.9cm \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_B = \eta_B \cdot \sigma_V = 2.6cm \cdot 2 \frac{m}{s cm} = 5.2 \frac{m}{s} \\ v_M = \eta_M \cdot \sigma_V = 2.8cm \cdot 2 \frac{m}{s cm} = 5.6 \frac{m}{s} \\ v_C = \eta_C \cdot \sigma_V = 1.9cm \cdot 2 \frac{m}{s cm} = 3.8 \frac{m}{s} \end{cases}$$

La **velocità angolare** ω_3 della biella si ricava immediatamente dalla conoscenza della posizione del c.d.i.r. e della velocità di un punto qualunque del piano mobile. Considerando ad esempio il punto A abbiamo

$$3.6) \quad \omega_3 = \frac{v_A}{AP_0} = \frac{\eta_A \cdot \sigma_V}{5.6cm \cdot \sigma_L} = \frac{3.77cm \cdot 2 \frac{m}{s cm}}{5.6cm \cdot 10^{-1} \frac{m}{cm}} = \frac{7.54 \frac{m}{s}}{0.56m} = 13.46 \frac{rad}{s} \cong 2.14 \frac{giri}{s}$$

Utilizzando, per verifica, un'altra delle velocità determinate, ad esempio quella di M , si ha

$$3.7) \quad \omega_3 = \frac{v_M}{MP_0} = \frac{\eta_M \cdot \sigma_V}{4.2cm \cdot \sigma_L} = \frac{2.8cm \cdot 2 \frac{m}{s cm}}{4.2cm \cdot 10^{-1} \frac{m}{cm}} = \frac{5.6 \frac{m}{s}}{0.42m} = 13.33 \frac{rad}{s} \cong 2.12 \frac{giri}{s}$$

4. Metodo dei diagrammi polari. La velocità di A è nota in direzione verso e modulo, come già detto. Riporto allora sul foglio il vettore $\bar{\eta}_A$ che la rappresenta nella scala prescelta, e considero che

$$4.1) \quad \bar{\eta}_B = \bar{\eta}_A + \bar{\eta}_{BA}$$

dove $\bar{\eta}_B$ è nota in direzione (lo stantuffo può solo traslare orizzontalmente) e $\bar{\eta}_{BA}$ è anch'essa nota in direzione, poiché il moto di B rispetto ad A è rotatorio. Posso così costruire il relativo diagramma polare e ricavare i versi e i moduli incogniti. Misurando i vettori ottenuti si ha

$$4.2) \quad \eta_B = 2.7\text{cm} \Rightarrow v_B = \sigma_V \eta_B = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \frac{1}{\text{cm}} 2.7\text{cm} = 5.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

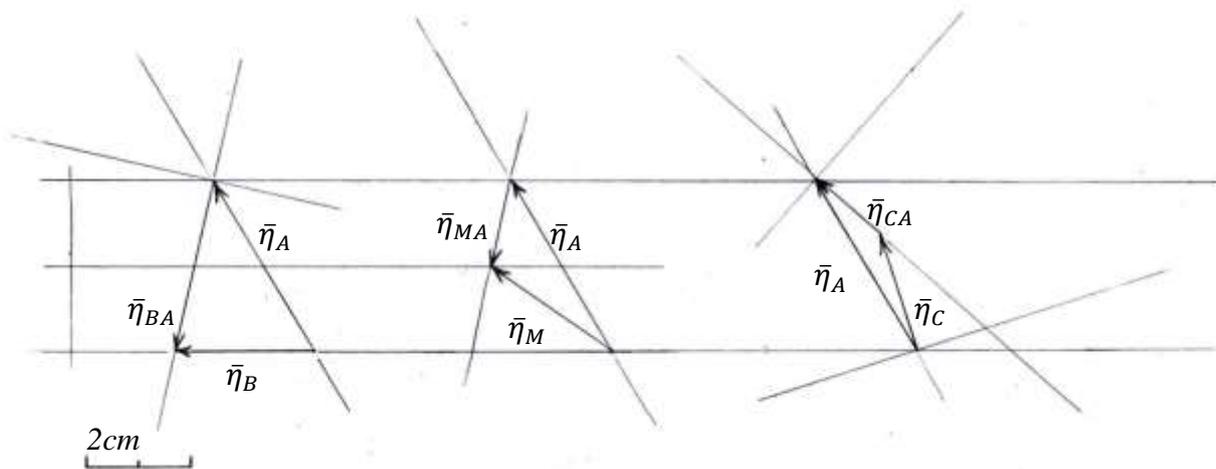
Per il diagramma polare relativo a \bar{v}_M si è considerato che la direzione di $\bar{\eta}_{MA}$ è nota e che $\bar{\eta}_{MA}$ deve essere lungo metà di $\bar{\eta}_{BA}$; altrimenti si poteva considerare che la direzione di $\bar{\eta}_M$ si ricava imponendo l'ortogonalità con la retta congiungente M con P_0 . Misurando il vettore $\bar{\eta}_M$ direttamente sul diagramma polare si ha

$$4.3) \quad \eta_B = 2.8\text{cm} \Rightarrow v_B = \sigma_V \eta_B = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \frac{1}{\text{cm}} 2.8\text{cm} = 5.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Procedendo analogamente per \bar{v}_C si costruisce il diagramma polare in figura il quale porge

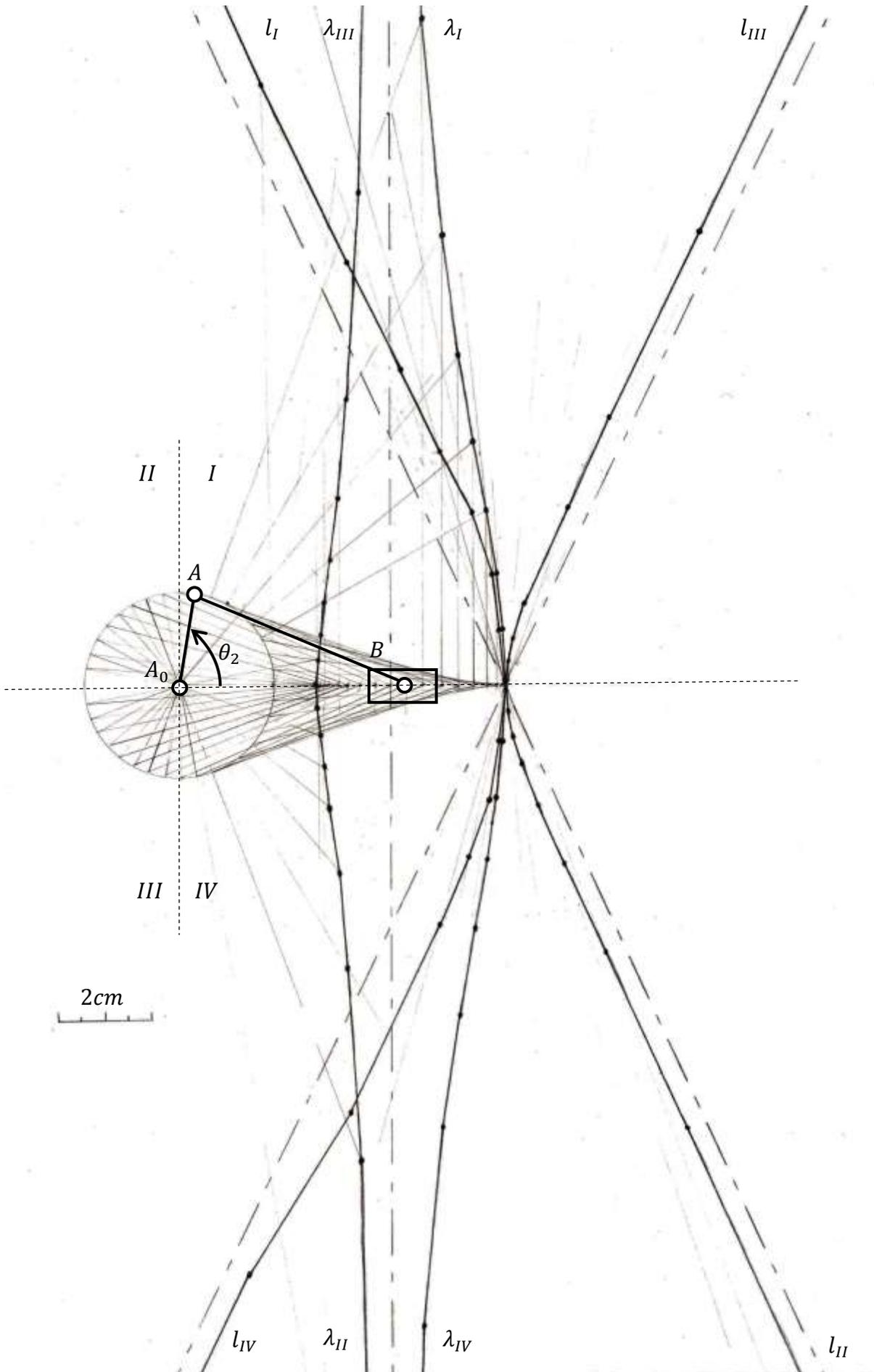
$$4.4) \quad \eta_C = 2.3\text{cm} \Rightarrow v_C = \sigma_V \eta_C = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \frac{1}{\text{cm}} 2.3\text{cm} = 4.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Si osserva che mentre si ottiene una buona concordanza fra il metodo dei poli e quello dei



diagrammi polari per le velocità di B, M , si ha scarsa concordanza per quella del punto C .

5. Polari, metodo del trasporto. Divido il moto in quattro fasi: la prima è quella in cui l'angolo di biella θ_2 va da zero a 90° ; la seconda è quella in cui va da 90° a 180° e così fino alla quarta. Nella prima fase il centro delle velocità descrive -sul piano fisso- l'arco λ_I della base, il quale presenta un asintoto verticale per $\theta_2 = 90^\circ$; nella seconda fase del moto viene descritto l'arco λ_{II} della base; e così via. Le rispettive rullette si ottengono riportando -col metodo del trasporto- i punti ricavati per ciascuno dei quattro archi di base, nella configurazione di punto morto esterno, ovvero nella configurazione che si ha per $\theta_2 = 0^\circ$.



Cinematica del secondo ordine del manovellismo

1. Il quesito. E' assegnato un manovellismo ordinario centrato con le seguenti caratteristiche geometriche

$$1.1) \quad \begin{cases} \overline{A_0A} = 0.2m \\ \overline{AB} = 0.5m \\ \overline{AC} = 0.3m \\ \overline{BC} = 0.4m \end{cases}$$

La manovella ruoti in senso antiorario con velocità angolare costante data da

$$1.2) \quad \omega_2 = \frac{360\text{giri}}{\text{minuto}} = \frac{6\text{giri}}{s} = \frac{12\pi}{s} \cong \frac{37.67\text{rad}}{s}$$

La configurazione iniziale sia quella di *punto morto* esterno; dato allora l'istante definito da

$$1.3) \quad t_1 = \frac{1}{72} s$$

si chiede per tale istante di determinare attraverso il metodo dei diagrammi polari

- le accelerazioni dei punti B, C, M , essendo quest'ultimo il punto di mezzeria della biella;
- la accelerazione angolare α_3 della biella.

Si chiede poi di determinare

- la posizione dei poli P_0, K ;
- la circonferenza dei flessi;
- la circonferenza di stazionarietà.

Si chiede poi di calcolare nuovamente, ma con il metodo dei poli

- le accelerazioni dei punti B, C, M .

Si chiede in fine di calcolare

- i centri di curvatura delle traiettorie dei punti C, M nei punti stessi.

2. Metodo dei diagrammi polari. Il manovellismo assegnato è quello studiato nella seconda esercitazione, con lo stesso moto e nel medesimo istante. Dello studio cinematico già compiuto ci interessa in particolare la velocità angolare della biella per la quale abbiamo trovato

$$2.1) \quad \omega_3 = \frac{13.46\text{rad}}{s}$$

Ciò posto l'accelerazione del punto B si scrive

$$2.2) \quad \bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}$$

e evidenziando la somma della componente tangenziale e di quella normale per ciascun addendo abbiamo

$$2.3) \quad \vec{a}_B^t + \vec{a}_B^n = \vec{a}_A^t + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^t + \vec{a}_{BA}^n$$

Costruiamo ora la tabella da utilizzare per i diagrammi polari tenendo presente che \vec{a}_B è tutta tangenziale dato che la traiettoria di B è rettilinea (curvatura infinita), inoltre l'accelerazione di A è tutta normale poiché A descrive un moto circolare uniforme (accelerazione tangenziale nulla).

\vec{a}_B^t	$+\vec{a}_B^n$	$= \vec{a}_A^t$	$+\vec{a}_A^n$	$+\vec{a}_{BA}^t$	$+\vec{a}_{BA}^n$	
?	0	0	$\omega_2^2 \overrightarrow{AA_0} $?	$\omega_3^2 \overrightarrow{BA} $	modulo
$\parallel \overrightarrow{A_0B}$	$\perp \overrightarrow{A_0B}$		$\frac{\overrightarrow{AA_0}}{ \overrightarrow{AA_0} }$	$\perp \overrightarrow{AB}$	$\frac{\overrightarrow{BA}}{ \overrightarrow{BA} }$	versore

Per fissare la scala σ_a di rappresentazione calcolo il modulo di \vec{a}_A^n ottenendo

$$2.4) \quad |\vec{a}_A^n| = \omega_2^2 |\overrightarrow{AA_0}| = (37.67 \text{ rad/s})^2 0.2 \text{ m} = \frac{283.80 \text{ m}}{\text{s}^2}$$

Volendo allora avere un segmento di 8 cm impongo

$$\frac{283.80 \text{ m}}{\text{s}^2} = \sigma_a 8 \text{ cm}$$

e ottengo la scala di rappresentazione per le accelerazioni

$$2.5) \quad \sigma_a = 35.47 \frac{\text{m}}{\text{s}^2 \text{ cm}}$$

Convengo di indicare i vettori che rappresentano le accelerazioni sul foglio con la lettera μ ; così, per esempio, l'accelerazione \vec{a}_B^t sarà rappresentata sul foglio dal vettore $\vec{\mu}_B^t$. Considerando che l'accelerazione \vec{a}_{BA}^n è completamente nota, in virtù della **2.1**, per il suo modulo si ha

$$2.6) \quad |\vec{a}_{BA}^n| = (13.46 \text{ rad/s})^2 0.5 \text{ m} = 90.58 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Considerando dunque la **2.5** abbiamo

$$2.7) \quad |\vec{\mu}_{BA}^n| = \frac{90.58 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\sigma_a} = 2.55 \text{ cm}$$

Tutto ciò posto, per applicare il metodo dei diagrammi polari opero secondo il procedimento seguente:

- fisso un polo O al quale applico il vettore $\vec{\mu}_A^n$ il quale è completamente noto;
- al suo estremo applico il vettore $\vec{\mu}_{BA}^n$ il quale è anch'esso completamente noto;
- in corrispondenza di O traccio la direzione nota di $\vec{\mu}_B^t$, retta r ;
- in corrispondenza dell'estremo libero di $\vec{\mu}_{BA}^n$ traccio la direzione nota di $\vec{\mu}_{BA}^t$, retta s .

Ebbene, l'intersezione fra le rette r, s definisce un estremo del vettore $\vec{\mu}_B^t$, essendo O il suo estremo libero. Leggendo il diagramma polare si trova

$$2.8) \quad |\vec{\mu}_B^t| = 8.7 \text{ cm}$$

e dunque abbiamo trovato che

$$2.9) \quad |\vec{a}_B| = |\vec{a}_B^t| = \sigma_a |\vec{\mu}_B^t| = 35.47 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \frac{1}{\text{cm}} 8.7 \text{ cm} = 308.58 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

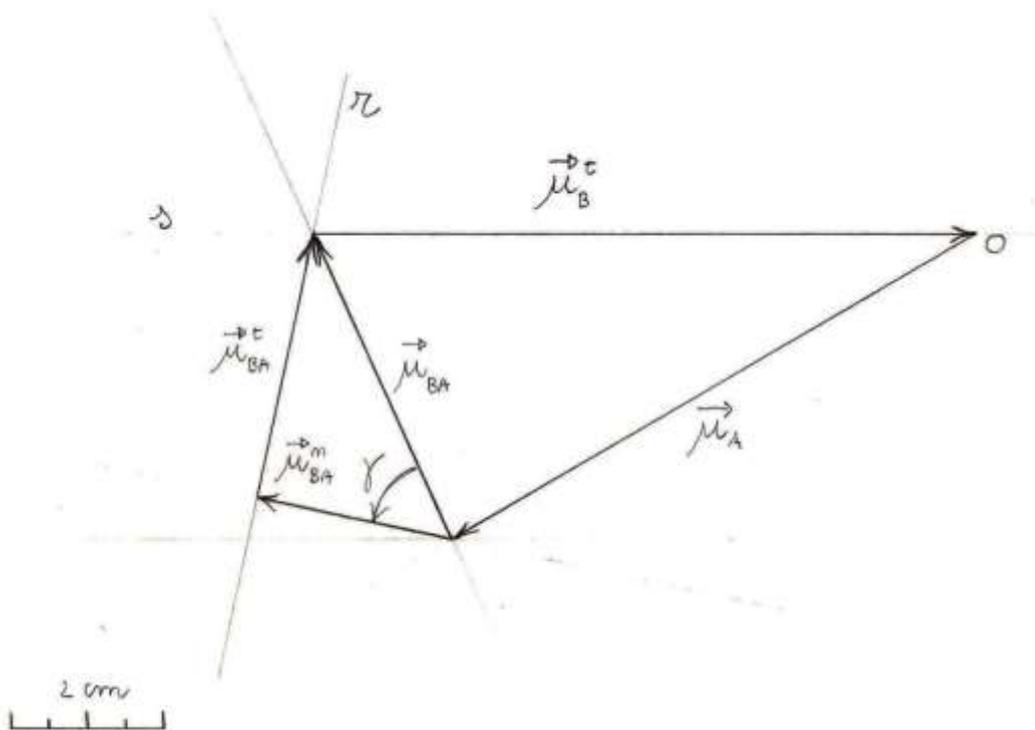
Riporto il diagramma polare usato per questo calcolo. Osservo inoltre, per quanto riguarda α_3 , che dovendo essere

$$2.10) \quad \vec{a}_{BA}^t = \vec{\alpha}_3 \times \overline{AB}$$

si ha in particolare

$$2.11) \quad |\vec{\alpha}_3| = \frac{|\vec{a}_{BA}^t|}{|\overline{AB}|} = \frac{\sigma_a |\vec{\mu}_{BA}^t|}{0.5 \text{ m}} = \frac{35.47 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \frac{1}{\text{cm}} 3.5 \text{ cm}}{0.5 \text{ m}} = 248.29 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

mentre il verso di $\vec{\alpha}_3$ è uscente dal foglio; ovvero la velocità di rotazione della biella è -in questo istante- ritardata.



Dal diagramma polare è anche possibile ricavare l'angolo γ relativo al moto assoluto della biella. Misurando direttamente dal disegno si ricava

$$2.12) \quad \gamma = 54^\circ = 0.94 \text{ rad}$$

D'altra parte l'angolo γ è fornito anche dalla nota formula $\gamma = \tan^{-1} \frac{\alpha_3}{\omega_3^2}$ la quale ci permette di ritrovare il valore **2.12**, infatti

$$2.13) \quad \gamma = \tan^{-1} \frac{\alpha_3}{\omega_3^2} = \tan^{-1} \frac{248.29 \frac{rad}{s^2}}{\left(\frac{13.46 rad}{s}\right)^2} = \tan^{-1} 1.37 = 0.94 rad$$

Calcolo l'accelerazione di M considerando che

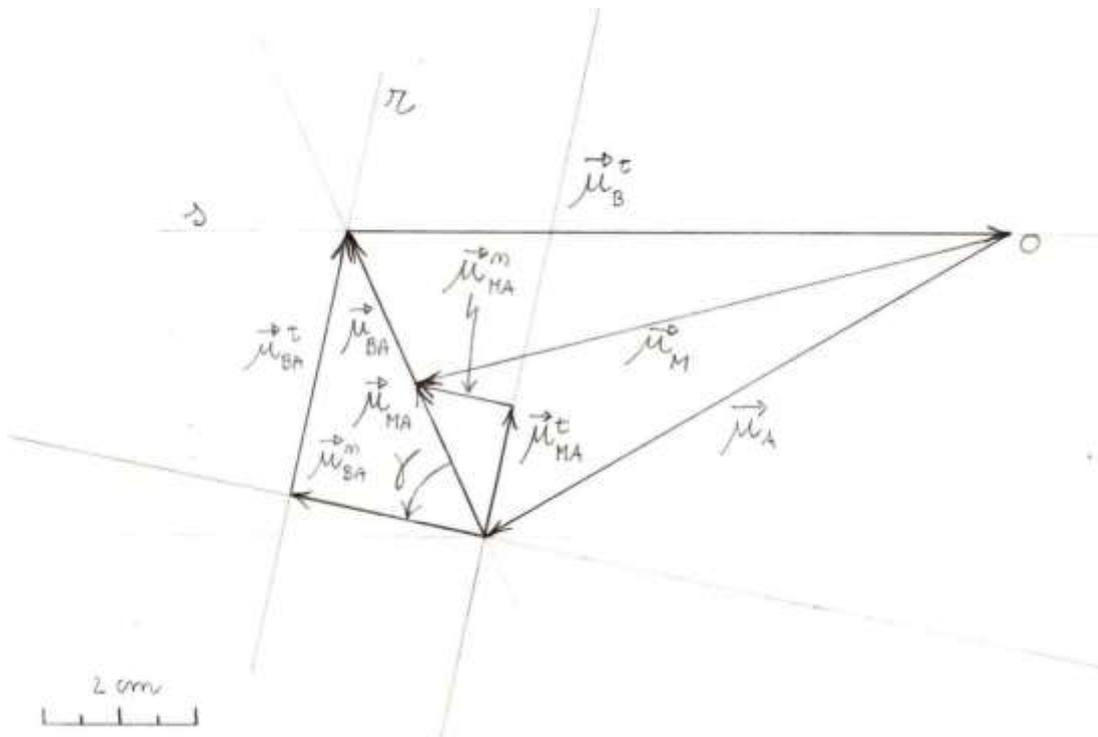
$$2.14) \quad \bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA} = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{MA}^t + \bar{a}_{MA}^n$$

e avendo dunque la tabella seguente:

\bar{a}_M	$= \bar{a}_A^t$	$+ \bar{a}_A^n$	$+ \bar{a}_{MA}^t$	$+ \bar{a}_{MA}^n$	
?	0	$\omega_2^2 \overrightarrow{AA_0} $	$ \bar{\alpha}_3 \overrightarrow{MA} $	$\omega_3^2 \overrightarrow{MA} $	modulo
?		$\frac{\overrightarrow{AA_0}}{ \overrightarrow{AA_0} }$	$\perp \overrightarrow{MA}$	$\frac{\overrightarrow{MA}}{ \overrightarrow{MA} }$	versore

Utilizzo il medesimo diagramma polare usato per il punto B , aggiungendo i vettori $\bar{\mu}_{MA}^t, \bar{\mu}_{MA}^n$ i quali sono completamente noti; in particolare le loro lunghezze sono

$$2.15) \quad \begin{cases} |\bar{\mu}_{MA}^t| = \frac{|\bar{\alpha}_3| |\overrightarrow{MA}|}{\sigma_a} = \frac{248.29 \frac{m}{s^2} 0.25m}{35.47 \frac{m}{s^2} cm} = 1.75 cm \\ |\bar{\mu}_{MA}^n| = \frac{\omega_3^2 |\overrightarrow{MA}|}{\sigma_a} = \frac{\left(\frac{13.46 rad}{s}\right)^2 0.25m}{35.47 \frac{m}{s^2} cm} = 1.27 cm \end{cases}$$



Si ottiene il seguente diagramma polare dal quale si misura $\bar{\mu}_M$ ottenendo

$$2.16) \quad |\bar{a}_M| = \sigma_a |\bar{\mu}_M| = 35.47 \frac{m}{s^2} cm = 283.8 \frac{m}{s^2}$$

Si può osservare come nel diagramma polare i due vettori $\vec{\mu}_{MA}, \vec{\mu}_{BA}$ vengano paralleli: questo è ciò che si aspetta pensando alla distribuzione delle accelerazioni di un moto circolare intorno al punto fisso A .

Calcolo l'accelerazione di C considerando che

$$2.17) \vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA} = \vec{a}_A^t + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{CA}^t + \vec{a}_{CA}^n$$

e avendo dunque la tabella seguente:

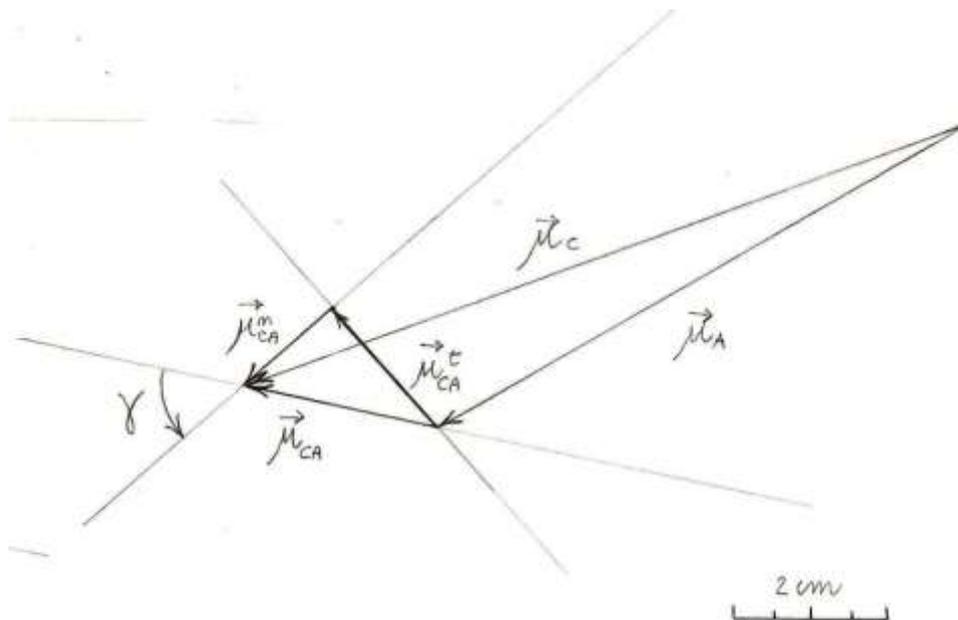
\vec{a}_C	$= \vec{a}_A^t$	$+ \vec{a}_A^n$	$+ \vec{a}_{CA}^t$	$+ \vec{a}_{CA}^n$	
?	0	$\omega_2^2 \overrightarrow{AA_0} $	$ \vec{a}_3 \overrightarrow{CA} $	$\omega_3^2 \overrightarrow{CA} $	modulo
?		$\frac{\overrightarrow{AA_0}}{ \overrightarrow{AA_0} }$	$\perp \overrightarrow{CA}$	$\frac{\overrightarrow{CA}}{ \overrightarrow{CA} }$	versore

Per costruire il diagramma polare abbiamo bisogno dei seguenti vettori

$$2.18) \begin{cases} |\vec{\mu}_{CA}^t| = \frac{|\vec{a}_3| |\overrightarrow{CA}|}{\sigma_a} = \frac{248.29 \frac{m}{s^2} 0.3m}{35.47 \frac{m}{s^2 cm}} = 2.1cm \\ |\vec{\mu}_{CA}^n| = \frac{\omega_3^2 |\overrightarrow{CA}|}{\sigma_a} = \frac{\left(\frac{13.46 rad}{s}\right)^2 0.3m}{35.47 \frac{m}{s^2 cm}} = 1.53cm \end{cases}$$

Leggendo il diagramma polare si misura $\vec{\mu}_C$ ottenendo

$$2.19) |\vec{a}_C| = \sigma_a |\vec{\mu}_C| = 35.47 \frac{m}{s^2 cm} 10.1cm = 358.24 \frac{m}{s^2}$$



3. Circonferenza dei flessi. All'istante t_1 la manovella ha descritto un angolo

$$3.1) \quad \theta_2 = \omega_2 t_1 = \frac{6 \text{ giri}}{s} \frac{1}{72} s = 30^\circ$$

Posiziono la manovella secondo quest'angolo e ricavo la posizione congruente della biella, considerando che il punto B è vincolato ad appartenere alla retta r_1 .

- Per ricavare il **c.d.i.r.** P_0 si consideri che la velocità di B deve essere parallela alla retta r_1 , dunque P_0 deve trovarsi sulla retta r_2 . D'altra parte la velocità di A è ortogonale alla manovella e dunque P_0 deve appartenere anche alla retta r_3 ; la sua posizione resta così individuata dalla intersezione delle due rette citate.

Si può osservare che P_0 può essere ricavato anche invocando il teorema di Aronhold-Kennedy, tenendo presente che il c.d.i.r. del moto assoluto della manovella è A_0 , quello del moto relativo della biella rispetto la manovella è A , dunque P_0 deve trovarsi su r_3 ; inoltre il c.d.i.r. del moto assoluto dello stantuffo si trova all'infinito lungo r_2 , quello del moto relativo della biella rispetto lo stantuffo è B , dunque P_0 deve trovarsi sulla retta r_2 . Se ne conclude che l'intersezione fra r_2, r_3 individua P_0 .

- Per ricavare la **circonferenza dei flessi** \mathcal{F} si consideri che il punto B deve appartenere ad essa, avendo una traiettoria rettilinea; inoltre \mathcal{F} passa per P_0 . Si consideri ora la prima formula di Euler-Savary applicata al punto A : se chiamo A' il punto di flesso della normale alla traiettoria di A , abbiamo che $A' \in r_3$ e inoltre

$$3.2) \quad P_0 A^2 = A A_0 \cdot A A' \Rightarrow A A' = \frac{P_0 A^2}{A A_0}$$

Misurando sul disegno i segmenti $P_0 A, A A_0$ abbiamo

$$\begin{cases} P_0 A = 5,6 \text{ cm} \\ A A_0 = 2 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow A A' = \frac{31,36 \text{ cm}^2}{2 \text{ cm}} = 15,68 \text{ cm}$$

La circonferenza dei flessi è dunque la circonferenza passante per P_0, B, A' e il suo centro è il punto di intersezione degli assi dei due segmenti $P_0 B, P_0 A'$.

- Il **polo dei flessi** I è individuato dalla retta r_1 della traiettoria dello stantuffo, ma è anche individuato dalla retta per P_0 e C_F .

4. Circonferenza di stazionarietà. Per individuare il **polo delle accelerazioni** si consideri che l'accelerazione di A ha direzione r_3 ; si considera allora la retta r_4 parallela ad r_3 e passante per I , la quale individua su \mathcal{F} il punto N . Allora, per una costruzione studiata, la retta r_5 per N e per A individua su \mathcal{F} il centro delle accelerazioni K .

- La **circonferenza di stazionarietà** \mathcal{S} passa per K e per A , che ha accelerazione tutta normale, essendo per ipotesi costante la rotazione della manovella. Passa inoltre per P_0 , e dunque resta univocamente individuata.

5. Metodo dei poli. Noto che sia il centro delle accelerazioni K è immediato ricavare γ direttamente dal disegno, misurando l'angolo $A_0 \hat{A} K$: si ricava ancora il valore **2.12** calcolato durante il metodo dei diagrammi polari. Noto γ ricaviamo immediatamente direzione e verso delle accelerazioni di C, M, B . Per i moduli usiamo invece la formula

$$5.1) \quad |\vec{a}_p| = |\vec{K P}| \sqrt{\omega_3^4 + \alpha_3^2}$$

la quale porge

$$5.2) \quad \begin{cases} |\vec{a}_B| = |\overrightarrow{KB}| \sqrt{\omega_3^4 + \alpha_3^2} \\ |\vec{a}_M| = |\overrightarrow{KM}| \sqrt{\omega_3^4 + \alpha_3^2} \\ |\vec{a}_C| = |\overrightarrow{KC}| \sqrt{\omega_3^4 + \alpha_3^2} \end{cases}$$

Considerando ora che per le **2.1**, **2.12** si ha

$$5.3) \quad \sqrt{\omega_3^4 + \alpha_3^2} = \sqrt{\left(\frac{13.46 \text{ rad}}{s}\right)^4 + \left(248.29 \frac{\text{rad}}{s^2}\right)^2} = 307.36 \frac{\text{rad}}{s^2}$$

Misurando i segmenti sul disegno si ricava inoltre

$$5.4) \quad \begin{cases} |\overrightarrow{KB}| = \sigma_L 9.9 \text{ cm} = 0.99 \text{ m} \\ |\overrightarrow{KM}| = \sigma_L 9.2 \text{ cm} = 0.92 \text{ m} \\ |\overrightarrow{KC}| = \sigma_L 11.5 \text{ cm} = 1.15 \text{ m} \end{cases}$$

avendo fissato per le lunghezze la scala $\sigma_L = 0.1 \text{ m/cm}$. Sostituendo le **5.3**, **5.4** nelle **5.2** abbiamo dunque

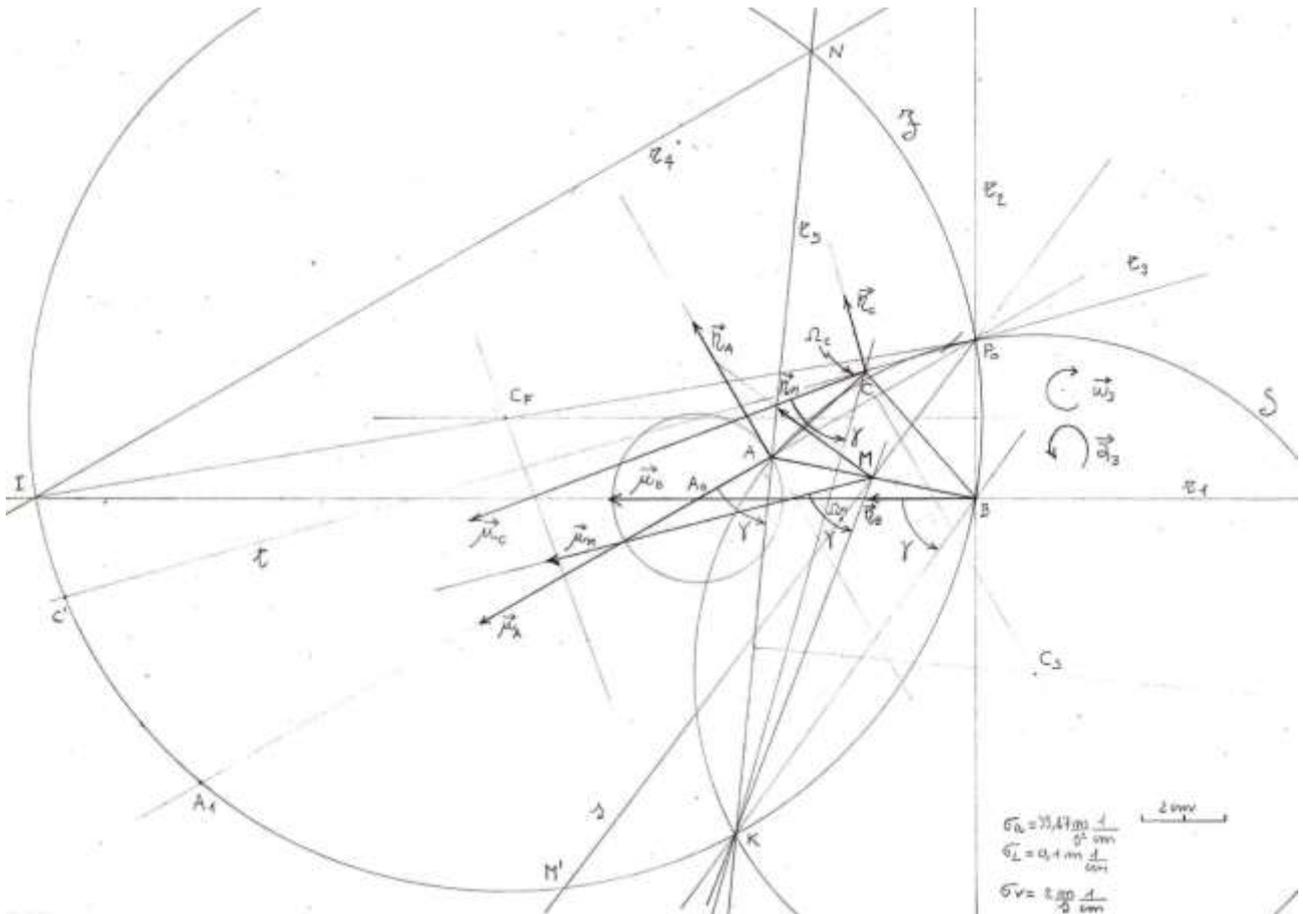
$$5.5) \quad \begin{cases} |\vec{a}_B| = 304.28 \frac{\text{m}}{s^2} \\ |\vec{a}_M| = 282.77 \frac{\text{m}}{s^2} \\ |\vec{a}_C| = 353.46 \frac{\text{m}}{s^2} \end{cases}$$

In tabella si confrontano i risultati ottenuti per le tre accelerazioni con il metodo dei diagrammi polari e con il metodo dei poli.

accelerazione	metodo dei diagrammi polari	metodo dei poli
$ \vec{a}_B $	$308.58 \frac{\text{m}}{s^2}$	$304.28 \frac{\text{m}}{s^2}$
$ \vec{a}_M $	$283.8 \frac{\text{m}}{s^2}$	$282.77 \frac{\text{m}}{s^2}$
$ \vec{a}_C $	$358.24 \frac{\text{m}}{s^2}$	$353.46 \frac{\text{m}}{s^2}$

Si vede che la concordanza è buona.

6. Centri di curvatura. Si traccia la retta s per M, P_0 individuando il punto M' , intersezione di tale retta con \mathcal{F} . Detto allora Ω_M il centro di curvatura della traiettoria di M , la formula di Euler-Savary porge



$$6.1) \quad P_0M^2 = MM' \cdot M\Omega_M$$

da cui si deduce

$$6.2) \quad M\Omega_M = \frac{P_0M^2}{MM'} = \sigma_L 1.36cm = 0.13m$$

Analogamente consideriamo la retta t per C, P_0 la quale intercetta \mathcal{F} in C' . Detto allora Ω_C il centro di curvatura della traiettoria di C , la formula di Euler-Savary porge

$$6.1) \quad P_0C^2 = CC' \cdot C\Omega_C$$

da cui si deduce

$$6.2) \quad C\Omega_C = \frac{P_0C^2}{CC'} = \sigma_L 0.36cm = 0.03m$$

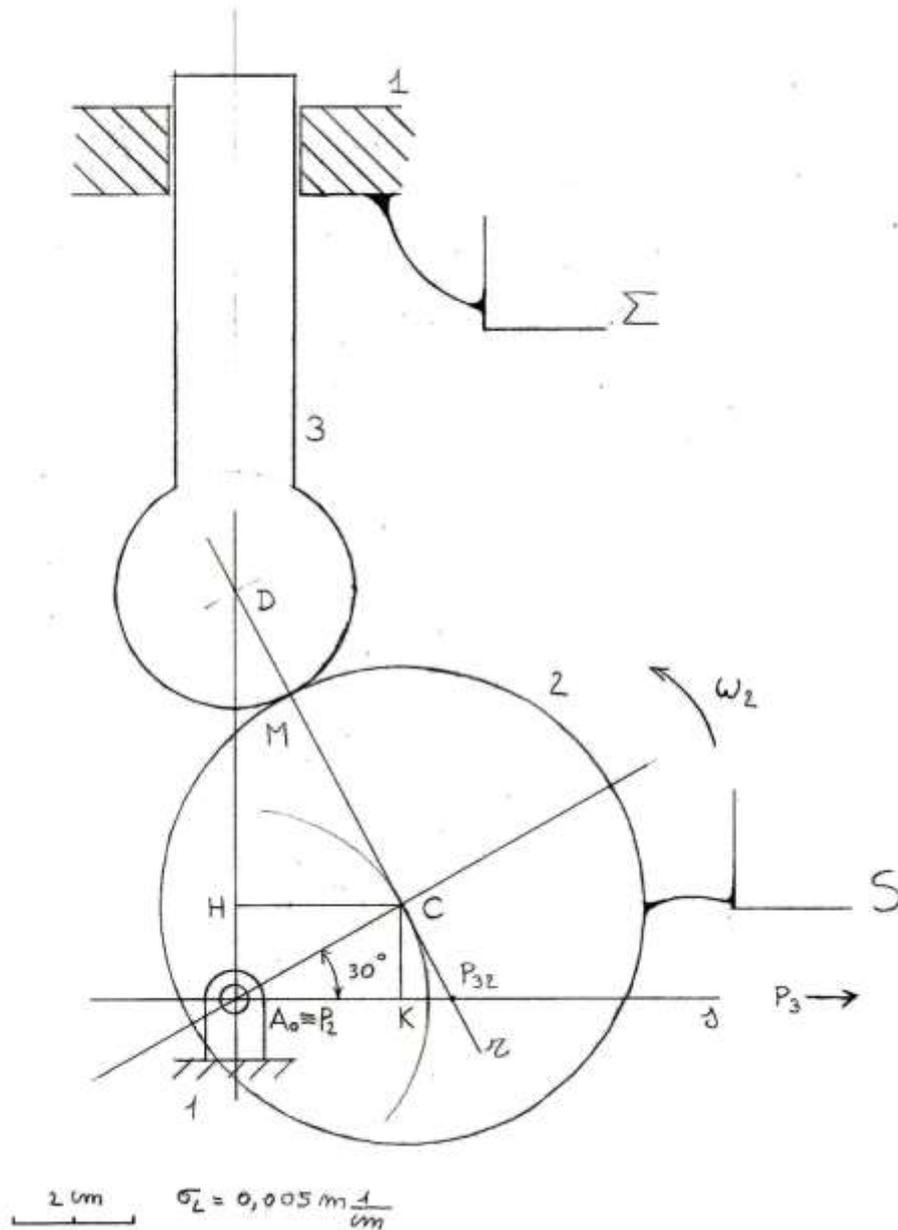
In figura sono riportate (con indicazione della relativa scala di rappresentazione) anche le velocità ricavate nella esercitazione 3, nonché le accelerazioni.

Cinematica di una camma

1. Il quesito. Per il meccanismo camma-cedente in figura si abbiano i dati

$$1.1) \left\{ \begin{array}{l} CA_0 = 16\text{mm} \\ CM = 20\text{mm} \\ DM = 10\text{mm} \\ \omega_2 = 300\text{gpm} = 31.41\frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{array} \right.$$

Si chiede l'analisi cinematica per l'elemento cedente.



2. Analisi cinematica del primo ordine. Si osserva che poiché il moto assoluto del corpo 3 è traslatorio, la sua analisi cinematica si riconduce a quella di un qualunque punto dello spazio a esso solidale.

Ricavo la configurazione del meccanismo all'istante assegnato secondo i seguenti passaggi:

- scelgo una scala di rappresentazione delle lunghezze: assumo $\sigma_L = 0.005m \frac{1}{cm}$;
- assegno al segmento A_0C una rotazione antioraria di 30° rispetto all'orizzontale;
- traccio una circonferenza di centro C e raggio $r_2 + r_3$ ottenendo la posizione del punto D .

Determino la velocità del punto D attraverso il teorema dei moti relativi. Il sistema di riferimento fisso Σ sia solidale al telaio 1; il sistema di riferimento mobile S sia solidale al corpo 2; allora posso scrivere

$$2.1) \quad \bar{v}_D^g = \bar{v}_D^r + \bar{v}_D^t$$

dove

- \bar{v}_D^g è la velocità assoluta, cioè quella del moto rispetto a Σ ;
- \bar{v}_D^r è la velocità relativa, cioè quella del moto rispetto S ;
- \bar{v}_D^t è la velocità di trascinamento, cioè quella del punto D pensato solidale a S , rispetto Σ .

Con un'altra simbologia comunemente in uso la 2.1 si può scrivere

$$2.2) \quad \bar{v}_{D3} = \bar{v}_{D3,2} + \bar{v}_{D2}$$

Determino i centri di rotazione dei tre moti rigidi descritti dai due corpi mobili:

- il c.d.i.r. P_2 del moto assoluto di 2 coincide con il centro A_0 della cerniera;
- il c.d.i.r. P_3 del moto assoluto di 3 è un punto improprio che si trova su una retta orizzontale;
- il c.d.i.r. P_{32} del moto relativo di 3 rispetto 2 si trova sulla retta per i punti D, C .

Per il teorema di Aronhold-Kennedy questi tre punti devono essere allineati e dunque P_{32} è individuato dalla intersezione fra le rette r, s indicate in figura. Ciò posto sia ha

$$2.3) \quad \begin{cases} \bar{v}_{D3,2} = \bar{\omega}_{32} \times \overline{P_{32}D} \\ \bar{v}_{D2} = \bar{\omega}_2 \times \overline{A_0D} \end{cases}$$

Sostituendo le 2.3 nella 2.2 si ha dunque

$$2.4) \quad \bar{v}_{D3} = \bar{\omega}_{32} \times \overline{P_{32}D} + \bar{\omega}_2 \times \overline{A_0D}$$

D'altra parte per le velocità angolari si ha

$$2.5) \quad \begin{cases} \bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_{32} \\ \bar{\omega}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{\omega}_{32} = -\bar{\omega}_2$$

quindi la 2.4 si riscrive

$$\bar{v}_{D3} = -\bar{\omega}_2 \times \overline{P_{32}D} + \bar{\omega}_2 \times \overline{A_0D} = \bar{\omega}_2 \times (-\overline{P_{32}D} + \overline{A_0D}) = \bar{\omega}_2 \times (\overline{A_0D} + \overline{DP_{32}})$$

ovvero

$$2.6) \quad \vec{v}_{D3} = \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{A_0P_{32}}$$

Per ricavare la lunghezza del segmento A_0P_{32} sono necessari alcuni semplici passaggi geometrici: i triangoli rettangoli DA_0P_{32} e DHC sono simili avendo tre angoli uguali, dunque possiamo scrivere

$$2.7) \quad \frac{\overline{A_0P_{32}}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{DP_2}}{\overline{DH}}$$

D'altra parte si ha

$$2.8) \quad \begin{cases} \overline{HC} = \overline{A_0C} \cos \frac{\pi}{6} = 13.85mm \\ \overline{HP_2} = \overline{A_0C} \sin \frac{\pi}{6} = 8mm \\ \overline{DC} = 30mm \\ \overline{DH} = \sqrt{\overline{DC}^2 - \overline{HC}^2} = 26.61mm \\ \overline{DP_2} = \overline{DH} + \overline{HP_2} = 34.61mm \end{cases}$$

e dunque sostituendo nella **2.7** troviamo

$$2.9) \quad \overline{A_0P_{32}} = \frac{\overline{DP_2}}{\overline{DH}} \overline{HC} = \frac{34.61}{26.61} 13.85mm = 18.01mm$$

In modo più pratico si può misurare direttamente il segmento $\overline{A_0P_{32}}$ dal disegno, ottenendo

$$2.10) \quad \overline{A_0P_{32}} = 3.6cm \cdot 0.005m \frac{1}{cm} = 0.018m$$

Sostituendo nella **2.6** otteniamo

$$2.11) \quad |\vec{v}_{D3}| = |\vec{\omega}_2| \overline{A_0P_{32}} = \frac{300 \cdot 2\pi}{60s} 0.018m = 31.41 \frac{rad}{s} 0.018m = 0.56 \frac{m}{s}$$

Si osserva che la **2.6** fornisce le caratteristiche vettoriali della velocità, la quale risulta verticale e con verso che punta in alto.

3. Analisi cinematica del secondo ordine. Applicando ancora il teorema dei moti relativi abbiamo

$$3.1) \quad \vec{a}_D^a = \vec{a}_D^r + \vec{a}_D^t + \vec{a}_D^c$$

dove

- \vec{a}_D^a è l'accelerazione assoluta, cioè quella del moto rispetto a Σ ;
- \vec{a}_D^r è l'accelerazione relativa, cioè quella del moto rispetto S ;
- \vec{a}_D^t è l'accelerazione di trascinamento, cioè quella del punto D pensato solidale a S , rispetto Σ ;
- \vec{a}_D^c è l'accelerazione di Coriolis.

Con altra notazione si può scrivere anche

$$3.2) \quad \bar{a}_{D3} = \bar{a}_{D3,2} + \bar{a}_{D2} + \bar{a}_D^c$$

e considerando le componenti tangenziale e normale delle accelerazioni si ha

$$3.3) \quad \bar{a}_{D3}^t + \bar{a}_{D3}^n = \bar{a}_{D3,2}^t + \bar{a}_{D3,2}^n + \bar{a}_{D2}^t + \bar{a}_{D2}^n + \bar{a}_D^c$$

Per l'accelerazione di Coriolis si ha

$$3.4) \quad \bar{a}_D^c = 2\bar{\omega}_2 \times \bar{v}_{D3,2}$$

D'altra parte la velocità relativa di D si scrive

$$\bar{v}_{D3,2} = \bar{\omega}_{32} \times \overrightarrow{P_{32}D} = -\bar{\omega}_2 \times \overrightarrow{P_{32}D}$$

e dunque si ha

$$3.5) \quad \bar{a}_D^c = -2\bar{\omega}_2 \times (\bar{\omega}_2 \times \overrightarrow{P_{32}D}) = -2 \left((\bar{\omega}_2 \cdot \overrightarrow{P_{32}D})\bar{\omega}_2 - (\bar{\omega}_2 \cdot \bar{\omega}_2)\overrightarrow{P_{32}D} \right) = 2\omega_2^2 \overrightarrow{P_{32}D}$$

Costruisco ora il quadro riassuntivo delle accelerazioni **3.3** inserendo tutti gli elementi noti, in modo da ricavare le incognite per via grafica:

\bar{a}_{D3}^t	$+\bar{a}_{D3}^n$	$= \bar{a}_{D3,2}^t$	$+\bar{a}_{D3,2}^n$	$+\bar{a}_{D2}^t$	$+\bar{a}_{D2}^n$	$+\bar{a}_D^c$	
?	0	?	$\frac{(\omega_2 \overrightarrow{P_{32}D})^2}{ \overrightarrow{DC} }$	0	$\omega_2^2 \overrightarrow{DA_0} $	$2\omega_2^2 \overrightarrow{P_{32}D}$	modulo
$\frac{\overrightarrow{A_0D}}{ \overrightarrow{A_0D} }$		$\perp \overrightarrow{DC}$	$\frac{\overrightarrow{DC}}{ \overrightarrow{DC} }$		$\frac{\overrightarrow{DA_0}}{ \overrightarrow{DA_0} }$	$\frac{\overrightarrow{P_{32}D}}{ \overrightarrow{P_{32}D} }$	versore

Abbiamo una equazione vettoriale con due incognite scalari, dunque risolvibile. Per tracciare il diagramma polare è necessario calcolare tutti i moduli noti. Misurando i segmenti direttamente sul disegno e usando la scala delle lunghezze ho

$$3.6) \quad \begin{cases} |\bar{a}_{D3,2}^n| = \left(31.41 \frac{rad}{s} 7.8cm 0.005m \frac{1}{cm} \right)^2 \frac{1}{0.03m} = 50.02 \frac{m}{s^2} \\ |\bar{a}_{D2}^n| = \left(31.41 \frac{rad}{s} \right)^2 6.9cm 0.005m \frac{1}{cm} = 34.03 \frac{m}{s^2} \\ |\bar{a}_D^c| = 2 \left(31.41 \frac{rad}{s} \right)^2 7.8cm 0.005m \frac{1}{cm} = 76.95 \frac{m}{s^2} \end{cases}$$

Volendo avere, sul disegno, un'accelerazione $\bar{a}_{D3,2}^n$ di 5 cm ricavo la scala delle accelerazioni:

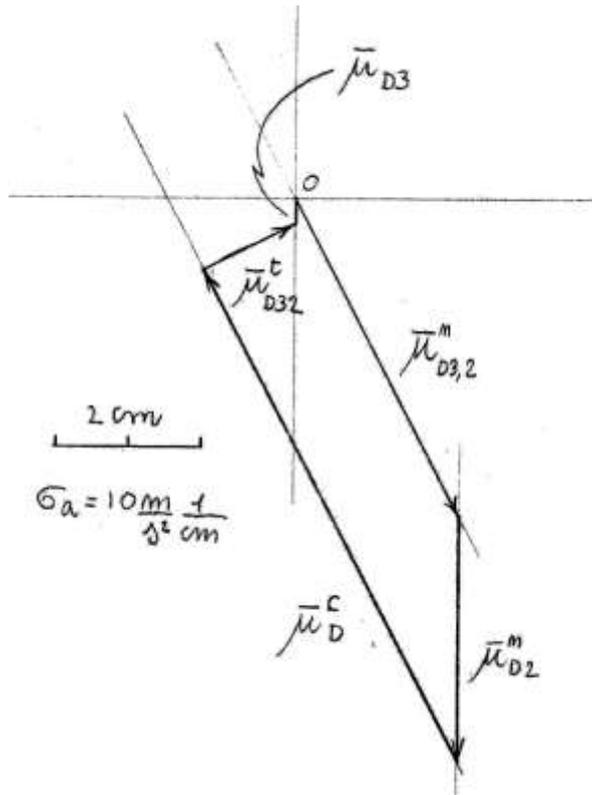
$$3.7) \quad 50.02 \frac{m}{s^2} = \sigma_a 5cm \Rightarrow \sigma_a = 10 \frac{m}{s^2} \frac{1}{cm}$$

e dunque i vettori rappresentativi delle accelerazioni hanno le lunghezze seguenti

$$3.8) \begin{cases} |\bar{\mu}_{D_{3,2}}^n| = \frac{1}{\sigma_a} 50.03 \frac{m}{s^2} = 5.00cm \\ |\bar{\mu}_{D_2}^n| = \frac{1}{\sigma_a} 34.03 \frac{m}{s^2} = 3.40cm \\ |\bar{\mu}_D^c| = \frac{1}{\sigma_a} 76.95 \frac{m}{s^2} = 7.69cm \end{cases}$$

Leggendo $\bar{\mu}_{D_3}$ sul diagramma polare si trova

$$3.9) |\bar{\mu}_{D_3}| = 0.4cm \Rightarrow |\bar{a}_{D_3}| = 0.4cm \cdot 10 \frac{m}{s^2} \frac{1}{cm} = 4 \frac{m}{s^2}$$



4. Meccanismo equivalente, analisi cinematica del primo ordine. In figura è riportato il manovellismo equivalente al meccanismo assegnato. Procedo con l'analisi cinematica in analogia con quella presentata nella esercitazione 3. Per la velocità di D si ha

$$4.1) \bar{v}_D = \bar{v}_C + \bar{v}_{DC}$$

La tabella relativa a questa equazione vettoriale è

\bar{v}_D	$= \bar{v}_C$	$+ \bar{v}_{DC}$	
?	$\omega_2 \overrightarrow{A_0C} $?	modulo
$\frac{\overrightarrow{A_0D}}{ \overrightarrow{A_0D} }$	$\perp \overrightarrow{A_0C}$	$\perp \overrightarrow{DC}$	versore

Abbiamo una equazione vettoriale del piano in due incognite scalari, dunque risolvibile. Per tracciare il diagramma polare dobbiamo calcolare $|\bar{v}_C|$ e poi fissare una scala delle velocità. Si ha

$$4.2) \quad |\bar{v}_C| = 31.41 \frac{rad}{s} 0.016m = 0.5 \frac{m}{s}$$

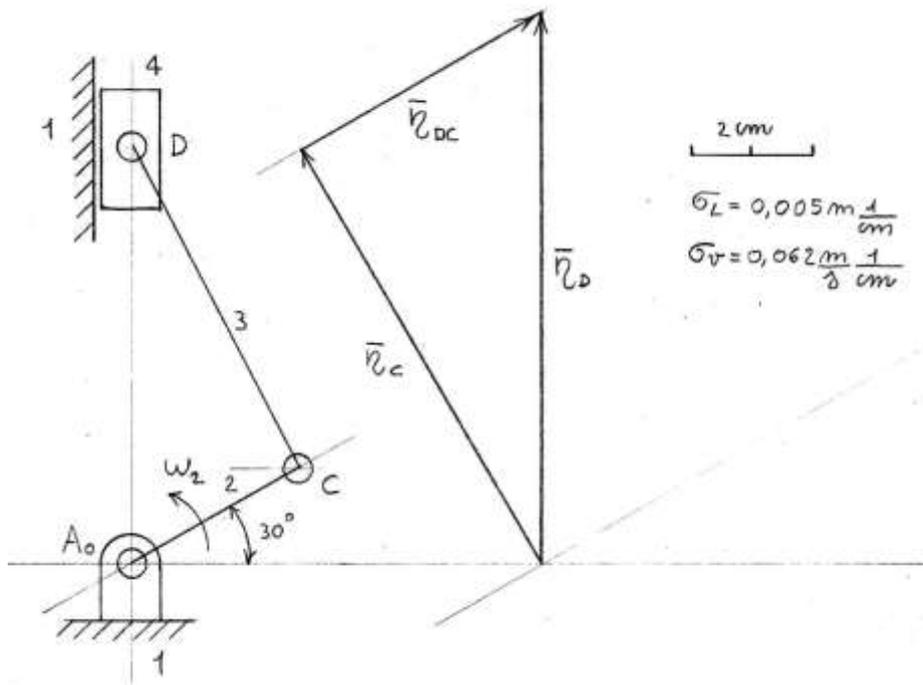
Volendo avere per questa velocità un segmento di 8 cm si ricava la seguente scala delle velocità:

$$0.5 \frac{m}{s} = \sigma_v 8cm \Rightarrow \sigma_v = 0.062 \frac{m}{s \cdot cm}$$

Leggendo la velocità \bar{v}_D sul diagramma polare si trova

$$4.3) \quad |\bar{v}_D| = \bar{\eta}_D \sigma_v = 9.2cm \cdot 0.062 \frac{m}{s \cdot cm} = 0.57 \frac{m}{s}$$

in buona accordo con la 2.11.



5. Meccanismo equivalente, analisi cinematica del secondo ordine. L'equazione vettoriale da risolvere è

$$5.1) \quad \bar{a}_D = \bar{a}_C + \bar{a}_{DC}$$

che si precisa meglio evidenziando le componenti tangenziali e normali, ottenendo

$$5.2) \quad \bar{a}_D^t + \bar{a}_D^n = \bar{a}_C^t + \bar{a}_C^n + \bar{a}_{DC}^t + \bar{a}_{DC}^n$$

Riportando in tabella tutti gli elementi noti abbiamo

\bar{a}_D^t	$+\bar{a}_D^n$	$= \bar{a}_C^t$	$+\bar{a}_C^n$	$+\bar{a}_{DC}^t$	$+\bar{a}_{DC}^n$	
?	0	0	$\omega_2^2 \overrightarrow{CA_0} $?	$\omega_3^2 \overrightarrow{DC} $	modulo
$\frac{\overrightarrow{A_0D}}{ \overrightarrow{A_0D} }$			$\frac{\overrightarrow{CA_0}}{ \overrightarrow{CA_0} }$	$\perp \overrightarrow{DC}$	$\frac{\overrightarrow{DC}}{ \overrightarrow{DC} }$	versore

Per disegnare i diagrammi polari è necessario ricavare i moduli noti e poi fissare una scala di rappresentazione. Intanto per i moduli si ha

$$5.3) \quad \begin{cases} |\bar{a}_C^n| = \left(31.41 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 0.016\text{m} = 15.78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ |\bar{a}_{DC}^n| = \left(\frac{|\bar{v}_{DC}|}{|\overline{DC}|}\right)^2 |\overline{DC}| = \left(\frac{4.6\text{cm} \cdot 0.062 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0.03\text{m}}\right)^2 0.03\text{m} = 2.71 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases}$$

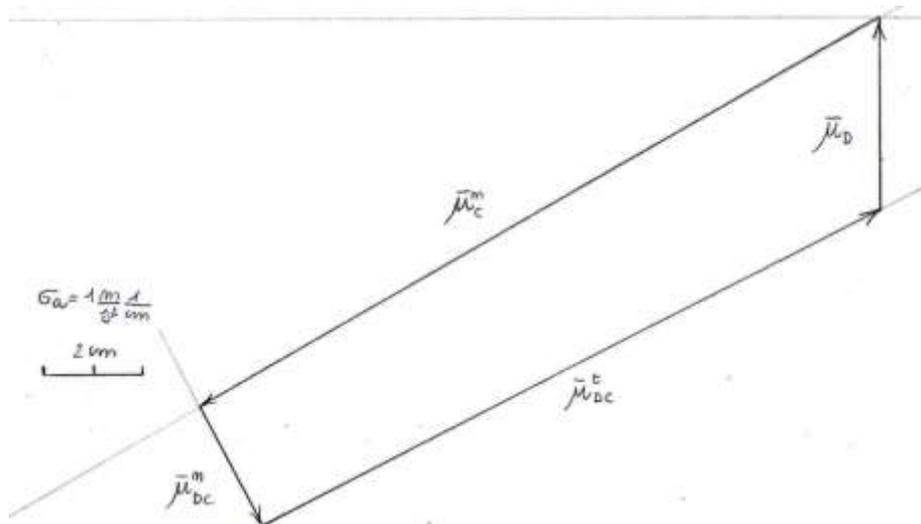
La scala delle accelerazioni sia

$$5.4) \quad \sigma_a = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2 \text{cm}}$$

Leggendo la lunghezza del vettore $\bar{\mu}_D^t$ direttamente dal diagramma polare si ricava

$$5.5) \quad |\bar{a}_D| = |\bar{a}_D^t| = \sigma_a |\bar{\mu}_D^t| = 3.9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

in accordo con quanto trovato in **3.9**.



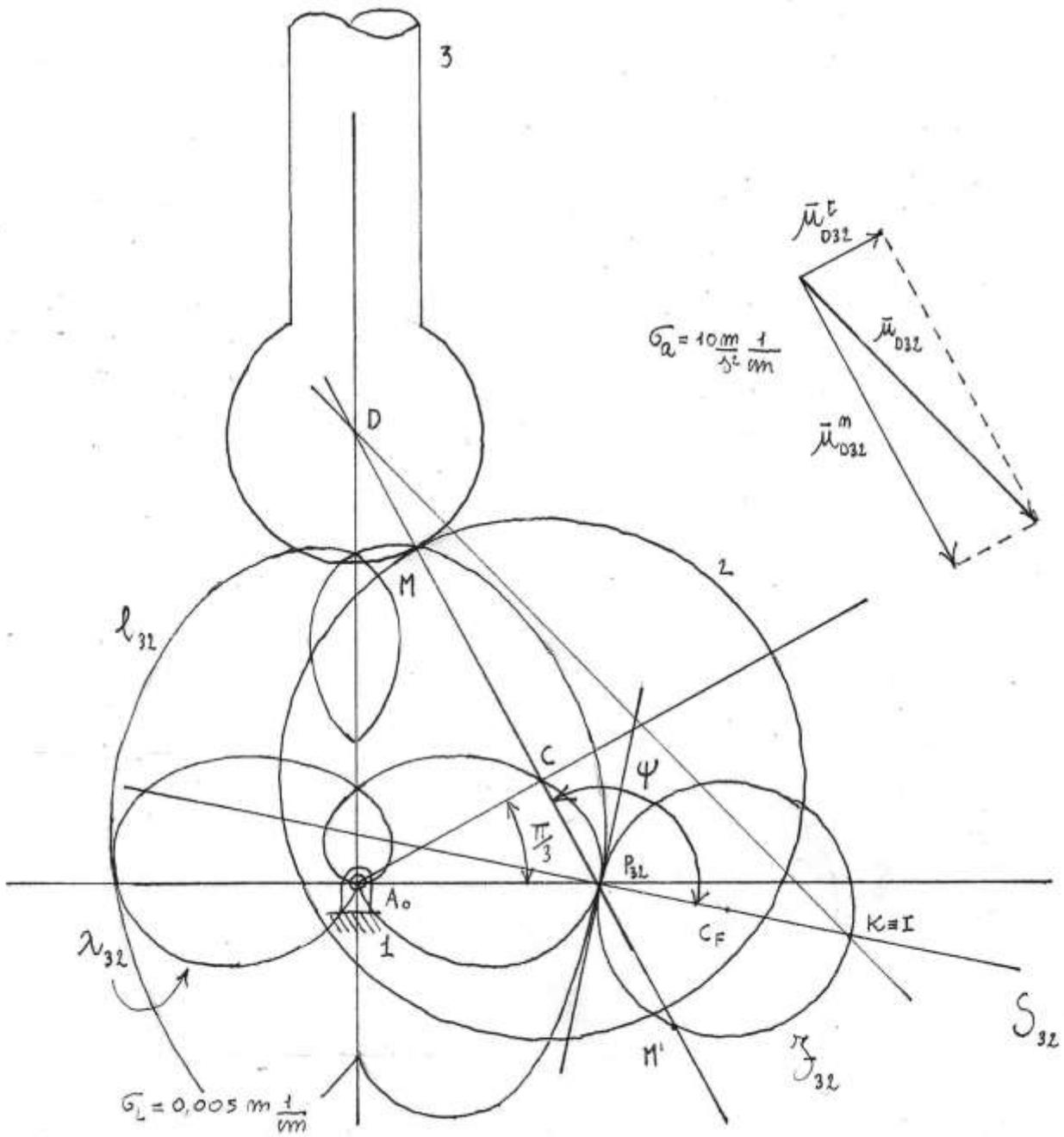
6. Studio del moto 3-2. Ad appendice dell'analisi qui presentata propongo lo studio del moto del corpo 3 rispetto alla piastra circolare 2.

• **Circonferenza dei flessi.** Per ricavare la circonferenza dei flessi di tale moto piano -che indico \mathcal{F}_{32} - considero che il punto M descrive nel moto 3-2 una circonferenza di centro C , dunque C è il centro di curvatura della traiettoria di M in M medesimo. Se indico allora M' il punto di flesso della normale alla traiettoria di M in M medesimo, Euler-Savary (seconda formulazione) porge

$$6.1) \quad (P_{32}M)^2 = CM \cdot M'M \Rightarrow M'M = \frac{(P_{32}M)^2}{CM} = \frac{(2.9\text{cm} \cdot \sigma_L)^2}{2\text{cm} \cdot \sigma_L} = 4.205\text{cm} \cdot \sigma_L = 0.042\text{m}$$

La 6.1 consente di individuare il punto M' , il quale è punto della circonferenza dei flessi. Consideriamo ora l'accelerazione \bar{a}_{D32} , già calcolata nel paragrafo terzo. Sommando le sue due componenti per via grafica si ottiene

6.2) $\mu_{D32} = 5.2\text{cm} \Rightarrow |\vec{a}_{D32}| = 5.2\text{cm} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \frac{1}{\text{cm}} = 52 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

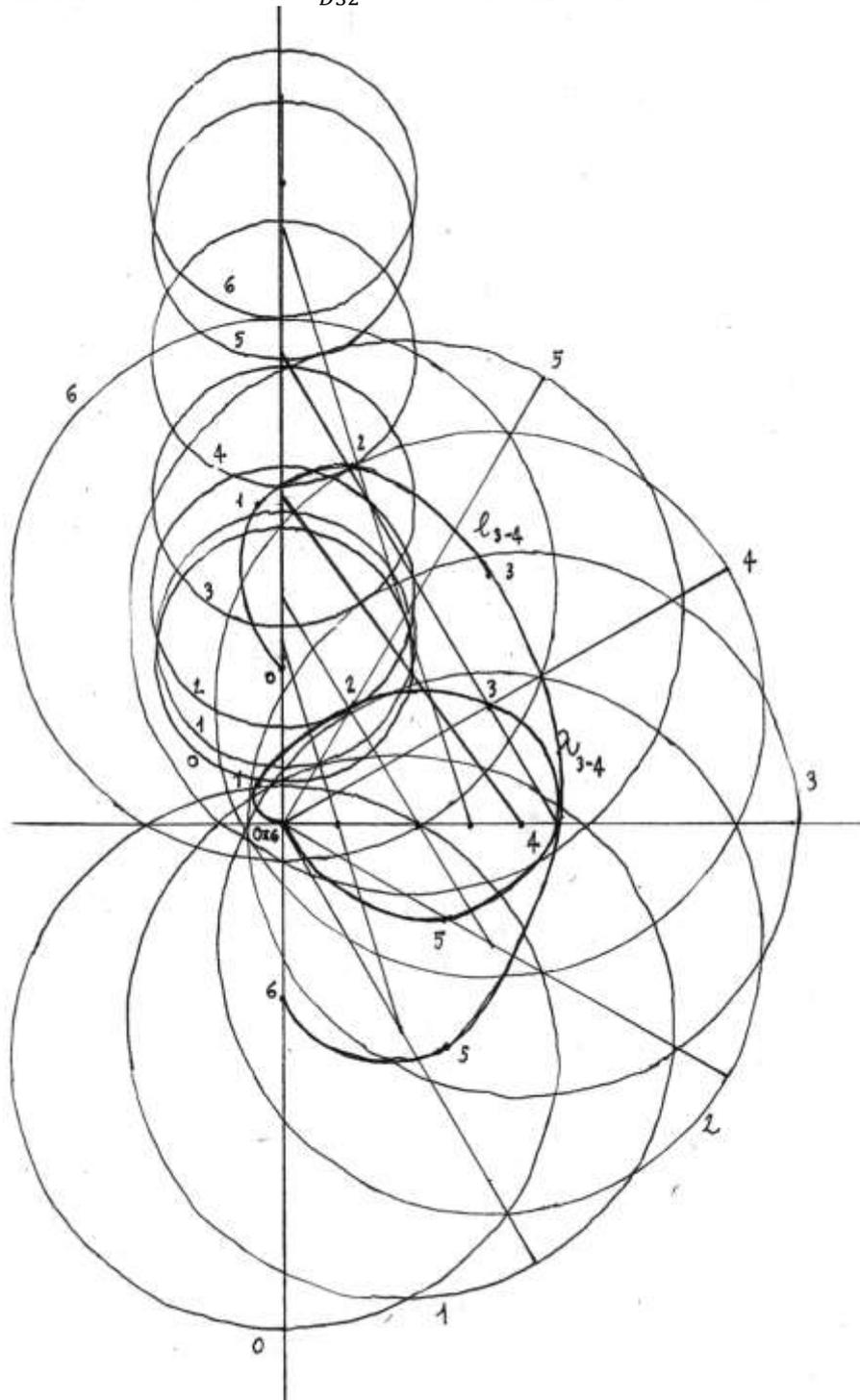


Si calcola poi che

$$|\vec{a}_{D32}| = \overline{DK}_{32} \sqrt{\omega_{32}^4 + \alpha_{32}^2} \Rightarrow$$

6.3) $\overline{DK}_{32} = \frac{|\vec{a}_{D32}|}{\sqrt{\omega_{32}^4 + \alpha_{32}^2}} = \frac{|\vec{a}_{D32}|}{\omega_{32}^2} = \frac{52 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{(31.41 \frac{\text{rad}}{\text{s}})^2} = 5.27 \cdot 10^{-2} \text{m}$

Poiché l'accelerazione è tutta normale (infatti l'accelerazione angolare è nulla), abbiamo che K_{32} si trova sulla retta individuata dal vettore \vec{a}_{D32} e la sua distanza da D è data dalla 6.3.



Avendo individuato tre punti della circonferenza dei flessi (ovvero P_{32}, M', K_{32}) è possibile tracciare la circonferenza stessa.

Si poteva anche argomentare che, poiché il moto è ad accelerazione angolare nulla, il polo dei flessi I_{32} coincide con il centro delle accelerazioni, dunque \mathcal{F}_{32} ha per diametro il segmento $P_{32}K_{32}$, e dunque resta univocamente determinata.

Un'ulteriore conferma sull'accuratezza della circonferenza dei flessi così ottenuta può aversi applicando la prima formulazione della formula di Euler-Savary, la quale porge

$$6.4) \left(\frac{1}{CP_{32}} + \frac{1}{P_{32}M} \right) \cos \psi = \frac{1}{\delta} \Rightarrow \delta = \frac{1}{\left(\frac{1}{CM} + \frac{1}{P_{32}M} \right) \cos \psi}$$

dove δ rappresenta il diametro della circonferenza dei flessi. Nel nostro caso si ha

$$6.5) \begin{cases} \psi = 130^\circ \Rightarrow \cos 130^\circ = -0.64 \\ CP_{32} = -1.8cm \cdot \sigma_L = -0.009m \\ P_{32}M = 5.9cm \cdot \sigma_L = 0.0295m \end{cases} \Rightarrow \delta = \frac{1}{\left(\frac{1}{-0.009m} + \frac{1}{0.0295m} \right) (-0.64)} = 2.02cm$$

Misurando invece direttamente δ sul disegno si ottiene $\delta = 3.9cm \cdot \sigma_L = 0.0195m$, in buon accordo con la 6.5.

• **Circonferenza di stazionarietà.** Poiché il polo dei flessi coincide con il centro delle accelerazioni, si ha che la circonferenza di stazionarietà S_{32} degenera nella retta per P_{32} e K_{32} . D'altra parte è evidente che il generico punto

• **Polari del primo ordine.** Ricavo la base del moto 3-2, tracciandola nella posizione che il piano 2 assume rispetto al piano 1 quando $\theta_2 = 60^\circ$. A tal fine considero le seguenti configurazioni del meccanismo:

$$6.6) \begin{cases} \text{configurazione 0: } \theta_2 = -60^\circ \\ \text{configurazione 1: } \theta_2 = -30^\circ \\ \text{configurazione 3: } \theta_2 = 0^\circ \\ \text{configurazione 4: } \theta_2 = 30^\circ \\ \text{configurazione 5: } \theta_2 = 60^\circ \\ \text{configurazione 6: } \theta_2 = 90^\circ \end{cases}$$

Per ciascuna di esse ricavo la posizione del centro del moto e poi la trasporto sul piano 2 relativo alla configurazione 4. Data la simmetria del moto, posso ottenere le posizioni del centro del moto per ulteriori 5 configurazioni, completando così il disegno della base. Con il metodo del trasporto ricavo infine la polare mobile.

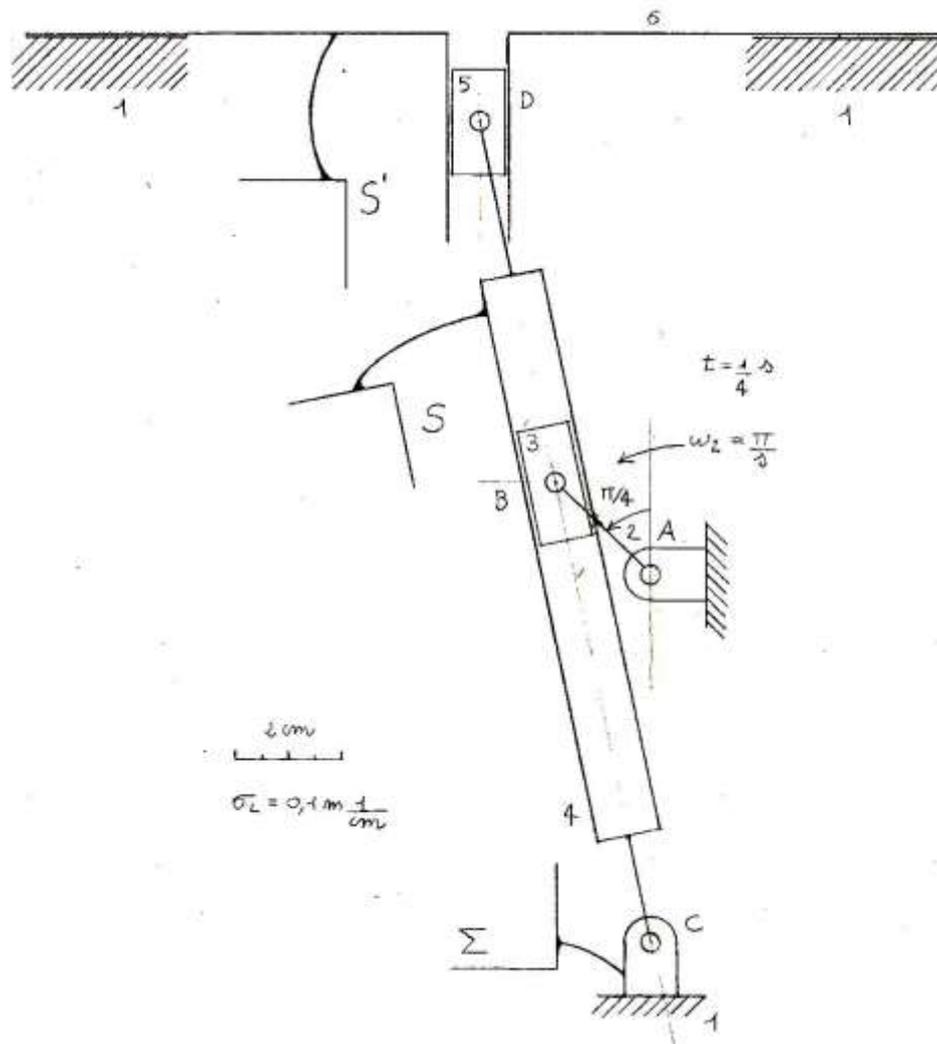
Cinematica di una guida Fairbairn

1. Il quesito. Per il meccanismo denominato guida di Fairbairn si abbiano i dati

$$1.1) \left\{ \begin{array}{l} AC = 0.7m \\ AB = 0.25m \\ DC = 1.6m \\ \omega_2 = 30gpm = 3.14 \frac{rad}{s} \end{array} \right.$$

Si chiede all'istante $t = 0.25s$ di determinare

- velocità e accelerazione del punto B ;
- velocità angolare e accelerazione angolare del glifo (corpo 4);
- velocità e accelerazione della slitta 6.

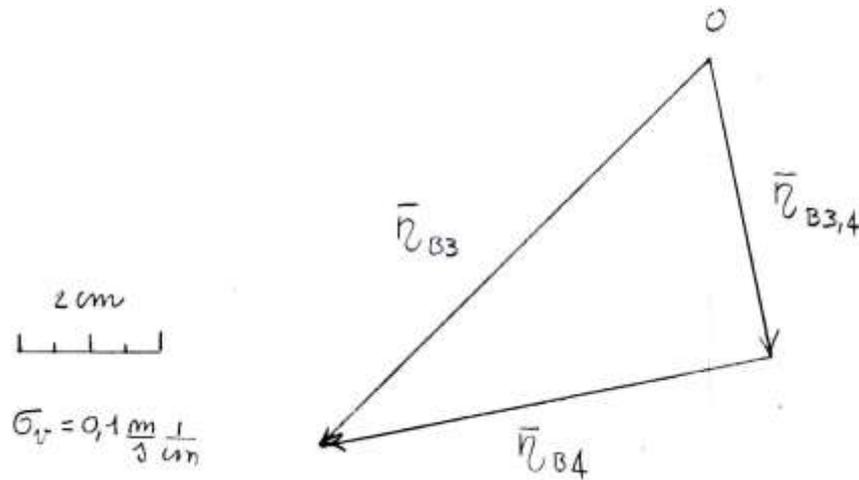


2. Cinematica del primo ordine del punto B . Ricorro al teorema dei moti relativi, avendo fissato il sistema di riferimento mobile S come solidale al corpo 4 (glifo); il sistema di riferimento fisso Σ sia solidale al corpo 1 (telaio). Allora si ha

$$2.1) \quad \vec{v}_B^a = \vec{v}_B^r + \vec{v}_B^t$$

dove

- \vec{v}_B^a è la velocità assoluta, cioè quella del moto rispetto a Σ ;
- \vec{v}_B^r è la velocità relativa, cioè quella del moto rispetto S ;
- \vec{v}_B^t è la velocità di trascinamento, cioè quella del punto D pensato solidale a S , rispetto Σ .



Con un'altra simbologia comunemente in uso la **2.1** si può scrivere anche

$$2.2) \quad \vec{v}_{B3} = \vec{v}_{B3,4} + \vec{v}_{B4}$$

Volendo costruire i diagrammi polari per l'equazione **2.2** abbiamo la tabella

\vec{v}_{B3}	= $\vec{v}_{B3,4}$	+ \vec{v}_{B4}	
$\omega_2 \vec{BA} $?	$\omega_4 \vec{BC} $ (?)	modulo
$\perp \vec{AB}$	$\parallel \vec{BC}$	$\perp \vec{BC}$	versore

Ricavo l'intensità della velocità nota:

$$2.3) \quad |\vec{v}_{B3}| = \omega_2 |\vec{BA}| = 3.14 \frac{rad}{s} 0.25m = 0.78 \frac{m}{s}$$

adottando la scala di rappresentazione $\sigma_v = 0.1 \frac{m}{s \cdot cm}$ abbiamo il diagramma polare in figura, da cui si ricava

$$|\vec{v}_{B4}| = 6.5cm \Rightarrow |\vec{v}_{B4}| = |\vec{v}_{B4}| \sigma_v = 6.5cm 0.1 \frac{m}{s \cdot cm} = 0.65 \frac{m}{s}$$

il che ci permette di concludere con la velocità angolare del glifo:

$$2.4) \quad \omega_4 (0.25s) = \frac{|\vec{v}_{B4}|}{|\vec{BC}|} = \frac{0.65 \frac{m}{s}}{9cm 0.1 \frac{m}{cm}} = 0.72 \frac{rad}{s}$$

3. Cinematica del secondo ordine del punto B. Con i sistemi di riferimento fisso e mobile già indicati il teorema dei moti relativi per le accelerazioni si scrive

$$3.1) \quad \bar{a}_B^a = \bar{a}_B^r + \bar{a}_B^t + \bar{a}_B^c$$

dove

- \bar{a}_B^a è l'accelerazione assoluta, cioè quella del moto rispetto a Σ ;
- \bar{a}_B^r è l'accelerazione relativa, cioè quella del moto rispetto S ;
- \bar{a}_B^t è l'accelerazione di trascinamento, i.e. quella del punto D pensato solidale a S , rispetto Σ ;
- \bar{a}_B^c è l'accelerazione di Coriolis.

Con altra notazione si può scrivere anche

$$3.2) \quad \bar{a}_{B3} = \bar{a}_{B3,4} + \bar{a}_{B4} + \bar{a}_B^c$$

e considerando le componenti tangenziale e normale delle accelerazioni si ha

$$3.3) \quad \bar{a}_{B3}^t + \bar{a}_{B3}^n = \bar{a}_{B3,4}^t + \bar{a}_{B3,4}^n + \bar{a}_{B4}^t + \bar{a}_{B4}^n + \bar{a}_B^c$$

Per l'accelerazione di Coriolis si ha

$$3.4) \quad \bar{a}_B^c = 2\bar{\omega}_4 \times \bar{v}_{B3,4}$$

e in modulo (utilizzando il diagramma polare del primo ordine per leggere $\bar{v}_{B3,4}$) si ha

$$3.5) \quad |\bar{a}_B^c| = 2|\bar{\omega}_4| |\bar{v}_{B3,4}| = 2 \cdot 0.72 \frac{rad}{s} \cdot 4.4cm \cdot 0.1 \frac{m}{s} \frac{1}{cm} = 0.63 \frac{m}{s^2}$$

Costruisco ora il quadro riassuntivo delle accelerazioni **3.3** inserendo tutti gli elementi noti, in modo da ricavare le incognite per via grafica:

\bar{a}_{B3}^t	$+\bar{a}_{B3}^n$	$= \bar{a}_{B3,4}^t$	$+\bar{a}_{B3,4}^n$	$+\bar{a}_{B4}^t$	$+\bar{a}_{B4}^n$	$+\bar{a}_B^c$	
0	$\omega_2^2 \overrightarrow{BA} $?	0	$\alpha_4 \overrightarrow{BC} (?)$	$\omega_4^2 \overrightarrow{BC} $	$0.63 \frac{m}{s^2}$	modulo
	$\frac{\overrightarrow{BA}}{ \overrightarrow{BA} }$	$\frac{\overrightarrow{BC}}{ \overrightarrow{BC} }$		$\perp \overrightarrow{BC}$	$\frac{\overrightarrow{BC}}{ \overrightarrow{BC} }$	$\perp \overrightarrow{BC}$	versore

Abbiamo una equazione vettoriale con due incognite scalari, dunque risolvibile. Per tracciare il diagramma polare è necessario calcolare tutti i moduli noti. Misurando i segmenti direttamente sul disegno e usando la scala delle lunghezze ho

$$3.6) \quad \begin{cases} |\bar{a}_{B3}^n| = \left(3.14 \frac{rad}{s}\right)^2 0.25m = 2.46 \frac{m}{s^2} \\ |\bar{a}_{B4}^n| = \left(0.72 \frac{rad}{s}\right)^2 9cm \cdot 0.1m \frac{1}{cm} = 0.46 \frac{m}{s^2} \end{cases}$$

Volendo avere, sul disegno, un'accelerazione \bar{a}_{B4}^n di 2.3 cm ricavo la scala delle accelerazioni:

$$3.7) \quad \sigma_a = 0.2 \frac{m}{s^2 cm}$$

e dunque i vettori rappresentativi delle accelerazioni hanno le lunghezze seguenti

$$3.8) \quad \begin{cases} |\vec{\mu}_{B3}^n| = 12.3 cm \\ |\vec{\mu}_{B4}^n| = 2.3 cm \end{cases}$$

Leggendo $\vec{\mu}_{B4}^t$ sul diagramma polare si trova

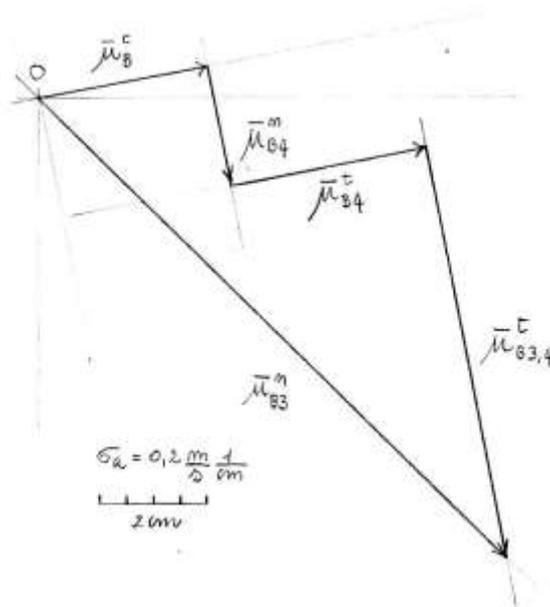
$$3.9) \quad |\vec{\mu}_{B4}^t| = 3.7 cm \Rightarrow |\vec{a}_{B4}^t| = 3.7 cm \cdot 0.2 \frac{m}{s^2 cm} = 0.74 \frac{m}{s^2}$$

Per l'accelerazione angolare del glifo si ha pertanto

$$|\vec{a}_{B4}^t| = 0.74 \frac{m}{s^2} \Leftrightarrow \alpha_4 |\overline{BC}| = 0.74 \frac{m}{s^2} \Leftrightarrow \alpha_4 0.9 m = 0.74 \frac{m}{s^2}$$

Cioè

$$3.10) \quad \alpha_4(0.25s) = 0.82 \frac{rad}{s^2}$$



In base al verso di $\vec{\mu}_{B4}^t$ ottenuto si deduce inoltre che l'accelerazione angolare è oraria.

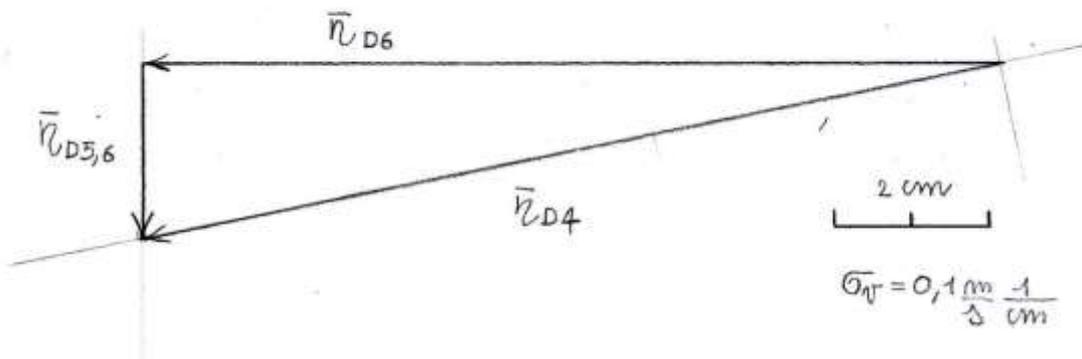
4. Cinematica del primo ordine della slitta. Ricorro al teorema dei moti relativi assumendo però questa volta come sistema di riferimento mobile il sistema S' solidale al corpo 6. Per la velocità del punto D si ha allora

$$4.1) \quad \vec{v}_D^g = \vec{v}_D^r + \vec{v}_D^t$$

dove

- \vec{v}_D^g è la velocità assoluta, cioè quella del moto rispetto a Σ ;
- \vec{v}_D^r è la velocità relativa, cioè quella del moto rispetto a S' ;

- \bar{v}_D^t è la velocità di trascinamento, cioè quella del punto D pensato solidale a S' , rispetto Σ .



Con un'altra simbologia comunemente in uso la **2.1** si può scrivere anche

$$4.2) \quad \bar{v}_{D5} = \bar{v}_{D5,6} + \bar{v}_{D6}$$

D'altra parte

$$4.3) \quad \bar{v}_{D5} = \bar{v}_{D5,4} + \bar{v}_{D4} \Leftrightarrow \bar{v}_{D5} = \bar{v}_{D4}$$

Dunque la **2.2** si scrive

$$4.4) \quad \bar{v}_{D4} = \bar{v}_{D5,6} + \bar{v}_{D6}$$

e possiamo costruire la tabella

\bar{v}_{D4}	$= \bar{v}_{D5,6}$	$+ \bar{v}_{D6}$	
$\omega_4 \overrightarrow{DC} $?	?	modulo
$\perp \overrightarrow{DC}$	<i>vertic.</i>	<i>oriz.</i>	versore

Ricavo l'intensità della velocità nota:

$$4.5) \quad |\bar{v}_{D4}| = \omega_4 |\overrightarrow{DC}| = 0.72 \frac{rad}{s} 1.6m = 1.15 \frac{m}{s}$$

adottando la scala di rappresentazione $\sigma_v = 0.1 \frac{m}{s} \frac{1}{cm}$ abbiamo il diagramma polare in figura, da cui si ricava

$$|\bar{v}_{D6}| = 11.2cm \Rightarrow |\bar{v}_{D6}| = |\bar{v}_{D6}| \sigma_v = 11.2cm 0.1 \frac{m}{s} \frac{1}{cm}$$

e dunque la velocità della slitta è

$$4.6) \quad |\bar{v}_{D6}| = 1.12 \frac{m}{s}$$

che è appunto la velocità della slitta 6.

5. Cinematica del secondo ordine della slitta. Ricorro ancora al teorema dei moti relativi assumendo come sistema di riferimento mobile il sistema S' solidale al corpo 6. Per l'accelerazione del punto D si ha

$$5.1) \quad \bar{a}_D^a = \bar{a}_D^r + \bar{a}_D^t + \bar{a}_D^c$$

dove

- \bar{a}_D^a è l'accelerazione assoluta, cioè quella del moto rispetto a Σ ;
- \bar{a}_D^r è l'accelerazione relativa, cioè quella del moto rispetto S' ;
- \bar{a}_D^t è l'accelerazione di trascinamento, i.e. del punto D pensato solidale a S' , rispetto Σ ;
- \bar{a}_D^c è l'accelerazione di Coriolis.

Con altra notazione si può scrivere anche

$$5.2) \quad \bar{a}_{D5} = \bar{a}_{D5,6} + \bar{a}_{D6} + \bar{a}_D^c$$

e considerando le componenti tangenziale e normale delle accelerazioni si ha

$$5.3) \quad \bar{a}_{D5}^t + \bar{a}_{D5}^n = \bar{a}_{D5,6}^t + \bar{a}_{D5,6}^n + \bar{a}_{D6}^t + \bar{a}_{D6}^n + \bar{a}_D^c$$

Per l'accelerazione di Coriolis si ha

$$5.4) \quad \bar{a}_D^c = 2\bar{\omega}_6 \times \bar{v}_{D5,6} = 2\bar{0} \times \bar{v}_{D5,6} = 0$$

Costruisco ora il quadro riassuntivo delle accelerazioni **3.3** inserendo tutti gli elementi noti, in modo da ricavare le incognite per via grafica:

\bar{a}_{D5}^t	$+\bar{a}_{D5}^n$	$= \bar{a}_{D5,6}^t$	$+\bar{a}_{D5,6}^n$	$+\bar{a}_{D6}^t$	$+\bar{a}_{D6}^n$	$+\bar{a}_D^c$	
$\alpha_4 \overrightarrow{DC} $	$\omega_4^2 \overrightarrow{DC} $?	0	?	0	0	modulo
$\perp \overrightarrow{DC}$	$\frac{\overrightarrow{DC}}{ \overrightarrow{DC} }$	<i>vertic.</i>		<i>orizz.</i>			versore

Abbiamo una equazione vettoriale con due incognite scalari, dunque risolvibile. Per tracciare il diagramma polare è necessario calcolare tutti i moduli noti. Misurando i segmenti direttamente sul disegno e usando la scala delle lunghezze ho

$$5.6) \quad \begin{cases} |\bar{a}_{D5}^t| = 0.82 \frac{rad}{s^2} 16cm 0.1m \frac{1}{cm} = 1.31 \frac{m}{s^2} \\ |\bar{a}_{D5}^n| = \left(0.72 \frac{rad}{s}\right)^2 16cm 0.1m \frac{1}{cm} = 0.82 \frac{m}{s^2} \end{cases}$$

Volendo avere, sul disegno, un'accelerazione \bar{a}_{D5}^n di 8.2 cm ricavo la scala delle accelerazioni:

$$5.7) \quad \sigma_a = 0.1 \frac{m}{s^2} \frac{1}{cm}$$

e dunque i vettori rappresentativi delle accelerazioni hanno le lunghezze seguenti

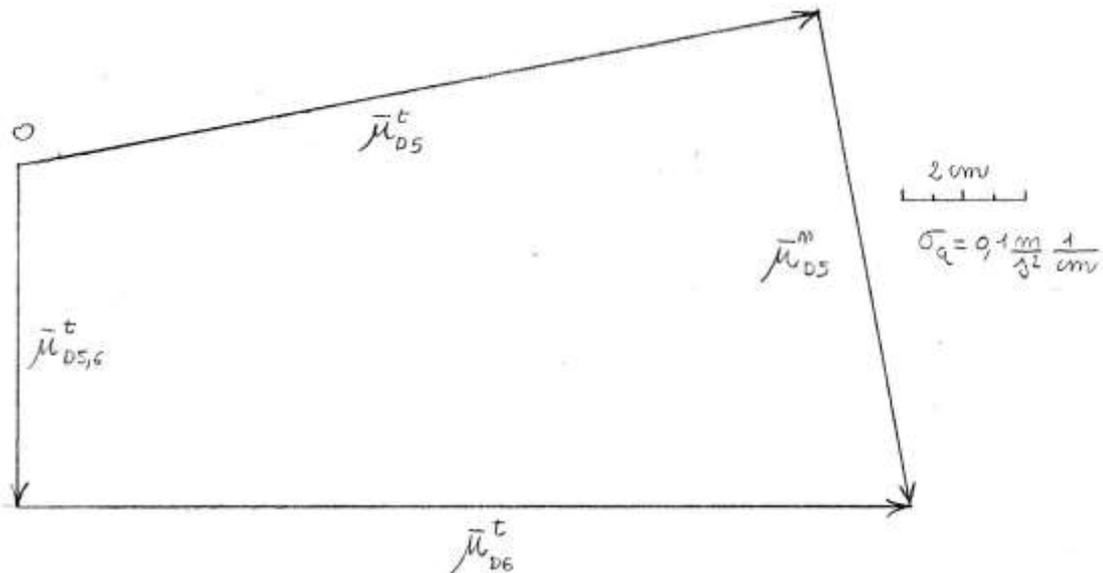
$$5.8) \quad \begin{cases} |\bar{\mu}_{D5}^t| = 1.31 \frac{m}{s^2} \frac{1}{\sigma_a} = 13.1 cm \\ |\bar{\mu}_{D5}^n| = 0.82 \frac{m}{s^2} \frac{1}{\sigma_a} = 8.2 \frac{m}{s^2} \end{cases}$$

Leggendo $\bar{\mu}_{D6}^t$ sul diagramma polare si trova

$$|\bar{\mu}_{D6}^t| = 11.4 cm \Rightarrow |\bar{a}_{D6}^t| = 11.4 cm \cdot 0.1 \frac{m}{s^2} \frac{1}{cm}$$

Dunque ho trovato

$$5.10) \quad |\bar{a}_{D6}| = |\bar{a}_{D6}^t| = 14.4 cm \cdot 0.1 \frac{m}{s^2} \frac{1}{cm} = 1.44 \frac{m}{s^2}$$

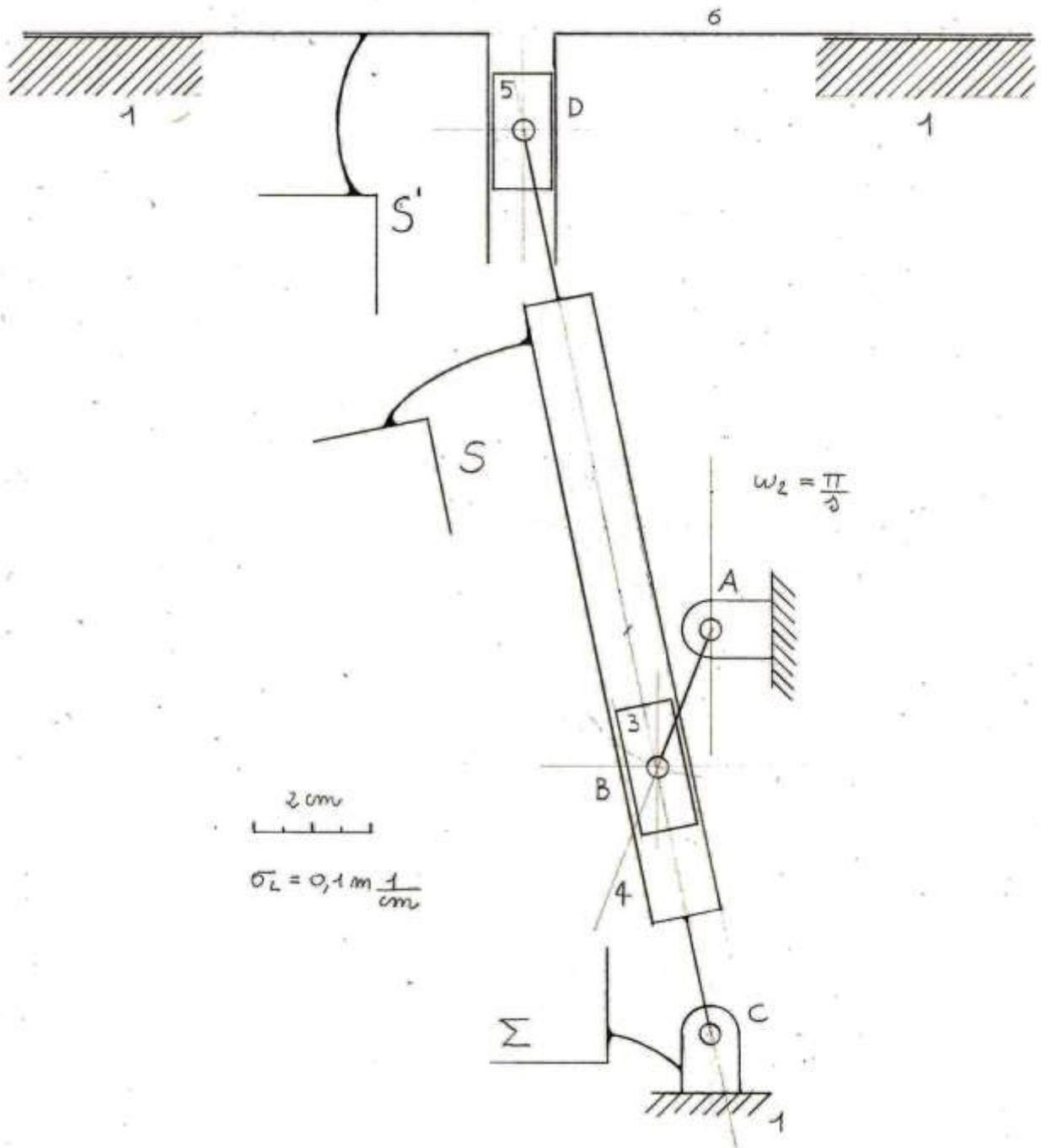


6. Conclusioni. Al termine dell'analisi cinematica per l'istante $t = 0.25s$ si evidenziano le seguenti constatazioni:

- la rotazione del glifo è antioraria di velocità angolare $\omega_4(0.25s) = 0.72 \frac{rad}{s}$;
- la rotazione del glifo è decelerata di accelerazione angolare $\alpha_4(0.25s) = 0.82 \frac{rad}{s^2}$;
- la slitta trasla verso sinistra con moto decelerato, di accelerazione $|\bar{a}_{D6}(0.25s)| = 1.44 \frac{m}{s^2}$.

Cinematica di una guida Fairbairn

1. Il quesito. Riconsiderato il meccanismo della parte seconda di questa esercitazione, si chiede di ripetere la medesima analisi cinematica per l'altra configurazione della manovella compatibile con la medesima configurazione del glifo.



Calcolando l'angolo di cui ha ruotato la manovella è possibile calcolare (anche se questo dato non è necessario per l'analisi che segue) l'istante in cui la manovella perviene alla seconda configurazione indicata in figura, essendo nota ω_2 . Si ha

$$\omega_2 = \frac{160^\circ}{t} \Leftrightarrow t = \frac{160^\circ}{\omega_2} = \frac{160^\circ}{180^\circ} s = 0,88s$$

2. Cinematica del primo ordine del punto B. Si procede esattamente come nella parte seconda. La tabella delle velocità si scrive

\bar{v}_{B3}	$= \bar{v}_{B3,4}$	$+ \bar{v}_{B^4}$	
$\omega_2 \overrightarrow{BA} $?	$\omega_4 \overrightarrow{BC} (?)$	modulo
$\perp \overrightarrow{AB}$	$\parallel \overrightarrow{BC}$	$\perp \overrightarrow{BC}$	versore

Ricavo l'intensità della velocità nota:

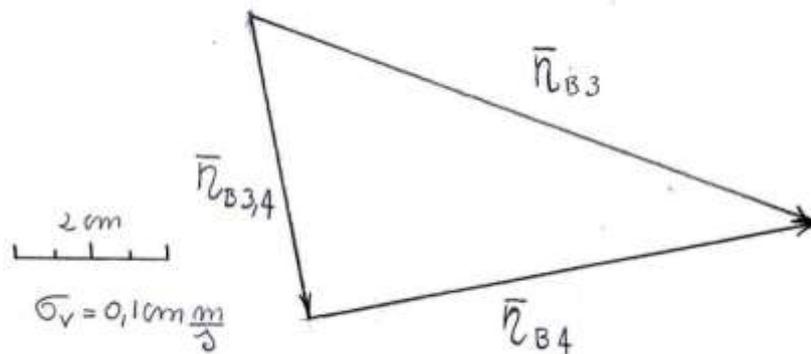
$$2.1) \quad |\bar{v}_{B3}| = \omega_2 |\overrightarrow{BA}| = 3.14 \frac{\text{rad}}{\text{s}} 0.25\text{m} = 0.78 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

adottando la scala di rappresentazione $\sigma_v = 0.1 \frac{\text{m}}{\text{s cm}}$ abbiamo il diagramma polare in figura, da cui si ricava

$$|\bar{\eta}_{B4}| = 6.8\text{cm} \Rightarrow |\bar{v}_{B4}| = |\bar{\eta}_{B4}| \sigma_v = 6.8\text{cm} 0.1 \frac{\text{m}}{\text{s cm}} = 0.68 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

il che ci permette di concludere con la velocità angolare del glifo all'istante considerato:

$$2.2) \quad \omega_4(0.88\text{s}) = \frac{|\bar{v}_{B4}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{0.68 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4.7\text{cm} 0.1 \frac{\text{m}}{\text{cm}}} = 1.44 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



3. Cinematica del secondo ordine del punto B. Vale tutto quanto detto nel paragrafo 3 della parte seconda. Costruisco il quadro riassuntivo delle accelerazioni inserendo tutti gli elementi noti, in modo da ricavare le incognite per via grafica:

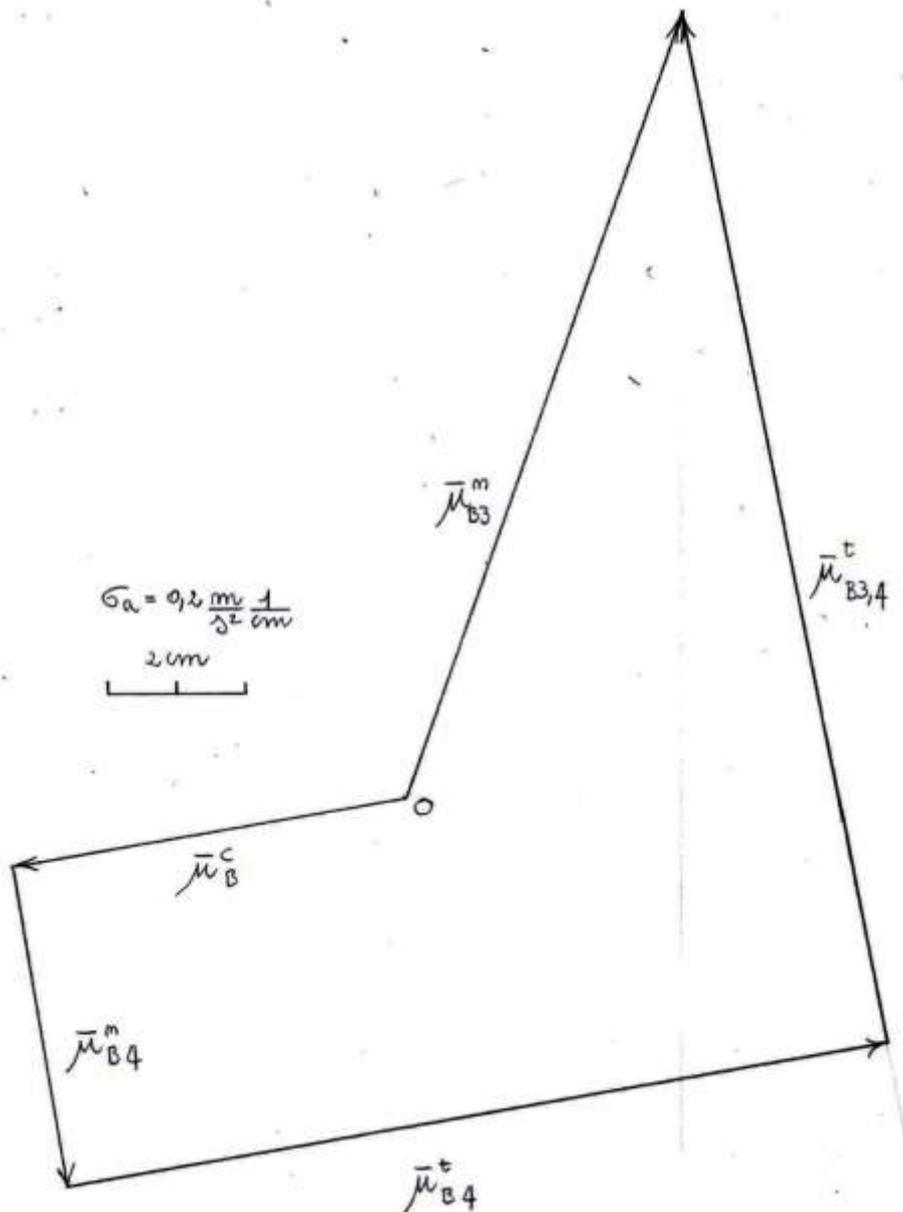
\bar{a}_{B3}^t	$+ \bar{a}_{B3}^n$	$= \bar{a}_{B3,4}^t$	$+ \bar{a}_{B3,4}^n$	$+ \bar{a}_{B4}^t$	$+ \bar{a}_{B4}^n$	$+ \bar{a}_B^c$	
0	$\omega_2^2 \overrightarrow{BA} $?	0	$\alpha_4 \overrightarrow{BC} (?)$	$\omega_4^2 \overrightarrow{BC} $	$1.18 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	modulo
	$\frac{\overrightarrow{BA}}{ \overrightarrow{BA} }$	$\frac{\overrightarrow{BC}}{ \overrightarrow{BC} }$		$\perp \overrightarrow{BC}$	$\frac{\overrightarrow{BC}}{ \overrightarrow{BC} }$	$\perp \overrightarrow{BC}$	versore

Per l'accelerazione di Coriolis si è considerato che

$$3.1) \quad \bar{a}_B^c = 2\bar{\omega}_4 \times \bar{v}_{B3,4}$$

e in modulo (utilizzando il diagramma polare del primo ordine per leggere $\bar{v}_{B3,4}$) si ha

$$3.2) \quad |\bar{a}_B^c| = 2|\bar{\omega}_4| |\bar{v}_{B3,4}| = 2 \cdot 1.44 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 4.1 \text{cm} \cdot 0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \frac{1}{\text{cm}} = 1.18 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



Abbiamo una equazione vettoriale con due incognite scalari, dunque risolvibile. Per tracciare il diagramma polare è necessario calcolare tutti i moduli noti. Misurando i segmenti direttamente sul disegno e usando la scala delle lunghezze ho

$$3.3) \quad \begin{cases} |\bar{a}_{B3}^n| = \left(3.14 \frac{rad}{s}\right)^2 0.25m = 2.46 \frac{m}{s^2} \\ |\bar{a}_{B4}^n| = \left(1.44 \frac{rad}{s}\right)^2 4.7cm \cdot 0.1m \frac{1}{cm} = 0.97 \frac{m}{s^2} \end{cases}$$

Volendo avere, sul disegno, un'accelerazione \bar{a}_{B3}^n di 12.3 cm ricavo la scala delle accelerazioni:

$$3.4) \quad \sigma_a = 0.2 \frac{m}{s^2} \frac{1}{cm}$$

e dunque i vettori rappresentativi delle accelerazioni hanno le lunghezze seguenti

$$3.5) \quad \begin{cases} |\bar{\mu}_{B3}^n| = 12.3cm \\ |\bar{\mu}_{B4}^n| = 4.85cm \end{cases}$$

Leggendo $\bar{\mu}_{B4}^t$ sul diagramma polare si trova

$$3.6) \quad |\bar{\mu}_{B4}^t| = 15.6cm \Rightarrow |\bar{a}_{B'4}^t| = 15.6cm \cdot 0.2 \frac{m}{s^2} \frac{1}{cm} = 3.12 \frac{m}{s^2}$$

Per l'accelerazione angolare del glifo si ha pertanto

$$|\bar{a}_{B4}^t| = 3.12 \frac{m}{s^2} \Leftrightarrow \alpha_4 |\overrightarrow{BC}| = 3.12 \frac{m}{s^2} \Leftrightarrow \alpha_4 4.7m = 3.12 \frac{m}{s^2}$$

Cioè

$$3.7) \quad \alpha_4 (0.88s) = 0.66 \frac{rad}{s^2}$$

Inoltre dal verso di $\bar{\mu}_{B4}^t$ si deduce che l'accelerazione angolare è oraria.

4. Cinematica del primo ordine della slitta. Si procede come nel paragrafo 4 della parte seconda. Possiamo costruire la tabella

\bar{v}_{D4}	$= \bar{v}_{D5,6}$	$+ \bar{v}_{D6}$	
$\omega_4 \overrightarrow{DC} $?	?	modulo
$\perp \overrightarrow{DC}$	<i>vertic.</i>	<i>oriz.</i>	versore

Ricavo l'intensità della velocità nota:

$$4.5) \quad |\bar{v}_{D4}| = \omega_4 |\overrightarrow{DC}| = 1.44 \frac{rad}{s} 1.6m = 2.3 \frac{m}{s}$$

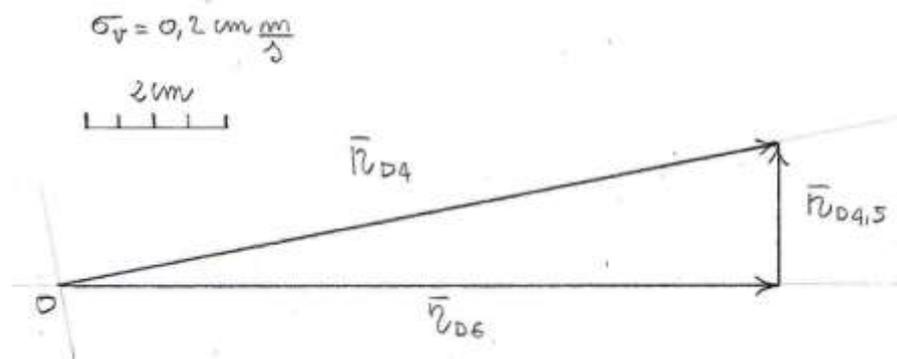
Adottando la scala di rappresentazione $\sigma_v = 0.2 \frac{m}{s} \frac{1}{cm}$ abbiamo il diagramma polare in figura, da cui si ricava

$$|\bar{\eta}_{D6}| = 10.4cm \Rightarrow |\bar{v}_{D6}| = |\bar{\eta}_{D6}| \sigma_v = 10.4cm \cdot 0.2 \frac{m}{s} \frac{1}{cm}$$

e dunque la velocità della slitta è

$$4.6) \quad |\vec{v}_{D6}| = 2.08 \frac{m}{s}$$

che è appunto la velocità della slitta 6.



5. Cinematica del secondo ordine della slitta. Si ripete l'analisi fatta nell'omonimo paragrafo della parte seconda. Costruisco il quadro riassuntivo delle accelerazioni **3.3** inserendo tutti gli elementi noti, in modo da ricavare le incognite per via grafica:

\vec{a}_{D5}^t	$+\vec{a}_{D5}^n$	$= \vec{a}_{D5,6}^t$	$+\vec{a}_{D5,6}^n$	$+\vec{a}_{D6}^t$	$+\vec{a}_{D6}^n$	$+\vec{a}_D^c$	
$\alpha_4 \vec{DC} $	$\omega_4^2 \vec{DC} $?	0	?	0	0	modulo
$\perp \vec{DC}$	$\frac{\vec{DC}}{ \vec{DC} }$	vertic.		orizz.			versore

Abbiamo una equazione vettoriale con due incognite scalari, dunque risolvibile. Per tracciare il diagramma polare è necessario calcolare tutti i moduli noti. Misurando i segmenti direttamente sul disegno e usando la scala delle lunghezze ho

$$5.6) \quad \begin{cases} |\vec{a}_{D5}^t| = 0.66 \frac{rad}{s^2} 16cm 0.1m \frac{1}{cm} = 1.05 \frac{m}{s^2} \\ |\vec{a}_{D5}^n| = \left(1.44 \frac{rad}{s}\right)^2 16cm 0.1m \frac{1}{cm} = 3.31 \frac{m}{s^2} \end{cases}$$

Volendo avere, sul disegno, un'accelerazione \vec{a}_{D5}^n di 13.24 cm ricavo la scala delle accelerazioni:

$$5.7) \quad \sigma_a = 0.25 \frac{m}{s^2 cm}$$

e dunque i vettori rappresentativi delle accelerazioni hanno le lunghezze seguenti

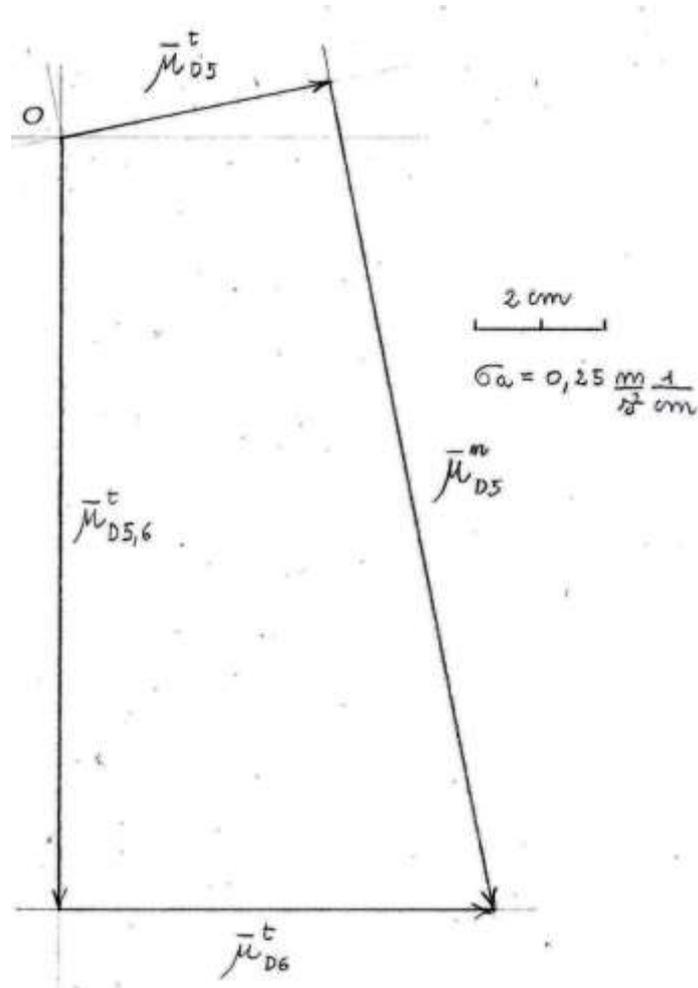
$$5.8) \quad \begin{cases} |\vec{\mu}_{D5}^t| = 4.2cm \\ |\vec{\mu}_{D5}^n| = 13.24cm \end{cases}$$

Leggendo $\vec{\mu}_{D6}^t$ sul diagramma polare si trova

$$|\vec{\mu}_{D6}^t| = 6.7cm \Rightarrow |\vec{a}_{D6}^t| = 6.7cm 0.25 \frac{m}{s^2 cm}$$

Dunque ho trovato

$$5.10) \quad |\bar{a}_{D6}| = |\bar{a}_{D6}^t| = 1.67 \frac{m}{s^2}$$



6. Conclusioni. Al termine dell'analisi cinematica per l'istante $t = 0.88s$ si evidenziano le seguenti constatazioni:

- la rotazione del glifo è oraria di velocità angolare $\omega_4(0.88s) = 1.44 \frac{rad}{s}$;
- la rotazione del glifo è accelerata di accelerazione angolare $\alpha_4(0.88s) = 0.66 \frac{rad}{s^2}$;
- la slitta trasla verso destra con moto accelerato, di accelerazione $|\bar{a}_{D6}(0.88s)| = 1.67 \frac{m}{s^2}$.

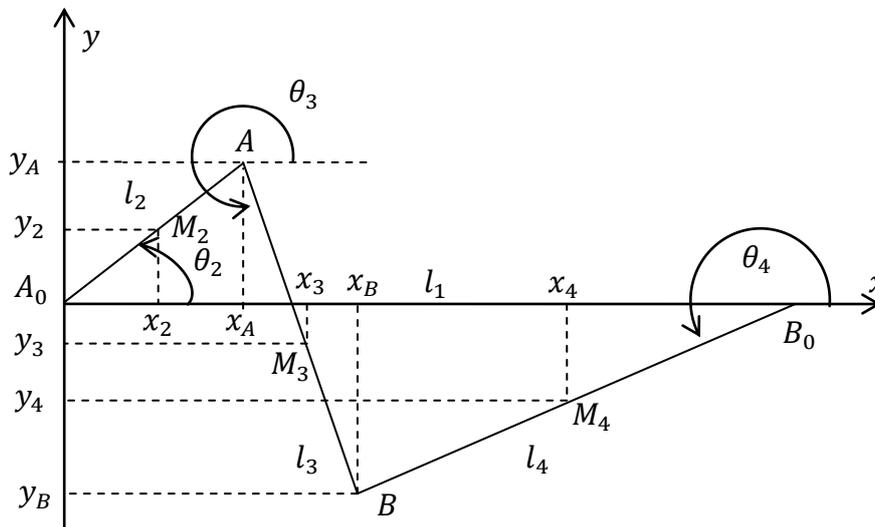
Cinematica di un quadrilatero articolato

1. Il quesito. E' assegnato il quadrilatero articolato le cui aste sono definite dalle seguenti misure

$$1.1) \quad \begin{cases} l_2 = 0.2m \\ l_3 = 0.5m \\ l_4 = 0.7m \\ l_1 = 0.8m \end{cases}$$

Sia inoltre assegnata la rotazione della manovella, la sua velocità angolare e la sua accelerazione angolare, secondo quanto segue

$$1.2) \quad \begin{cases} \theta_2 = 20^\circ \\ \dot{\theta}_2(t) = 400 \frac{2\pi}{60} = \frac{40\pi}{3} \sim 41.88 \frac{rad}{s} \\ \ddot{\theta}_2(t) = 0 \end{cases}$$



Si richiede di effettuare l'analisi cinematica del meccanismo attraverso il metodo delle equazioni di vincolo, e in particolare di ricavare

- 1.3) velocità angolare e accelerazione angolare delle aste 3,4;
- 1.4) velocità e accelerazione dei punti di mezzeria M_3, M_4 .

2. Considerazioni generali. In questo paragrafo richiamo la teoria sull'analisi cinematica dei meccanismi attraverso l'uso delle equazioni di vincolo. Dato un meccanismo caratterizzato dai seguenti parametri

$$2.1) \quad \begin{cases} n & \text{numero delle coordinate lagrangiane sovrabbondanti} \\ p & \text{numero delle equazioni di vincolo indipendenti} \\ F & \text{gradi di libertà residui} \end{cases}$$

siano

$$2.2) \quad \{q\} = \{q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n\}^T$$

le n **coordinate lagrangiane sovrabbondanti**, e siano

$$2.3) \quad \begin{cases} \Psi_1(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \\ \Psi_2(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \\ \dots \\ \Psi_p(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{\Psi(q)\} = \{0\}$$

le p **equazioni di vincolo**. E' opportuno ricondursi a equazioni di vincolo che siano **indipendenti** fra loro, ovvero tali che ognuna di esse imponga una condizione diversa alle n coordinate lagrangiane; la condizione di indipendenza fra le equazioni di vincolo coincide con la condizione di rango massimo per la matrice

$$2.4) \quad [\Psi_q(q)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \Psi_1}{\partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Psi_p}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \Psi_p}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

Infatti la riga i -ma della matrice **2.4** è costituita dalle componenti di un vettore normale alla superficie $\Psi_i(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$ dello spazio n -dimensionale, nel punto (q_1, q_2, \dots, q_n) ; dunque imporre il rango massimo alla matrice **2.4** coincide con la condizione che le p superfici **2.3** abbiano tutte diverso piano tangente nel punto (q_1, q_2, \dots, q_n) .

Ciò posto si può stabilire per i parametri in **2.1** la seguente relazione

$$2.5) \quad F = n - p$$

Infatti il numero di gradi di libertà residui F (che possono essere calcolati ad esempio con la formula di Kutzbach) sono una proprietà del meccanismo, indipendente dalla scelta delle coordinate lagrangiane sovrabbondanti; se poi abbiamo p equazioni di vincolo indipendenti fra loro, allora posso esprimere (a meno di configurazioni critiche) p coordinate in funzione delle altre $n-p$, ovvero ottengo un meccanismo con $n-p$ gradi di libertà; ma dovendo essere F il numero di gradi di libertà, si trova la **2.5**.

Si effettua allora una **partizione delle coordinate** lagrangiane sovrabbondanti, evidenziando F coordinate che si assumono come indipendenti -che indichiamo $\{v\}$ - mentre le restanti $n - F = p$ coordinate sono indicate $\{u\}$. Si ottiene così il vettore

$$2.6) \quad \{q\} = \{u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_p | v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_F\}^T$$

Ebbene il **teorema di Ulisse Dini** (o delle funzioni implicite) permette di affermare che il sistema **2.3** può essere esplicitato rispetto alle coordinate $\{u\}$ nel punto $\{q\}$, qualora risulti non nullo il determinante della matrice quadrata

$$2.7) \quad [\Psi_u(q)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \Psi_1}{\partial u_p} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Psi_p}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \Psi_p}{\partial u_p} \end{bmatrix}$$

nel punto $\{q\}$ stesso. Nella pratica poi, ottenuta la garanzia da parte del teorema di Dini della possibilità di esplicitare le **2.3** rispetto le $\{u\}$, si deve spesso ricorrere a **metodi numerici** per pervenire al risultato, essendo le equazioni **2.3** potenzialmente equazioni trascendenti. Uno di questi metodi è quello di Newton-Raphson la cui i -ma iterata si scrive

$$2.8) \quad \{u^{(i+1)}\} = \{u^{(i)}\} - [\Psi_u(u^{(i)})]^{-1} \{\Psi_u(u^{(i)})\}$$

Per l'**analisi cinematica del primo ordine** si derivano nel tempo le equazioni di vincolo **2.3** ottenendo

$$2.9) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Psi_1}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \Psi_1}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \Psi_1}{\partial q_n} \dot{q}_n = 0 \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \Psi_2}{\partial q_n} \dot{q}_n = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial \Psi_p}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \Psi_p}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \Psi_p}{\partial q_n} \dot{q}_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow [\Psi_q(q)]\{\dot{q}\} = \{0\}$$

Utilizzando la partizione delle coordinate abbiamo anche

$$2.10) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Psi_1}{\partial u_1} \dot{u}_1 + \frac{\partial \Psi_1}{\partial u_2} \dot{u}_2 + \dots + \frac{\partial \Psi_1}{\partial u_p} \dot{u}_p \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial u_1} \dot{u}_1 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial u_2} \dot{u}_2 + \dots + \frac{\partial \Psi_2}{\partial u_p} \dot{u}_p \\ \dots \\ \frac{\partial \Psi_p}{\partial u_1} \dot{u}_1 + \frac{\partial \Psi_p}{\partial u_2} \dot{u}_2 + \dots + \frac{\partial \Psi_p}{\partial u_p} \dot{u}_p \end{cases} + \begin{cases} \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_1} \dot{v}_1 + \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_2} \dot{v}_2 + \dots + \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_F} \dot{v}_F \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial v_1} \dot{v}_1 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial v_2} \dot{v}_2 + \dots + \frac{\partial \Psi_2}{\partial v_F} \dot{v}_F \\ \dots \\ \frac{\partial \Psi_p}{\partial v_1} \dot{v}_1 + \frac{\partial \Psi_p}{\partial v_2} \dot{v}_2 + \dots + \frac{\partial \Psi_p}{\partial v_F} \dot{v}_F \end{cases} = \{0\}$$

che in forma matriciale si scrive

$$2.11) \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \Psi_1}{\partial u_p} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \Psi_2}{\partial u_p} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial \Psi_p}{\partial u_1} & \frac{\partial \Psi_p}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \Psi_p}{\partial u_p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dots \\ \dot{u}_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_1} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_F} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial v_1} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial \Psi_2}{\partial v_F} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial \Psi_p}{\partial v_1} & \frac{\partial \Psi_p}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial \Psi_p}{\partial v_F} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dots \\ \dot{v}_F \end{Bmatrix} = \{0\}$$

Introdotta allora la matrice

$$2.12) \quad [\Psi_v(q)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_1} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_F} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial v_1} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial \Psi_2}{\partial v_F} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial \Psi_p}{\partial v_1} & \frac{\partial \Psi_p}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial \Psi_p}{\partial v_F} \end{bmatrix}$$

la **2.11** si scrive

$$2.13) \quad [\Psi_u]\{\dot{u}\} + [\Psi_v]\{\dot{v}\} = \{0\}$$

da cui si ricavano le derivate prime delle variabili dipendenti

$$2.14) \quad \{\dot{u}\} = -[\Psi_u]^{-1}[\Psi_v]\{\dot{v}\}$$

Per l'**analisi cinematica del secondo ordine** si procede derivando nel tempo la **2.13** ricordando che per la derivata del prodotto di matrici valgono le stesse regole note per il prodotto di funzioni (la dimostrazione è immediata); si ha

$$\frac{d[\Psi_u]}{dt}\{\dot{u}\} + [\Psi_u]\{\ddot{u}\} + \frac{d[\Psi_v]}{dt}\{\dot{v}\} + [\Psi_v]\{\ddot{v}\} = \{0\}$$

Esplicitando rispetto al vettore delle derivate seconde delle variabili dipendenti si conclude quindi

$$2.15) \quad \{\ddot{u}\} = -[\Psi_u]^{-1} \left(\frac{d[\Psi_u]}{dt}\{\dot{u}\} + \frac{d[\Psi_v]}{dt}\{\dot{v}\} + [\Psi_v]\{\ddot{v}\} \right)$$

3. Gradi di libertà residui del quadrilatero articolato. Prima di procedere con l'analisi cinematica del meccanismo in parola dimostro che i gradi di libertà residui sono pari a uno. A tale scopo si osserva che l'applicazione della **formula di Grübler** nel piano porge

$$3.1) \quad F = \lambda(l - 1) - 2j_1 - j_2 = 3(4 - 1) - 2 \cdot 4 = 9 - 8 = 1$$

dove si ricorda che λ è il numero di gradi di libertà del corpo non vincolato (6 nello spazio e 3 nel piano), l è il numero di membri, j_1 è il numero di coppie inferiori (da due gradi di vincolo ciascuna) e j_2 è quello di coppie superiori (da un grado di vincolo). Detto allora n il numero di coordinate sovrabbondanti, il numero di equazioni di vincolo indipendenti sarà necessariamente

$$3.2) \quad p = n - 1$$

4. Analisi cinematica del primo ordine con le coordinate assolute. Il vettore delle coordinate lagrangiane sovrabbondanti è

$$4.1) \quad \{q\}^T = \{x_2 \quad y_2 \quad \theta_3 \quad x_3 \quad y_3 \quad \theta_4 \quad x_4 \quad y_4 \quad \theta_2\}^T$$

il quale viene sottoposto alla partizione

$$4.2) \quad \{q\}^T = \{u|v\}^T = \{x_2 \quad y_2 \quad \theta_3 \quad x_3 \quad y_3 \quad \theta_4 \quad x_4 \quad y_4 | \theta_2\}^T$$

Essendo $n = 9$, la **3.2** predice che le equazioni di vincolo indipendenti sono $p = n - F = 8$. Le equazioni di vincolo, immediatamente deducibili dalla figura sono

$$4.3) \quad \{\Psi(q)\} = \{\Psi(u|v)\} = \left\{ \begin{array}{c} x_2 - \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \\ y_2 - \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \\ -x_2 - \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 + x_3 - \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \\ -y_2 - \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 + y_3 - \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \\ -\frac{l_3}{2} \cos \theta_3 - x_3 - \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 + x_4 \\ -\frac{l_3}{2} \sin \theta_3 - y_3 - \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 + y_4 \\ x_4 + \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 - l_1 \\ y_4 + \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 \end{array} \right\} = 0$$

Lo jacobiano relativo alle coordinate dipendenti si scrive

$$4.4) \quad [\Psi_u(u)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_4} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_4} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_4} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_4} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_4} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_4} \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial \Psi_8}{\partial x_2} & \frac{\partial \Psi_8}{\partial y_2} & \frac{\partial \Psi_8}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \Psi_8}{\partial x_3} & \frac{\partial \Psi_8}{\partial y_4} & \frac{\partial \Psi_8}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \Psi_8}{\partial x_4} & \frac{\partial \Psi_8}{\partial y_4} \end{bmatrix}$$

e a conti fatti si ha

$$4.5) \quad [\Psi_u(u)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{l_3}{2} \cos \theta_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 & -1 & 0 & \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l_3}{2} \cos \theta_3 & 0 & -1 & -\frac{l_4}{2} \cos \theta_4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_4}{2} \sin \theta_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per avere il vettore delle coordinate dipendenti in funzione della coordinata indipendente assegnata θ_2 si applica il metodo numerico **2.8** il quale nel caso presente si scrive

$$4.6) \quad \begin{pmatrix} x_2^{(i+1)} \\ y_2^{(i+1)} \\ \theta_3^{(i+1)} \\ x_3^{(i+1)} \\ y_3^{(i+1)} \\ \theta_4^{(i+1)} \\ x_4^{(i+1)} \\ y_4^{(i+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^{(i)} \\ y_2^{(i)} \\ \theta_3^{(i)} \\ x_3^{(i)} \\ y_3^{(i)} \\ \theta_4^{(i)} \\ x_4^{(i)} \\ y_4^{(i)} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{l_3}{2} \sin \theta_3^{(i)} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{l_3}{2} \cos \theta_3^{(i)} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_3}{2} \sin \theta_3^{(i)} & -1 & 0 & \frac{l_4}{2} \sin \theta_4^{(i)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l_3}{2} \cos \theta_3^{(i)} & 0 & -1 & -\frac{l_4}{2} \cos \theta_4^{(i)} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_4}{2} \sin \theta_4^{(i)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_4}{2} \cos \theta_4^{(i)} & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_2^{(i)} - \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \\ y_2^{(i)} - \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \\ -x_2^{(i)} - \frac{l_3}{2} \cos \theta_3^{(i)} + x_3^{(i)} - \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \\ -y_2^{(i)} - \frac{l_3}{2} \sin \theta_3^{(i)} + y_3^{(i)} - \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \\ -\frac{l_3}{2} \cos \theta_3^{(i)} - x_3 - \frac{l_4}{2} \cos \theta_4^{(i)} + x_4^{(i)} \\ -\frac{l_3}{2} \sin \theta_3^{(i)} - y_3^{(i)} - \frac{l_4}{2} \sin \theta_4^{(i)} + y_4^{(i)} \\ \frac{l_4}{2} \cos \theta_4^{(i)} + x_4^{(i)} - l_1 \\ y_4^{(i)} + \frac{l_4}{2} \sin \theta_4^{(i)} \end{pmatrix}$$

Per l'analisi cinematica del primo ordine, osservato che la matrice **2.12** si scrive nel presente caso

$$4.7) \quad [\Psi_v(v)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \Psi_3}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \Psi_4}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \Psi_5}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \Psi_6}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \Psi_7}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \Psi_8}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \\ -\frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \\ \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \\ -\frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

la espressione **2.14** porge

$$4.8) \quad \begin{Bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{y}_4 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{l_3}{2} \cos \theta_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 & -1 & 0 & \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l_3}{2} \cos \theta_3 & 0 & -1 & -\frac{l_4}{2} \cos \theta_4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_4}{2} \sin \theta_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \\ -\frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \\ \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \\ -\frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \{\dot{\theta}_2\}$$

5. Analisi cinematica del secondo ordine con le coordinate assolute. Per l'analisi cinematica del secondo ordine è necessario derivare i jacobiani **4.5**, **4.7** ottenendo le matrici

$$5.1) \quad \frac{d[\Psi_u]}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 & 0 & 0 & \frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4 \cos \theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 & 0 & 0 & \frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4 \cos \theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$5.2) \quad \frac{d[\Psi_v]}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo le **5.1**, **5.2** nella **2.15** abbiamo in fine

$$5.3) \quad \begin{Bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \\ \ddot{x}_4 \\ \ddot{y}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{l_3}{2} \cos \theta_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 & -1 & 0 & \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l_3}{2} \cos \theta_3 & 0 & -1 & -\frac{l_4}{2} \cos \theta_4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_4}{2} \sin \theta_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 & 0 & 0 & \frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4 \cos \theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 & 0 & 0 & \frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4 \cos \theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{y}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \\ -\frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \\ \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \\ -\frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix}$$

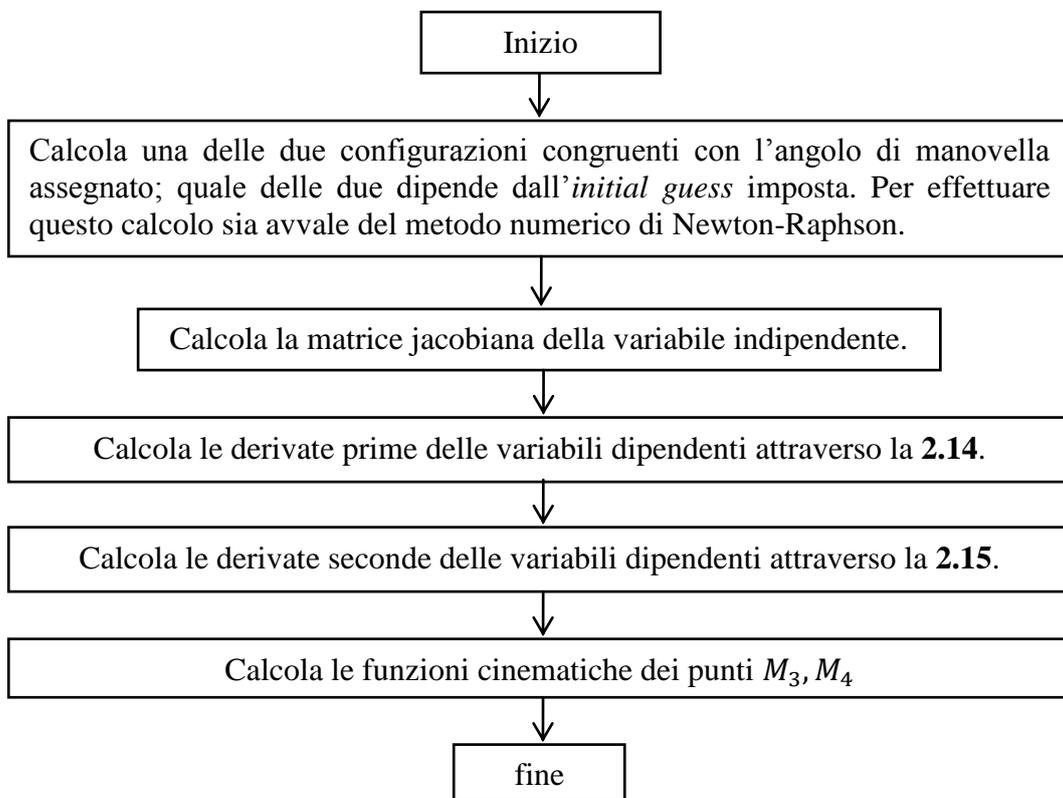
Si osserva che il quesito **1.3** trova risposta direttamente attraverso le **4.8**, **5.3** che forniscono in particolare $\dot{\theta}_3$, $\dot{\theta}_4$, $\ddot{\theta}_3$, $\ddot{\theta}_4$.

6. Algoritmo risolutivo. Per effettuare l'analisi cinematica nel caso delle coordinate assolute sono state scritte in Fortran le seguenti unità:

- l'unità chiamante *main_ese_13_a*, la quale si occupa del calcolo delle derivate prime e seconde delle variabili dipendenti;

- il modulo *mod_ese_13_a*, il quale contiene le costanti geometriche **1.1**, **1.2** del problema, oltre alle seguenti procedure di modulo:
 - subroutine *inverse* (scaricata dal sito della ODU University) la quale si occupa di invertire la matrice jacobiana **4.5**;
 - subroutine *parallelogramma* la quale permette di rappresentare nel piano A_0xy la configurazione del parallelogramma alla generica iterazione del metodo Newton-Raphson;
 - subroutine *diagramma_resto* la quale esegue il grafico della norma del vettore resto in funzione del numero di iterazione.

Il diagramma di flusso complessivo è indicato in figura, dove non si entra nel dettaglio della applicazione del metodo Newton-Raphson per il calcolo della configurazione congruente, essendo questa parte già stata discussa ampiamente in altra sede.



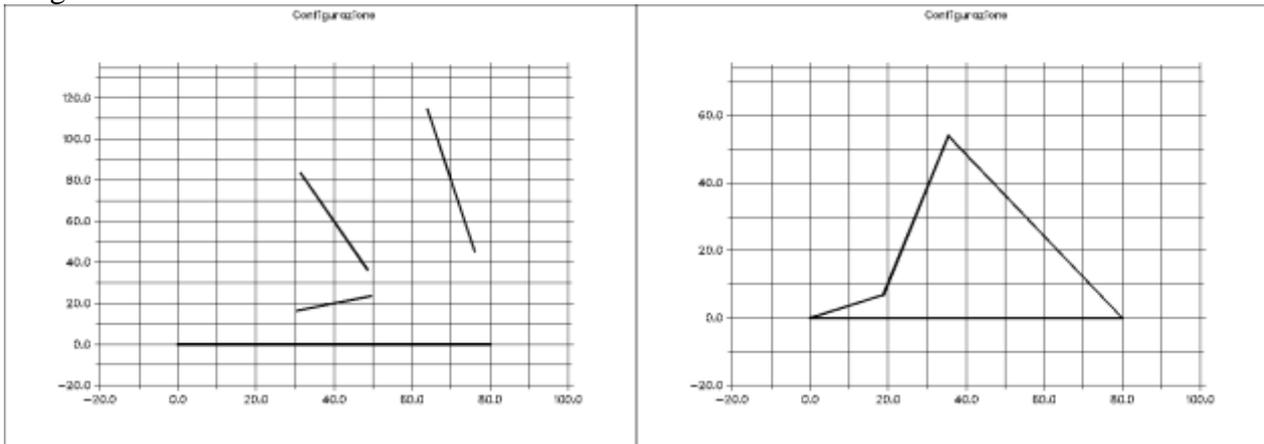
7. Esecuzione del programma per le coordinate assolute. Il programma utilizza come *initial guess* la seguente configurazione

$$7.1) \quad x_2 = 40 \quad y_2 = 20 \quad \theta_3 = 110^\circ \quad x_3 = 40 \quad y_3 = 60 \quad \theta_4 = -80^\circ \quad x_4 = 70 \quad y_4 = 80$$

e perviene alla configurazione congruente con l'angolo di manovella, data da

x_2	y_2	θ_3	x_3	y_3	θ_4	x_4	y_4
9.396926	3.4202013	70.55076	27.118143	30.413828	-50.46595	57.72122	26.993628

Riporto la rappresentazione della configurazione assegnata come *initial guess* e di quella congruente ottenuta:



Riporto direttamente dal Prompt l'output dell'esecuzione del programma che segue l'analisi cinematica attraverso le coordinate assolute.

La velocità angolare (rad/s) dell'asta 3 è -18.425283
 La velocità angolare (rad/s) dell'asta 4 è -10.783358
 L'accelerazione angolare (rad/s²) dell'asta 3 è -259.65527
 L'accelerazione angolare (rad/s²) dell'asta 4 è 584.71075
 La velocità del punto M3 ha modulo 650.86505
 Le sue componenti x,y sono 147.81686 633.8576
 La velocità del punto M4 ha modulo 377.41754
 Le sue componenti x,y sono 291.08194 240.24008
 L'accelerazione del punto M3 ha modulo 37044.555
 Le sue componenti x,y sono -29680.682 -22166.557
 L'accelerazione del punto M4 ha modulo 20865.635
 Le sue componenti x,y sono -13192.869 -16165.484

Dunque le risposte ai quesiti **1.3**, **1.4** sono rispettivamente

$$7.2) \begin{cases} \omega_3 = \dot{\theta}_3 = -18.425283 \frac{r}{s} \\ \alpha_3 = \ddot{\theta}_3 = -259.65527 \frac{r}{s^2} \\ \omega_4 = \dot{\theta}_4 = -10.783358 \frac{r}{s} \\ \alpha_4 = \ddot{\theta}_4 = 584.71075 \frac{r}{s} \end{cases}$$

$$7.3) \begin{cases} \left(\begin{cases} v_{M3x} = \dot{x}_3 = 1.4781686 \frac{m}{s} \\ v_{M3y} = \dot{y}_3 = 6.338576 \frac{m}{s} \end{cases} \right) \Rightarrow v_{M3} = 6.5086505 \frac{m}{s} \\ \left(\begin{cases} a_{M3x} = \ddot{x}_3 = -296.80682 \frac{m}{s^2} \\ a_{M3y} = \ddot{y}_3 = -221.66557 \frac{m}{s^2} \end{cases} \right) \Rightarrow a_{M3} = 370.44555 \frac{m}{s^2} \\ \left(\begin{cases} v_{M4x} = \dot{x}_4 = 2.9108194 \frac{m}{s} \\ v_{M4y} = \dot{y}_4 = 2.4024008 \frac{m}{s} \end{cases} \right) \Rightarrow v_{M4} = 3.7741754 \frac{m}{s} \\ \left(\begin{cases} a_{M4x} = \ddot{x}_4 = -131.92869 \frac{m}{s^2} \\ a_{M4y} = \ddot{y}_4 = -161.65484 \frac{m}{s^2} \end{cases} \right) \Rightarrow a_{M4} = 208.65635 \frac{m}{s^2} \end{cases}$$

8. Analisi cinematica del primo ordine con le coordinate naturali. Per coordinate naturali si intendono quelle delle cerniere A, B . In questo caso allora il vettore delle coordinate lagrangiane sovrabbondanti è dato da

$$8.1) \quad \{q\}^T = \{y_A \quad x_B \quad y_B \quad x_A\}^T$$

il quale viene sottoposto alla partizione

$$8.2) \quad \{q\}^T = \{u|v\}^T = \{y_A \quad x_B \quad y_B|x_A\}^T$$

Essendo $n = 4$, la **3.2** predice che le equazioni di vincolo indipendenti sono $p = n - F = 3$. Le equazioni di vincolo, immediatamente deducibili dalla figura sono

$$8.3) \quad \{\Psi(q)\} = \{\Psi(u|v)\} = \left\{ \begin{array}{l} x_A^2 + y_A^2 - l_2^2 \\ (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 - l_3^2 \\ y_B^2 + (l_1 - x_B)^2 - l_4^2 \end{array} \right\} = 0$$

Lo jacobiano relativo alle coordinate dipendenti si scrive

$$8.4) \quad [\Psi_u(u)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_A} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_B} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_B} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_A} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_B} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_B} \\ \frac{\partial \Psi_3}{\partial y_A} & \frac{\partial \Psi_3}{\partial x_B} & \frac{\partial \Psi_3}{\partial y_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_A & 0 & 0 \\ -2(y_B - y_A) & 2(x_B - x_A) & 2(y_B - y_A) \\ 0 & -2(l_1 - x_B) & 2y_B \end{bmatrix}$$

Per avere il vettore delle coordinate dipendenti in funzione della coordinata indipendente assegnata x_A si applica il metodo numerico **2.8** il quale nel caso presente si scrive

$$8.5) \quad \begin{Bmatrix} y_A^{(i+1)} \\ x_B^{(i+1)} \\ y_B^{(i+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_A^{(i)} \\ x_B^{(i)} \\ y_B^{(i)} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 2y_A^{(i)} & 0 & 0 \\ -2(y_B^{(i)} - y_A^{(i)}) & 2(x_B^{(i)} - x_A) & 2(y_B^{(i)} - y_A^{(i)}) \\ 0 & -2(l_1 - x_B^{(i)}) & 2y_B^{(i)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} x_A^2 + y_A^{(i)2} - l_2^2 \\ (x_B^{(i)} - x_A)^2 + (y_B^{(i)} - y_A^{(i)})^2 - l_3^2 \\ y_B^{(i)2} + (l_1 - x_B^{(i)})^2 - l_4^2 \end{Bmatrix}$$

Per l'analisi cinematica del primo ordine, osservato che la matrice **2.12** si scrive nel presente caso

$$8.6) \quad [\Psi_v(v)] = \begin{bmatrix} 2x_A \\ -2(x_B - x_A) \\ 0 \end{bmatrix}$$

la espressione **2.14** porge

$$8.7) \quad \begin{Bmatrix} \dot{y}_A \\ \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2y_A & 0 & 0 \\ -2(y_B - y_A) & 2(x_B - x_A) & 2(y_B - y_A) \\ 0 & -2(l_1 - x_B) & 2y_B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2x_A \\ -2(x_B - x_A) \\ 0 \end{bmatrix} \{\dot{x}_A\}$$

9. Analisi cinematica del secondo ordine con le coordinate naturali. Per l'analisi cinematica del secondo ordine è necessario derivare i jacobiani **8.4**, **8.6** ottenendo le matrici

$$9.1) \quad \frac{d[\Psi_u]}{dt} = \begin{bmatrix} 2\dot{y}_A & 0 & 0 \\ -2(\dot{y}_B - \dot{y}_A) & 2(\dot{x}_B - \dot{x}_A) & 2(\dot{y}_B - \dot{y}_A) \\ 0 & 2\dot{x}_B & 2\dot{y}_B \end{bmatrix}$$

$$9.2) \quad \frac{d[\Psi_v]}{dt} = \begin{bmatrix} 2\dot{x}_A \\ -2(\dot{x}_B - \dot{x}_A) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo le **9.1**, **9.2** nella **2.15** abbiamo in fine

$$9.3) \quad \begin{Bmatrix} \ddot{y}_A \\ \ddot{x}_B \\ \ddot{y}_B \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2y_A & 0 & 0 \\ -2(y_B - y_A) & 2(x_B - x_A) & 2(y_B - y_A) \\ 0 & -2(l_1 - x_B) & 2y_B \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 2\dot{y}_A & 0 & 0 \\ -2(\dot{y}_B - \dot{y}_A) & 2(\dot{x}_B - \dot{x}_A) & 2(\dot{y}_B - \dot{y}_A) \\ 0 & 2\dot{x}_B & 2\dot{y}_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_A \\ \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\dot{x}_A \\ -2(\dot{x}_B - \dot{x}_A) \\ 0 \end{bmatrix} \{\dot{x}_A\} + \begin{bmatrix} 2\dot{x}_A \\ -2(\dot{x}_B - \dot{x}_A) \\ 0 \end{bmatrix} \{\ddot{x}_A\} \right)$$

Si osserva che se la variabile indipendente è x_A , essendo assegnate velocità, accelerazione e valore di θ_2 , sarà necessario considerare che

$$9.4) \quad \begin{cases} x_A = l_2 \cos \theta_2 \\ \dot{x}_A = -l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ \ddot{x}_A = -l_2 (\ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2) \end{cases}$$

Per ottenere la risposta al quesito **1.4** si osserva che

$$9.5) \quad \begin{cases} x_3 = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_3 = \frac{y_A + y_B}{2} \\ x_4 = \frac{l_1 + x_B}{2} \\ y_4 = \frac{y_B}{2} \end{cases}$$

e quindi derivando si ha

$$9.6) \quad \begin{cases} v_{M3x} = \dot{x}_3 = \frac{\dot{x}_A + \dot{x}_B}{2} \\ v_{M3y} = \dot{y}_3 = \frac{\dot{y}_A + \dot{y}_B}{2} \\ v_{M4x} = \dot{x}_4 = \frac{\dot{x}_B}{2} \\ v_{M4y} = \dot{y}_4 = \frac{\dot{y}_B}{2} \end{cases}$$

$$9.7) \quad \begin{cases} a_{M3x} = \ddot{x}_3 = \frac{\dot{x}_A + \dot{x}_B}{2} \\ a_{M3y} = \ddot{y}_3 = \frac{\dot{y}_A + \dot{y}_B}{2} \\ a_{M4x} = \ddot{x}_4 = \frac{\dot{x}_B}{2} \\ a_{M4y} = \ddot{y}_4 = \frac{\dot{y}_B}{2} \end{cases}$$

Per quanto concerne il quesito **1.3** si consideri invece che

$$\begin{aligned} \vec{v}_{M_3} &= \vec{v}_A + \vec{v}_{M_3A} = \begin{pmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\theta}_3 \hat{k} \times \overrightarrow{AM_3} = \begin{pmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\theta}_3 \hat{k} \times \begin{pmatrix} x_3 - x_A \\ y_3 - y_A \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_3 \\ x_3 - x_A & y_3 - y_A & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\theta}_3 \begin{pmatrix} -(y_3 - y_A) \\ x_3 - x_A \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{v}_{M_4} &= \vec{v}_{B_0} + \vec{v}_{M_4B_0} = \dot{\theta}_4 \hat{k} \times \overrightarrow{B_0M_4} = \dot{\theta}_4 \hat{k} \times \begin{pmatrix} -(l_1 - x_4) \\ y_4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_4 \\ -(l_1 - x_4) & y_4 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -\dot{\theta}_4 \begin{pmatrix} y_4 \\ l_1 - x_4 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Confrontando quindi con le **9.6** abbiamo trovato che

$$9.8) \quad \begin{cases} \dot{x}_A - \dot{\theta}_3(y_3 - y_A) = \frac{\dot{x}_A + \dot{x}_B}{2} \\ \dot{y}_A + \dot{\theta}_3(x_3 - x_A) = \frac{\dot{y}_A + \dot{y}_B}{2} \\ -\dot{\theta}_4 y_4 = \frac{\dot{x}_B}{2} \\ -\dot{\theta}_4(l_1 - x_4) = \frac{\dot{y}_B}{2} \end{cases}$$

da cui, in particolare, segue

$$9.9) \quad \begin{cases} \dot{\theta}_3 = \frac{\dot{y}_B - \dot{y}_A}{2(x_3 - x_A)} \\ \dot{\theta}_4 = -\frac{\dot{x}_B}{2y_4} \end{cases}$$

Sostituendo le **9.5** nelle **9.9** si ha

$$9.10) \quad \begin{cases} \omega_3 = \dot{\theta}_3 = \frac{\dot{y}_B - \dot{y}_A}{x_B - x_A} \\ \omega_4 = \dot{\theta}_4 = -\frac{\dot{x}_B}{y_B} \end{cases}$$

Derivando ulteriormente si ha

$$9.11) \quad \begin{cases} \alpha_3 = \ddot{\theta}_3 = \frac{(\ddot{y}_B - \ddot{y}_A)(x_B - x_A) - (\dot{y}_B - \dot{y}_A)(\dot{x}_B - \dot{x}_A)}{(x_B - x_A)^2} \\ \alpha_4 = \ddot{\theta}_4 = \frac{\dot{x}_B \dot{y}_B - \ddot{x}_B y_B}{y_B^2} \end{cases}$$

10. Algoritmo risolutivo. Per effettuare l'analisi cinematica nel caso delle coordinate naturali si procede come nel caso delle coordinate assolute. Tuttavia utilizzando la configurazione congruente già calcolata precedentemente si può saltare la parte della ricerca della configurazione. In definitiva sono state scritte in Fortran le seguenti unità:

- l'unità chiamante *main_ese_13_b*, la quale si occupa del calcolo delle derivate prime e seconde delle variabili dipendenti;
- il modulo *mod_ese_13_b*, il quale contiene le costanti geometriche **1.1**, **1.2** del problema, oltre alle seguenti procedure di modulo:
 - subroutine *inverse* (scaricata dal sito della ODU University) la quale si occupa di invertire la matrice jacobiana **7.4**;
 - subroutine *parallelogramma* la quale permette di rappresentare nel piano A_0xy la configurazione del parallelogramma alla generica iterazione del metodo Newton-Raphson.

11. Esecuzione del programma per le coordinate naturali. Per assegnare la configurazione iniziale si considerino le seguenti trasformazioni dalle coordinate assolute alle coordinate naturali:

$$11.1) \begin{cases} x_A = l_2 \cos \theta_2 \\ y_A = l_2 \sin \theta_2 \\ x_B = l_3 \cos \theta_3 + l_2 \cos \theta_2 \\ y_B = l_3 \sin \theta_3 + l_2 \sin \theta_2 \end{cases}$$

Quindi si usi la configurazione congruente ricavata con la esecuzione precedente (vedi paragrafo 6), ovvero

x_2	y_2	θ_3	x_3	y_3	θ_4	x_4	y_4
9.396926	3.4202013	70.55076	27.118143	30.413828	-50.46595	57.72122	26.993628

che va sostituita nelle **11.1**. Allora il programma *main_ese13_b* fornisce i seguenti risultati, presi direttamente dal *prompt*:

```

La velocita' angolare (rad/s) dell'asta 3 e' -18.425283
La velocita' angolare (rad/s) dell'asta 4 e' -10.783358
La accelerazione angolare (rad/s^2) dell'asta 3 e' -259.6553
La accelerazione angolare (rad/s^2) dell'asta 4 e' 584.7109
La velocita' del punto M3 ha modulo 6.5086503
Le sue componenti x,y sono 1.4781685 6.3385763
La velocita' del punto M4 ha modulo 3.7741752
Le sue componenti x,y sono 2.910819 2.402401
La accelerazione del punto M3 ha modulo 370.4456
Le sue componenti x,y sono -296.80682 -221.66559
La accelerazione del punto M4 ha modulo 208.65636
Le sue componenti x,y sono -131.9287 -161.65486

```

Ovvero si ottengono i risultati seguenti, coincidenti con quelli calcolati utilizzando le coordinate assolute e riportati in **3.1**, **3.2**.

$$11.2) \begin{cases} \omega_3 = \dot{\theta}_3 = -18.425283 \frac{r}{s} \\ \alpha_3 = \ddot{\theta}_3 = -259.6553 \frac{r}{s^2} \\ \omega_4 = \dot{\theta}_4 = -10.783358 \frac{r}{s} \\ \alpha_4 = \ddot{\theta}_4 = 584.7109 \frac{r}{s} \end{cases}$$

$$11.3) \begin{cases} \left(\begin{array}{l} v_{M3x} = \dot{x}_3 = 1.4781685 \frac{m}{s} \\ v_{M3y} = \dot{y}_3 = 6.3385763 \frac{m}{s} \end{array} \right) \Rightarrow v_{M3} = 6.5086503 \frac{m}{s} \\ \left(\begin{array}{l} a_{M3x} = \ddot{x}_3 = -296.80682 \frac{m}{s^2} \\ a_{M3y} = \ddot{y}_3 = -221.66559 \frac{m}{s^2} \end{array} \right) \Rightarrow a_{M3} = 370.4456 \frac{m}{s^2} \\ \left(\begin{array}{l} v_{M4x} = \dot{x}_4 = 2.910819 \frac{m}{s} \\ v_{M4y} = \dot{y}_4 = 2.402401 \frac{m}{s} \end{array} \right) \Rightarrow v_{M4} = 3.7741752 \frac{m}{s} \\ \left(\begin{array}{l} a_{M4x} = \ddot{x}_4 = -131.9287 \frac{m}{s^2} \\ a_{M4y} = \ddot{y}_4 = -161.65486 \frac{m}{s^2} \end{array} \right) \Rightarrow a_{M4} = 208.65636 \frac{m}{s^2} \end{cases}$$

12. Metodo dei diagrammi polari. Per applicare questo metodo si determina la configurazione del meccanismo per via geometrica. Si consideri poi la equazione vettoriale

$$12.1) \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

per la quale si costruisce la tabella

\vec{v}_B	$= \vec{v}_A$	$+ \vec{v}_{BA}$
?	$\omega_2 \overrightarrow{AB} $?
$\perp \overrightarrow{B_0B}$	$\perp \overrightarrow{A_0A}$	$\perp \overrightarrow{AB}$

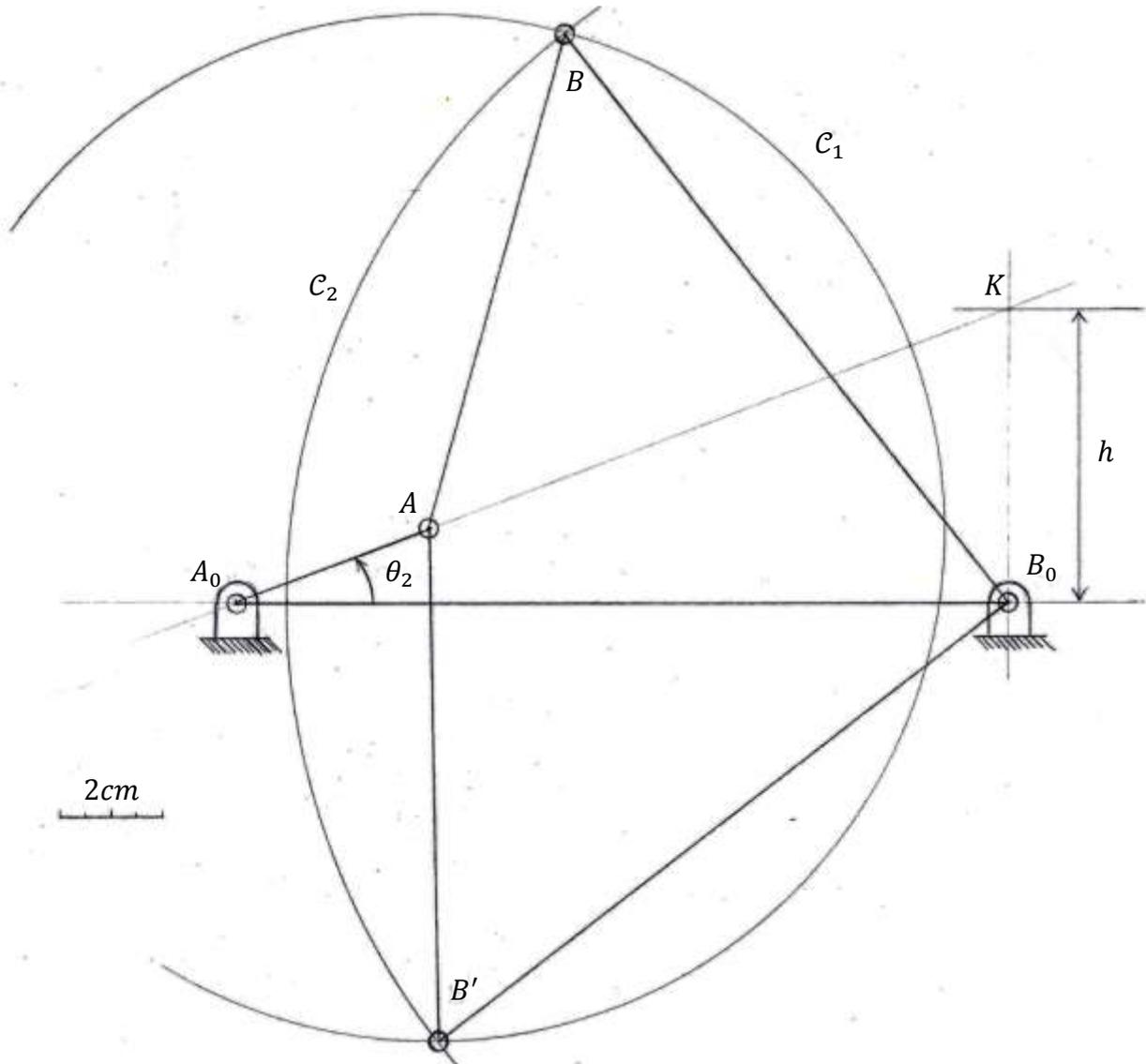
da cui si verifica la presenza di due sole incognite scalari; quindi l'equazione è risolvibile. Per il vettore noto \vec{v}_A si ha

$$12.3) |\vec{v}_A| = \omega_2 l_2 = 41.88 \frac{rad}{s} 0.2m = 8.376 \frac{m}{s}$$

Adottando una scala di rappresentazione per le velocità data da

$$12.4) \sigma_V = 1.0 \frac{1}{cm} \frac{m}{s}$$

si perviene al diagramma polare indicato in figura.



Dalla lettura del diagramma polare si ricava

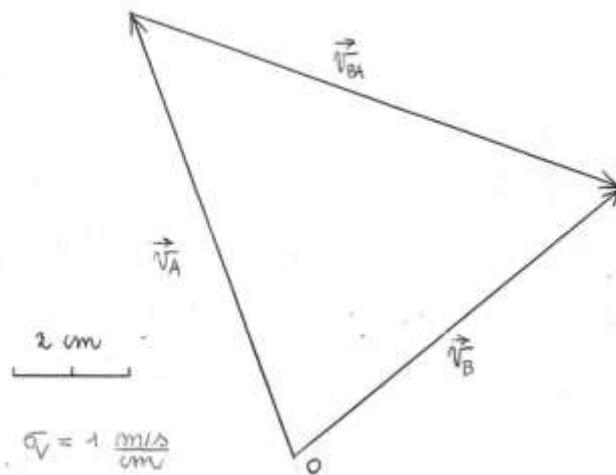
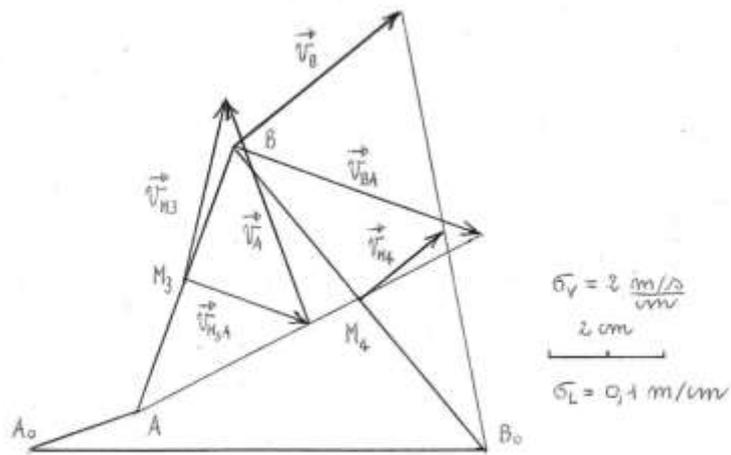
$$12.5) \begin{cases} |\vec{v}_B| = 7.5 \text{ cm} \cdot \sigma_V = 7.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ |\vec{v}_{BA}| = 9.2 \text{ cm} \cdot \sigma_V = 9.2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

da cui le velocità angolari delle aste 3,4:

$$12.6) \begin{cases} |\omega_4 l_4| = |\vec{v}_B| \Rightarrow \omega_4 = -10.71 \frac{\text{r}}{\text{s}} \\ |\omega_3 l_3| = |\vec{v}_{BA}| \Rightarrow \omega_3 = -18.40 \frac{\text{r}}{\text{s}} \end{cases}$$

Le velocità dei punti di mezzeria M_3, M_4 si ricavano direttamente dal diagramma:

$$12.7) \begin{cases} |\vec{v}_{M3}| = 2.3 \text{ cm} \cdot \sigma_V = 4.6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ |\vec{v}_{M4}| = 1.9 \text{ cm} \cdot \sigma_V = 3.8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$



Per quanto riguarda l'analisi cinematica del secondo ordine si consideri che per l'asta 3 si può scrivere l'equazione

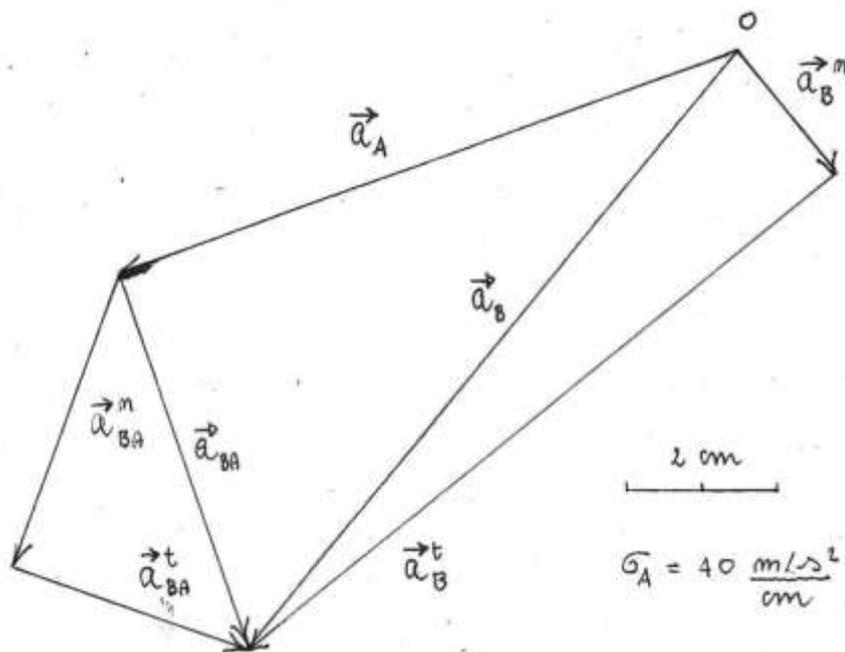
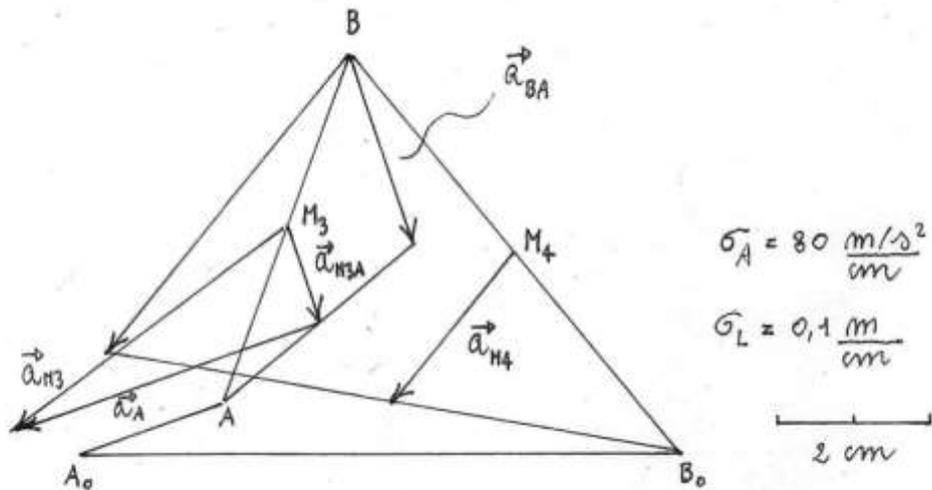
$$12.8) \vec{a}_B^t + \vec{a}_B^n = \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^t + \vec{a}_{BA}^n$$

che si traduce nella tabella seguente

\vec{a}_B^t	$+\vec{a}_B^n$	$= \vec{a}_A^n$	$+\vec{a}_{BA}^t$	$+\vec{a}_{BA}^n$
?	$\omega_4^2 \overrightarrow{B_0B} $	$\omega_2^2 \overrightarrow{A_0A} $?	$\omega_3^2 \overrightarrow{BA} $
$\perp \overrightarrow{B_0B}$	$\parallel \overrightarrow{B_0B}$	$\parallel \overrightarrow{A_0A}$	$\perp \overrightarrow{BA}$	$\parallel \overrightarrow{BA}$

Per i moduli noti delle accelerazioni si ha

$$12.9) \begin{cases} |\vec{a}_B^n| = \omega_4^2 l_4 = 80.29 \frac{m}{s^2} \\ |\vec{a}_A^n| = \omega_2^2 l_2 = 350.78 \frac{m}{s^2} \\ |\vec{a}_{BA}^n| = \omega_3^2 l_3 = 169.28 \frac{m}{s^2} \end{cases}$$



Fissando la scala di rappresentazione

$$12.10) \sigma_a = 40.0 \frac{m/s^2}{cm}$$

si ottiene il diagramma polare in figura, da cui si ricava

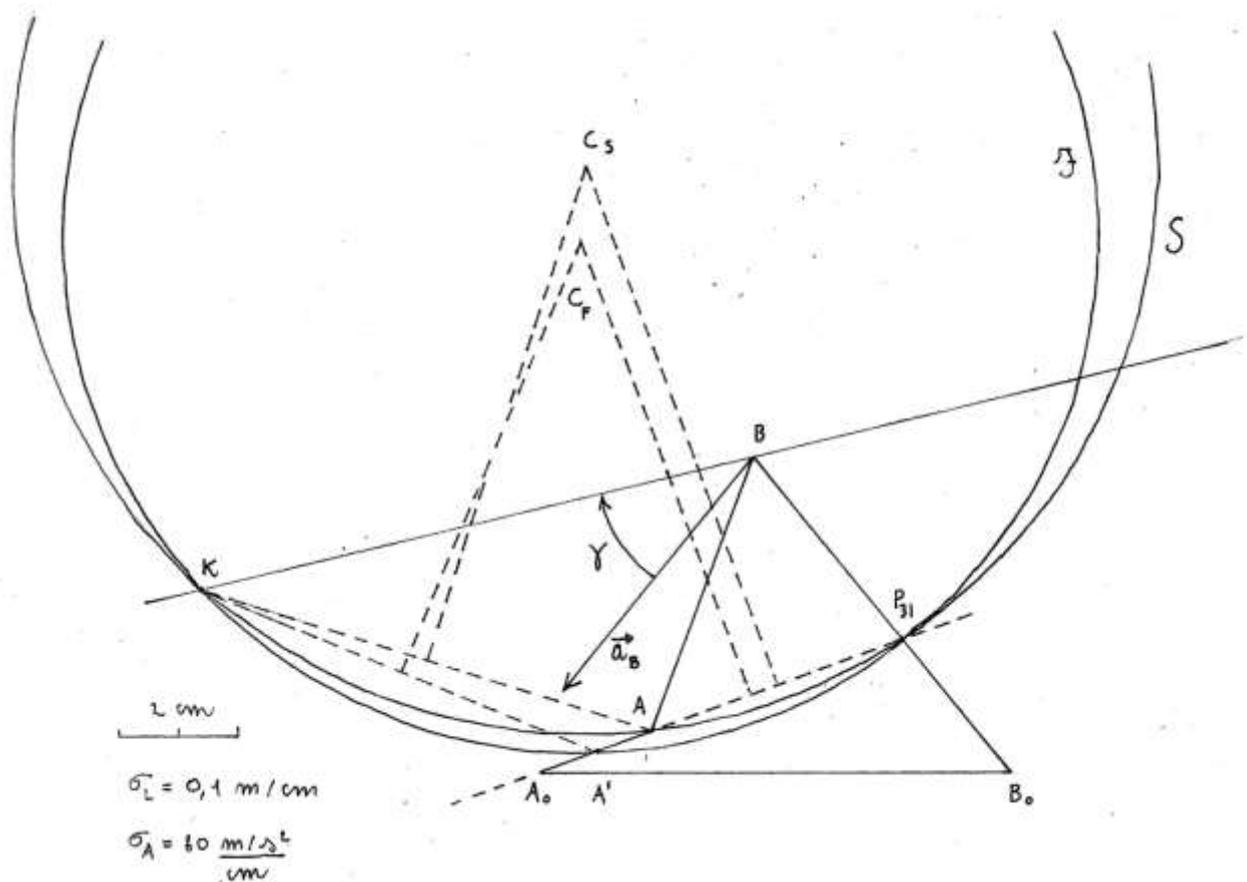
$$12.11) \begin{cases} |\vec{a}_B^t| = 10.0 \text{ cm} \cdot \sigma_a = 400.0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ |\vec{a}_{BA}^t| = 1.2 \text{ cm} \sigma_a = 132.0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases}$$

e quindi

$$12.12) \begin{cases} \alpha_4 = \frac{|\vec{a}_B^t|}{0.7 \text{ m}} = 571.4 \frac{\text{r}}{\text{s}^2} \\ \alpha_3 = -\frac{|\vec{a}_{BA}^t|}{0.5 \text{ m}} = -264.0 \frac{\text{r}}{\text{s}^2} \end{cases}$$

Per l'accelerazione dei punti M_3, M_4 si deduce dal diagramma polare che

$$12.13) \begin{cases} |\vec{a}_{M3}| = 4.5 \text{ cm} \cdot \sigma_A = 360.0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ |\vec{a}_{M4}| = 1.9 \text{ cm} \cdot \sigma_V = 168.0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases}$$



13. Moto della biella. Si ricava facilmente il centro del moto, essendo note le direzioni delle velocità di B e di A . Si consideri ora che l'espressione di Euler-Savary nella seconda formulazione permette di scrivere

$$13.1) P_{31}A^2 = \Omega_A A \cdot A'A$$

Considerando che Ω_A è A_0 , abbiamo

$$13.2) \quad A'A = \frac{P_{31}A^2}{\Omega_{AA}} = \frac{(0.45m)^2}{0.2m} = 1.01m$$

Posso così individuare il punto A' sul disegno, ottenendo un secondo punto della circonferenza dei flessi. Ricavo ora γ :

$$13.3) \quad \gamma = \tan^{-1} \left(\frac{\alpha_3}{\omega_3^2} \right) \simeq 37.42^\circ$$

Ricavo altresì la distanza del centro delle accelerazioni da B

$$|\vec{a}_B| = BK \sqrt{\alpha_3^2 + \omega_3^4} \Rightarrow$$

$$13.4) \quad BK = \frac{|\vec{a}_B|}{\sqrt{\alpha_3^2 + \omega_3^4}} = 0.97m$$

Resta così individuato il centro delle accelerazioni K . Ma allora è possibile determinare la circonferenza dei flessi \mathcal{F} come quella circonferenza che passa per K, P_{32}, A' .

Poiché il punto A ha solo accelerazione normale, segue che per esso passa la circonferenza di stazionarietà S . Inoltre tale circonferenza deve passare per K, P_{32} ; dunque resta univocamente determinata.

14. Codice principale per la soluzione con coordinate assolute. Questo codice rappresenta il programma principale che calcola i risultati **7.1, 7.3**.

```

PROGRAM main_ese_13_a

USE DISLIN    !libreria grafica
USE mod_ese_13_a

!sezione dichiarativa
IMPLICIT NONE
!dichiaro il vettore delle coordinate dipendenti
REAL,DIMENSION(8,100)::u
!dichiaro il vettore delle velocità delle coordinate dipendenti
REAL,DIMENSION(8)::u_p
!dichiaro il vettore delle accelerazioni delle coordinate dipendenti
REAL,DIMENSION(8)::u_p_p
!dichiaro dei vettori che servono al calcolo di u_p_p
REAL,DIMENSION(8,8)::u_p_p_1
REAL,DIMENSION(8)::u_p_p_2,u_p_p_3
!dichiaro la funzione delle equazioni di vincolo
REAL,DIMENSION(8,100)::psi
!dichiaro la matrice jacobiana delle u, la sua derivata e la sua inversa
REAL,DIMENSION (8,8,100)::J
REAL,DIMENSION (8,8)::j_p
REAL(KIND=8),DIMENSION (8,8)::invj
!dichiaro la matrice jacobiana delle v e la sua derivata
REAL,DIMENSION (8)::j_v
REAL,DIMENSION (8)::j_v_p
!dichiaro il vettore dei resti
REAL,DIMENSION(8,100)::resto
!dichiaro la norma del vettore dei resti

```

```

REAL,DIMENSION(100):: norma
!dichiaro i valori di innesco delle coordinate
REAL::x2 = 40.
REAL::y2 = 20.
REAL::theta3 = 110*(3.1415927/180)
REAL::x3 = 40.
REAL::y3 = 60.
REAL::theta4= -80.*(3.1415927/180)
REAL::x4= 70.
REAL::y4= 80.
!dichiaro le derivate prime e seconde delle coordinate
REAL::x2_p, x2_p_p
REAL::y2_p, y2_p_p
REAL::theta3_p, theta3_p_p
REAL::x3_p, x3_p_p
REAL::y3_p, y3_p_p
REAL::theta4_p, theta4_p_p
REAL::x4_p, x4_p_p
REAL::y4_p, y4_p_p
!dichiaro le funzioni cinematiche relative ai punti M3, M4
REAL::vxM3, vyM3, vM3
REAL::vxM4, vyM4, vM4
REAL::axM3, ayM3, aM3
REAL::axM4, ayM4, aM4
!altre variabili di lavoro
REAL(KIND=8),DIMENSION(8,8)::matrix
INTEGER::i !indici dei cicli
CHARACTER(len=10):: chiusura !serve per chiudere il programma
!sezione esecutiva
!fisso risoluzione dell'immagine in formato .bmp
CALL BMPMOD (300,'inch','resolution')
!inizializzo i valori d'innesco di u
u(1,1) = x2
u(2,1) = y2
u(3,1) = theta3
u(4,1) = x3
u(5,1) = y3
u(6,1) = theta4
u(7,1) = x4
u(8,1) = y4
!inizializzo la matrice jacobiana con i valori costanti
j(:, :, :) = 0.
j(1,1, :) = 1.
j(2,2, :) = 1.
j(3,1, :) = -1.
j(3,4, :) = 1.
j(4,2, :) = -1.
j(4,5, :) = 1.
j(5,4, :) = -1.
j(5,7, :) = 1.
j(6,5, :) = -1.
j(6,8, :) = 1.
j(7,7, :) = 1.
j(8,8, :) = 1.
!inizializzo il vettore resto
resto=0.
!ciclo del metodo Newton-Raphson

```

i=0.

ciclo: DO

```
i=i+1
x2 = u(1,i)
y2 = u(2,i)
theta3 = u(3,i)
x3 = u(4,i)
y3 = u(5,i)
theta4 = u(6,i)
x4 = u(7,i)
y4 = u(8,i)
```

!calcolo la matrice jacobiana

```
j(3,3,i) = (0.5)*I3*SIN(theta3)
j(4,3,i) = -(0.5)*I3*COS(theta3)
j(5,3,i) = (0.5)*I3*SIN(theta3)
j(5,6,i) = (0.5)*I4*SIN(theta4)
j(6,3,i) = -(0.5)*I3*cos(theta3)
j(6,6,i) = -(0.5)*I4*cos(theta4)
j(7,6,i) = -(0.5)*I4*sin(theta4)
j(8,6,i) = (0.5)*I4*cos(theta4)
```

!calcolo l'inversa della matrice jacobiana

```
matrix(:,i)=j(:,i)
CALL inverse(matrix,invj,8)
```

!calcolo la funzione psi

```
psi(1,i) = x2 - ((0.5)*I2*COS(theta2))
psi(2,i) = y2 - (0.5)*I2*SIN(theta2)
psi(3,i) = x3 -(I3*0.5)*COS(theta3) - x2 - (I2*0.5)*COS(theta2)
psi(4,i) = y3 -(I3/2.)*SIN(theta3) - y2 - (I2*0.5)*SIN(theta2)
psi(5,i) = x4 -x3 -(0.5)*I3*COS(theta3) -(0.5)*I4*COS(theta4)
psi(6,i) = y4 -y3 -(0.5)*I3*SIN(theta3) -(0.5)*I4*SIN(theta4)
psi(7,i) = x4 - I1 + (0.5)*I4*COS(theta4)
psi(8,i) = y4 + (0.5)*I4*sin(theta4)
```

!calcola il vettore resto

```
resto(:,i)=MATMUL(invj,psi(:,i))
```

!calcola la norma del resto

```
norma(i)=SQRT(DOT_PRODUCT(resto(:,i),resto(:,i)))
```

!disegno il parallelogramma alla iterata i

```
CALL parallelogramma(x2,y2,x3,y3,theta3,x4,y4,theta4,i)
```

!verifico il valore della norma e in caso esco

```
IF (norma(i)<=0.01) EXIT ciclo
```

!calcola le coordinate della iterata successiva

```
u(1:8,i+1)=u(1:8,i)-resto(1:8,i)
```

END DO ciclo

iter_i = i

iter_r = REAL(iter_i)

!Traccio il diagramma del resto

CALL diagramma_resto (norma)

WRITE(*,*) "inversa dello jacobiano delle variabili dipendenti"

WRITE(*,*) invj(1,:)

WRITE(*,*) invj(2,:)

WRITE(*,*) invj(3,:)

WRITE(*,*) invj(4,:)

WRITE(*,*) invj(5,:)

WRITE(*,*) invj(6,:)

WRITE(*,*) invj(7,:)

```

WRITE(*,*) invj(8,:)
!dichiaro la matrice jacobiana j_v
j_v(1) = (0.5)*l2*sin(theta2)
j_v(2) = -(0.5)*l2*cos(theta2)
j_v(3) = (0.5)*l2*sin(theta2)
j_v(4) = -(0.5)*l2*cos(theta2)
j_v(5) = 0.
j_v(6) = 0.
j_v(7) = 0.
j_v(8) = 0.
WRITE(*,*) "jacobiano della variabile indipendente"
WRITE(*,*) j_v(1)
WRITE(*,*) j_v(2)
WRITE(*,*) j_v(3)
WRITE(*,*) j_v(4)
WRITE(*,*) j_v(5)
WRITE(*,*) j_v(6)
WRITE(*,*) j_v(7)
WRITE(*,*) j_v(8)
!calcolo le derivate delle coordinate dipendenti
u_p = (-1)*MATMUL(invj,j_v)*theta2_p
WRITE(*,*) "derivata delle variabili dipendenti"
WRITE(*,*) u_p(1)
WRITE(*,*) u_p(2)
WRITE(*,*) u_p(3)
WRITE(*,*) u_p(4)
WRITE(*,*) u_p(5)
WRITE(*,*) u_p(6)
WRITE(*,*) u_p(8)
!assegno il valore delle derivate prime a variabili omonime
x2_p = u_p(1)
y2_p = u_p(2)
theta3_p = u_p(3)
x3_p = u_p(4)
y3_p = u_p(5)
theta4_p = u_p(6)
x4_p = u_p(7)
y4_p = u_p(8)
!dichiaro la derivata delle matrice jacobiana j
j_p = 0.
j_p(3,3) = (0.5)*l3*cos(theta3)*theta3_p
j_p(4,3) = (0.5)*l3*sin(theta3)*theta3_p
j_p(5,3) = (0.5)*l3*cos(theta3)*theta3_p
j_p(5,6) = (0.5)*l4*cos(theta4)*theta4_p
j_p(6,3) = (0.5)*l3*sin(theta3)*theta3_p
j_p(6,6) = (0.5)*l4*sin(theta4)*theta4_p
j_p(7,6) = -(0.5)*l4*cos(theta4)*theta4_p
j_p(8,6) = -(0.5)*l4*sin(theta4)*theta4_p
WRITE(*,*) "derivata della matrice jacobiana delle u"
WRITE(*,*) j_p(1,:)
WRITE(*,*) j_p(2,:)
WRITE(*,*) j_p(3,:)
WRITE(*,*) j_p(4,:)
WRITE(*,*) j_p(5,:)
WRITE(*,*) j_p(6,:)
WRITE(*,*) j_p(8,:)
!dichiaro la derivata della matrice jacobiana j_v

```

```

j_v_p = 0.
j_v_p(1) = (0.5)*l2*cos(theta2)*theta2_p
j_v_p(2) = (0.5)*l2*sin(theta2)*theta2_p
j_v_p(3) = (0.5)*l2*cos(theta2)*theta2_p
j_v_p(4) = (0.5)*l2*sin(theta2)*theta2_p
!calcolo le derivate seconde delle coordinate dipendenti
u_p_p_1 = MATMUL(invj,j_p)
u_p_p_2 = MATMUL(invj,j_v_p)
u_p_p_3 = MATMUL(invj,j_v)
u_p_p = (-1)*( MATMUL(u_p_p_1,u_p) + (u_p_p_2*theta2_p) + (u_p_p_3*theta2_p_p) )
!assegno il valore delle derivate seconde
x2_p_p = u_p_p(1)
y2_p_p = u_p_p(2)
theta3_p_p = u_p_p(3)
x3_p_p = u_p_p(4)
y3_p_p = u_p_p(5)
theta4_p_p = u_p_p(6)
x4_p_p = u_p_p(7)
y4_p_p = u_p_p(8)
!calcolo le velocità del punto M3
vxM3 = x3_p
vyM3 = y3_p
vM3 = SQRT( (vxM3**2) + (vyM3**2) )
!calcolo la velocità di M4
vxM4 = x4_p
vyM4 = y4_p
vM4 = SQRT( (vxM4**2) + (vyM4**2) )
!calcolo l'accelerazione di M3
axM3 = x3_p_p
ayM3 = y3_p_p
aM3 = SQRT( (axM3**2) + (ayM3**2) )
!calcolo l'accelerazione di M4
axM4 = x4_p_p
ayM4 = y4_p_p
aM4 = SQRT( (axM4**2) + (ayM4**2) )
WRITE (*,*)" "
WRITE (*,*)"La velocità angolare (rad/s) dell'asta 3 e", theta3_p
WRITE (*,*)" "
WRITE (*,*)"La velocità angolare (rad/s) dell'asta 4 e", theta4_p
WRITE (*,*)" "
WRITE (*,*)"La accelerazione angolare (rad/s^2) dell'asta 3 e", theta3_p_p
WRITE (*,*)" "
WRITE (*,*)"La accelerazione angolare (rad/s^2) dell'asta 4 e", theta4_p_p
WRITE (*,*)" "
WRITE (*,*)"La velocità del punto M3 ha modulo", vM3
WRITE (*,*)" "
WRITE (*,*)"Le sue componenti x,y sono", vxM3, vyM3
WRITE (*,*)" "
WRITE (*,*)"La velocità del punto M4 ha modulo", vM4
WRITE (*,*)" "
WRITE (*,*)"Le sue componenti x,y sono", vxM4, vyM4
WRITE (*,*)" "
WRITE (*,*)"La accelerazione del punto M3 ha modulo", aM3
WRITE (*,*)" "
WRITE (*,*)"Le sue componenti x,y sono", axM3, ayM3
WRITE (*,*)" "
WRITE (*,*)"La accelerazione del punto M4 ha modulo", aM4

```

```

WRITE (*,*)" "
WRITE (*,*)"Le sue componenti x,y sono", axM4, ayM4
WRITE (*,*)" "
WRITE (*,*)"Per chiudere il programma premi una lettera qualunque."
WRITE (*,*)"Tutti i dati andranno persi."
READ (*,*) chiusura
STOP
END PROGRAM main_ese_13_a

```

15. Modulo per la soluzione con coordinate assolute. Segue il modulo relativo al programma principale indicato nel precedente paragrafo.

```

MODULE mod_ese_13_a

!sezione dichiarativa
IMPLICIT NONE
!dichiaro le costanti geometriche del quadrilatero
REAL, PARAMETER:: l2=.20
REAL, PARAMETER:: l3=.50
REAL, PARAMETER:: l4=.70
REAL, PARAMETER:: l1=.80
REAL, PARAMETER:: theta2 = 20.*(3.1415927/180)
REAL, PARAMETER:: theta2_p = 400.*2*3.1415927/60
REAL, PARAMETER:: theta2_p_p = 0
!dichiaro il numero di iterazioni
INTEGER:: iter_i !intero
REAL:: iter_r !relae

!fisso il formato di output per i diagrammi
CHARACTER(len=4):: formato='bmp'
!scrivo le subroutine
CONTAINS
!-----
subroutine inverse(a,c,n)
!=====
! Inverse matrix
! Method: Based on Doolittle LU factorization for Ax=b
! Alex G. December 2009
!-----
! input ...
! a(n,n) - array of coefficients for matrix A
! n - dimension
! output ...
! c(n,n) - inverse matrix of A
! comments ...
! the original matrix a(n,n) will be destroyed
! during the calculation
!=====
implicit none
integer n
double precision a(n,n), c(n,n)
double precision L(n,n), U(n,n), b(n), d(n), x(n)
double precision coeff
integer i, j, k
! step 0: initialization for matrices L and U and b
! Fortran 90/95 allows such operations on matrices
L=0.0
U=0.0
b=0.0

```

```

! step 1: forward elimination
do k=1, n-1
  do i=k+1,n
    coeff=a(i,k)/a(k,k)
    L(i,k) = coeff
    do j=k+1,n
      a(i,j) = a(i,j)-coeff*a(k,j)
    end do
  end do
end do
! Step 2: prepare L and U matrices
! L matrix is a matrix of the elimination coefficient
! + the diagonal elements are 1.0
do i=1,n
  L(i,i) = 1.0
end do
! U matrix is the upper triangular part of A
do j=1,n
  do i=1,j
    U(i,j) = a(i,j)
  end do
end do
! Step 3: compute columns of the inverse matrix C
do k=1,n
  b(k)=1.0
  d(1) = b(1)
! Step 3a: Solve Ld=b using the forward substitution
  do i=2,n
    d(i)=b(i)
    do j=1,i-1
      d(i) = d(i) - L(i,j)*d(j)
    end do
  end do
! Step 3b: Solve Ux=d using the back substitution
  x(n)=d(n)/U(n,n)
  do i = n-1,1,-1
    x(i) = d(i)
    do j=n,i+1,-1
      x(i)=x(i)-U(i,j)*x(j)
    end do
    x(i) = x(i)/u(i,i)
  end do
! Step 3c: fill the solutions x(n) into column k of C
  do i=1,n
    c(i,k) = x(i)
  end do
  b(k)=0.0
end do
end subroutine inverse
!-----
SUBROUTINE parallelogramma (x2,y2,x3,y3,theta3,x4,y4,theta4,iterata)
!sezione dichiarativa
!dichiaro gli argomenti fittizi
!dichiaro le coordinate
REAL,INTENT(IN)::x2,y2,x3,y3,theta3,x4,y4,theta4
!dichiaro il numero di iterata
INTEGER,INTENT(IN)::iterata
!dichiaro le variabili locali
!dichiaro e assegno gli estremi dei lati l2
REAL::l2A0x

```

```

REAL::l2A0y
REAL::l2Ax
REAL::l2Ay
!dichiaro e assegno gli estremi del lato l3
REAL::l3Ax
REAL::l3Ay
REAL::l3Bx
REAL::l3By
!dichiaro e assegno gli estremi del lato l4
REAL::l4Bx
REAL::l4By
REAL::l4B0x
REAL::l4B0y
!dichiaro e assegno gli estremi del lato l1
REAL::l1B0x
REAL::l1B0y
REAL::l1A0x
REAL::l1A0y
!dichiaro il minimo e il massimo delle ascisse e delle ordinate
REAL:: xmin
REAL:: xmax
REAL:: ymin
REAL:: ymax
!sezione esecutiva
!assegno gli estremi dei lati l2
l2A0x = x2 - (0.5*l2*cos(theta2))
l2A0y = y2 - (0.5*l2*sin(theta2))
l2Ax = x2 + (0.5*l2*cos(theta2))
l2Ay = y2 + (0.5*l2*sin(theta2))
!assegno gli estremi del lato l3
l3Ax = x3 - 0.5*l3*cos(theta3)
l3Ay = y3 - 0.5*l3*sin(theta3)
l3Bx = x3 + 0.5*l3*cos(theta3)
l3By = y3 + 0.5*l3*sin(theta3)
!assegno gli estremi del lato l4
l4Bx = x4 - 0.5*l4*cos(theta4)
l4By = y4 - 0.5*l4*sin(theta4)
l4B0x = x4 + 0.5*l4*cos(theta4)
l4B0y = y4 + 0.5*l4*sin(theta4)
!assegno gli estremi del lato l1
l1B0x = 80.
l1B0y = 0
l1A0x = 0
l1A0y = 0
!calcolo l'ascissa minima e quella massima
xmin = MIN(l2A0x,l2Ax, l3Ax, l3Bx, l4Bx, l4B0x, l1B0x, l1A0x)
xmax = MAX(l2A0x,l2Ax, l3Ax, l3Bx, l4Bx, l4B0x, l1B0x, l1A0x)
!calcolo l'ascissa minima e quella massima
ymin = MIN(l2A0y,l2Ay, l3Ay, l3By, l4By, l4B0y, l1B0y, l1A0y)
ymax = MAX(l2A0y,l2Ay, l3Ay, l3By, l4By, l4B0y, l1B0y, l1A0y)
!alcune istruzioni grafiche
CALL METAFL (formato) !indico il formato dell'output
CALL SCRMOD ('revers') !scritta nera su fondo bianco
CALL DISINI      !richiama alcune impostazioni di default
CALL PAGERA     !traccio un bordo per il piano xy
CALL DUPLX      !font a doppio spessore
CALL AXSPOS (450,1800) !coordinate angolo basso sinistra
CALL AXSLEN (2200,1500)!lunghezza dei due assi in pixel
CALL NAME ('',x') !nome delle ascisse
CALL NAME ('',y') !nome delle ordinate

```

```

CALL TITLIN ("Configurazione",1) !prima riga del titolo
CALL GRAF (xmin-20.,xmax+20.,xmin-20,20.,ymin-20.,ymax+20.,ymin-20.,20.)
CALL GRID (2,2) !impone una griglia sul piano coordinato
CALL TITLE !stampa il titolo di cui sopra
CALL DASH !tratteggio per gli assi coordinati
CALL XAXGIT !traccio la retta y=0
CALL YAXGIT !traccio la retta x=0
CALL MYLINE (1,1) !impone una linea continua
CALL LINWID (8) !spessore della linea
!disegno ciascuno dei lati indicando gli estremi
CALL RLINE (l2A0x, l2A0y, l2Ax, l2Ay)
CALL RLINE (l3Ax, l3Ay, l3Bx, l3By)
CALL RLINE (l4Bx, l4By, l4B0x, l4B0y)
CALL RLINE (l1B0x, l1B0y, l1A0x, l1A0y)
CALL DISFIN
END SUBROUTINE parallelogramma
!-----
SUBROUTINE diagramma_resto (norma)
!sezione dichiarativa
!dichiaro gli argomenti fittizi
REAL,INTENT(IN),DIMENSION(iter_i):: norma
!dichiaro le variabili locali
INTEGER::i !indice del ciclo
REAL,DIMENSION(iter_i)::x !qui metto le ascisse
REAL:: max !il massimo della norma
REAL:: min !il minimo della norma
!sezione esecutiva
!inizializzo l'array delle ascisse
x(1)=1.
ciclo_ascisse: DO i=2,iter_i,1
    x(i)=x(i-1)+1.
END DO ciclo_ascisse
WRITE(*,*) x
CALL METAFI (formato) !indico il formato dell'output
CALL SCRMOD ('revers') !scritta nera su fondo bianco
CALL DISINI
CALL PAGERA !traccio un bordo per il piano xy
CALL DUPLX !font a doppio spessore
CALL AXSPOS (450,1800) !coordinate angolo basso sinistra
CALL AXSLEN (2200,1500)!lunghezza dei due assi in pixel
CALL NAME ('iterazioni','x') !nome delle ascisse
CALL NAME ('norma del vettore dei resti','y') !nome delle ordinate
CALL TITLIN ("La norma del vettore dei resti deve annullarsi",1) !prima riga del titolo
max=MAXVAL(norma) !il massimo della funzione
min=MINVAL(norma) !il minimo valore della funzione
WRITE(*,*) "il minimo della norma del vettore dei resti vale", min
WRITE(*,*) "il massimo della norma del vettore dei resti vale",max
CALL GRAF (0.,x(iter_i),1.,1.0,min,max,0.,20.)
CALL GRID (2,2) !impone una griglia sul piano coordinato
CALL TITLE !stampa il titolo di cui sopra
CALL CURVE (x,norma,iter_i) !plotto il diagramma del resto
CALL DASH !tratteggio per gli assi coordinati
CALL XAXGIT !traccio la retta y=0
CALL YAXGIT !traccio la retta x=0
CALL DISFIN
END SUBROUTINE diagramma_resto
!-----
END MODULE mod_ese_13_a

```

16. Codice principale per la soluzione con coordinate naturali. Segue il programma principale per la soluzione con coordinate naturali.

```
PROGRAM main_ese_13_b

USE DISLIN    !libreria grafica
USE mod_ese_13_b
!sezione dichiarativa
IMPLICIT NONE
!dichiaro il vettore delle coordinate dipendenti
REAL,DIMENSION(3,100)::u
!dichiaro il vettore delle velocità delle coordinate dipendenti
REAL,DIMENSION(3)::u_p
!dichiaro il vettore delle accelerazioni delle coordinate dipendenti
REAL,DIMENSION(3)::u_p_p
!dichiaro dei vettori che servono al calcolo di u_p_p
REAL,DIMENSION(3,3)::u_p_p_1
REAL,DIMENSION(3)::u_p_p_2,u_p_p_3
!dichiaro la funzione delle equazioni di vincolo
REAL,DIMENSION(3,100)::psi
!dichiaro la matrice jacobiana delle u, la sua derivata e la sua inversa
REAL(kind=8),DIMENSION (3,3)::j
REAL,DIMENSION (3,3)::j_p
REAL(kind=8),DIMENSION (3,3)::invj
!dichiaro la matrice jacobiana delle v e la sua derivata
REAL,DIMENSION (3)::j_v
REAL,DIMENSION (3)::j_v_p
!dichiaro i valori della configurazione congruente nota
REAL::x2 = 9.396926
REAL::y2 = 3.4202013
REAL::theta3 = 70.55076*(3.1415927/180)
REAL::x3 = 27.118143
REAL::y3 = 30.413828
REAL::theta4 = -50.46595*(3.1415927/180)
REAL::x4 = 57.72122
REAL::y4 = 26.993628
!dichiaro le derivate degli angoli
REAL::theta3_p, theta3_p_p, theta4_p, theta4_p_p
!dichiaro le coordinate naturali
REAL::xA, yA, xB, yB
!dichiaro le derivate prime e seconde delle coordinate naturali
REAL::xA_p, xA_p_p
REAL::yA_p, yA_p_p
REAL::xB_p, xB_p_p
REAL::yB_p, yB_p_p
!dichiaro le funzioni cinematiche relative ai punti M3, M4
REAL::vxM3, vyM3, vM3
REAL::vxM4, vyM4, vM4
REAL::axM3, ayM3, aM3
REAL::axM4, ayM4, aM4
!altre variabili di lavoro
REAL(KIND=8),DIMENSION(3,3)::matrix
INTEGER::i !indici dei cicli
CHARACTER(len=10):: chiusura !serve per chiudere il programma
!sezione esecutiva
!fisso risoluzione dell'immagine in formato .bmp
CALL BMPMOD (300,'inch','resolution')
```

```

!disegno la configurazione congruente del parallelogramma
CALL parallelogramma(x2,y2,x3,y3,theta3,x4,y4,theta4,1)
!inizializzo i valori d'innescio delle coordinate dipendenti
xA = l2*COS(theta2)
yA = l2*SIN(theta2)
xB = l3*COS(theta3) + l2*COS(theta2)
yB = l3*SIN(theta3) + l2*SIN(theta2)
!inizializzo le derivate della variabile indipendente
xA_p = -l2*theta2_p*sin(theta2)
xA_p_p = -l2*( theta2_p_p*sin(theta2) + (theta2_p**2)*cos(theta2) )
!inizializzo il vettore u con il valore d'innescio
u(1,1) = yA
u(2,1) = xB
u(3,1) = yB
!calcolo lo jacobiano delle variabili dipendenti
j = 0.
j(1,1) = 2*yA
j(2,1) = -2*(yB-yA)
j(2,2) = 2*(xB-xA)
j(2,3) = 2*(yB-yA)
j(3,2) = -2*(1-xB)
j(3,3) = 2*yB
!dichiaro la matrice jacobiana j_v
j_v(1) = 2*xA
j_v(2) = -2*(xB-xA)
j_v(3) = 0.
!calcolo l'inversa della matrice jacobiana delle coordinate naturali
CALL inverse(j,invj,3)
!calcolo le derivate delle coordinate dipendenti
u_p = (-1)*MATMUL(invj,j_v)*xA_p
WRITE(*,*) "derivata delle variabili dipendenti"
WRITE(*,*) u_p(1)
WRITE(*,*) u_p(2)
WRITE(*,*) u_p(3)
!assegno il valore delle derivate prime a variabili omonime
yA_p = u_p(1)
xB_p = u_p(2)
yB_p = u_p(3)
!dichiaro la derivata della matrice jacobiana j
j_p = 0.
j_p(1,1) = 2.*yA_p
j_p(2,1) = -2.*(yB_p-yA_p)
j_p(2,2) = 2.*(xB_p-xA_p)
j_p(2,3) = 2.*(yB_p-yA_p)
j_p(3,2) = -2.*(-xB_p)
j_p(3,3) = 2.*yB_p
WRITE(*,*) "derivata della matrice jacobiana delle u"
WRITE(*,*) j_p(1,:)
WRITE(*,*) j_p(2,:)
WRITE(*,*) j_p(3,:)
!dichiaro la derivata della matrice jacobiana j_v
j_v_p(1) = 2.*xA_p
j_v_p(2) = -2.*(xB_p-xA_p)
j_v_p(3) = 0.
!calcolo le derivate seconde delle coordinate dipendenti
u_p_p_1 = MATMUL(invj,j_p)
u_p_p_2 = MATMUL(invj,j_v_p)

```

```

u_p_p_3 = MATMUL(invj,j_v)
u_p_p = (-1)*( MATMUL(u_p_p_1,u_p) + (u_p_p_2*xA_p) + (u_p_p_3*xA_p_p) )
!assegno il valore delle derivate seconde
yA_p_p = u_p_p(1)
xB_p_p = u_p_p(2)
yB_p_p = u_p_p(3)
!calcolo le derivate degli angoli delle aste
theta3_p = ( yB_p - yA_p )/( xB - xA )
theta3_p_p = ( (yB_p_p - yA_p_p)*(xB - xA) - (yB_p - yA_p)*(xB_p - xA_p) )/(xB - xA)**2
theta4_p = -xB_p/yB
theta4_p_p = (xB_p*yB_p - XB_p_p*yB)/yB**2
!calcolo le velocità del punto M3
vxM3 = ( xA_p + xB_p )/2.
vyM3 = ( yA_p + yB_p )/2.
vM3 = SQRT( (vxM3**2) + (vyM3**2) )
!calcolo la velocità di M4
vxM4 = xB_p/2.
vyM4 = yB_p/2.
vM4 = SQRT( (vxM4**2) + (vyM4**2) )
!calcolo l'accelerazione di M3
axM3 = ( xA_p_p + xB_p_p )/2.
ayM3 = ( yA_p_p + yB_p_p )/2.
aM3 = SQRT( (axM3**2) + (ayM3**2) )
!calcolo l'accelerazione di M4
axM4 = xB_p_p/2.
ayM4 = yB_p_p/2.
aM4 = SQRT( (axM4**2) + (ayM4**2) )
WRITE (*,*) "
WRITE (*,*)"La velocità angolare (rad/s) dell'asta 3 e", theta3_p
WRITE (*,*) "
WRITE (*,*)"La velocità angolare (rad/s) dell'asta 4 e", theta4_p
WRITE (*,*) "
WRITE (*,*)"La accelerazione angolare (rad/s^2) dell'asta 3 e", theta3_p_p
WRITE (*,*) "
WRITE (*,*)"La accelerazione angolare (rad/s^2) dell'asta 4 e", theta4_p_p
WRITE (*,*) "
WRITE (*,*)"La velocità del punto M3 ha modulo", vM3
WRITE (*,*) "
WRITE (*,*)"Le sue componenti x,y sono", vxM3, vyM3
WRITE (*,*) "
WRITE (*,*)"La velocità del punto M4 ha modulo", vM4
WRITE (*,*) "
WRITE (*,*)"Le sue componenti x,y sono", vxM4, vyM4
WRITE (*,*) "
WRITE (*,*)"La accelerazione del punto M3 ha modulo", aM3
WRITE (*,*) "
WRITE (*,*)"Le sue componenti x,y sono", axM3, ayM3
WRITE (*,*) "
WRITE (*,*)"La accelerazione del punto M4 ha modulo", aM4
WRITE (*,*) "
WRITE (*,*)"Le sue componenti x,y sono", axM4, ayM4
WRITE (*,*) "
WRITE (*,*)"Per chiudere il programma premi una lettera qualunque."
WRITE (*,*)"Tutti i dati andranno persi."
READ (*,*) chiusura
STOP
END PROGRAM main_ese_13_b

```

17. Modulo per la soluzione con coordinate naturali. Il modulo per il caso delle coordinate naturali è lo stesso di quello del caso delle coordinate assolute.

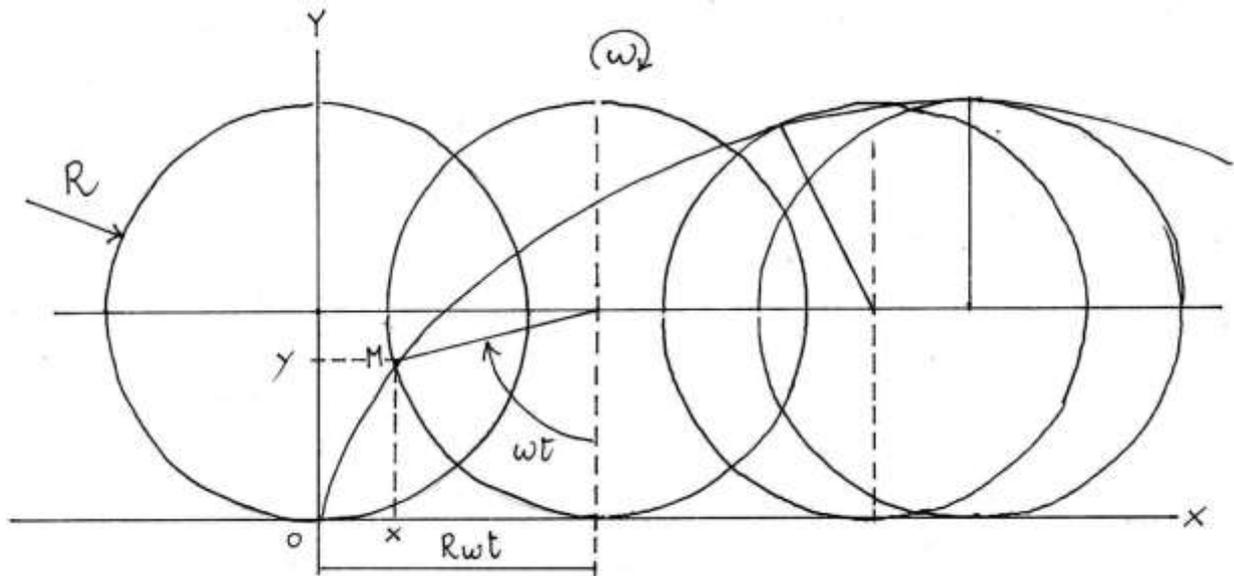
Cicloide

1. Il quesito. Una ruota avente raggio e velocità angolare di seguito assegnati rotola senza strisciamento su una retta fissa.

$$1.1) \quad \begin{cases} R = 0.5m \\ \omega = 30 \frac{r}{s} \end{cases}$$

Detto M il punto di contatto fra circonferenza e retta all'istante iniziale, si determini allora

- 1.2) la traiettoria descritta da M durante il moto;
- 1.3) il diagramma dello spazio percorso da M in funzione del tempo;
- 1.4) la velocità e l'accelerazione di M e il centro di curvatura in M , in corrispondenza a una rotazione $\varphi = 3\pi/4$;
- 1.5) la velocità e l'accelerazione di M e il centro di curvatura in M , in corrispondenza a uno spazio percorso $s = 4m$.



2. Discussione analitica. Dato il sistema di riferimento Oxy in figura, sia M il punto della ruota il quale sia coincidente con O per $t = 0$. Volendo ricavare **le coordinate di M in funzione del tempo** si deduce dalla figura quanto segue:

$$2.1) \quad \begin{cases} x(t) = R\omega t - R \sin(\omega t) = R(\omega t - \sin(\omega t)) \\ y(t) = R - R \cos(\omega t) = R(1 - \cos(\omega t)) \end{cases}$$

Per l'**analisi cinematica del primo ordine** del punto M derivando le **2.1** si ha

$$2.2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = R\omega - R\omega \cos(\omega t) = R\omega(1 - \cos(\omega t)) \\ \dot{y}(t) = R\omega \sin(\omega t) \end{cases}$$

Derivando ancora le **2.3** si ottiene l'**analisi cinematica del secondo ordine**

$$2.3) \quad \begin{cases} \ddot{x}(t) = R\omega^2 \sin(\omega t) \\ \ddot{y}(t) = R\omega^2 \cos(\omega t) \end{cases}$$

Assumendo il punto O come origine della ascissa curvilinea $s = s(t)$ abbiamo che lo spazio percorso nell'intervallo di tempo $[0, t]$ è dato da

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau)} d\tau = R\omega \int_0^t \sqrt{(1 - \cos(\omega\tau))^2 + (\sin(\omega\tau))^2} d\tau = \\ &= R\omega \int_0^t \sqrt{1 - 2\cos(\omega\tau) + \cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau)} d\tau = R\omega \int_0^t \sqrt{2 - 2\cos(\omega\tau)} d\tau = \\ &= R\omega\sqrt{2} \int_0^t \sqrt{1 - \cos(\omega\tau)} d\tau \end{aligned}$$

Ricordando la formula di dimezzamento

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

abbiamo¹ che

$$\begin{aligned} s(t) &= 2R\omega \int_0^t \sqrt{\frac{1 - \cos(\omega\tau)}{2}} d\tau = 2R\omega \int_0^t \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) d\tau = 4R \int_0^t \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) d\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \\ &= -4R \int_0^t d\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = -4R \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \Big|_0^t = -4R \left(\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) - 1\right) \end{aligned}$$

Ho trovato dunque **lo spazio percorso da M in funzione del tempo**

$$2.4) \quad s(t) = 4R \left(1 - \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right)$$

Il versore tangente alla traiettoria si scrive

$$2.5) \quad \vec{T}(t) = \left(\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \quad \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \right)$$

Il versore normale invece si scrive

$$2.6) \quad \vec{N}(t) = \frac{\dot{\vec{T}}(t)}{|\dot{\vec{T}}(t)|}$$

ed essendo poi

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}\right)}{dt} &= \frac{\ddot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} - \frac{\dot{x}(t)(2\dot{x}(t)\dot{x}(t) + 2\dot{y}(t)\dot{y}(t))}{2(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} = \\ &= \frac{\dot{x}^2(t)\ddot{x}(t) + \dot{y}^2(t)\ddot{x}(t) - \dot{x}^2(t)\dot{x}(t) - \dot{x}(t)\dot{y}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} = \frac{(\dot{y}(t)\ddot{x}(t) - \dot{x}(t)\ddot{y}(t))\dot{y}(t)}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \end{aligned}$$

¹ Si osservi che i passaggi successivi ammettono implicitamente che il seno integrando sia positivo, ovvero che la rotazione sia entro l'angolo giro. Per rotazioni ulteriori questa espressione non va più bene.

$$\begin{aligned}
& \frac{d\left(\frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}\right)}{dt} = \frac{\ddot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} - \frac{\dot{y}(t)(2\dot{x}(t)\ddot{x}(t) + 2\dot{y}(t)\ddot{y}(t))}{2(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} = \\
& = \frac{\dot{x}^2(t)\ddot{y}(t) + \dot{y}^2(t)\ddot{x}(t) - \dot{x}(t)\dot{y}(t)\ddot{x}(t) - \dot{y}^2(t)\ddot{y}(t)}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} = \frac{(\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t))\dot{x}(t)}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \\
|\dot{\vec{T}}(t)| &= \sqrt{\left(\frac{(\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t))\dot{y}(t)}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}\right)^2 + \left(\frac{(\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t))\dot{x}(t)}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}\right)^2} = \\
&= \sqrt{\frac{(\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t))^2 \dot{y}^2(t)}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^3} + \frac{(\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t))^2 \dot{x}^2(t)}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^3}} \\
&= \sqrt{\frac{(\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t))^2 (\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^3}} \\
&= |\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)| \frac{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)|}{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}
\end{aligned}$$

la 2.6 si riscrive

$$\begin{aligned}
& \frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{|\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)|} \left(\frac{(\dot{y}(t)\ddot{x}(t) - \dot{x}(t)\ddot{y}(t))\dot{y}(t)}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} - \frac{(\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t))\dot{x}(t)}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \right) = \\
& = \frac{1}{|\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)|} \left(\frac{(\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t))\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} - \frac{(\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t))\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \right)
\end{aligned}$$

Dunque ho trovato

$$2.7) \quad \vec{N}(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{|\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)|} \left(\frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} - \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \right)$$

Si dimostra poi che il **raggio di curvatura**, ovvero il raggio della circonferenza che oscula la traiettoria, è dato da

$$2.8) \quad R_c(t) = \frac{|\dot{\vec{O}\vec{P}}(t)|^3}{|\dot{\vec{O}\vec{P}}(t) \times \ddot{\vec{O}\vec{P}}(t)|} = \frac{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)|}$$

Ma allora il centro di curvatura della traiettoria di M in M medesimo è individuato istante per istante dal vettore

$$\vec{O}\vec{\Omega}_M(t) = \vec{O}\vec{M}(t) + \vec{N}(t)R(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix} \frac{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))(\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t))}{(\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t))^2}$$

Dunque abbiamo che il centro di curvatura ha coordinate

$$2.9) \quad \begin{cases} \Omega_{Mx}(t) = x(t) + y(t) \frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{\dot{x}(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)\dot{y}(t)} \\ \Omega_{My}(t) = y(t) - x(t) \frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{\dot{x}(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)\dot{y}(t)} \end{cases}$$

Sostituendo nelle 2.9 le 2.1, 2.2, 2.3 si ha

$$\begin{cases} \Omega_{Mx} = R(\omega t - \sin(\omega t)) + R\omega \sin(\omega t) \frac{2R^2\omega^2(1 - \cos(\omega t))}{R^2\omega^3(1 - \cos(\omega t))} \\ \Omega_{My} = R(1 - \cos(\omega t)) - R\omega(1 - \cos(\omega t)) \frac{2R^2\omega^2(1 - \cos(\omega t))}{R^2\omega^3(1 - \cos(\omega t))} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Omega_{Mx} = R(\omega t - \sin(\omega t)) + 2R \sin(\omega t) \\ \Omega_{My} = R(1 - \cos(\omega t)) - 2R(1 - \cos(\omega t)) \end{cases} \Rightarrow$$

$$2.10) \quad \begin{cases} \Omega_{Mx}(t) = R(\omega t + \sin(\omega t)) \\ \Omega_{My}(t) = -R(1 - \cos(\omega t)) \end{cases}$$

Volendo la **curvatura** -al fine di calcolare accelerazione angolare e tangenziale del punto M che descrive la cicloide- si osservi che

$$R_c(t) = \frac{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)|} = \frac{(2R^2\omega^2(1 - \cos(\omega t)))^{\frac{3}{2}}}{R^2\omega^3(1 - \cos(\omega t))} =$$

$$= \frac{2R^2\omega^2(1 - \cos(\omega t))\sqrt{2R^2\omega^2(1 - \cos(\omega t))}}{R^2\omega^3(1 - \cos(\omega t))} \Rightarrow$$

$$2.11) \quad R_c(t) = 2R\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\omega t)}$$

Poiché inoltre la 2.4 porge

$$2.12) \quad \begin{cases} \dot{s}(t) = 2R\omega \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) \\ \ddot{s}(t) = R\omega^2 \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) \end{cases}$$

abbiamo per l'**accelerazione normale** che

$$\vec{a}_M^n = \frac{\dot{s}^2(t)}{R_c(t)} \vec{N}(t) = \frac{\left(2R\omega \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right)^2}{2\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\omega t)}} \vec{N}(t) = \frac{4R^2\omega^2 \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{2R\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\omega t)}} \vec{N}(t) =$$

$$= \frac{R\omega^2 \frac{1 - \cos(\omega t)}{2}}{\sqrt{\frac{1 - \cos(\omega t)}{2}}} \vec{N}(t) = R\omega^2 \sqrt{\frac{1 - \cos(\omega t)}{2}} \vec{N}(t)$$

e per l'**accelerazione tangenziale** che

$$\vec{a}_M^t = \ddot{s}(t)\vec{T}(t) = R\omega^2 \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)\vec{T}(t)$$

Quindi si conclude² che

$$2.12) \begin{cases} \vec{a}_M^n = R\omega^2 \sqrt{\frac{1-\cos(\omega t)}{2}}\vec{N}(t) \\ \vec{a}_M^t = R\omega^2 \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)\vec{T}(t) \end{cases}$$

3. Soluzione analitica. Per rispondere al quesito **1.4** si consideri che

$$\varphi = \frac{3\pi}{4} = \omega t \Rightarrow t = \frac{3\pi}{4\omega} = 7.853 \cdot 10^{-2} s \Rightarrow$$

$$3.1) \begin{cases} x(7.853 \cdot 10^{-2} s) = 0.5m \left(\frac{3\pi}{4} - \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) = 0.824m \\ y(7.853 \cdot 10^{-2} s) = 0.5m \left(1 - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) = 0.853m \end{cases}$$

$$3.2) \begin{cases} \dot{x}(7.853 \cdot 10^{-2} s) = 15 \left(1 - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) \frac{m}{s} = 25.606 \frac{m}{s} \\ \dot{y}(7.853 \cdot 10^{-2} s) = 15 \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \frac{m}{s} = 10.606 \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow |\vec{v}_M(7.853 \cdot 10^{-2} s)| = 27.71 \frac{m}{s^2}$$

$$3.3) \begin{cases} \ddot{x}(7.853 \cdot 10^{-2} s) = 450 \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \frac{m}{s^2} = 318.198 \frac{m}{s^2} \\ \ddot{y}(7.853 \cdot 10^{-2} s) = 450 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \frac{m}{s^2} = -318.198 \frac{m}{s^2} \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_M(7.853 \cdot 10^{-2} s)| = 449.99 \frac{m}{s^2}$$

$$3.4) \begin{cases} \Omega_{Mx}(7.853 \cdot 10^{-2} s) = 0.5m \left(\frac{3\pi}{4} + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) = 1.531m \\ \Omega_{My}(7.853 \cdot 10^{-2} s) = -0.5m \left(1 - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) = -0.853m \end{cases}$$

$$3.5) \begin{cases} |\vec{a}_M^n|(7.853 \cdot 10^{-2} s) = 0.5m \left(30 \frac{r}{s} \right)^2 \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{2}} = 415.745 \frac{m}{s^2} \\ |\vec{a}_M^t|(7.853 \cdot 10^{-2} s) = 0.5m \left(30 \frac{r}{s} \right)^2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 172.207 \frac{m}{s^2} \end{cases}$$

Per il quesito **1.5** si consideri invece che la **2.4** porge

$$\begin{aligned} 4R \left(1 - \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) \right) = 4m &\Rightarrow 0.5m \left(1 - \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) \right) = 1m \Rightarrow 1 - 2 = \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 - 2 = \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) &\Rightarrow \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) = -1 \Rightarrow \frac{\omega t}{2} = \pi \Rightarrow \omega t = 2\pi \Rightarrow t = 0.209s \end{aligned}$$

Dunque si ha

² Si osservi che vale qui quanto detto nella nota uno: poiché l'espressione dello spazio percorso nel tempo vale solo per rotazioni inferiori all'angolo giro, anche queste espressioni, ottenute per derivazione dalla **2.4** sono soggette allo stesso ambito di validità.

$$3.5) \begin{cases} x(0.209s) = 0.5m(2\pi - \sin(2\pi)) = 3.141m \\ y(0.209s) = 0.5m(1 - \cos(2\pi)) = 0.0m \end{cases}$$

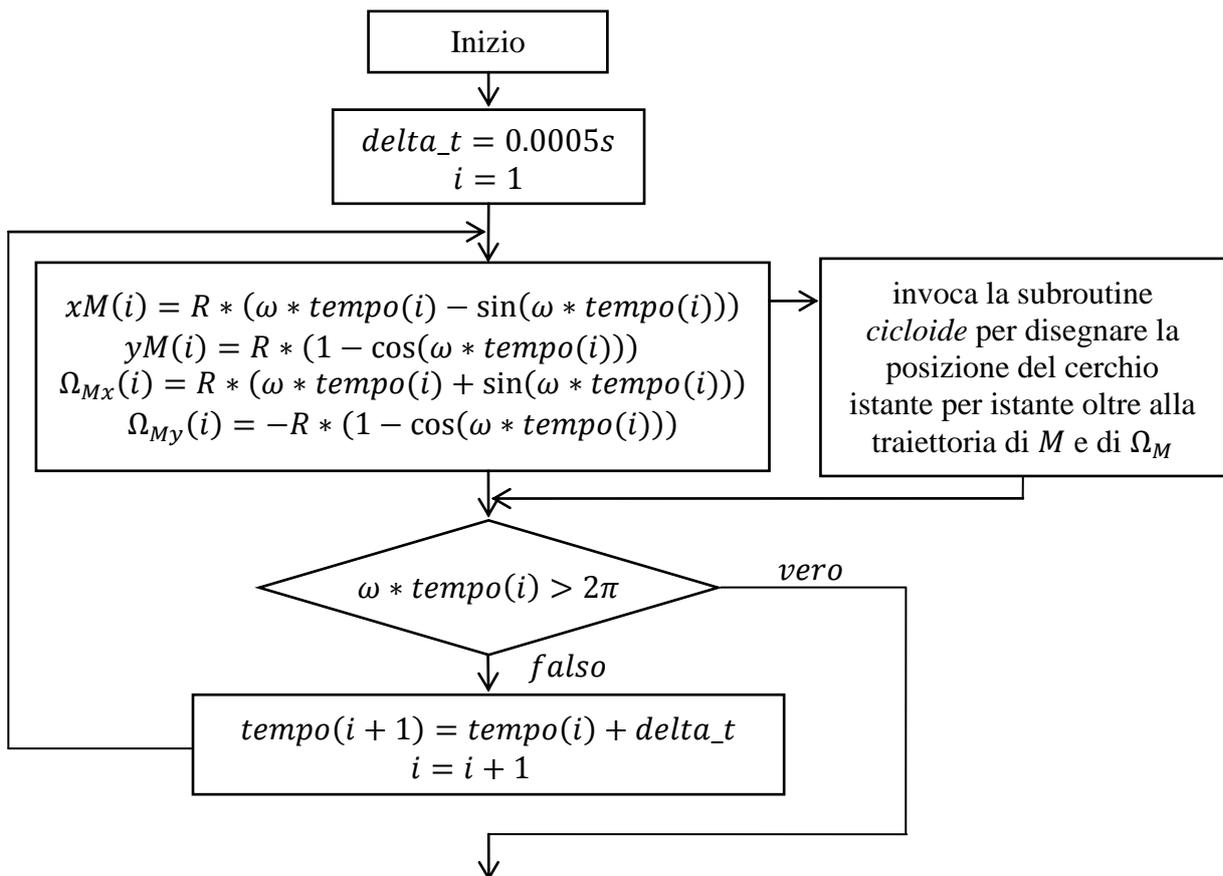
$$3.6) \begin{cases} \dot{x}(0.209s) = 0.5m30\frac{r}{s}(1 - \cos(2\pi)) = 0.0\frac{m}{s} \\ \dot{y}(0.209s) = 0.5m30\frac{r}{s}\sin(2\pi) = 0.0\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow |\vec{v}_M(0.209s)| = 450.0\frac{m}{s^2}$$

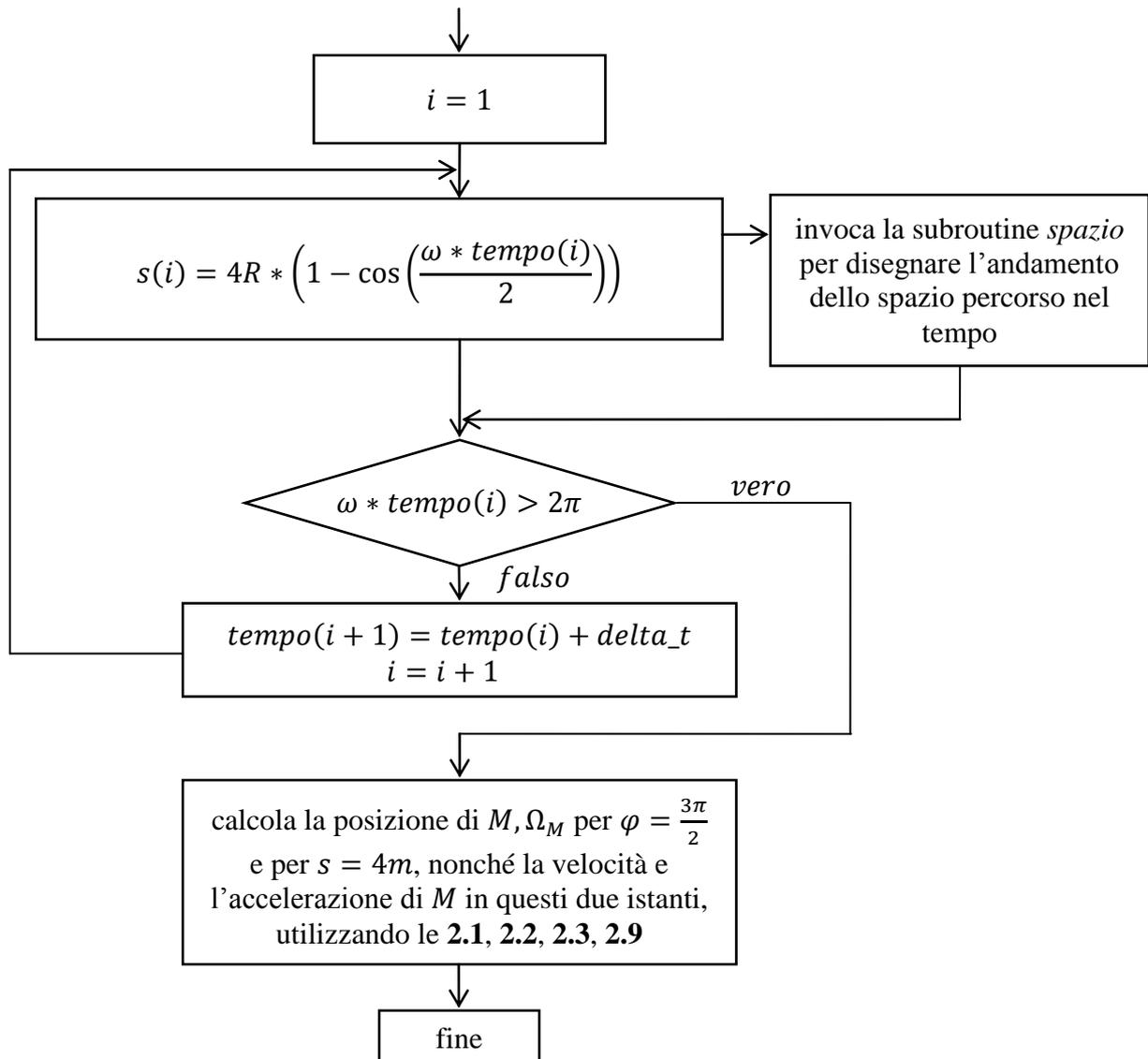
$$3.7) \begin{cases} \ddot{x}(0.209s) = 450\frac{m}{s^2}\sin(2\pi) = 0.0\frac{m}{s^2} \\ \ddot{y}(0.209s) = 450\frac{m}{s^2}\cos(2\pi) = 450.0\frac{m}{s^2} \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_M(0.209s)| = 450.0\frac{m}{s^2}$$

$$3.8) \begin{cases} \Omega_{Mx}(0.209s) = 0.5m(2\pi + \sin(2\pi)) = 3.141m \\ \Omega_{My}(0.209s) = -0.5m(1 - \cos(2\pi)) = 0.0m \end{cases}$$

$$3.9) \begin{cases} |\vec{a}_M^n|(0.209s) = 0.5m\left(30\frac{r}{s}\right)^2\sqrt{\frac{1-\cos(2\pi)}{2}} = 0.0\frac{m}{s^2} \\ |\vec{a}_M^t|(0.209s) = 0.5m\left(30\frac{r}{s}\right)^2\cos(\pi) = -450.0\frac{m}{s^2} \end{cases}$$

4. Algoritmo per la soluzione al calcolatore. Il seguente diagramma di flusso risolve i quesiti **1.2, 1.3, 1.4, 1.5.**



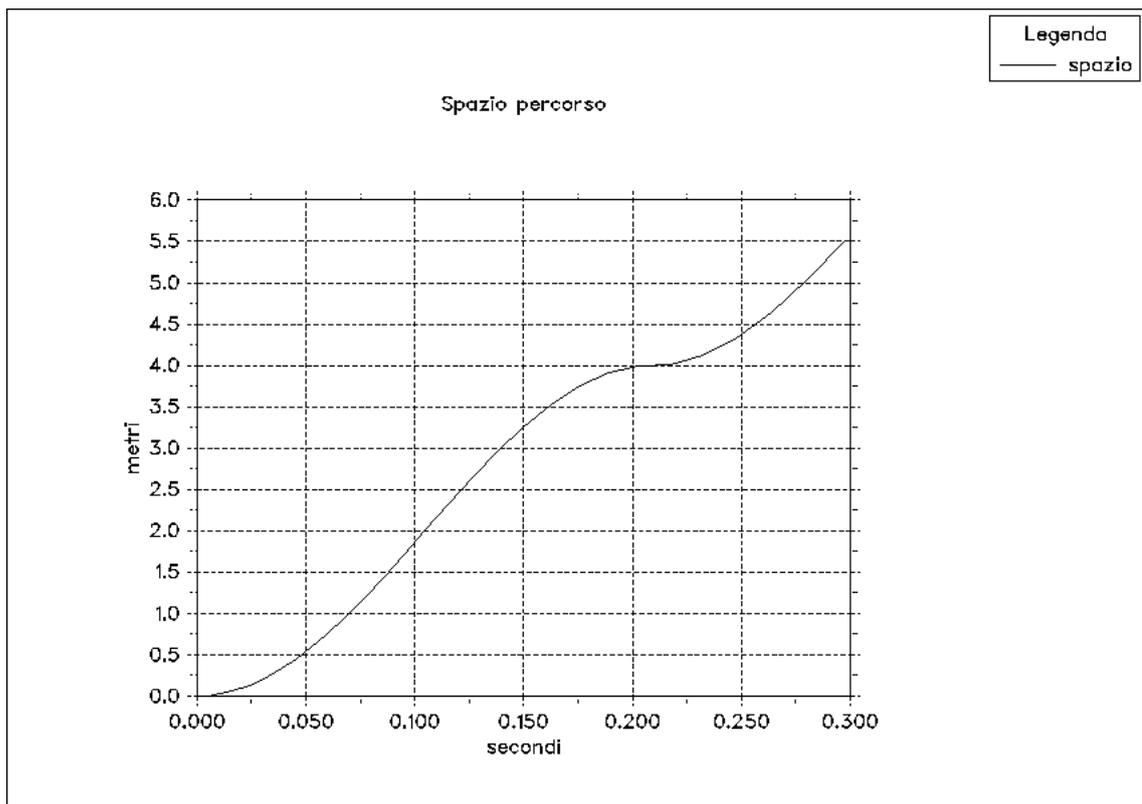
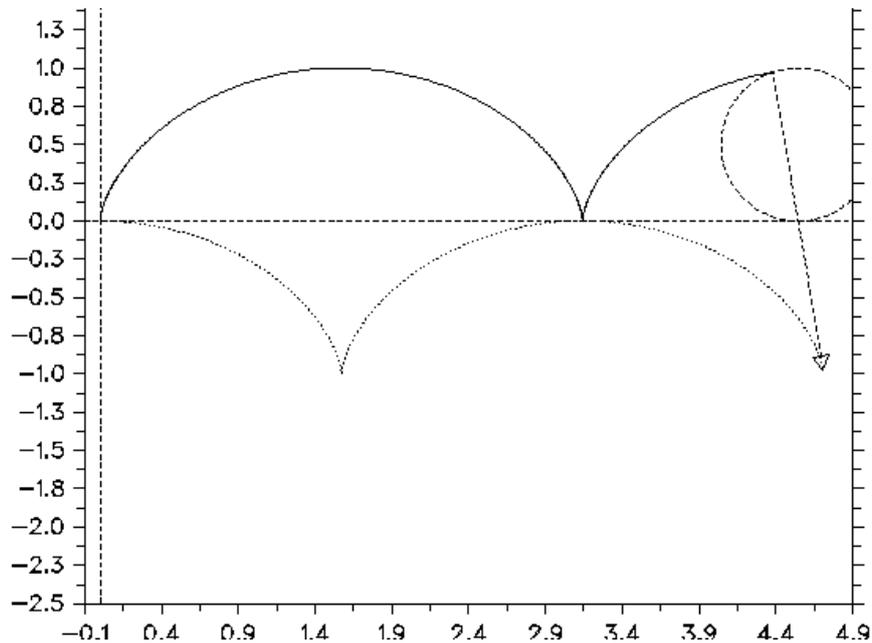


Il diagramma di flusso è sviluppato dai seguenti codici:

- l'unità chiamante *main_ese_9_a*, la quale si occupa di calcolare gli array associati alle **2.1**, **2.4**, da passare poi alle subroutine grafiche, in modo da ottenere una successioni di fotogrammi in cui la circonferenza descrive la sua rotazione mentre il punto *M* traccia la cicloide; e di ottenere il diagramma dello spazio percorso nel tempo;
- il modulo *mod_ese_9_a*, il quale contiene i parametri **1.1** e le seguenti subroutine:
 - *cicloide*, la quale traccia per ogni istante la posizione della circonferenza, la traiettoria percorsa a quell'istante da *M* e dal centro di curvatura della cicloide;
 - *spazio*, la quale si occupa di tracciare l'andamento dello spazio percorso da *M* in funzione del tempo.

5. Esecuzione del programma. Il programma fornisce un fotogramma ogni 0.0005s del moto della circonferenza che descrive una rotazione di 3π , in un tempo complessivo di circa 0.314s, per un totale di più di 600 fotogrammi; in ciascun fotogramma compare la traiettoria descritta -fino a quell'istante- da *M*, Ω_M .

In figura è riportato uno degli ultimi fotogrammi, in cui si può anche vedere un vettore che congiunge M al centro di curvatura della cicloide in M medesimo.



Il programma fornisce -per la rotazione di 3π - l'andamento dello spazio percorso da M in funzione del tempo. In figura l'output grafico.

Il programma fornisce in fine la risposta ai quesiti **1.4**, **1.5** fornendoli sullo schermo, come segue:

Per una rotazione di $3\pi/4$ della ruota si ha che:

le coordinate x,y di M sono rispettivamente 0.82454383 0.8535534

le componenti x,y della velocità di M sono rispettivamente 25.606602 10.606602

le componenti x,y della accelerazione di M sono rispettivamente 318.1981 -318.1981

le coordinate x,y del centro di curv. della traiettoria di M sono risp. 1.5316507 -0.8535534

Per una rotazione di 2π della ruota si ha che:

le coordinate x,y di M sono rispettivamente 3.1415927 0.

le componenti x,y della velocità di M sono rispettivamente 0. 0.0000026226833

le componenti x,y della accelerazione di M sono rispettivamente 0.00007868051 450.00006

le coordinate x,y del centro di curv. della traiettoria di M sono risp. 3.1415927 -0.

6. Soluzione grafica del punto 1.4. La configurazione del sistema per una rotazione di $3\pi/4$ si trova immediatamente considerando che il centro della circonferenza -stante la condizione di assenza di strisciamento- ha percorso uno spazio $R \frac{3\pi}{4} = 1.178m$; adottando allora una scala di rappresentazione delle distanze pari a

$$6.1) \quad \sigma_L = 0.1 \frac{m}{cm}$$

si ha la configurazione riportata in figura, dove è indicata la posizione del punto M . Si osservi allora quanto segue:

- il centro delle velocità C all'istante considerato coincide con il punto di contatto fra la circonferenza e l'asse x , essendo tale punto a velocità nulla per l'ipotesi di puro rotolamento;
- la polare mobile l coincide con la circonferenza, essendo essa percorsa dal centro delle velocità, durante il moto;
- la polare fissa λ coincide con l'asse x ;
- il centro di curvatura Ω_l della polare mobile coincide con il centro della circonferenza;
- il centro di curvatura della polare fissa è il punto improprio dell'asse y .

Per individuare il centro di curvatura della traiettoria di M in M medesimo si utilizza ora una costruzione geometrica che si basa a sua volta sulla formula di Euler-Savary, che nel presente caso si scrive

$$6.2) \quad \left(\frac{1}{CM} - \frac{1}{C\Omega_M} \right) \cos \psi = \frac{1}{R}$$

La costruzione passa attraverso i seguenti passaggi:

- si traccia la retta r tra M, C ;
- si traccia la retta $q \perp r$ per il punto C ;
- si traccia la retta t per M, Ω_l ;
- si indica L l'intersezione $t \cap q$;
- si traccia la retta p per L e per Ω_λ , ovvero -in questo caso- una retta verticale per L .

Ebbene, l'intersezione $r \cap p$ identifica il punto Ω_M . Leggendo il disegno e considerando la scala **6.1** si ha allora

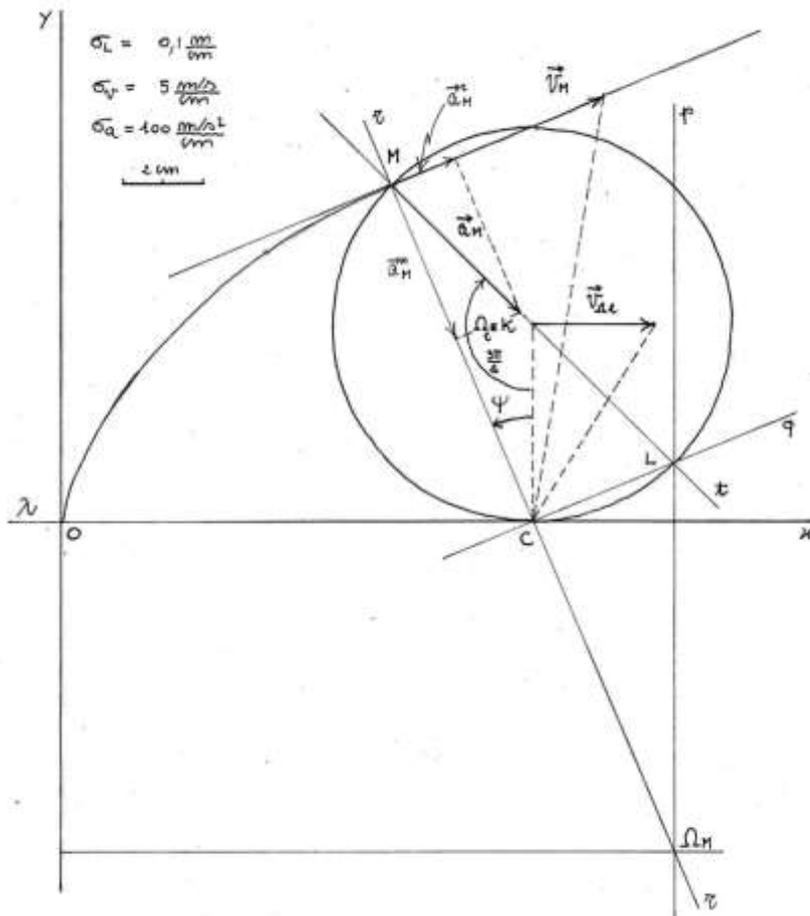
$$6.3) \quad \begin{cases} \Omega_{Mx} = 15.3cm\sigma_L = 15.3cm \cdot 0.1 \frac{m}{cm} = 1.53m \\ \Omega_{My} = -8.3cm\sigma_L = -8.3cm \cdot 0.1 \frac{m}{cm} = -0.83m \end{cases}$$

che è in accordo con la 3.4. Per la velocità del punto M si consideri che anziché procedere con il metodo dei diagrammi polari si può invece fissare una scala di rappresentazione delle velocità, ad esempio

$$6.4) \quad \sigma_v = 5 \frac{m/s}{cm}$$

quindi riportare sul disegno stesso -in scala- la velocità del centro della circonferenza, considerando che

$$6.5) \quad |\vec{v}_{\Omega_1}| = \omega R = 30 \frac{r}{s} 0.5m = 15 \frac{m}{s}$$



Dunque il vettore rappresentativo della 6.5 ha lunghezza $15 \frac{m}{s} / 5 \frac{m/s}{cm} = 3cm$; tracciato tale vettore è immediato ricavare la velocità di qualunque altro punto solidale alla circonferenza, tenendo presente la struttura del campo delle velocità e la conoscenza del centro delle velocità C . Allora la lettura del disegno porge

$$6.6) \quad |\vec{v}_M| = 5.8cm\sigma_v = 5.8cm5 \frac{m/s}{cm} = 29 \frac{m}{s}$$

in discreto accordo con la 3.2. In conclusione poi - per l'accelerazione del punto tracciante- si consideri che

- il centro della circonferenza si muove di moto rettilineo uniforme, dunque ha accelerazione nulla e dunque coincide con il centro delle accelerazioni K ;
- essendo la rotazione del piano mobile a velocità angolare costante, segue che l'accelerazione angolare è nulla e dunque l'accelerazione del generico punto del piano mobile punta il centro della circonferenza con modulo proporzionale alla distanza da tale centro, secondo il quadrato della velocità angolare.

Dunque si ha

$$6.7) \quad |\vec{a}_M| = |\vec{a}_{MK}^n| = \omega^2 R = 30^2 0.5 \frac{m}{s^2} = 450 \frac{m}{s^2}$$

L'accelerazione **6.7** è riportata -secondo la scala indicata- sul disegno. Mentre il punto M del piano mobile non ha accelerazione tangenziale, il punto M inteso come punto che percorre la cicloide ha accelerazione normale e tangenziale, che possono essere lette direttamente dalla figura. Considerando la scala di rappresentazione si trova

$$6.8) \quad \begin{cases} |\vec{a}_M^t| = 1.2 cm \sigma_a = 1.2 cm \frac{100 m/s^2}{cm} = 120 \frac{m}{s^2} \\ |\vec{a}_M^n| = 4.2 cm \sigma_a = 4.2 cm \frac{100 m/s^2}{cm} = 420 \frac{m}{s^2} \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_M| = \sqrt{120^2 + 420^2} \frac{m}{s^2} = 436.806 \frac{m}{s^2}$$

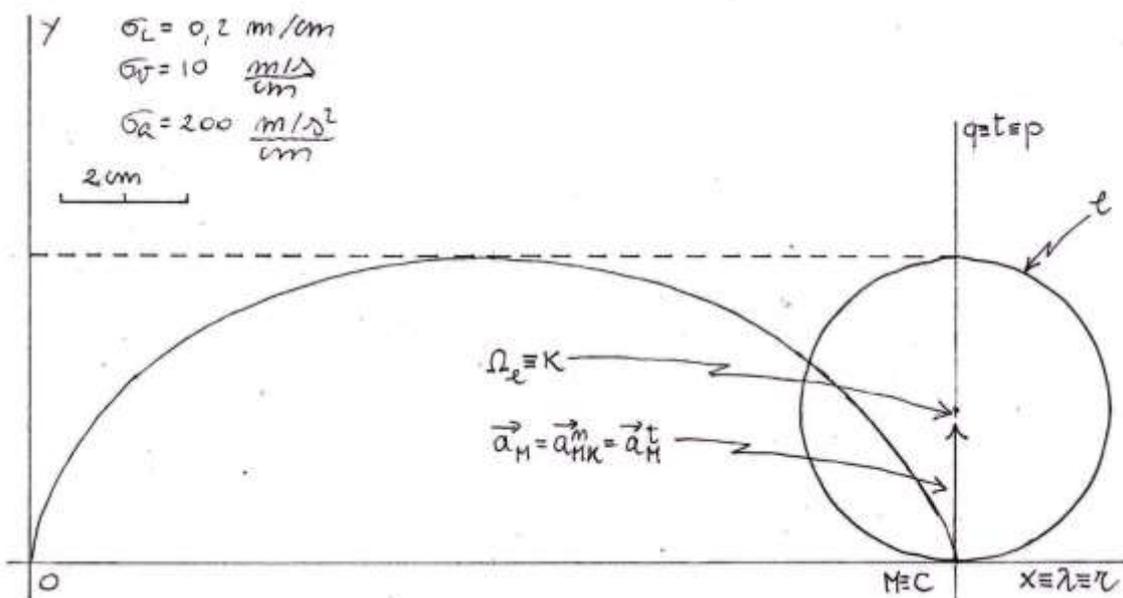
in discreto accordo con la corrispondente soluzione analitica **3.5**.

7. Soluzione grafica del punto 1.5. La configurazione del sistema per una rotazione di 2π si trova procedendo come nel paragrafo precedente; adottando allora una scala di rappresentazione delle distanze pari a

$$7.1) \quad \sigma_L = 0.2 \frac{m}{cm}$$

si ha la configurazione indicata in figura, dove si vede subito come in questo caso il punto tracciante coincida con il centro delle velocità. Dunque si ha immediatamente che

$$7.2) \quad |\vec{v}_M| = 0 \frac{m}{s}$$



Per l'accelerazione si consideri che essa punta il centro delle accelerazioni, essendo costante la velocità angolare; il centro delle accelerazioni poi coincide con il centro della circonferenza, che si muove di moto rettilineo uniforme. Il modulo della accelerazione ha in fine il valore già calcolato in **6.7**.

$$7.3) \quad |\vec{a}_M| = |\vec{a}_{MK}| = |\vec{a}_{MK}^n| = |\vec{a}_M^t| = 450 \frac{m}{s^2}$$

Si osservi che in questo caso l'accelerazione di M è tutta normale se inteso come punto del piano mobile, è invece tutta tangenziale se intesa come accelerazione del punto che traccia la cicloide.

In figura è riportato, secondo la scala indicata, un vettore rappresentativo dell'accelerazione del punto tracciante.

Il centro di curvatura non può essere individuato secondo la procedura grafica usata nel precedente paragrafo, poiché le rette p, r in questo caso coincidono, e dunque non permettono di individuare una intersezione; tuttavia la **6.2** suggerisce che sia $C\Omega_M = 0$, quindi il centro di curvatura ha proprio le coordinate calcolate in **3.8**.

8. Codice del programma principale.

```
PROGRAM main_ese_9_a

!usa DISLIN

USE DISLIN

!usa il modulo mod_ese_9_a

USE mod_ese_9_a

!sezione dichiarativa

IMPLICIT NONE

!dichiaro l'array che contiene le coordinate di M

REAL, DIMENSION (1:1000):: xM, yM

!dichiaro l'array che contiene le coordinate del centro di curvatura

REAL, DIMENSION (1:1000):: xc, yc

!dichiaro l'array che contiene i valori dell'ascissa curvilinea

REAL, DIMENSION (1:1000):: st

!dichiaro l'array che contiene gli istanti di tempo

REAL, DIMENSION (1:1000):: tempo = 0.

!dichiaro la variabile che contiene l'istante di tempo considerato

REAL:: t = 0.

!dichiaro l'incremento di tempo

REAL:: delta_t = 0.0005
```

```

!dichiaro l'indice del ciclo

INTEGER:: i

!dichiaro posizione, velocità e accelerazione di M

REAL:: xemme, yemme, xemme_p, yemme_p, xemme_p_p, yemme_p_p

!dichiaro la posizione del centro di curvatura

REAL:: xcentro, ycentro

!dichiaro la stringa per chiudere il programma

CHARACTER(len=10):: chiusura

!sezione esecutiva

!Calcolo i valori delle coordinate di M e del centro di curvatura

i = 1

coordinate_M: DO

    xM(i) = raggio*( omega*tempo(i) - SIN(omega*tempo(i)) )
    yM(i) = raggio*( 1. - COS(omega*tempo(i)) )

    xc(i) = raggio*( omega*tempo(i) + SIN(omega*tempo(i)) )
    yc(i) = (-1)*raggio*( 1. - COS(omega*tempo(i)) )

    CALL cicloide (xM, yM, xc, yc, tempo, i)

    IF (omega*tempo(i)>3.*pi) EXIT coordinate_M

    tempo(i+1) = tempo(i) + delta_t
    i = i + 1

END DO coordinate_M

!calcolo i valori dello spazio percorso

i = 1

spazio_percorso: DO

    st(i) = 4*raggio*( 1. - COS(omega*tempo(i)/2.) )

    condizione: IF (omega*tempo(i)>2.*pi) THEN

        st(i) = 8*raggio + 8*raggio - 4*raggio*( 1. - COS(omega*tempo(i)/2.) )

    END IF condizione

    IF (omega*tempo(i)>3.*pi) EXIT spazio_percorso

    tempo(i+1) = tempo(i) + delta_t*REAL(i)
    i = i + 1

END DO spazio_percorso

```

!traccia il diagramma dello spazio in funzione del tempo

CALL spazio (st, tempo, i)

!calcola posizione, velocita' e accelerazione di M per $\omega t = 3\pi/4$

xemme = raggio*(3.*pi/4. - SIN(3.*pi/4.))

yemme = raggio*(1. - COS(3.*pi/4.))

xemme_p = raggio*omega*(1. - COS(3.*pi/4.))

yemme_p = raggio*omega*SIN(3.*pi/4.)

xemme_p_p = raggio*(omega**2.)*SIN(3.*pi/4.)

yemme_p_p = raggio*(omega**2.)*COS(3.*pi/4.)

xcentro = raggio*(3.*pi/4. + SIN(3.*pi/4.))

ycentro = (-1)*raggio*(1. - COS(3.*pi/4.))

WRITE(*,*) " "

WRITE(*,*) "Per una rotazione di $3\pi/4$ della ruota si ha che:"

WRITE(*,*) " "

WRITE(*,*) "le coordinate x,y di M sono rispettivamente", xemme, yemme

WRITE(*,*) " "

WRITE(*,*) "le componenti x,y della velocita' di M sono rispettivamente", xemme_p, yemme_p

WRITE(*,*) " "

WRITE(*,*) "le componenti x,y della accelerazione di M sono rispettivamente", xemme_p_p, yemme_p_p

WRITE(*,*) " "

WRITE(*,*) "le coordinate x,y del centro di curv. della traiettoria di M sono risp.", xcentro, ycentro

WRITE(*,*) " "

!calcola posizione, velocita' e accelerazione di M per $\omega t = 2\pi$

xemme = raggio*(2.*pi - SIN(2.*pi))

yemme = raggio*(1. - COS(2.*pi))

xemme_p = raggio*omega*(1. - COS(2.*pi))

yemme_p = raggio*omega*SIN(2.*pi)

xemme_p_p = raggio*(omega**2.)*SIN(2.*pi)

yemme_p_p = raggio*(omega**2.)*COS(2.*pi)

xcentro = raggio*(2.*pi + SIN(2.*pi))

ycentro = (-1)*raggio*(1. - COS(2.*pi))

WRITE(*,*) " "

WRITE(*,*) "Per una rotazione di 2π della ruota si ha che:"

WRITE(*,*) " "

WRITE(*,*) "le coordinate x,y di M sono rispettivamente", xemme, yemme

WRITE(*,*) " "

WRITE(*,*) "le componenti x,y della velocita' di M sono rispettivamente", xemme_p, yemme_p

WRITE(*,*) " "

WRITE(*,*) "le componenti x,y della accelerazione di M sono rispettivamente", xemme_p_p, yemme_p_p

WRITE(*,*) " "

WRITE(*,*) "le coordinate x,y del centro di curv. della traiettoria di M sono risp.", xcentro, ycentro

WRITE(*,*) " "

!le seguenti righe permettono di agevolare il lancio del programma dalla icona

WRITE (*,*) " "

WRITE (*,*) "To close the program press any key. Then press RETURN."

```

READ (*,*) chiusura
STOP
END PROGRAM main_ese_9_a

```

9. Codice del modulo.

```

MODULE mod_ese_9_a
!sezione dichiarativa
IMPLICIT NONE
!dichiaro le costanti geometriche del quadrilatero
REAL, PARAMETER:: omega = 30.
REAL, PARAMETER:: raggio = 0.5
REAL, PARAMETER:: pi = 3.14159265359
!scrivo le subroutine
CONTAINS
!-----
SUBROUTINE cicloide (xM, yM, xc, yc, tempo, i)
!sezione dichiarativa
!dichiaro gli argomenti fittizi
!dichiaro gli array delle coordinate di M e del centro di curvatura
REAL,INTENT(IN),DIMENSION(1:1000):: xM, yM, xc, yc, tempo
!dichiaro il numero di istanti considerati
INTEGER,INTENT(IN):: i
!dichiaro le variabili locali
!coordinate centro cerchio
REAL:: xcerchio, ycerchio
!stringa usata per la legenda
CHARACTER(len=30)::stringa
!sezione esecutiva
!imposto il tipo di file
CALL METAFL ('bmp') !indico il formato dell'output
CALL BMPMOD (25000,'meter','resolution') !risoluzioneformato .bmp
!imposto la pagina

```

```

CALL SCRMOD ('revers') !scritta nera su fondo bianco
CALL DISINI      !richiama alcune impostazioni di default
CALL PAGERA      !traccio un bordo per il piano xy
CALL DUPLX       !font a doppio spessore

!imposto gli assi

CALL AXSPOS (700,2000)           !coordinate angolo basso sinistra
CALL AXSLEN (1700,1700)         !lunghezza dei due assi in pixel
CALL NAME (' ','x')             !nome delle ascisse
CALL NAME (' ','y')             !nome delle ordinate
CALL GRAF (-0.1,4.9,-0.1,0.5,-2.5,2.5,-2.5,0.25) !inizio, fine, incremento assi x,y
CALL GRID (1,1)                 !impone una griglia sul piano coordinato
CALL XAXGIT                    !traccio la retta x=0
CALL YAXGIT                    !traccio la retta y=0
CALL DASH                      !tratteggio per gli assi coordinati
CALL NAME ('metri','x')        !nome delle ascisse
CALL NAME ('metri','y')        !nome delle ordinate

!imposto il titolo

CALL TITLIN ("Cicloide",1)      !prima riga del titolo
CALL TITLE                     !stampa il titolo di cui sopra

!traccio le curve

CALL CHNCRV ('line')           !usa tratti diversi per le tre curve
CALL CURVE (xM, yM, i)         !traccio la cicloide
CALL CURVE (xc, yc, i)         !traccio la traiettoria del centro di curvatura

!ricavo il centro del cerchio nell'ultima posizione

xcerchio = omega*tempo(i)*raggio
ycerchio = raggio

!traccio la circonferenza nell'ultima posizione

CALL RLCIRC (xcerchio, ycerchio, raggio)

!traccio un vettore che congiunge M al centro di curvatura

CALL RLVEC (xM(i), yM(i), xc(i), yc(i), 2211)

!imposto la legenda

CALL LEGINI (stringa,2,10)      !variabile di carattere, righe, lunghezza
CALL LEGTIT ('Legenda')        !titolo legenda
CALL LEGLIN (stringa,'cicloide',1) !prima riga della legenda
CALL LEGLIN (stringa,'omega_M',2) !seconda riga della legenda
CALL LEGEND (stringa,3)        !posizine in alto a destra

CALL DISFIN

END SUBROUTINE cicloide

!-----

SUBROUTINE spazio (st, tempo, i)

!sezione dichiarativa

```

```

!dichiaro gli argomenti fittizi

!dichiaro l'array dello spazio e quello del tempo
REAL,INTENT(IN),DIMENSION(1:1000):: st, tempo

!dichiaro il numero di istanti considerati
INTEGER,INTENT(IN):: i

!dichiaro le variabili locali

!stringa usata per la legenda
CHARACTER(len=30)::stringa

!sezione esecutiva

!imposto il formato del file
CALL METAFL ('bmp')           !indico il formato dell'output
CALL BMPMOD (25000,'meter','resolution') !risoluzione del formato .bmp

!imposto la pagina
CALL SCRMOD ('revers')       !scritta nera su fondo bianco
CALL DISINI                   !richiama alcune impostazioni di default
CALL PAGERA                   !traccio un bordo per il piano xy
CALL DUPLX                    !font a doppio spessore

!imposto gli assi x,y
CALL AXSPOS (700,2700)       !coordinate angolo basso sinistra
CALL AXSLEN (1700,1300)     !lunghezza dei due assi in pixel
CALL NAME ('secondi','x')    !nome delle ascisse
CALL NAME ('metri','y')     !nome delle ordinate
CALL LABDIG (3,'x')         !chiedo 3 cifre decimali per l'asse x
CALL DASH                     !tratteggio per gli assi coordinati

CALL GRAF (0.0,0.3,0.0,0.05,0.0,6.,0.0,0.5) !inizio, fine, intervallo assi x, y
CALL GRID (1,1)             !impone una griglia sul piano coordinato

CALL XAXGIT                   !traccio la retta x=0
CALL YAXGIT                   !traccio la retta y=0

!traccio la curva
CALL MYLINE (1,1)           !chiede una linea continua per la curva
CALL CURVE (tempo, st, i)   !traccio lo spazio in funzione del tempo

!imposto il titolo
CALL TITLIN ("Spazio percorso",1)!prima riga del titolo
CALL TITLE                  !stampa il titolo di cui sopra

!imposto la legenda
CALL LEGINI (stringa,1,15)   !variabile di carattere, righe, lunghezza
CALL LEGLIN (stringa,'spazio',1) !contenuto della legenda

```

```
CALL LEGTIT ('Legenda')           !titolo legenda
CALL LEGEND (stringa,3)          !posizine in alto a destra

CALL DISFIN

END SUBROUTINE spazio

!-----

END MODULE mod_ese_9_a
```

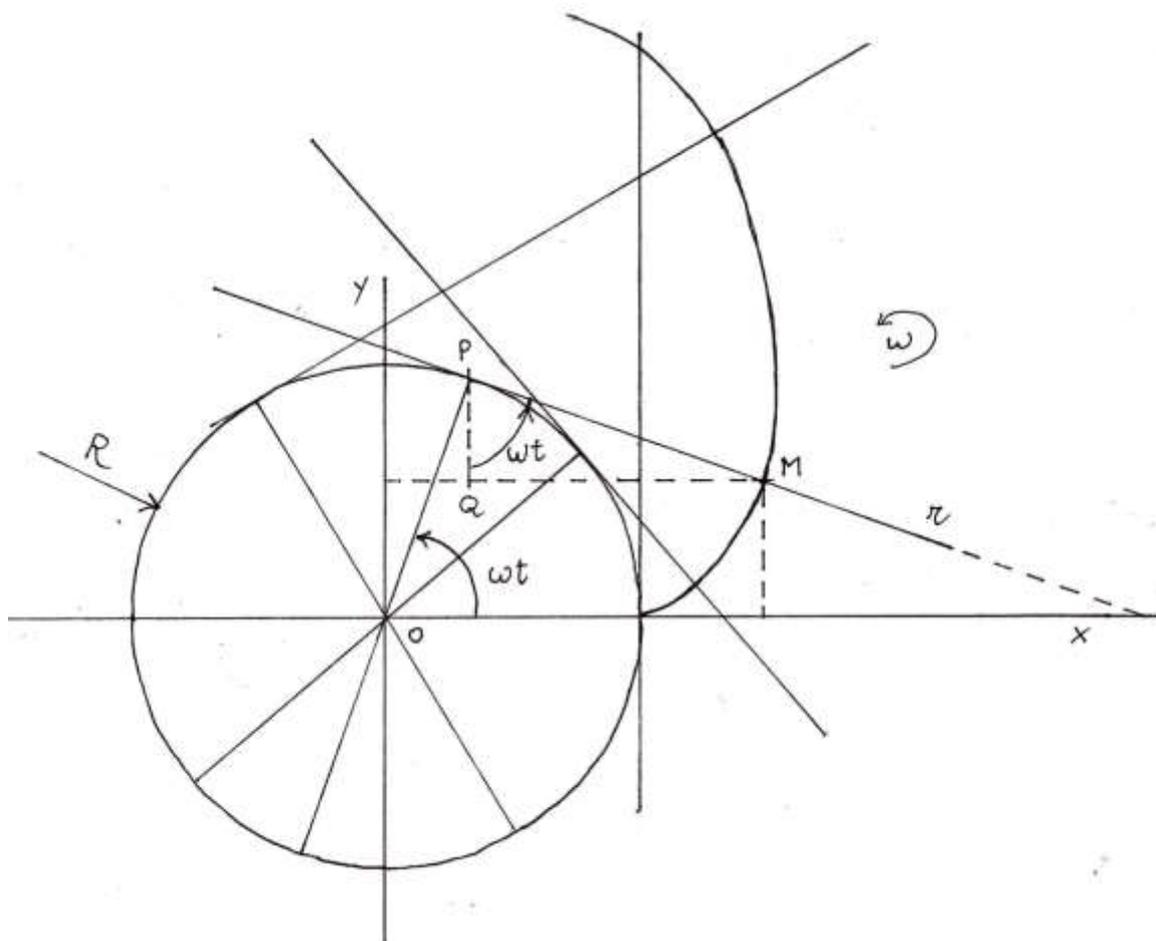
Evolvente

1. Il quesito. Una retta ruota senza strisciamento con velocità angolare costante su una circonferenza; la velocità angolare del moto e il raggio della circonferenza siano quelli di seguito assegnati:

$$1.1) \quad \begin{cases} R = 0.3m \\ \omega = 50 \frac{r}{s} \end{cases}$$

Detto M il punto di contatto fra circonferenza e retta all'istante iniziale, si determini allora

- 1.2) la traiettoria descritta da M durante il moto;
- 1.3) il diagramma dello spazio percorso da M in funzione del tempo;
- 1.4) la velocità e l'accelerazione di M in corrispondenza all'istante $t = 0.14s$;
- 1.5) la velocità e l'accelerazione di M in corrispondenza all'istante $t = 0.28s$.



2. Discussione analitica. Dato il sistema di riferimento Oxy in figura, sia M il punto della retta il quale sia coincidente con O per $t = 0$. Volendo ricavare **le coordinate di M in funzione del tempo** si evince dalla figura quanto segue:

$$PM = R\omega t \Rightarrow \begin{cases} x(t) = R \cos(\omega t) + R\omega t \sin(\omega t) \\ y(t) = R \sin(\omega t) - R\omega t \cos(\omega t) \end{cases} \Rightarrow$$

$$2.1) \quad \begin{cases} x(t) = R \cos(\omega t) + R\omega t \sin(\omega t) = R(\cos(\omega t) + \omega t \sin(\omega t)) \\ y(t) = R \sin(\omega t) - R\omega t \cos(\omega t) = R(\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)) \end{cases}$$

Per l'analisi cinematica del primo ordine del punto M derivando le 2.1 si ha

$$2.2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -R\omega \sin(\omega t) + R\omega(\sin(\omega t) + \omega t \cos(\omega t)) = R\omega^2 t \cos(\omega t) \\ \dot{y}(t) = R\omega \cos(\omega t) - R\omega(\cos(\omega t) - \omega t \sin(\omega t)) = R\omega^2 t \sin(\omega t) \end{cases}$$

Derivando ancora le 2.3 si ottiene l'analisi cinematica del secondo ordine

$$2.3) \quad \begin{cases} \ddot{x}(t) = R\omega^2(\cos(\omega t) - \omega t \sin(\omega t)) \\ \ddot{y}(t) = R\omega^2(\sin(\omega t) + \omega t \cos(\omega t)) \end{cases}$$

Assumendo la posizione iniziale di M come origine dell'ascissa curvilinea $s = s(t)$ abbiamo che lo spazio percorso nell'intervallo di tempo $[0, t]$ è dato da

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau)} d\tau = \int_0^t \sqrt{(R\omega^2\tau \cos(\omega\tau))^2 + (R\omega^2\tau \sin(\omega\tau))^2} d\tau = \\ &= \int_0^t \sqrt{(R\omega^2\tau)^2} d\tau = \int_0^t R\omega^2\tau d\tau = R\omega^2 \int_0^t \tau d\tau \end{aligned}$$

Ho trovato dunque lo spazio percorso da M in funzione del tempo

$$2.4) \quad s(t) = \frac{R\omega^2 t^2}{2}$$

Ricordo ora che le coordinate del centro di curvatura della traiettoria sono date da

$$2.5) \quad \begin{cases} \Omega_{Mx}(t) = x(t) + \dot{y}(t) \frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)} \\ \Omega_{My}(t) = y(t) - \dot{x}(t) \frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)} \end{cases}$$

dove si ha

$$\begin{aligned} &\ddot{x}(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)\ddot{y}(t) = \\ &= R^2\omega^4 t(\sin(\omega t) \cos(\omega t) - \omega t \sin^2(\omega t)) - R^2\omega^4 t(\sin(\omega t) \cos(\omega t) + \omega t \cos^2(\omega t)) = \\ &= R^2\omega^4 t(\sin(\omega t) \cos(\omega t) - \omega t \sin^2(\omega t) - \sin(\omega t) \cos(\omega t) - \omega t \cos^2(\omega t)) = -R^2\omega^5 t^2 \end{aligned}$$

e dunque abbiamo che nel nostro caso -sostituendo nelle 2.5 le 2.1, 2.2, 2.3- si ha

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \Omega_{Mx} = R(\cos(\omega t) + \omega t \sin(\omega t)) + R\omega^2 t \sin(\omega t) \frac{R^2\omega^4 t^2}{\ddot{x}(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)\ddot{y}(t)} \\ \Omega_{My} = R(\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)) - R\omega^2 t \cos(\omega t) \frac{R^2\omega^4 t^2}{\ddot{x}(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)\ddot{y}(t)} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \Omega_{Mx} = R(\cos(\omega t) + \omega t \sin(\omega t)) + R\omega^2 t \sin(\omega t) \frac{R^2\omega^4 t^2}{-R^2\omega^5 t^2} \\ \Omega_{My} = R(\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)) - R\omega^2 t \cos(\omega t) \frac{R^2\omega^4 t^2}{-R^2\omega^5 t^2} \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Omega_{Mx} = R(\cos(\omega t) + \omega t \sin(\omega t)) - R\omega t \sin(\omega t) \\ \Omega_{My} = R(\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)) + R\omega t \cos(\omega t) \end{cases} \Rightarrow$$

$$2.10) \begin{cases} \Omega_{Mx}(t) = R \cos(\omega t) \\ \Omega_{My}(t) = R \sin(\omega t) \end{cases}$$

Dunque il centro di curvatura della evolvente coincide proprio con il punto di contatto fra cerchio e retta.

Volendo la **curvatura** -al fine di calcolare accelerazione angolare e tangenziale del punto M che descrive la cicloide- si osservi che

$$R_c(t) = \frac{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}(t)\dot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)|} = \frac{(R^2\omega^4t^2)^{\frac{3}{2}}}{R^2\omega^5t^2} = \frac{(R^2\omega^4t^2)^{\frac{3}{2}}}{R^2\omega^5t^2} = \frac{R^3\omega^6t^3}{R^2\omega^5t^2} \Rightarrow$$

$$2.11) R_c(t) = R\omega t$$

Poiché inoltre la **2.4** porge

$$2.12) \begin{cases} \dot{s}(t) = R\omega^2 t \\ \ddot{s}(t) = R\omega^2 \end{cases}$$

abbiamo per l'**accelerazione normale** che

$$\vec{a}_M^n = \frac{\dot{s}^2(t)}{R_c(t)} \vec{N}(t) = \frac{(R\omega^2 t)^2}{R\omega t} \vec{N}(t) = \frac{R^2\omega^4 t^2}{R\omega t} \vec{N}(t) = R\omega^3 t \vec{N}(t)$$

e per l'**accelerazione tangenziale** che

$$\vec{a}_M^t = R\omega^2 \vec{T}(t)$$

Quindi si conclude che

$$2.12) \begin{cases} \vec{a}_M^n(t) = R\omega^3 t \vec{N}(t) \\ \vec{a}_M^t(t) = R\omega^2 \vec{T}(t) \end{cases}$$

3. Soluzione analitica. Per rispondere al quesito **1.4** si consideri che

$$t = 0.14s \Rightarrow \omega t = 50 \frac{r}{s} \cdot 0.14s = 7r \Rightarrow$$

$$3.1) \begin{cases} x(0.14s) = 0.3m(\cos(7r) + 7r \sin(7r)) = 1.605m \\ y(0.14s) = 0.3m(\sin(7r) - 7r \cos(7r)) = -1.386m \end{cases}$$

$$3.2) \begin{cases} \dot{x}(0.14s) = 0.3m \left(50 \frac{r}{s}\right)^2 0.14s \cos(7r) = 79.159 \frac{m}{s} \\ \dot{y}(0.14s) = 0.3m \left(50 \frac{r}{s}\right)^2 0.14s \sin(7r) = 68.983 \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$3.3) \begin{cases} \ddot{x}(0.14s) = 0.3m \left(50 \frac{r}{s}\right)^2 (\cos(7r) - 7r \sin(7r)) = -2883.752 \frac{m}{s^2} \\ \ddot{y}(0.14s) = 0.3m \left(50 \frac{r}{s}\right)^2 (\sin(7r) + 7r \cos(7r)) = 4450.726 \frac{m}{s^2} \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_M| = 5303.299 \frac{m}{s^2}$$

$$3.4) \begin{cases} |\vec{a}_M^n(0.14s)| = R\omega^3 t = 0.3m \left(50 \frac{r}{s}\right)^3 0.14s = 5250 \frac{m}{s^2} \\ |\vec{a}_M^t(0.14s)| = R\omega^2 = 0.3m \left(50 \frac{r}{s}\right)^2 = 750 \frac{m}{s^2} \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_M| = 5303.300 \frac{m}{s^2}$$

Per il quesito **1.5** si consideri invece che la **2.4** porge

$$t = 0.28s \Rightarrow \omega t = 50 \frac{r}{s} 0.28s = 14r \Rightarrow$$

$$3.4) \begin{cases} x(0.28s) = 0.3m(\cos(14r) + 14r \sin(14r)) = 4.201m \\ y(0.28s) = 0.3m(\sin(7r) - 7r \cos(7r)) = -0.277m \end{cases}$$

$$3.5) \begin{cases} \dot{x}(0.28s) = 0.3m \left(50 \frac{r}{s}\right)^2 0.28s \cos(14r) = 28.714 \frac{m}{s} \\ \dot{y}(0.28s) = 0.3m \left(50 \frac{r}{s}\right)^2 0.28s \sin(14r) = 208.027 \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$3.6) \begin{cases} \ddot{x}(0.28s) = 0.3m \left(50 \frac{r}{s}\right)^2 (\cos(14r) - 14r \sin(14r)) = -10298.824 \frac{m}{s^2} \\ \ddot{y}(0.28s) = 0.3m \left(50 \frac{r}{s}\right)^2 (\sin(14r) + 14r \cos(14r)) = 2178.696 \frac{m}{s^2} \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_M| = 10526.751 \frac{m}{s^2}$$

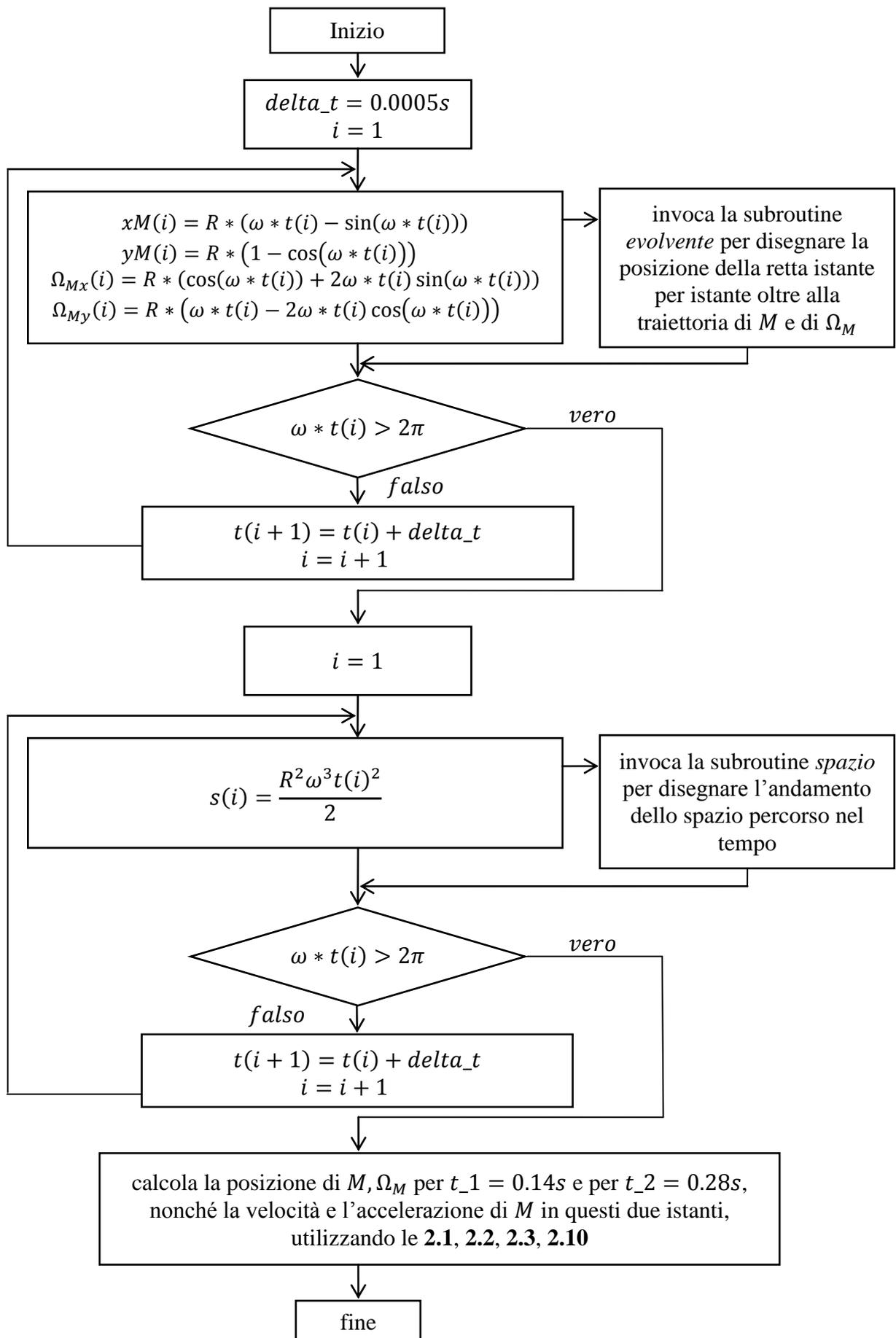
$$3.7) \begin{cases} |\vec{a}_M^n(0.28s)| = R\omega^3 t = 0.3m \left(50 \frac{r}{s}\right)^3 0.28s = 10500 \frac{m}{s^2} \\ |\vec{a}_M^t(0.28s)| = R\omega^2 = 0.3m \left(50 \frac{r}{s}\right)^2 = 750 \frac{m}{s^2} \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_M| = 10526.751 \frac{m}{s^2}$$

4. Algoritmo per la soluzione al calcolatore. Per risolvere i quesiti **1.2**, **1.3**, **1.4**, **1.5**, ho scritto in Fortran i seguenti codici:

- l'unità chiamante *main_ese_9_b*, la quale si occupa di calcolare gli array associati alle **2.1**, **2.4**, da passare poi alle subroutine grafiche, in modo da ottenere una successioni di fotogrammi in cui la retta descrive la sua rotazione mentre il punto *M* traccia la evolvente; e di ottenere il diagramma dello spazio percorso nel tempo;
- il modulo *mod_ese_9_b*, il quale contiene i parametri **1.1** e le seguenti subroutine:
 - *evolvente*, la quale traccia per ogni istante la posizione della retta, la traiettoria percorsa a quell'istante da *M* e dal centro di curvatura della evolvente;
 - *spazio*, la quale si occupa di tracciare l'andamento dello spazio percorso da *M* in funzione del tempo.

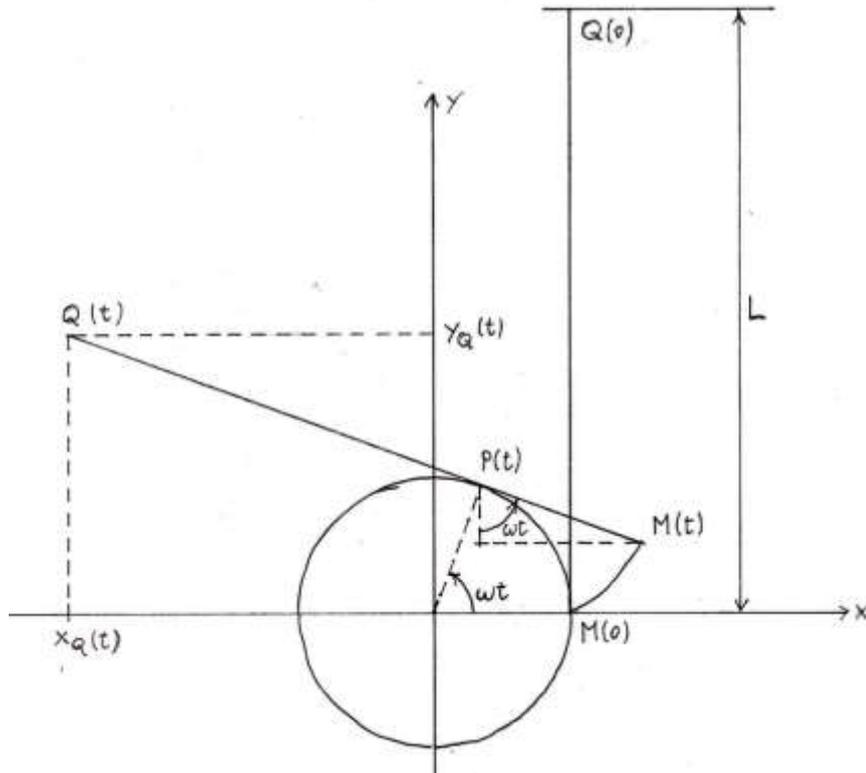
Il diagramma di flusso del codice è riportato nel seguito. Si osservi che per tracciare la retta mobile è necessario fornire la posizione anche di un secondo punto, oltre al punto *M*; a tale scopo si consideri la figura, si ha:

$$MP = \omega t R \Rightarrow PQ = L - MP = L - \omega t R \Rightarrow \begin{cases} x_Q = R \cos \omega t - (L - \omega t R) \sin \omega t \\ y_Q = R \sin \omega t + (L - \omega t R) \cos \omega t \end{cases}$$



Se poi si assume $L = 3\pi R$ abbiamo

$$4.1) \begin{cases} x_Q = R \cos \omega t - (3\pi R - \omega t R) \sin \omega t = R(\cos \omega t - (3\pi - \omega t) \sin \omega t) \\ y_Q = R \sin \omega t + (3\pi R - \omega t R) \cos \omega t = R(\sin \omega t + (3\pi - \omega t) \cos \omega t) \end{cases}$$



5. Esecuzione del programma. Il programma fornisce un fotogramma ogni 0.0005s del moto della retta che descrive una rotazione di 3π , in un tempo complessivo di circa 0.188s, per un totale di 376 fotogrammi; in ciascun fotogramma compare la traiettoria descritta -fino a quell'istante- da M, Ω_M .

In figura è riportato uno degli ultimi fotogrammi, in cui si può anche vedere un vettore che congiunge M al centro di curvatura della cicloide in M medesimo.

Il programma fornisce anche -per la rotazione di 3π - l'andamento dello spazio percorso da M in funzione del tempo. In figura l'output grafico.

Il programma fornisce in fine la risposta ai quesiti **1.4, 1.5** fornendoli sullo schermo, come segue:

Dopo un tempo di 0.14s si ha che:

le coordinate x, y di M sono rispettivamente 1.6058426 -1.3860987

le componenti x, y della velocità di M sono rispettivamente 79.15974 68.98359

le componenti x, y della accelerazione di M sono rispettivamente -2883.7534 4450.7275

le coordinate x, y del centro di curv. della traiettoria di M sono risp. 2.9855144 -2.9692936

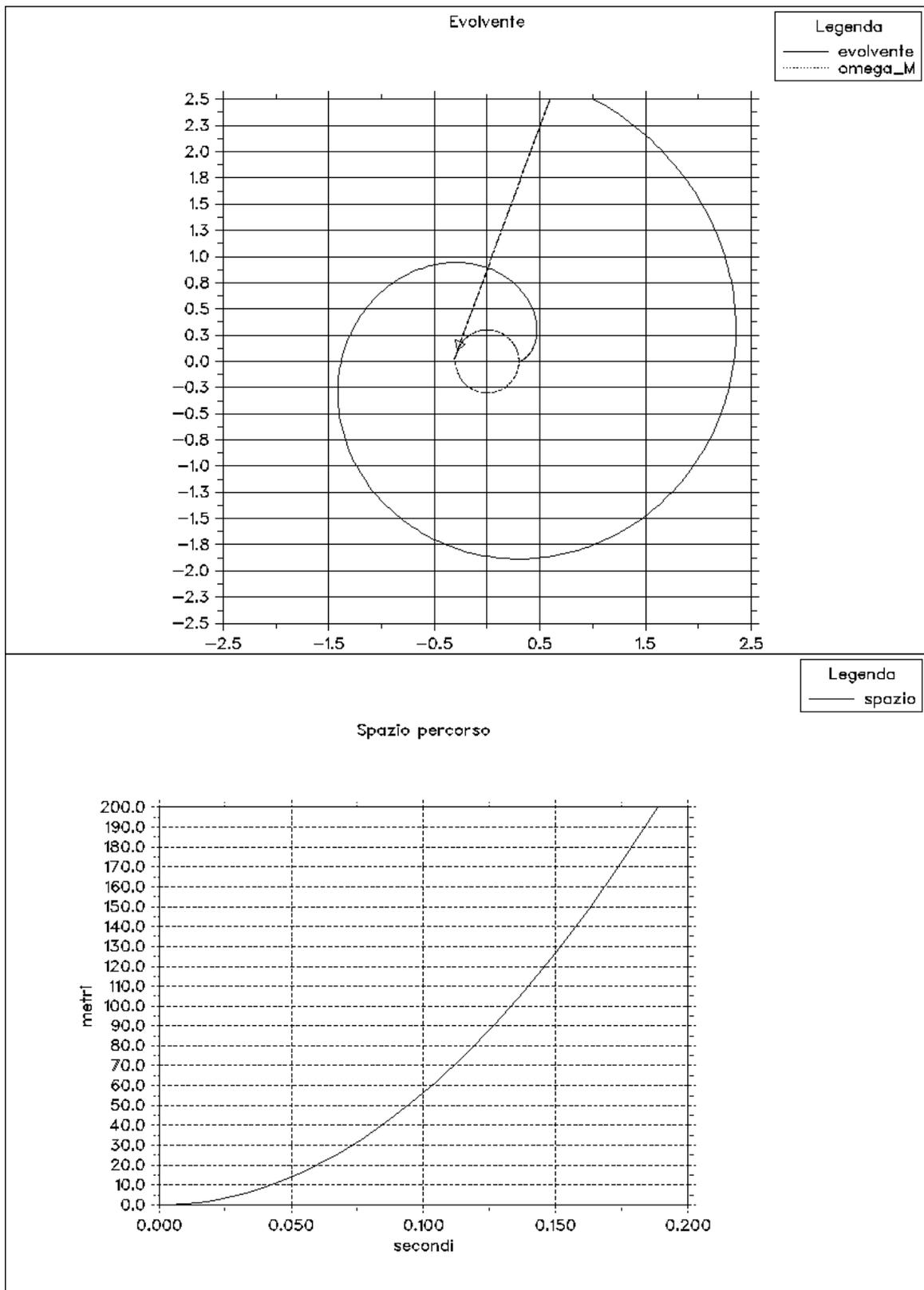
Dopo un tempo di 0.28s si ha che:

le coordinate x, y di M sono rispettivamente 4.2015724 -0.2771141

le componenti x, y della velocità di M sono rispettivamente 28.714815 208.02756

le componenti x, y della accelerazione di M sono rispettivamente -10298.827 2178.6965

le coordinate x, y del centro di curv. della traiettoria di M sono risp. 8.3621235 -0.85141045



6. Soluzione grafica del punto 1.4. La configurazione del sistema dopo un tempo di 0.14s si trova immediatamente considerando che la retta ha compiuto una rotazione

$$\omega t = 50 \frac{r}{s} \cdot 0.14s = 7r = 401^\circ,070 = 360^\circ + 41^\circ,070$$

e dunque il punto tracciante M si trova a una distanza dal punto di tangenza P pari a

$$R\omega t = 0.3m \cdot 50 \frac{r}{s} \cdot 0.14s = 2.1m$$

Adottando allora una scala di rappresentazione delle distanze pari a

$$6.1) \quad \sigma_L = 0.2 \frac{m}{cm}$$

si ha la configurazione riportata in figura, dove è indicata la posizione del punto M . Per la velocità del punto M si consideri ora che -essendo P il centro del moto e nota la velocità angolare, si ha

$$6.2) \quad \begin{cases} \omega = 50 \frac{r}{s} \\ PM = R\omega t = 2.1m \end{cases} \Rightarrow |\vec{v}_M| = \omega PM = 105 \frac{m}{s}$$

in accordo con la **3.2** la quale porge

$$\begin{cases} \dot{x}(0.14s) = 79.159 \frac{m}{s} \\ \dot{y}(0.14s) = 68.983 \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow |\vec{v}_M(0.14s)| = \sqrt{(1.605m)^2 + (-1.386m)^2} = 104.999$$

Utilizzando poi una scala per le velocità

$$6.3) \quad \sigma_v = 21 \frac{m/s}{cm}$$

è possibile riportare la velocità, nelle sue caratteristiche vettoriali, sul disegno. Per l'**accelerazione** si consideri che

- essendo la rotazione uniforme non c'è accelerazione angolare, dunque l'accelerazione è tutta normale;
- considerando il moto inverso si deduce che il centro delle accelerazioni K è il centro della circonferenza.

Dunque l'accelerazione di M , tutta normale, punta il centro della circonferenza e ha modulo

$$6.4) \quad |\vec{a}_M| = |\vec{a}_{MK}^n| = MK\omega^2 = 10.15cm\sigma_L \left(50 \frac{r}{s}\right)^2 = 5075 \frac{m}{s^2}$$

in accordo con la **3.3** la quale porge

$$6.5) \quad \begin{cases} \ddot{x}(0.14s) = -2883.752 \frac{m}{s^2} \\ \ddot{y}(0.14s) = 4450.726 \frac{m}{s^2} \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_M| = 5303.299 \frac{m}{s^2}$$

Si osservi ora che -essendo il centro di curvatura della evolvente sulla retta stessa- il punto M descrive l'evolvente con una accelerazione normale e una accelerazione tangenziale, che possono essere lette direttamente dalla figura. Considerando la scala di rappresentazione

$$6.6) \quad \sigma_a = 1015 \frac{m/s^2}{cm}$$

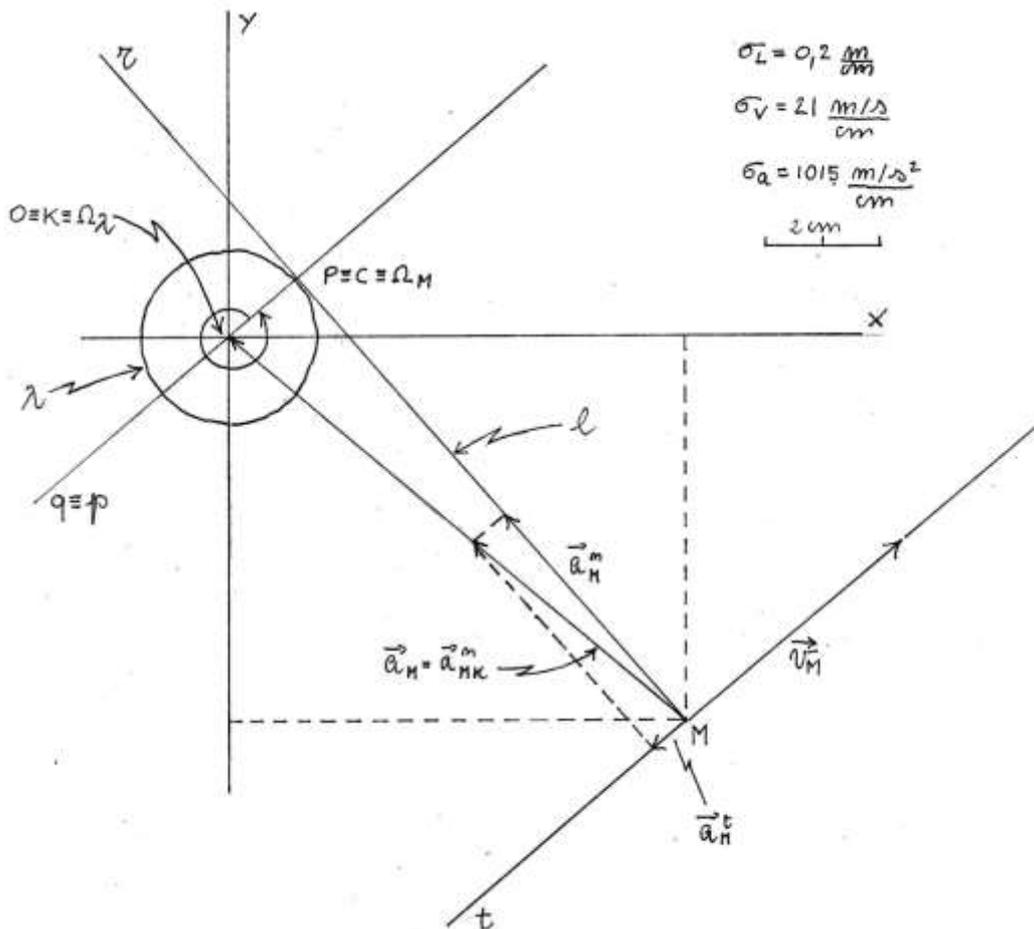
si trova

$$6.6) \quad \begin{cases} |\vec{a}_M^t| = 0.8cm\sigma_a = 0.8cm1015 \frac{m/s^2}{cm} = 812 \frac{m}{s^2} \\ |\vec{a}_M^n| = 4.9cm\sigma_a = 4.9cm1015 \frac{m/s^2}{cm} = 4973.5 \frac{m}{s^2} \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_M| = 5093.349 \frac{m}{s^2}$$

in discreto accordo con la corrispondente soluzione analitica **6.5**. Per individuare il **centro di curvatura** della traiettoria di M in M medesimo si utilizza ora una costruzione geometrica che si basa a sua volta sulla formula di Euler-Savary. La costruzione passa attraverso i seguenti passaggi:

- si traccia la retta r tra M, C ;
- si traccia la retta $q \perp r$ per il punto C ;
- si traccia la retta t per M, Ω_l , tenendo presente che Ω_l è il punto improprio della retta q ;
- si indica L l'intersezione $t \cap q$, risultando $L = \Omega_l$;
- si traccia la retta p per L e per Ω_λ , ovvero -in questo caso- $p = q$.

Ebbene, l'intersezione $r \cap p$ identifica il punto Ω_M , che dunque coincide con il punto P di contatto fra le due polari. Si ritrova così il risultato analitico **2.10**.



7. Soluzione grafica del punto 1.5. La configurazione del sistema dopo un tempo di 0.28s si trova immediatamente considerando che la retta ha compiuto una rotazione

$$\omega t = 50 \frac{r}{s} 0.28s = 14r = 802,140 = 360^\circ + 360^\circ + 82,140$$

e dunque il punto tracciante M si trova a una distanza dal punto di tangenza P pari a

$$R\omega t = 0.3m 50 \frac{r}{s} 0.28s = 4.2m$$

Adottando allora una scala di rappresentazione delle distanze pari a

$$7.1) \quad \sigma_L = 0.2 \frac{m}{cm}$$

si ha la configurazione riportata in figura, dove è indicata la posizione del punto M . Per la velocità del punto M si consideri ora che, essendo P il centro del moto e nota la velocità angolare, si ha

$$7.2) \quad \begin{cases} \omega = 50 \frac{r}{s} \\ PM = R\omega t = 4.2m \end{cases} \Rightarrow |\vec{v}_M| = \omega PM = 210 \frac{m}{s}$$

in accordo con la **3.2** la quale porge

$$\begin{cases} \dot{x}(0.28s) = 28.714 \frac{m}{s} \\ \dot{y}(0.28s) = 208.027 \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\left(28.714 \frac{m}{s}\right)^2 + \left(208.027 \frac{m}{s}\right)^2} = 209.999 \frac{m}{s}$$

Utilizzando poi una scala per le velocità

$$7.3) \quad \sigma_v = 41 \frac{m/s}{cm}$$

è possibile riportare la velocità, nelle sue caratteristiche vettoriali, sul disegno. Per l'**accelerazione** si consideri che

- essendo la rotazione uniforme non c'è accelerazione angolare, dunque l'accelerazione è tutta normale;
- considerando il moto inverso si deduce che il centro delle accelerazioni K è il centro della circonferenza.

Dunque l'accelerazione di M , tutta normale, punta il centro della circonferenza e ha modulo

$$7.4) \quad |\vec{a}_M| = |\vec{a}_{MK}^n| = MK\omega^2 = 21.0cm\sigma_L \left(50 \frac{r}{s}\right)^2 = 10500 \frac{m}{s^2}$$

in accordo con la **3.3** la quale porge

$$7.5) \quad \begin{cases} \ddot{x}(0.28s) = 0.3m \left(50 \frac{r}{s}\right)^2 (\cos(14r) - 14r \sin(14r)) = -10298.824 \frac{m}{s^2} \\ \ddot{y}(0.28s) = 0.3m \left(50 \frac{r}{s}\right)^2 (\sin(14r) + 14r \cos(14r)) = 2178.696 \frac{m}{s^2} \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_M| = 10526.751 \frac{m}{s^2}$$

Si osservi ora che -essendo il centro di curvatura della evolvente sulla retta stessa- il punto M descrive l'evolvente con una accelerazione normale e una accelerazione tangenziale, che possono essere lette direttamente dalla figura. Considerando la scala di rappresentazione

$$7.6) \quad \sigma_a = 701.7834 \frac{m/s^2}{cm}$$

si trova

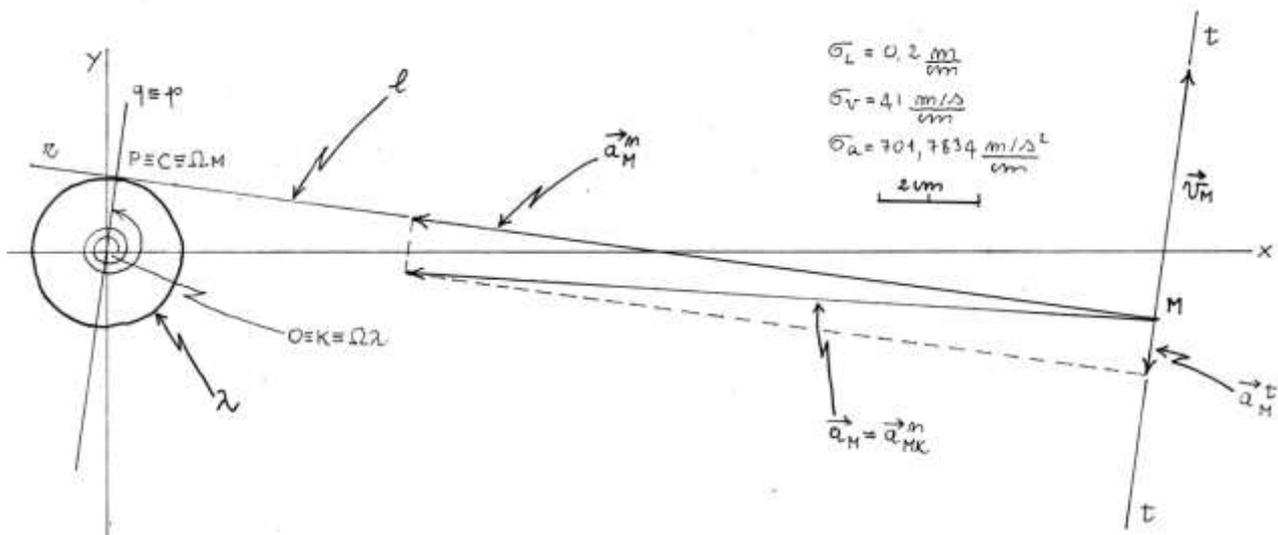
$$7.7) \quad \begin{cases} |\vec{a}_M^t| = 1.1cm\sigma_a = 1.1cm701.7834 \frac{m/s^2}{cm} = 771.961 \frac{m}{s^2} \\ |\vec{a}_M^n| = 14.9cm\sigma_a = 14.9cm701.7834 \frac{m/s^2}{cm} = 10456.572 \frac{m}{s^2} \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_M| = 10485.029 \frac{m}{s^2}$$

in discreto accordo con la corrispondente soluzione analitica **3.7**.

Per individuare il **centro di curvatura** della traiettoria di M in M medesimo si utilizza ora una costruzione geometrica che si basa a sua volta sulla formula di Euler-Savary. La costruzione passa attraverso i seguenti passaggi:

- si traccia la retta r tra M, C ;
- si traccia la retta $q \perp r$ per il punto C ;
- si traccia la retta t per M, Ω_l , tenendo presente che Ω_l è il punto improprio della retta q ;
- si indica L l'intersezione $t \cap q$, risultando $L = \Omega_l$;
- si traccia la retta p per L e per Ω_λ , ovvero -in questo caso- $p = q$.

Ebbene, l'intersezione $r \cap p$ identifica il punto Ω_M , che dunque coincide con il punto P di contatto fra le due polari. Si ritrova così il risultato analitico **2.10**.



8. Codice del programma principale.

!unita' chiamante per risolvere la seconda parte della esercitazione
 !nove del corso di meccanica applicata alle macchine
 !usa il modulo mod_ese_9_b
 !3/8/2013

PROGRAM main_ese_9_b

```

!usa DISLIN

USE DISLIN

!usa il modulo mod_ese_9_b

USE mod_ese_9_b

!sezione dichiarativa

IMPLICIT NONE

!dichiaro l'array che contiene le coordinate di M

REAL, DIMENSION (1:1000):: xM, yM

!dichiaro l'array che contiene le coordinate del centro di curvatura

REAL, DIMENSION (1:1000):: xc, yc

!dichiaro l'array che contiene i valori dell'ascissa curvilinea

REAL, DIMENSION (1:1000):: st

!dichiaro l'array che contiene gli istanti di tempo

REAL, DIMENSION (1:1000):: tempo = 0.

!dichiaro la variabile che contiene l'istante di tempo considerato

REAL:: t = 0.

!dichiaro l'incremento di tempo

REAL:: delta_t = 0.0005

!dichiaro l'indice del ciclo

INTEGER:: i

!dichiaro posizione, velocità e accekerazione di M

REAL:: xemme, yemme, xemme_p, yemme_p, xemme_p_p, yemme_p_p

!dichiaro la posizione del centro di curvatura

REAL:: xcentro, ycentro

!dichiaro la stringa per chiudere il programma

CHARACTER(len=10):: chiusura

!sezione esecutiva

!Calcolo i valori delle coordinate di M e del centro di curvatura

i = 1

coordinate_M: DO

```

```

xM(i) = raggio*( COS(omega*tempo(i)) + omega*tempo(i)*SIN(omega*tempo(i)) )
yM(i) = raggio*( SIN(omega*tempo(i)) - omega*tempo(i)*COS(omega*tempo(i)) )

xc(i) = raggio*( COS(omega*tempo(i)) )
yc(i) = raggio*( SIN(omega*tempo(i)) )

CALL evolvente (xM, yM, xc, yc, tempo, i)

IF (omega*tempo(i)>3.*pi) EXIT coordinate_M

tempo(i+1) = tempo(i) + delta_t
i = i + 1

END DO coordinate_M

!calcolo i valori dello spazio percorso

i = 1

spazio_percorso: DO

  st(i) = (raggio**2)*(omega**3)*(tempo(i)**2)/2.

  IF (omega*tempo(i)>3.*pi) EXIT spazio_percorso

  tempo(i+1) = tempo(i) + delta_t*REAL(i)
  i = i + 1

END DO spazio_percorso

!traccia il diagramma dello spazio in funzione del tempo

CALL spazio (st, tempo, i)

!calcola posizione, velocita' e accelerazione di M per omega*t=7r

xemme = raggio*( COS(7.) + 7.*SIN(7.) )
yemme = raggio*( SIN(7.) - 7.*COS(7.) )

xemme_p = raggio*(omega**2)*0.14*COS(7.)
yemme_p = raggio*(omega**2)*0.14*SIN(7.)

xemme_p_p = raggio*(omega**2.)*(COS(7.) - 7.*SIN(7.))
yemme_p_p = raggio*(omega**2.)*(SIN(7.) + 7.*COS(7.))

xcentro = raggio*( COS(7.) + 2*7.*SIN(7.) )
ycentro = raggio*( SIN(7.) - 2*7.*COS(7.) )

WRITE(*,*) " "
WRITE(*,*) "Dopo un tempo di 0.14s si ha che:"
WRITE(*,*) " "
WRITE(*,*) "le coordinate x,y di M sono rispettivamente", xemme, yemme
WRITE(*,*) " "
WRITE(*,*) "le componenti x,y della velocita' di M sono rispettivamente", xemme_p, yemme_p
WRITE(*,*) " "
WRITE(*,*) "le componenti x,y della accelerazione di M sono rispettivamente", xemme_p_p, yemme_p_p
WRITE(*,*) " "
WRITE(*,*) "le coordinate x,y del centro di curv. della traiettoria di M sono risp.", xcentro, ycentro
WRITE(*,*) " "

```

!calcola posizione, velocita' e accelerazione di M per $\omega t = 14r$

```
xemme = raggio*( COS(14.) + 14.*SIN(14.) )  
yemme = raggio*( SIN(14.) - 14.*COS(14.) )
```

```
xemme_p = raggio*(omega**2)*0.28*COS(14.)  
yemme_p = raggio*(omega**2)*0.28*SIN(14.)
```

```
xemme_p_p = raggio*(omega**2.)*(COS(14.) - 14.*SIN(14.))  
yemme_p_p = raggio*(omega**2.)*(SIN(14.) + 14.*COS(14.))
```

```
xcentro = raggio*( COS(14.) + 2*14.*SIN(14.) )  
ycentro = raggio*( SIN(14.) - 2*14.*COS(14.) )
```

```
WRITE(*,*) " "  
WRITE(*,*) "Dopo un tempo di 0.28s si ha che:"  
WRITE(*,*) " "  
WRITE(*,*) "le coordinate x,y di M sono rispettivamente", xemme, yemme  
WRITE(*,*) " "  
WRITE(*,*) "le componenti x,y della velocita' di M sono rispettivamente", xemme_p, yemme_p  
WRITE(*,*) " "  
WRITE(*,*) "le componenti x,y della accelerazione di M sono rispettivamente", xemme_p_p, yemme_p_p  
WRITE(*,*) " "  
WRITE(*,*) "le coordinate x,y del centro di curv. della traiettoria di M sono risp.", xcentro, ycentro  
WRITE(*,*) " "
```

!le seguenti righe permettono di agevolare il lancio del programma dalla icona

```
WRITE (*,*) " "  
WRITE (*,*) "To close the program press any key. Then press RETURN."  
READ (*,*) chiusura
```

STOP

END PROGRAM main_ese_9_b

9. Codice del modulo.

!modulo invocato dal programma main_ese_9_a per risolvere la seconda parte
!della esercitazione nove del corso di meccanica applicata alle macchine
!3/8/2013

MODULE mod_ese_9_b

!sezione dichiarativa

IMPLICIT NONE

!dichiaro le costanti geometriche del quadrilatero

```
REAL, PARAMETER:: omega = 50.  
REAL, PARAMETER:: raggio = 0.3  
REAL, PARAMETER:: pi = 3.14159265359
```

!scrivo le subroutine

CONTAINS

!-----

```

SUBROUTINE evolvente (xM, yM, xc, yc, tempo, i)

!sezione dichiarativa

!dichiaro gli argomenti fittizi

!dichiaro gli array delle coordinate di M e del centro di curvatura
REAL,INTENT(IN),DIMENSION(1:1000):: xM, yM, xc, yc, tempo

!dichiaro il numero di istanti considerati

INTEGER,INTENT(IN):: i

!dichiaro le variabili locali

!coordinate punto Q

REAL:: xQ, yQ

!stringa usata per la legenda

CHARACTER(len=30)::stringa

!sezione esecutiva

!imposto il tipo di file

CALL METAFL ('bmp')           !indico il formato dell'output
CALL BMPMOD (25000,'meter','resolution') !risoluzioneformato .bmp

!imposto la pagina

CALL SCRMOD ('revers') !scritta nera su fondo bianco
CALL DISINI          !richiama alcune impostazioni di default
CALL PAGERA          !traccio un bordo per il piano xy
CALL DUPLX           !font a doppio spessore

!imposto gli assi

CALL AXSPOS (700,2000)           !coordinate angolo basso sinistra
CALL AXSLEN (1700,1700)         !lunghezza dei due assi in pixel
CALL NAME (' ','x')             !nome delle ascisse
CALL NAME (' ','y')             !nome delle ordinate
CALL GRAF (-2.5,2.5,-2.5,1.,-2.5,2.5,-2.5,.25) !inizio, fine, incremento assi x,y
CALL GRID (1,1)                 !impono una griglia sul piano coordinato
CALL XAXGIT                     !traccio la retta x=0
CALL YAXGIT                     !traccio la retta y=0
CALL DASH                       !tratteggio per gli assi coordinati
CALL NAME ('metri','x')         !nome delle ascisse
CALL NAME ('metri','y')         !nome delle ordinate

!imposto il titolo

CALL TITLIN ("Evolvente",1)     !prima riga del titolo
CALL TITLE                      !stampa il titolo di cui sopra

!traccio le curve

```

```

CALL CHNCRV('line')      !usa tratti diversi per le tre curve
CALL CURVE (xM, yM, i)    !traccio la evolvente
CALL CURVE (xc, yc, i)    !traccio la traiettoria del centro di curvatura

```

```
!ricavo la posizione di Q
```

$$xQ = raggio * (\cos(\omega * tempo(i)) + \omega * tempo(i) * \sin(\omega * tempo(i))) - 3 * \pi * raggio * \sin(\omega * tempo(i))$$

$$yQ = raggio * (\sin(\omega * tempo(i)) - \omega * tempo(i) * \cos(\omega * tempo(i))) + 3 * \pi * raggio * \cos(\omega * tempo(i))$$

```
!traccio la circonferenza
```

```
CALL RLCIRC (0., 0., raggio)
```

```
!traccio un vettore che congiunge M al centro di curvatura
```

```
CALL RLVEC (xM(i), yM(i), xc(i), yc(i), 2211)
```

```
!traccio la retta ruotante come segmento fra M e Q
```

```
CALL RLINE (xM(i), yM(i), xQ, yQ)
```

```
!imposto la legenda
```

```

CALL LEGINI (stringa,2,10)      !variabile di carattere, righe, lunghezza
CALL LEGTIT ('Legenda')        !titolo legenda
CALL LEGLIN (stringa,'evolvente',1) !prima riga della legenda
CALL LEGLIN (stringa,'omega_M',2) !seconda riga della legenda
CALL LEGEND (stringa,3)        !posizine in alto a destra

```

```
CALL DISFIN
```

```
END SUBROUTINE evolvente
```

```
!-----
```

```
SUBROUTINE spazio (st, tempo, i)
```

```
!sezione dichiarativa
```

```
!dichiaro gli argomenti fittizi
```

```
!dichiaro l'array dello spazio e quello del tempo
```

```
REAL,INTENT(IN),DIMENSION(1:1000):: st, tempo
```

```
!dichiaro il numero di istanti considerati
```

```
INTEGER,INTENT(IN):: i
```

```
!dichiaro le variabili locali
```

```
!stringa usata per la legenda
```

```
CHARACTER(len=30)::stringa
```

```
!sezione esecutiva
```

```
!imposto il formato del file
```

```

CALL METAFL ('bmp')           !indico il formato dell'output
CALL BMPMOD (25000,'meter','resolution') !risoluzione del formato .bmp

!imposto la pagina

CALL SCRMOD ('revers')       !scritta nera su fondo bianco
CALL DISINI                   !richiama alcune impostazioni di default
CALL PAGERA                   !traccio un bordo per il piano xy
CALL DUPLX                    !font a doppio spessore

!imposto gli assi x,y

CALL AXSPOS (700,2700)       !coordinate angolo basso sinistra
CALL AXSLEN (1700,1300)     !lunghezza dei due assi in pixel
CALL NAME ('secondi','x')    !nome delle ascisse
CALL NAME ('metri','y')     !nome delle ordinate
CALL LABDIG (3,'x')         !chiedo 3 cifre decimali per l'asse x
CALL DASH                     !tratteggio per gli assi coordinati

CALL GRAF (0.0,0.2,0.0,0.05,0.0,200.,0.0,10.) !inizio, fine, intervallo assi x, y
CALL GRID (1,1)             !impone una griglia sul piano coordinato

CALL XAXGIT                   !traccio la retta x=0
CALL YAXGIT                   !traccio la retta y=0

!traccio la curva

CALL MYLINE (1,1)           !chiede una linea continua per la curva
CALL CURVE (tempo, st, i)   !traccio lo spazio in funzione del tempo

!imposto il titolo

CALL TITLIN ("Spazio percorso",1)!prima riga del titolo
CALL TITLE                   !stampa il titolo di cui sopra

!imposto la legenda

CALL LEGINI (stringa,1,15)   !variabile di carattere, righe, lunghezza
CALL LEGLIN (stringa,'spazio',1) !contenuto della legenda
CALL LEGTIT ('Legenda')     !titolo legenda
CALL LEGEND (stringa,3)     !posizine in alto a destra

CALL DISFIN

END SUBROUTINE spazio

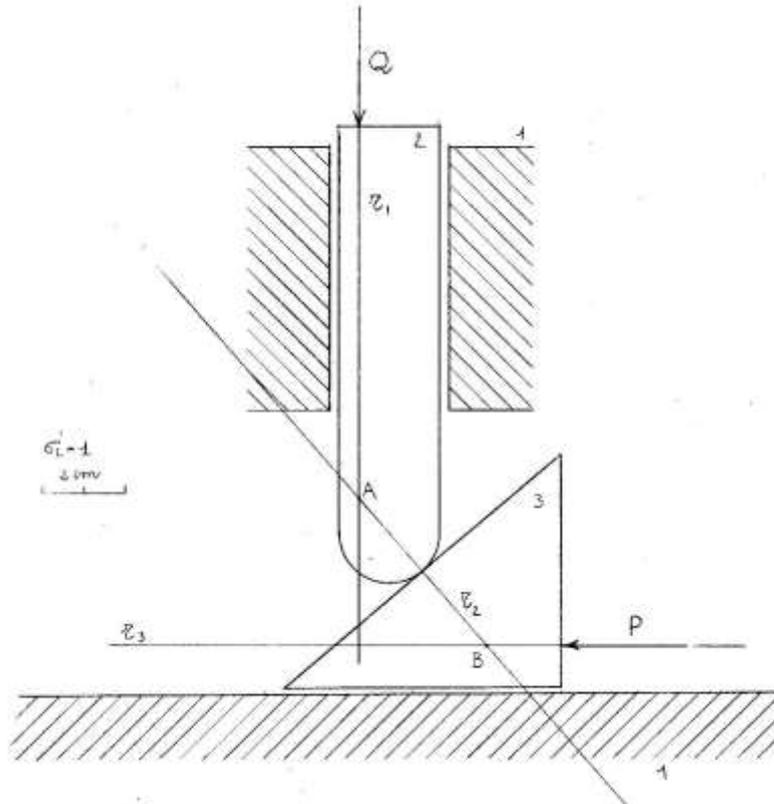
!-----

END MODULE mod_ese_9_b

```

Statica piana

1. Primo esercizio con free-body. Il meccanismo cuneo-cardine è riprodotto in scala nella seguente figura.



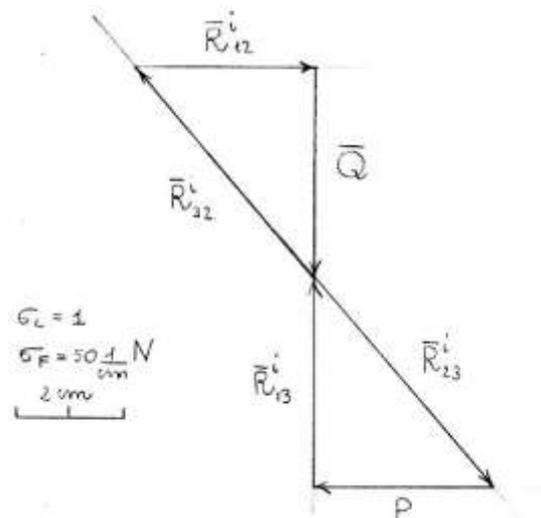
In prima istanza schematizzo la reazione del collare con una coppia e una forza; in tal caso le forze applicate al corpo 2 sono tre, e precisamente

\bar{Q}	\bar{R}_{12}^i	\bar{R}_{32}^i	
200N	?	?	modulo
vertic.	oriz.	r_2	versore

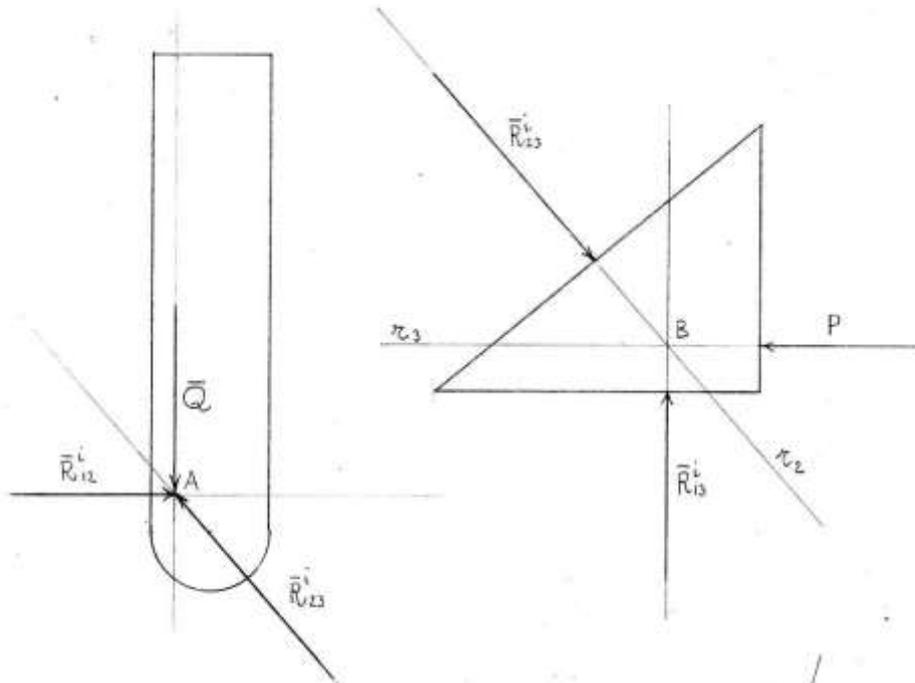
La condizione di equilibrio è che le tre forze costituiscano un triangolo chiuso. Si costruisce così il seguente diagramma delle forze, dal quale si ricava in particolare \bar{R}_{12}^i , nota la quale -per il principio di azione e reazione- si ricava \bar{R}_{21}^i la quale permette di costruire l'analogo triangolo delle forze per il cuneo. Misurando i segmenti rappresentativi delle forze e tenendo conto della scala di rappresentazione si ha

$$1.1) \quad P = 3.4cm\sigma_F = 3.4cm50 \frac{1}{cm} N = 170N$$

Si osservi che l'analisi qui condotta consente di ricavare l'intensità delle reazioni, ma non il loro punto di applicazione. Tuttavia la condizione di



annullamento dei momenti per i corpi 2,3 permette immediatamente di concludere che la retta d'azione di \bar{R}_{12}^i deve passare per A, mentre quella di \bar{R}_{13}^i deve passare per B. Tutto ciò è riportato nel seguente disegno, in cui si possono vedere le reazioni trovate, applicate ai rispettivi corpi.



Si schematizza ora la sollecitazione vincolare del collare in due forze, applicate alle due estremità del cardine stesso. In questo caso sul cardine agiscono quattro forze, e dunque si procede nel seguente modo:

- si sommano le forze \bar{R}_{12A}^i, \bar{Q} ;
- si sommano le forze $\bar{R}_{32}^i, \bar{R}_{12B}^i$;
- si considera la retta di compenso r_c indicata in figura.

Con questo procedimento si ricavano i moduli di $\bar{R}_{12A}^i, \bar{R}_{32}^i, \bar{R}_{12B}^i$. Nota allora completamente \bar{R}_{32}^i si ha la \bar{R}_{23}^i , e considerando il diagramma di free-body del cuneo, si ricava

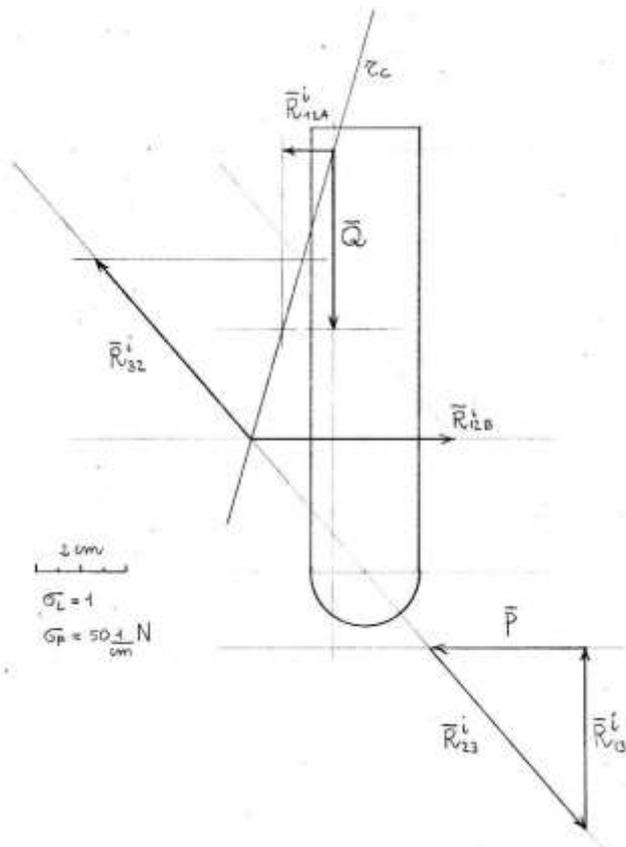
$$1.2) \quad P = 3.4cm\sigma_F = 3.4cm50\frac{1}{cm}N = 170N$$

cioè di nuovo la **1.1**.

2. Primo esercizio con PLV. Il PLV (principio dei lavori virtuali) porge

$$2.1) \quad \bar{Q} \cdot \bar{v}_A + \bar{P} \cdot \bar{v}_B = 0$$

Assegnato il modulo di \bar{v}_B posso ricavare \bar{v}_A applicando il teorema dei moti relativi. Assunto infatti il riferimento fisso solidale al telaio (corpo 1) e quello mobile solidale al cuneo (corpo 2), si ha



$$2.2) \quad \vec{v}_{A2,1} = \vec{v}_{A2,3} + \vec{v}_{A3,1} \Leftrightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_{A2,3} + \vec{v}_B$$

Si costruisce allora la tabella seguente

$\vec{v}_{A2,1}$	$= \vec{v}_{A2,3}$	$+ \vec{v}_B$	
$\omega_2 \vec{BA} $	$\omega_4 \vec{BC} (?)$?	modulo
<i>vertic.</i>	$\perp \vec{AB}$	<i>oriz.</i>	versore

in base alla quale si traccia il diagramma polare in figura, dal quale si deduce

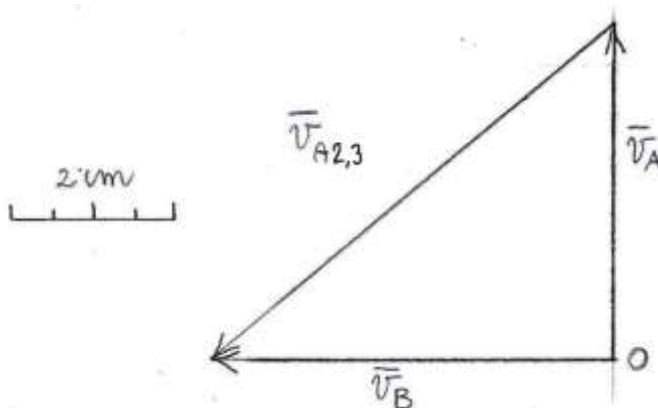
$$2.3) \quad \frac{v_A}{v_B} = \frac{4.1}{5} = 0.82 \Rightarrow v_A = 0.82v_B$$

Sostituendo la 2.3 nella 2.1 si ha

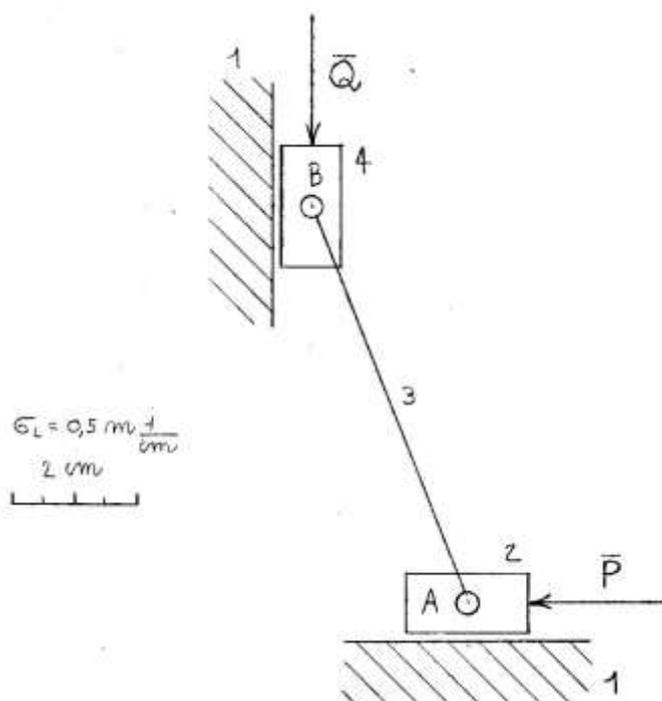
$$-Qv_A + Pv_B = 0 \Leftrightarrow Q0.82v_B = Pv_B$$

Dunque il PLV permette di concludere che

$$2.4) \quad P = 0.82Q = 164N$$



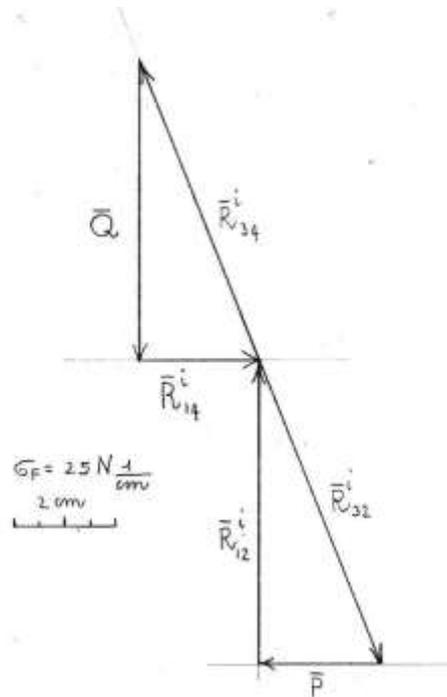
3. Secondo esercizio con free-body. Il meccanismo a doppio pattino è riprodotto in scala nella seguente figura.



Sulla slitta 4 agiscono 3 forze, in particolare

\bar{Q}	\bar{R}_{14}^i	\bar{R}_{34}^i	
150N	?	?	modulo
vertic.	oriz.	r_2	versore

Imponendo la chiusura del triangolo delle forze (prima equazione della statica) si ricavano le incognite dinamiche.



Dalla lettura del diagramma in figura, utilizzando la scala di rappresentazione indicata, si ricavano i seguenti moduli per reazioni e forza motrice:

\bar{P}	\bar{R}_{14}^i	\bar{R}_{34}^i	\bar{R}_{43}^i	\bar{R}_{32}^i	\bar{R}_{12}^i	
60N	60N	162.5N	162.5	162.5	150N	modulo
oriz.	oriz.	oriz.	oriz.	oriz.	vert.	versore

4. Secondo esercizio con PLV. Il PLV (principio dei lavori virtuali) porge

4.1) $\bar{Q} \cdot \bar{v}_B + \bar{P} \cdot \bar{v}_A = 0$

Assegnato il modulo di \bar{v}_A posso ricavare \bar{v}_B considerando che nel moto rigido del corpo 3 si ha

4.2) $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$

\bar{v}_B	$= \bar{v}_A$	$+ \bar{v}_{BA}$	
?	v_A	?	modulo
vertic.	oriz.	$\perp \overrightarrow{BA}$	versore

In base alla tabella si traccia il diagramma polare in figura, dal quale si deduce

$$4.3) \quad \frac{v_B}{v_A} = \frac{1.6}{4} = 0.4 \Rightarrow v_B = 0.4v_A$$

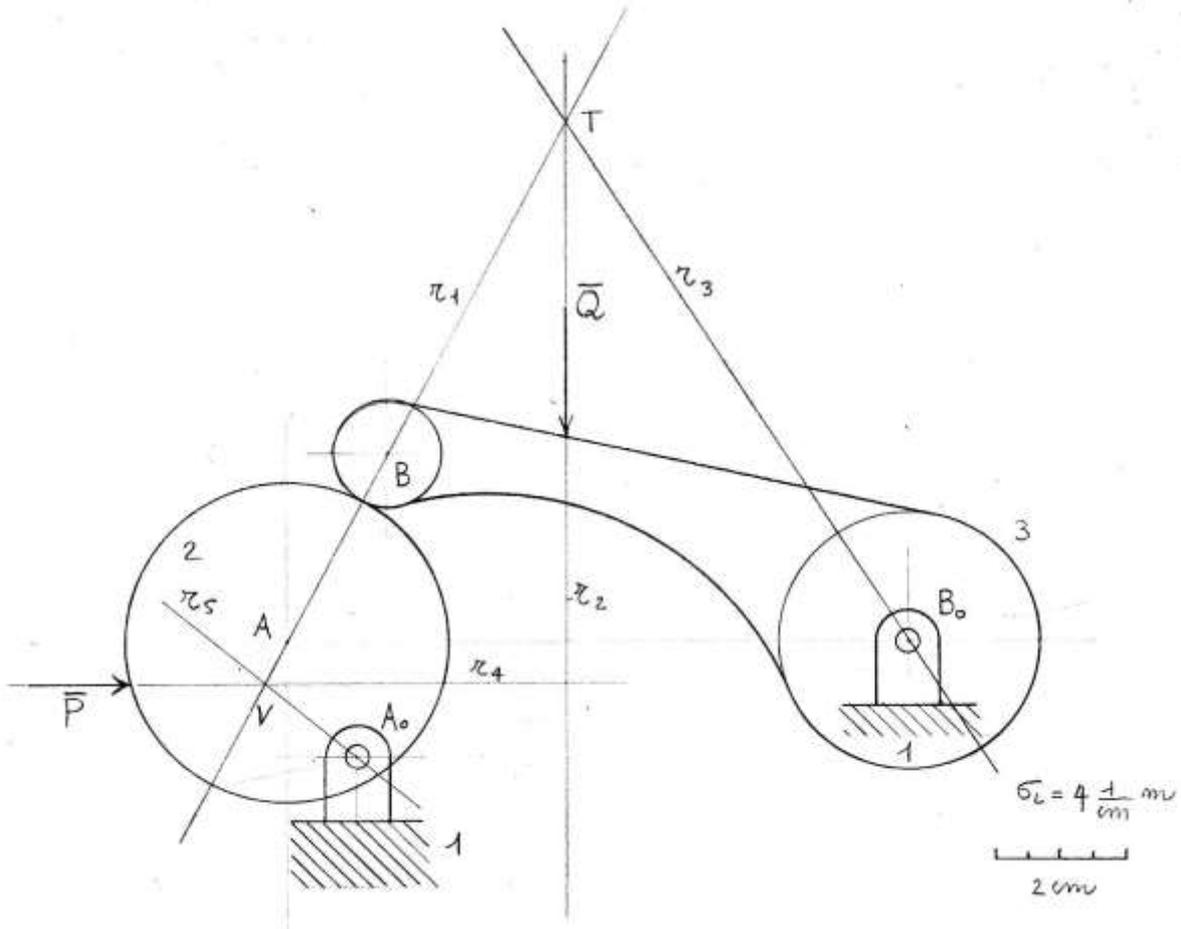
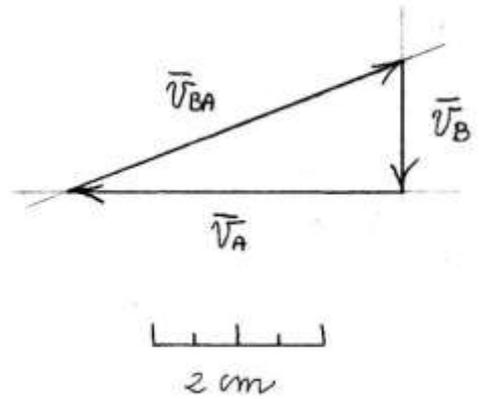
Sostituendo la 4.3 nella 4.1 si ha

$$-Qv_B + Pv_A = 0 \Leftrightarrow Q0.4v_A = Pv_A$$

Dunque il PLV permette di concludere che

$$4.4) \quad P = 0.4Q = 60N$$

5. Terzo esercizio con free-body. In figura è rappresentata la configurazione per la quale si vuole determinare l'equilibrio.



Considerando l'equilibrio della leva 3 si deve costruire il triangolo delle tre forze indicate in tabella.

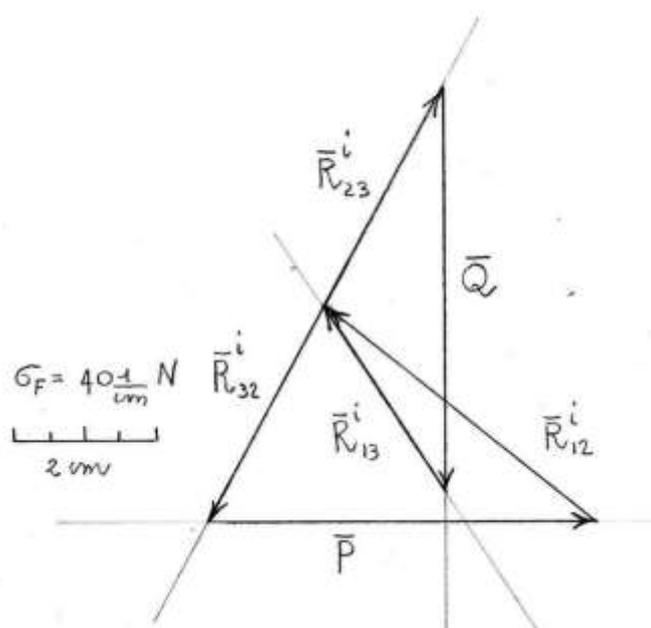
\bar{Q}	\bar{R}_{23}^i	\bar{R}_{13}^i	
230N	?	?	modulo
vert.	r_1	r_3	versore

Si ottiene il diagramma riportato in figura, dal quale in particolare si ricava $\bar{R}_{32}^i = -\bar{R}_{23}^i$, nota la quale si può costruire il triangolo delle forze per il corpo 2, il quale coinvolge i vettori indicati in tabella.

\bar{P}	\bar{R}_{32}^i	\bar{R}_{12}^i	
?	$-\bar{R}_{23}^i$?	modulo
oriz.		r_5	versore

Misurando il segmento rappresentativo di \bar{P} dal diagramma, e tenendo conto della scala di rappresentazione scelta, si ha

$$5.1) \quad \bar{P} = 5.5 \text{ cm} \cdot 40 \frac{1}{\text{cm}} \text{ N} = 220 \text{ N}$$



6. Terzo esercizio con PLV. Il PLV (principio dei lavori virtuali) porge

$$6.1) \quad \bar{Q} \cdot \bar{v}_M + \bar{P} \cdot \bar{v}_N = 0$$

D'altra parte si ha

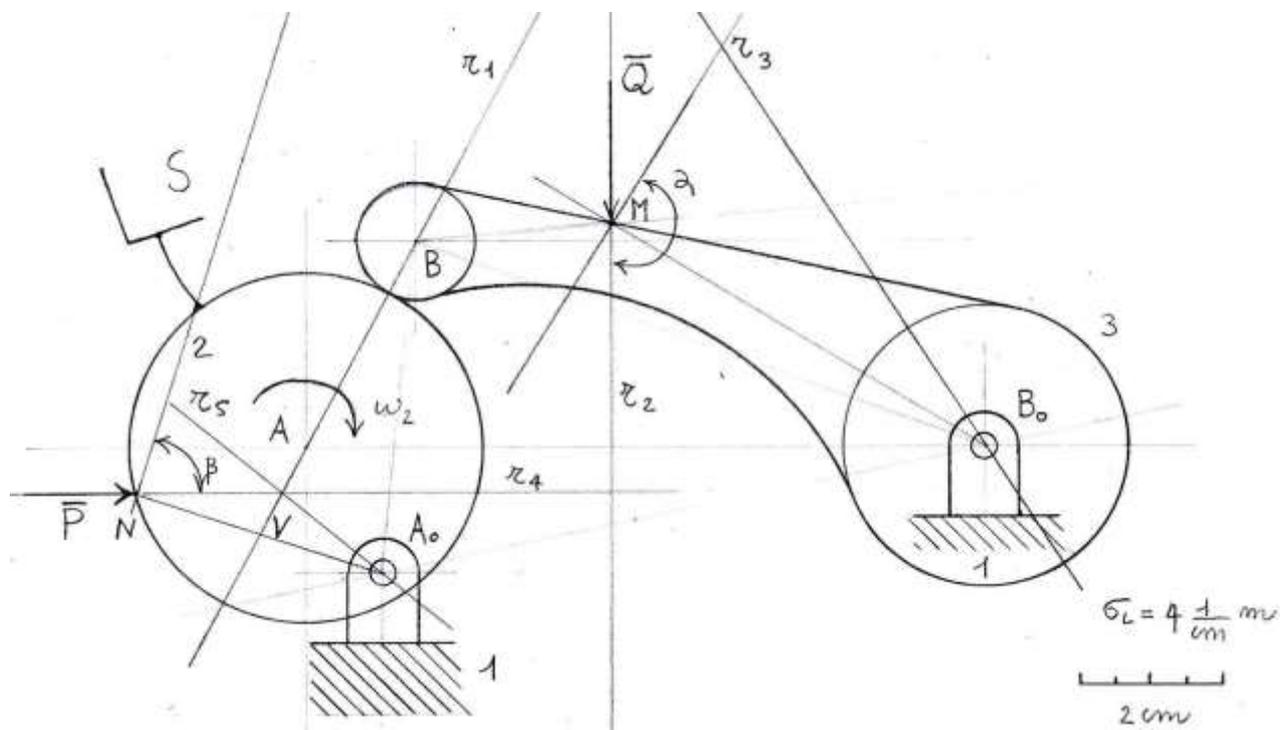
$$6.2) \quad \begin{cases} \bar{v}_M = \bar{v}_B + \bar{v}_{MB} \\ \bar{v}_B = \bar{v}_{B2} + \bar{v}_{B3,2} \\ \bar{v}_N = \bar{\omega}_2 \times \overline{A_0 N} \end{cases}$$

Nella seconda relazione si è utilizzato il teorema dei moti relativi, avendo fissato il sistema di riferimento mobile S come solidale al corpo 2. Sostituendo allora la 2 nella 1 si ha

$$6.3) \quad \bar{v}_M = \bar{v}_{B2} + \bar{v}_{B3,2} + \bar{v}_{MB}$$

per la quale equazione si può costruire la tabella seguente.

\bar{v}_M	$= \bar{v}_{B2}$	$+ \bar{v}_{B3,2}$	$+ \bar{v}_{MB}$	
?	$\omega_2 \overline{A_0B}$?	?	modulo
$\perp \overline{MB_0}$	$\perp \overline{A_0B}$	$\perp \overline{AB}$	$\perp \overline{BM}$	versore



Si vede che la equazione vettoriale **6.3** non è risolvibile, presentando 3 incognite scalari. Tuttavia è risolvibile la seconda equazione delle **6.2** per la quale si ha la tabella seguente.

\bar{v}_{B3}	$= \bar{v}_{B2}$	$+ \bar{v}_{B3,2}$	
?	$\omega_2 \overline{A_0B}$?	modulo
$\perp \overline{BB_0}$	$\perp \overline{A_0B}$	$\perp \overline{AB}$	versore

Il relativo diagramma polare è indicato in figura. Ricavato \bar{v}_{B3} (in funzione di ω_2) si costruisce il diagramma polare per la equazione **6.3** che ora presenta solo due incognite. In figura ho costruito questo ulteriore diagramma polare su quello precedente; si osservi che la scala di rappresentazione delle velocità è funzione della ω_2 . Misurando il vettore rappresentativo di \bar{v}_M si ha

$$6.4) \quad |\bar{v}_M| = 1.3 \text{ cm} 4 \omega_2 \frac{1}{\text{cm}} m = 5.2 \omega_2 m$$

D'altra parte si ha anche

$$6.5) \quad |\bar{v}_N| = \omega_2 |\overline{A_0N}| = \omega_2 3.7 \text{ cm} 4 \frac{1}{\text{cm}} m = 14.8 \omega_2 m$$

sostituendo nella **6.1** si ha

$$6.6) \quad Q 5.2 \omega_2 m \cos \alpha + P 14.8 \omega_2 m \cos \beta = 0$$

dove gli angoli α, β vanno ricavati dalla figura, ottenendo

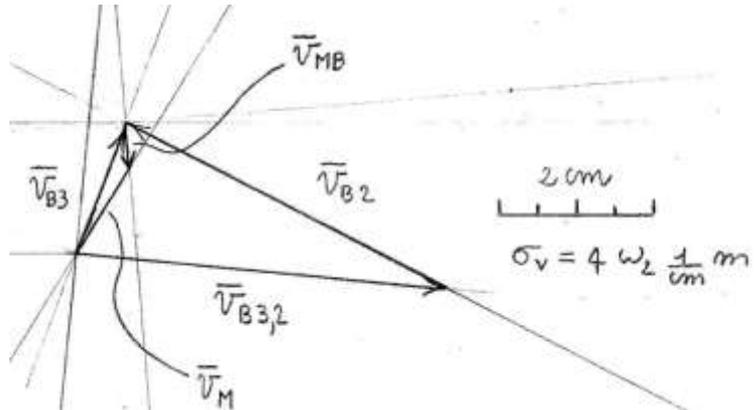
$$6.7) \quad \begin{cases} \alpha = 148^\circ \Rightarrow \cos \alpha = -0.84 \\ \beta = 72^\circ \Rightarrow \cos \beta = 0.3 \end{cases}$$

Se sostituisco le 6.7 nella 6.6 ottengo

$$-Q5.2\omega_2 m 0.84 + P14.8\omega_2 m 0.3 = 0 \Leftrightarrow 230N5.2m0.84 = P14.8m0.3$$

e dunque in conclusione

$$6.8) \quad P = 226.27N$$



In alternativa -e in modo più veloce- si possono cercare i centri di istantanea rotazione dei moti relativi, e utilizzando il teorema dei moti relativi scrivere

$$6.9) \quad \vec{v}_{M3} = \vec{v}_{M2} + \vec{v}_{M3,2}$$

a cui corrisponde la tabella

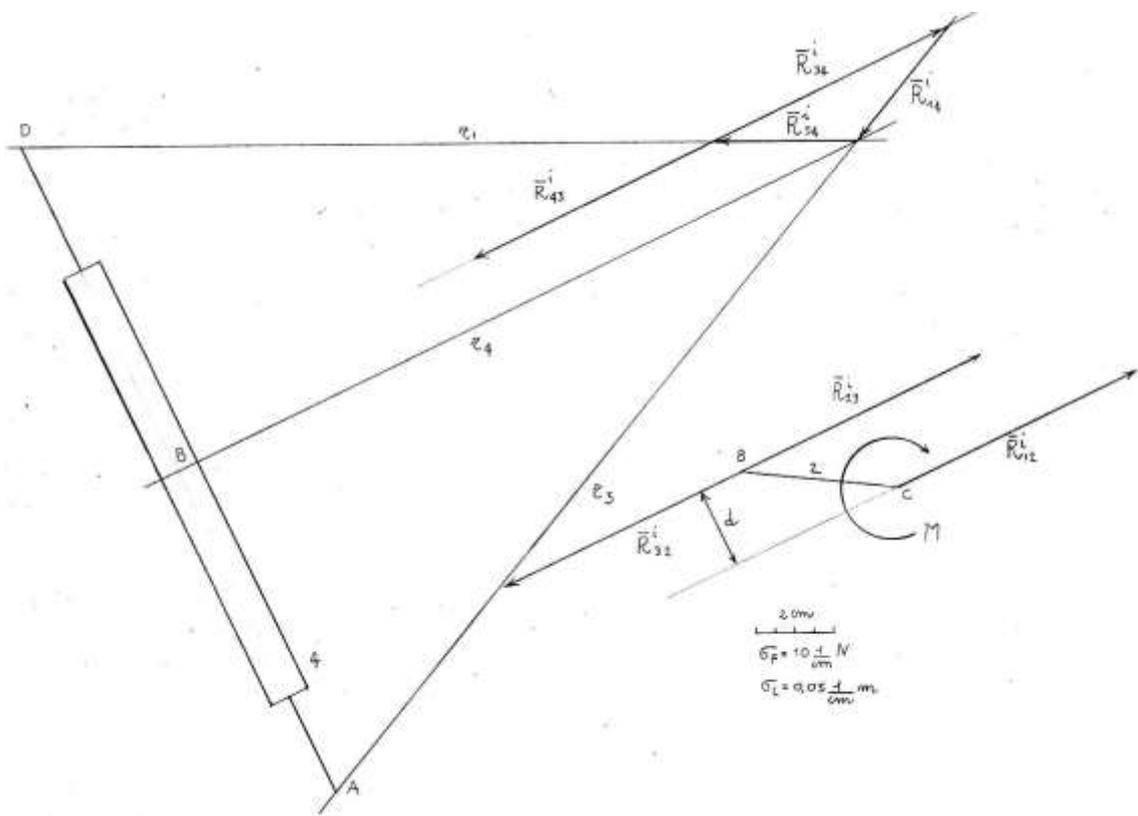
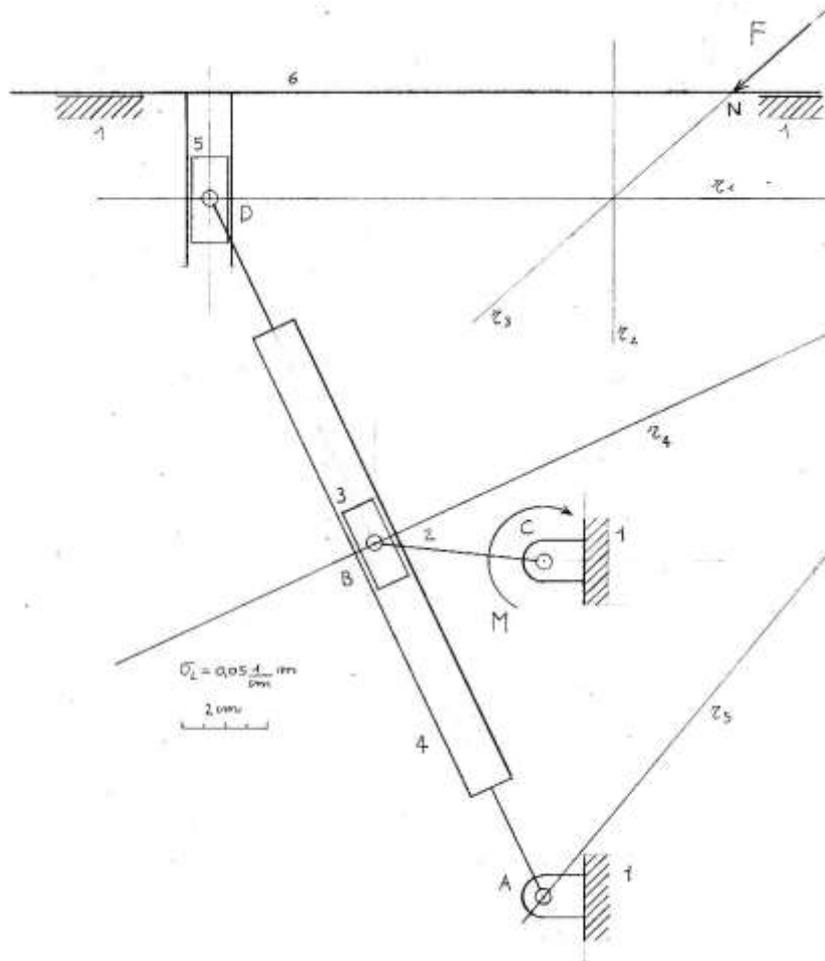
\vec{v}_{M3}	$= \vec{v}_{M2}$	$+ \vec{v}_{M3,2}$	
?	$\omega_2 \overline{A_0 M}$?	modulo
$\perp \overline{MC_{32}}$	$\perp \overline{A_0 M}$	$\perp \overline{C_{32} M}$	versore

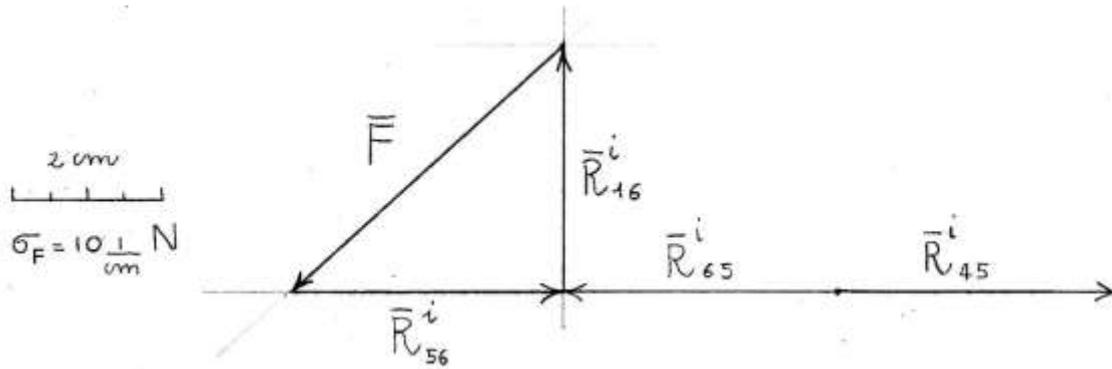
Si evince immediatamente -dall'applicazione del teorema di Aronhold-Kennedy- che C_{32} si trova nella intersezione fra r_1 e la retta per A_0, B_0 . Dunque l'equazione di cui sopra è risolvibile, presentando solo due incognite scalari.

7. Quarto esercizio con free-body. Si consideri la guida di Fairbairn indicata in figura; si chiede il momento M che garantisce l'equilibrio. Considerando l'equilibrio della slitta 6 abbiamo che su di essa agiscono le forze elencate in tabella.

\bar{F}	\bar{R}_{56}^i	\bar{R}_{16}^i	
50N	?	?	modulo
r_3	r_1	r_2	versore

La costruzione del triangolo delle forze permette di calcolare i moduli incogniti.





Nel diagramma è riportato anche l'equilibrio della slitta 5, che permette di ricavare $\bar{R}_{54}^i = -\bar{R}_{45}^i = \bar{R}_{65}^i = -\bar{R}_{56}^i$, noto il quale si passa all'equilibrio del glifo 4, sul quale agiscono le forze riportate in tabella.

\bar{R}_{54}^i	\bar{R}_{34}^i	\bar{R}_{14}^i	
37N	?	?	modulo
r_1	r_4	r_5	versore

In figura il relativo triangolo delle forze dal quale si ricava in particolare $\bar{R}_{32}^i = -\bar{R}_{23}^i = \bar{R}_{43}^i = -\bar{R}_{34}^i$. Utilizzando questa reazione si impone in fine l'equilibrio alla manovella ottenendo la condizione

$$|\bar{R}_{32}^i|d = M \Leftrightarrow 67N \cdot 0.1m = M$$

e dunque in conclusione

$$7.1) \quad M = 6.7Nm$$

8. Quarto esercizio con PLV. Il PLV porge

$$8.1) \quad \bar{M} \cdot \bar{\omega}_2 + \bar{F} \cdot \bar{v}_N = 0$$

Assegno dunque $\bar{\omega}_2$ ed effettuo l'analisi cinematica del meccanismo, col fine di ricavare \bar{v}_N . Fisso il sistema di riferimento mobile S come solidale al glifo 4 e applico il teorema dei moti relativi:

$$8.2) \quad \bar{v}_{B2} = \bar{v}_{B4} + \bar{v}_{B3,4}$$

Otengo la tabella seguente

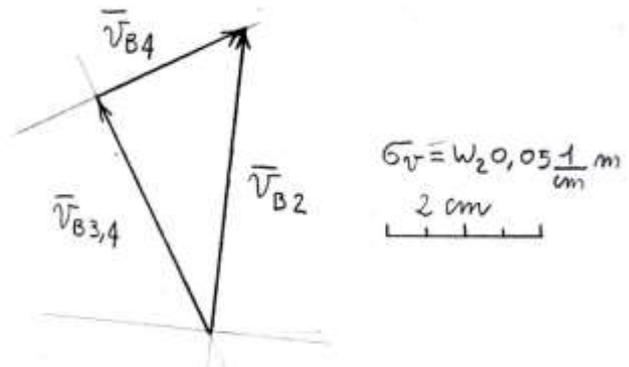
\bar{v}_{B2}	$= \bar{v}_{B4}$	$+ \bar{v}_{B3,4}$	
$\omega_2 \overline{CB} $	$\omega_4 \overline{AB} (?)$?	modulo
$\perp \overline{CB}$	$\perp \overline{AB}$	$\parallel \overline{AB}$	versore

in base alla quale costruisco il diagramma polare, dal quale si ricava

$$v_{B4} = 2.1 \text{ cm} \omega_2 0.05 \frac{1}{\text{cm}} m = 0.1 \omega_2 m$$

e dunque

$$8.3) \quad \omega_4 = \frac{0.1 \omega_2 m}{|\overline{AB}|} = \frac{0.1 \omega_2 m}{0.46 m} = 0.21 \omega_2$$

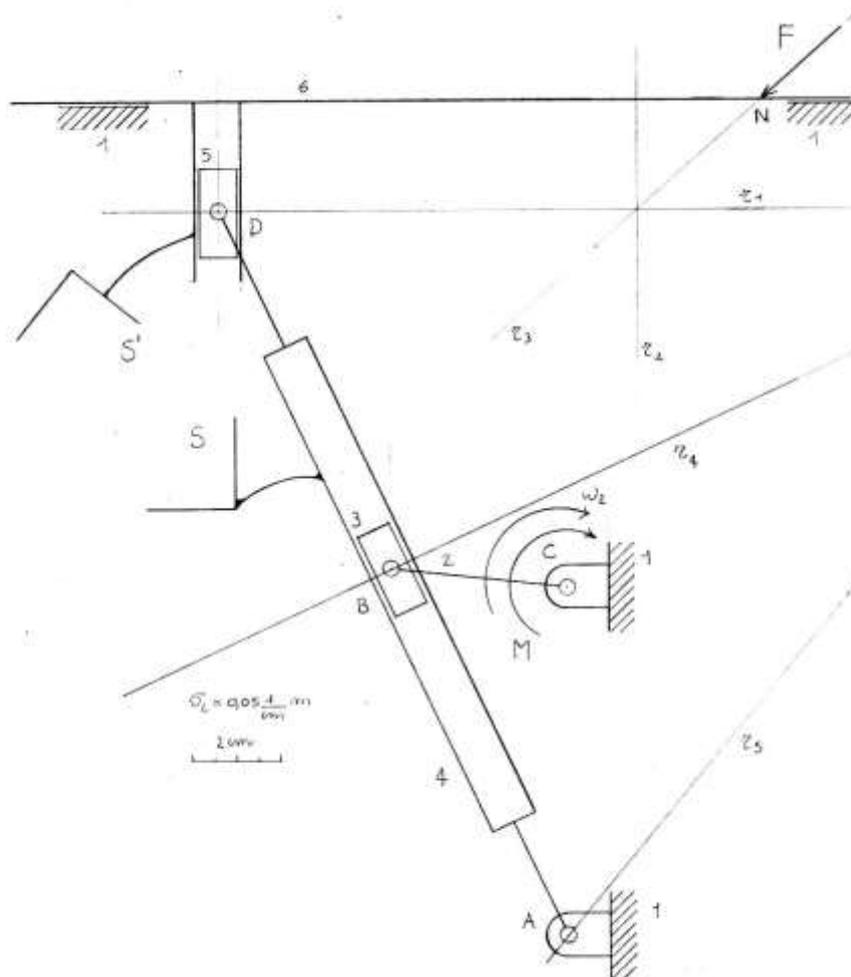


Ora assumo come sistema mobile il sistema di riferimento S' solidale alla slitta e applico il teorema dei moti relativi scrivendo

$$8.4) \quad \vec{v}_{D5} = \vec{v}_{D6} + \vec{v}_{D5,6}$$

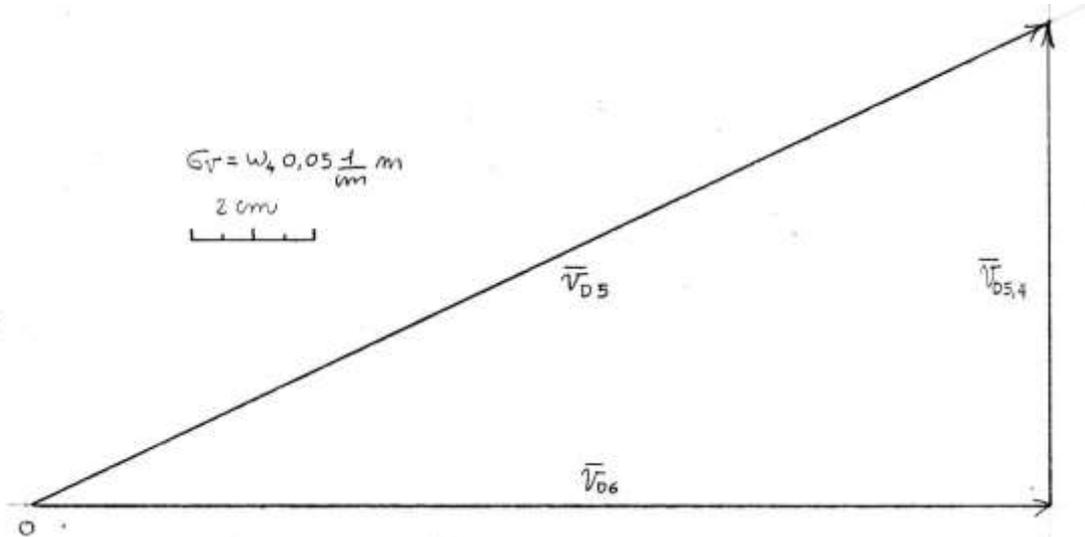
per la quale relazione si costruisce la seguente tabella

\vec{v}_{D5}	$= \vec{v}_{D6}$	$+ \vec{v}_{D5,6}$	
$\omega_4 \overline{DA} $?	?	modulo
$\perp \overline{AD}$	oriz.	vert.	versore



Il diagramma polare è indicato in figura e porge

$$48.5) \quad v_N = v_{D6} = 16.5 \text{ cm} \omega_4 0.05 \frac{1}{\text{cm}} m = 16.5 \text{ cm} 0.21 \omega_2 0.05 \frac{1}{\text{cm}} m = 0.17 m \omega_2$$



Sostituendo la **8.5** nella **8.1** si ha

$$M \omega_2 + F 0.17 m \omega_2 \cos \alpha = 0$$

L'angolo α si rileva dalla figura ottenendo $\alpha = 130^\circ \Rightarrow \cos \alpha = -0.64$ e dunque

$$8.6) \quad M = F 0.17 m 0.64 = 5.44 N m$$

Dinamica di una camma

1. Il quesito. La camma in figura è costituita da un disco eccentrico 2 -incernierato in A_0 - avente:

- centro geometrico in A , coincidente con il baricentro G_2 ;
- raggio $r = 10\text{cm}$;
- massa $m_2 = 2.4\text{kg}$;

E' costituita inoltre da un cedente traslante 3, avente

- baricentro in G_3 ;
- massa $m_3 = 1.9\text{kg}$.

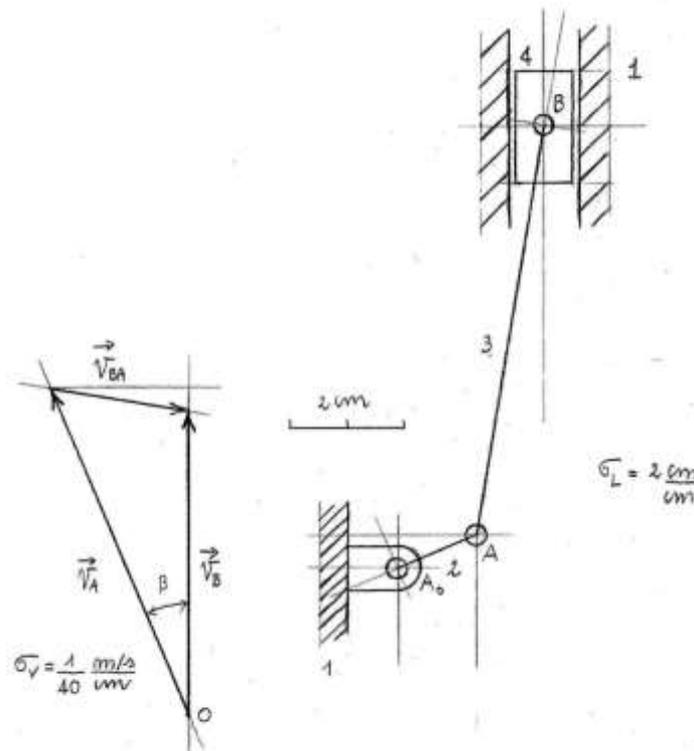
Assumendo l'assenza di attrito, si chiede

1.1) la coppia motrice M_m da applicare al movente per mantenere una velocità di rotazione costante dello stesso $\omega_2 = 50\text{gpm}$ se sul cedente è applicata una forza verticale $P = 50\text{N}$;

1.2) le reazioni vincolari $\vec{R}_{12}, \vec{R}_{13}, \vec{R}_{23}$ nelle condizioni del punto precedente.

Si risponda ai quesiti utilizzando il metodo del Free Body e il Teorema dei Lavori Virtuali. Si chiede inoltre

1.3) la minima forza verticale P da applicare al cedente nella configurazione di alzata massima, perché non si abbia distacco, se la velocità del movente ha valore costante $\omega_2 = 350\text{gpm}$.



2. Analisi cinematica, metodo del meccanismo equivalente. Si osserva che

- il punto B è vincolato -dalla forza di chiusura- a rimanere a distanza costante dal punto A , ovvero B è vincolato a ruotare intorno ad A ;
- il punto A è vincolato -dalla cerniera- a ruotare intorno al punto A_0 ;
- il punto B è vincolato dalla coppia prismatica a traslare verticalmente.

Ciò permette di studiare il moto del punto B attraverso il meccanismo equivalente indicato in figura, il quale è costituito da sole coppie inferiori (si tratta in particolare di un manovellismo di spinta). L'equazione fondamentale della cinematica del secondo ordine porge

$$2.1) \quad \vec{a}_B = \vec{a}_{BA} + \vec{a}_A$$

Per tale equazione si può costruire la tabella seguente:

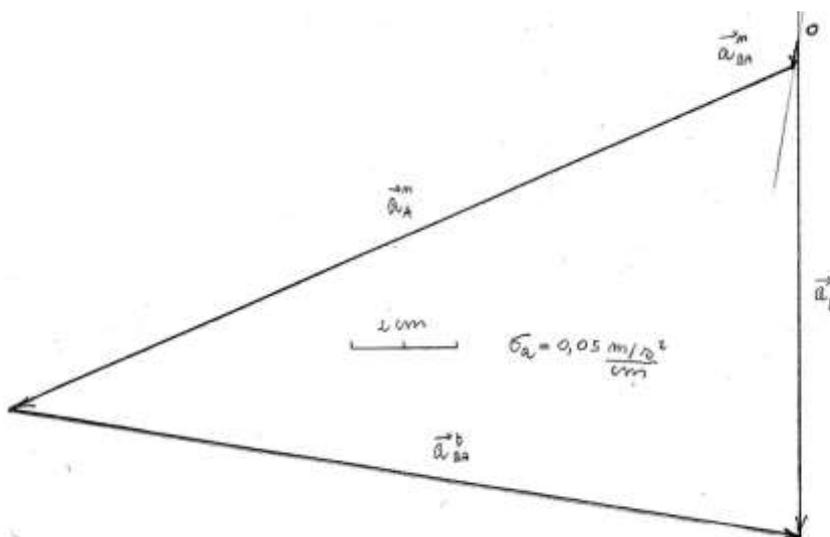
$\vec{a}_B =$	$\vec{a}_{BA}^t +$	$\vec{a}_{BA}^n +$	\vec{a}_A	
?	?	?	$\omega_2^2 \overline{AA_0}$	modulo
<i>verticale</i>	$\perp \overline{AB}$	$\parallel \overline{AB}$	$\perp \overline{AA_0}$	versore

Come si vede l'equazione 1.1 presenta 3 incognite, e dunque non è risolvibile. Tuttavia in questo caso l'analisi cinematica del primo ordine (del meccanismo equivalente) consente di ricavare una delle incognite, infatti l'equazione fondamentale della cinematica del primo ordine porge

$$2.2) \quad \vec{v}_B = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_A$$

la quale si traduce nella tabella

$\vec{v}_B =$	$\vec{v}_{BA} +$	\vec{v}_A	
?	?	$\omega_2 \overline{AA_0}$	modulo
<i>verticale</i>	$\perp \overline{AB}$	$\perp \overline{AA_0}$	versore



La soluzione attraverso i diagrammi polari permette di ricavare in particolare la velocità angolare del moto 3-2. Considerando che

$$\omega_2 \overline{AA_0} = 5.23 \frac{r}{s} \cdot 0.03m = 0.1569 \frac{m}{s}$$

dalla lettura del diagramma si ha

$$\begin{aligned} |\vec{v}_{BA}| &= 2.45cm \cdot \sigma_V = \\ &= 2.45cm \cdot \frac{1}{40} \frac{m}{cm} = 0.061 \frac{m}{s} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$2.3) \quad \omega_{32} = \frac{|\vec{v}_{BA}|}{AB} = \frac{0.061 \frac{m}{s}}{7.4cm \cdot \sigma_L} = \frac{0.061 \frac{m}{s}}{7.4cm \cdot 2 \frac{cm}{cm}} = 0.412 \frac{r}{s}$$

Con ciò la tabella relativa all'equazione 1.1 può essere riscritta come segue

$\vec{a}_B =$	$\vec{a}_{BA}^t +$	$\vec{a}_{BA}^n +$	\vec{a}_A	
?	?	$\omega_{32}^2 \overline{AB}$	$\omega_2^2 \overline{AA_0}$	modulo
<i>verticale</i>	$\perp \overline{AB}$	$\parallel \overline{AB}$	$\perp \overline{AA_0}$	versore

Ora l'equazione è risolvibile con metodo dei diagrammi polari. Considerando allora che

$$\begin{aligned} \omega_{32}^2 \overline{AB} &= \left(0.412 \frac{r}{s}\right)^2 \cdot 7.4cm \cdot \sigma_L = \left(0.412 \frac{r}{s}\right)^2 \cdot 7.4cm \cdot 2 \frac{cm}{cm} = 0.025 \frac{m}{s^2} \\ \omega_2^2 \overline{AA_0} &= \left(5.23 \frac{r}{s}\right)^2 \cdot 3cm = 0.82 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Posso allora tracciare il diagramma polare dal quale si evince che

$$2.4) \quad |\vec{a}_B| = 9.5cm \cdot \sigma_A = 9.5cm \cdot 0.05 \frac{m}{cm} = 0.475 \frac{m}{s^2}$$

3. Analisi cinematica, metodo analitico. Con riferimento alla figura si ha immediatamente che

$$3.1) \quad \begin{cases} l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 - \overline{A_0N} = 0 \\ l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 - y_B = 0 \end{cases}$$

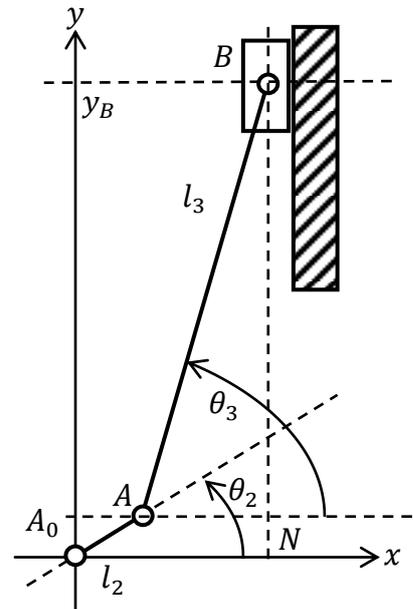
Dalla prima equazione si deduce che

$$3.2) \quad \cos \theta_3 = \frac{\overline{A_0N} - l_2 \cos \theta_2}{l_3}$$

Potendosi facilmente verificare che $\theta_2 \in]0, \pi/2[$, possiamo poi scrivere

$$3.3) \quad \sin \theta_3 = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_3} = \sqrt{1 - \left(\frac{\overline{A_0N} - l_2 \cos \theta_2}{l_3}\right)^2}$$

Sostituendo i dati geometrici del meccanismo si ha



$$\sqrt{1 - \left(\frac{A_0 N - l_2 \cos \theta_2}{l_3}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{5.4cm - 3cm \cos \theta_2}{14.8cm}\right)^2} = \sqrt{1 - [0.20(1.8 - \cos \theta_2)]^2}$$

Dunque abbiamo trovato sin qui che

$$3.4) \quad \sin \theta_3 = \sqrt{1 - [0.20(1.8 - \cos \theta_2)]^2}$$

Sostituendo nella seconda delle 3.1 si ha

$$3.5) \quad y_B = 3cm \sin \theta_2 + 14.8cm \sqrt{1 - [0.20(1.8 - \cos \theta_2)]^2}$$

Derivando si trova

$$3.6) \quad \dot{y}_B = \dot{\theta}_2 \left\{ 3 \cos \theta_2 - 0.592 \frac{1.8 \sin \theta_2 - 0.5 \sin(2\theta_2)}{\sqrt{1 - 0.04(1.8 - \cos \theta_2)^2}} \right\} cm$$

$$3.7) \quad \ddot{y}_B = \dot{\theta}_2^2 \left\{ -3 \sin \theta_2 - 0.592 \left[\frac{1.8 \cos \theta_2 - \cos(2\theta_2)}{\sqrt{1 - 0.04(1.8 - \cos \theta_2)^2}} + \frac{0.04(1.8 \sin \theta_2 - 0.5 \sin(2\theta_2))(1.8 - \cos \theta_2) \sin \theta_2}{(1 - 0.04(1.8 - \cos \theta_2)^2)^{3/2}} \right] \right\} cm$$

Nella configurazione proposta si ha

$$3.8) \quad \begin{cases} \sin \theta_2 = 0.39 \\ \cos \theta_2 = 0.92 \\ \cos(2\theta_2) = 0.69 \\ \sin(2\theta_2) = 0.72 \end{cases}$$

Dunque la 3.7 fornisce per B la seguente velocità ed accelerazione

$$3.9) \quad \begin{cases} \dot{y}_B = 13.35 \frac{cm}{s} \\ \ddot{y}_B = -47.97 \frac{cm}{s^2} \end{cases}$$

Si ottiene così un risultato in buon accordo con la 2.4.

4. Analisi cinematica, metodo analitico approssimato. Vediamo ora un metodo analitico approssimato, di comune uso nello studio del manovellismo di spinta. Si ricordi il seguente sviluppo in serie di Mc Laurin:

$$4.1) \quad (1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2)$$

con $x \in]-1,1[$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Nel nostro caso si osserva che

$$0.8 \leq 1.8 - \cos \theta_2 \leq 2.8 \Rightarrow 0.16 \leq 0.20(1.8 - \cos \theta_2) \leq 0.56$$

Dunque lo sviluppo 4.1 può essere applicato al secondo membro della 3.4, avendosi

$$(1 - [0.20(1.8 - \cos \theta_2)]^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} [0.20(1.8 - \cos \theta_2)]^2 + \frac{1}{8} [0.20(1.8 - \cos \theta_2)]^4 - \dots$$

Limitandoci ai primi due addendi abbiamo

$$4.2) \quad \sin \theta_3 \cong 1 - \frac{1}{2} [0.20(1.8 - \cos \theta_2)]^2 = 1 - 0.02(1.8 - \cos \theta_2)^2$$

Dunque la seconda delle 3.1 porge

$$4.3) \quad y_B = l_2 \sin \theta_2 + l_3 [1 - 0.02(1.8 - \cos \theta_2)^2]$$

Derivando si ottiene

$$4.4) \quad \begin{cases} \dot{y}_B = \dot{\theta}_2 [3 \cos \theta_2 - 1.0656 \sin \theta_2 + 0.296 \sin(2\theta_2)] cm \\ \ddot{y}_B = \dot{\theta}_2^2 [-3 \sin \theta_2 - 1.0656 \cos \theta_2 + 0.592 \cos(2\theta_2)] cm \end{cases}$$

Essendo poi $\theta_2 = 23^\circ$ e $\dot{\theta}_2 = 5.23 r/s$ la seconda delle 4.4 porge

$$4.5) \quad \ddot{y}_B = -47.58 \frac{cm}{s^2}$$

5. Analisi cinematica, metodo dei diagrammi polari. Il centro di istantanea rotazione del moto 2-1 è in A_0 , quello del moto 3-1 è dato dal punto improprio della direzione orizzontale. Poiché poi la velocità $\vec{v}_{M3,2}$ è ortogonale alla retta per B, A , allora C_{32} si trova su tale retta. Dunque -per il teorema di Aronhold-Kennedy- il centro di istantanea rotazione del moto 3-2 è dato dalla intersezione fra la retta per B, A e la retta orizzontale per A_0 .

Detta ω_{32} la velocità angolare del moto 3-2, allora dalla teoria dei moti relativi si ha che

$$5.1) \quad \vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_{32} + \vec{\omega}_2$$

Essendo poi $\vec{\omega}_3 = 0$, allora si ha

$$5.2) \quad \vec{\omega}_{32} = -\vec{\omega}_2$$

Dal punto di vista scalare abbiamo allora

$$5.3) \quad |\vec{\omega}_{32}| = |\vec{\omega}_2| = 5.23 \frac{r}{s}$$

Ricavo ora l'accelerazione del centro di massa del movente. Essa è data da

$$5.4) \quad \vec{a}_{G2} = \overline{AA_0} \omega_2^2 \Rightarrow |\vec{a}_{G2}| = 3cm \cdot \left(50 \cdot \frac{2\pi}{60s}\right)^2 = 0.82 \frac{m}{s^2}$$

Ricavo ora l'accelerazione del centro di massa del cedente. Applico il teorema dei moti relativi, assumendo come sistema di riferimento assoluto Σ il telaio (membro 1), e come sistema di riferimento relativo S il movente (membro 2). Allora l'accelerazione del punto B è data da

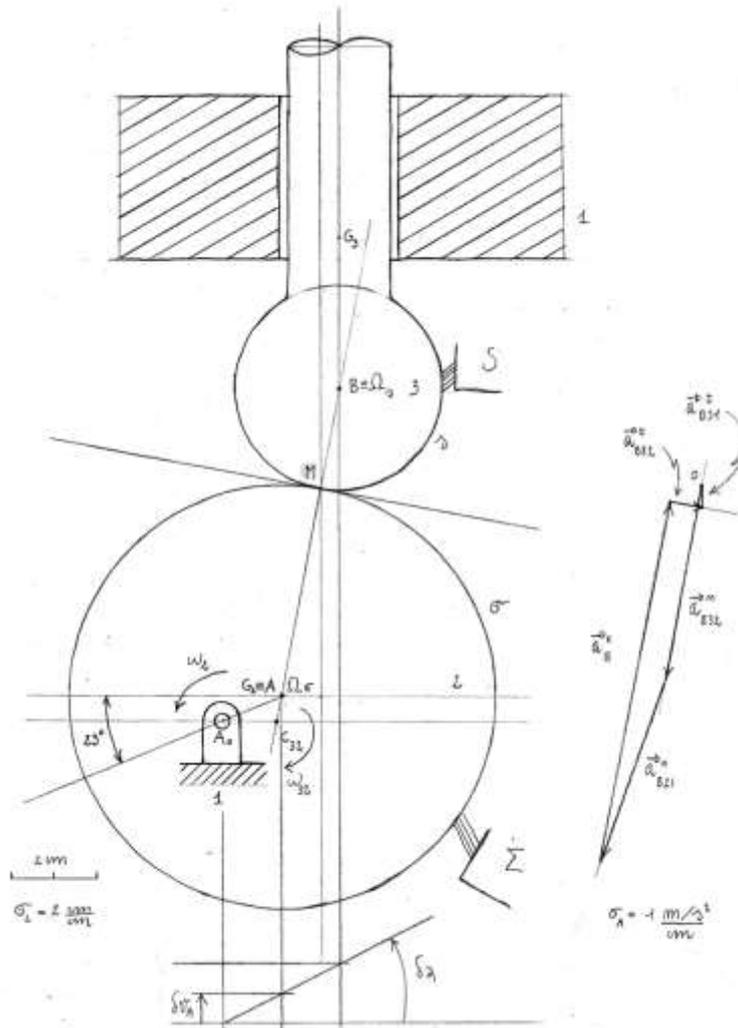
$$5.5) \quad \vec{a}_{B31} = \vec{a}_{B32} + \vec{a}_{B21} + \vec{a}_B^c = \vec{a}_{B32}^t + \vec{a}_{B32}^n + \vec{a}_{B21}^n + 2\vec{\omega}_2 \times \vec{v}_{B32}$$

Considerando il moto di B nell'ambito del moto del piano 3 rispetto al piano 2, possiamo osservare che esso descrive la circonferenza di raggio AB con una velocità periferica scalare $\omega_{32} \overline{C_{32}B}$. Questo permette di ricavare la componente normale di \vec{a}_{B32} , avendosi

$$5.6) \quad \vec{a}_{B32}^n = \frac{s_B^2}{\rho_B} \hat{n} = \frac{\omega_{32}^2 \overline{C_{32}B^2} \overline{BA}}{\overline{AB} \overline{BA}}$$

Per la equazione vettoriale 5.5 è possibile costruire allora la tabella seguente:

$\vec{a}_{B31} =$	$\vec{a}_{B32}^t +$	\vec{a}_{B32}^n	$\vec{a}_{B21}^n +$	\vec{a}_B^c	
?	?	$\frac{\omega_{32}^2 \overline{C_{32}B^2}}{\overline{AB}}$	$ \overline{BA}_0 (\omega_2)^2$	$2 \vec{\omega}_2 \cdot \vec{v}_{M32} $	modulo
$\parallel \overline{BG}_3$	$\perp \overline{BA}$	$\parallel \overline{BA}$	$\parallel \overline{BA}_0$	$\parallel \overline{AB}$	versore



Ricavo i moduli dei vettori noti:

$$5.7) \quad \begin{cases} |\vec{a}_{B32}^n| = \frac{(5.23 \frac{r}{s} 16cm)^2}{14.8cm} = 4.73 \frac{m}{s^2} \\ |\vec{a}_{B21}^n| = |\overline{BA}_0|(\omega_2)^2 = 16.8cm \left(5.23 \frac{r}{s}\right)^2 = 4.59 \frac{m}{s^2} \\ |\vec{v}_{M32}| = |\omega_{32} \overline{C_{32}B}| = |\omega_2 \overline{C_{32}B}| = 5.23 \frac{r}{s} 16cm = 0.83 \frac{m}{s} \\ |\vec{a}_M^c| = 2|\vec{\omega}_2| \cdot |\vec{v}_{M32}| = 2 \cdot 5.23 \frac{r}{s} \cdot 0.83 \frac{m}{s} = 8.75 \frac{m}{s^2} \end{cases}$$

Fisso una scala di rappresentazione per le forze $\sigma_a = 1.0(m/s^2)/cm$ e ottengo il diagramma polare in figura. Dalla lettura del diagramma si ha

$$5.8) \quad |\vec{a}_{M31}| = 0.5cm \cdot \sigma_F = 0.5 \frac{m}{s^2}$$

6. Forze di inerzia. Ricavo la forza d'inerzia per il movente. Considerando la 5.4 si ha

$$6.1) \quad \vec{F}_2^{in} = -m_2 \vec{a}_{G2} \Rightarrow |\vec{F}_2^{in}| = 2.4kg \cdot 0.82 \frac{m}{s^2} = 1.97N$$

Ricavo ora la sollecitazione d'inerzia del cedente. Dalla 2.4 si deduce

$$6.2) \quad \vec{F}_3^{in} = -m_3 \vec{a}_B \Rightarrow |\vec{F}_3^{in}| = 1.9kg \cdot 0.475 \frac{m}{s^2} = 0.90N$$

7. Metodo dei lavori virtuali. Il PLV in questo caso si scrive:

$$7.1) \quad \delta L_v = M_m \delta \alpha + (-P_2 + F_2^{in} \sin(23^\circ)) \delta v_A - F_2^{in} \cos(23^\circ) \delta u_A - (-F_3^{in} + P_3 + P) \delta v_B = 0$$

dove

$$7.2) \quad \begin{cases} P_2 = 2.4kg \cdot g = 23.54N \\ P_3 = 1.9kg \cdot g = 18.63N \\ P = 50N \end{cases}$$

Dalla figura si legge d'altra parte che

$$7.3) \quad \begin{cases} \frac{\delta v_A}{A_0 \bar{A} \cos \theta_2} = \delta \alpha \\ \frac{\delta u_A}{A_0 \bar{A} \sin \theta_2} = \delta \alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$7.4) \quad \begin{cases} \delta v_A = \overline{A_0 \bar{A}} \cos \theta_2 \cdot \delta \alpha = 2.7cm \cdot \delta \alpha \\ \delta u_A = \overline{A_0 \bar{A}} \sin \theta_2 \cdot \delta \alpha = 1.2cm \cdot \delta \alpha \end{cases}$$

Facendo riferimento al diagramma delle velocità utilizzato per l'analisi cinematica del primo ordine, si ha poi

$$\frac{\delta v_A}{\delta v_B} = \frac{v_A \cos \beta}{v_B} \Rightarrow$$

$$7.5) \quad \delta v_B = \frac{v_B}{v_A \cos \beta} \delta v_A = \frac{5.4}{5.9} \delta v_A = 0.91 \delta v_A = 0.91 \cdot 2.7cm \cdot \delta \alpha = 2.47cm \cdot \delta \alpha$$

Dunque la 7.1 porge

$$\begin{aligned} M_m \delta \alpha &= (P_2 - F_2^{in} \sin(23^\circ)) \delta v_A + F_2^{in} \cos(23^\circ) \delta u_A + (-F_3^{in} + P_3 + P) \delta v_B = \\ &= (23.54N - 1.97N \cdot 0.401) \cdot 2.7cm \cdot \delta \alpha + 1.97N \cdot 0.92 \cdot 1.2cm \cdot \delta \alpha + \\ &\quad + (-0.90N + 18.63N + 50N) \cdot 2.47cm \cdot \delta \alpha \Rightarrow \end{aligned}$$

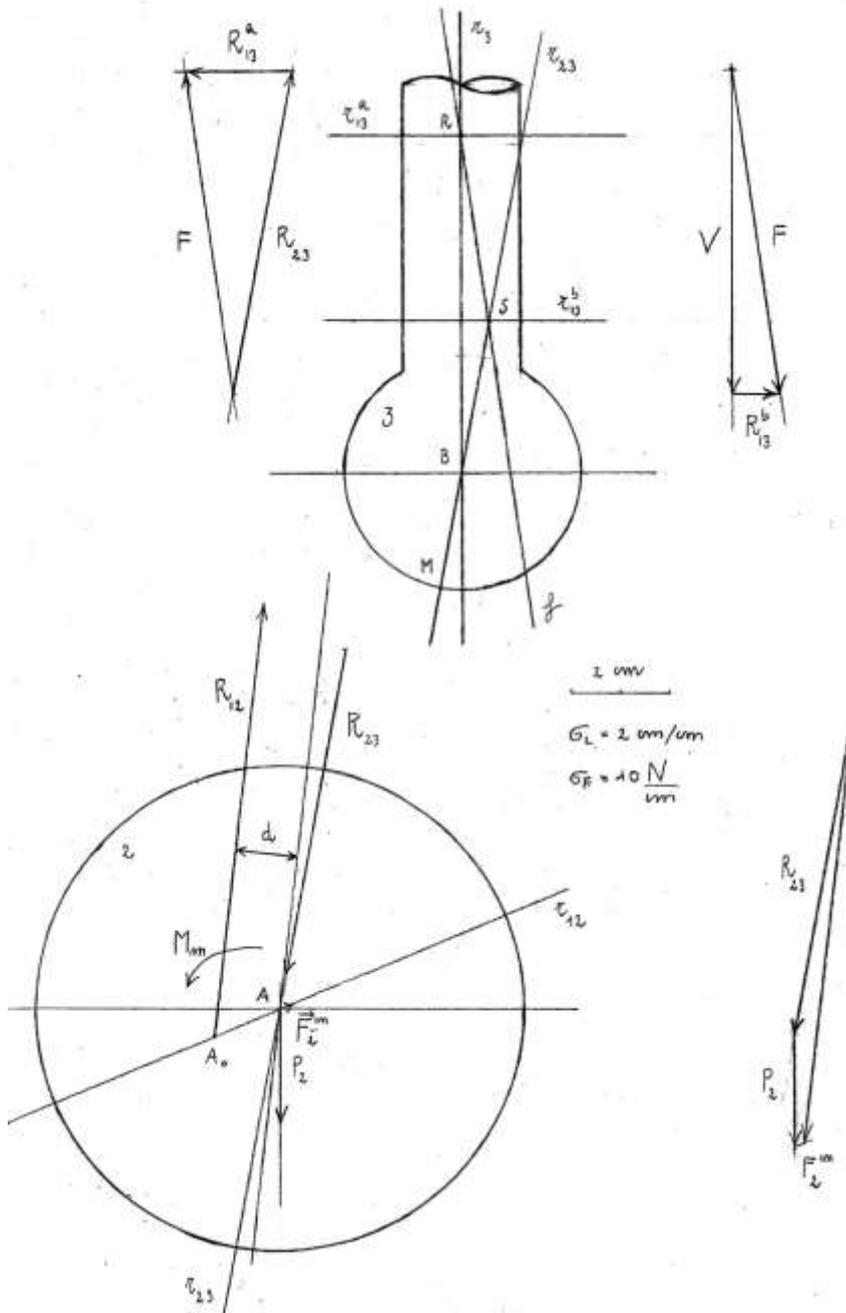
$$7.6) \quad M_m = 230.88Ncm = 2.30Nm$$

8. Metodo del free body. Procedo all'imposizione dell'equilibrio meccanico, al fine di ricavare le incognite dinamiche.

Decido di descrivere la reazione del collare con due forze di rette d'azione r_{13}^a e r_{13}^b ; allora il corpo 3 è un corpo soggetto a sole quattro forze. Indicando V la risultante delle forze verticali agenti su 3, abbiamo

$$8.1) \quad V = F_3^{in} - P_3 - P = -67.73$$

dove ho assunto positivo il verso che punta l'alto.



Individuando la retta di compenso f , si ricava in particolare la forza scambiata dai corpi 3 e 2. Imponendo l'equilibrio al corpo due, si ricava infine la coppia richiesta. Stabilita la scala delle forze $\sigma_F = 10 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$, dal diagramma polare in figura si deduce che:

$$8.2) \begin{cases} R_{12} = 9.0cm \cdot 10 \frac{N}{cm} = 90N \\ R_{13}^a = 2.2cm \cdot 10 \frac{N}{cm} = 22N \\ R_{13}^b = 1.0cm \cdot 10 \frac{N}{cm} = 10N \\ R_{23} = 6.8cm \cdot 10 \frac{N}{cm} = 68N \\ d = 2.4cm \\ M_m = R_{23}d = 2.25Nm \end{cases}$$

9. Massima alzata: soluzione numerica. La coppia cinematica in esame si classifica come indicato in tabella.

<i>tipo di coppia superiore</i>	<i>tipo di contatto</i>	<i>tipologia di moto</i>	<i>chiusura della coppia</i>	<i>combinazione di fasi</i>
camma	punteria a rullo deviata	rotazione del movente, traslazione del cedente	chiusura di forma	salita-discesa (R-R)

Per ricavare la legge del moto, e dunque il diagramma della alzate, utilizzo il meccanismo equivalente, per il quale introduco un opportuno sistema di coordinate, come in figura. Il vettore delle coordinate lagrangiane sovrabbondanti si scrive

$$9.1) \quad \{q\} = \begin{Bmatrix} y_B \\ \theta_3 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

dove si è assunto come coordinata indipendente l'angolo di manovella. Le equazioni di vincolo sono

$$9.2) \quad \{\Psi(q)\} = \begin{Bmatrix} l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 - \overline{A_0N} \\ l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 - y_B \end{Bmatrix} = \{0\}$$

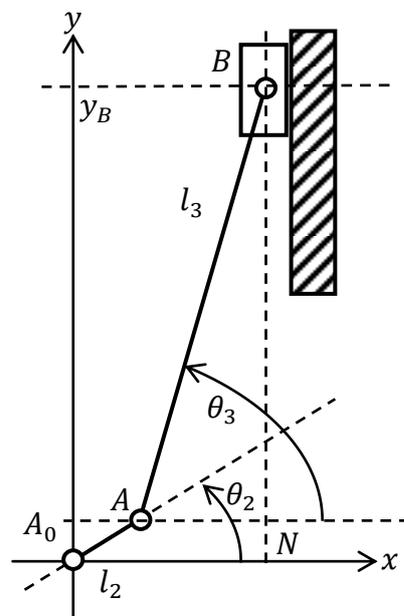
Lo jacobiano relativo alle coordinate dipendenti si scrive

$$9.3) \quad [\Psi]_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_B} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_B} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -l_3 \sin \theta_3 \\ -1 & l_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix}$$

Si osservi che il determinante della matrice 9.3 vale $\Delta = -l_3 \sin \theta_3$, dunque sembra di poter anticipare che il meccanismo non ammette configurazioni critiche, con questa scelta della coordinata indipendente. Il metodo di Newton porge allora

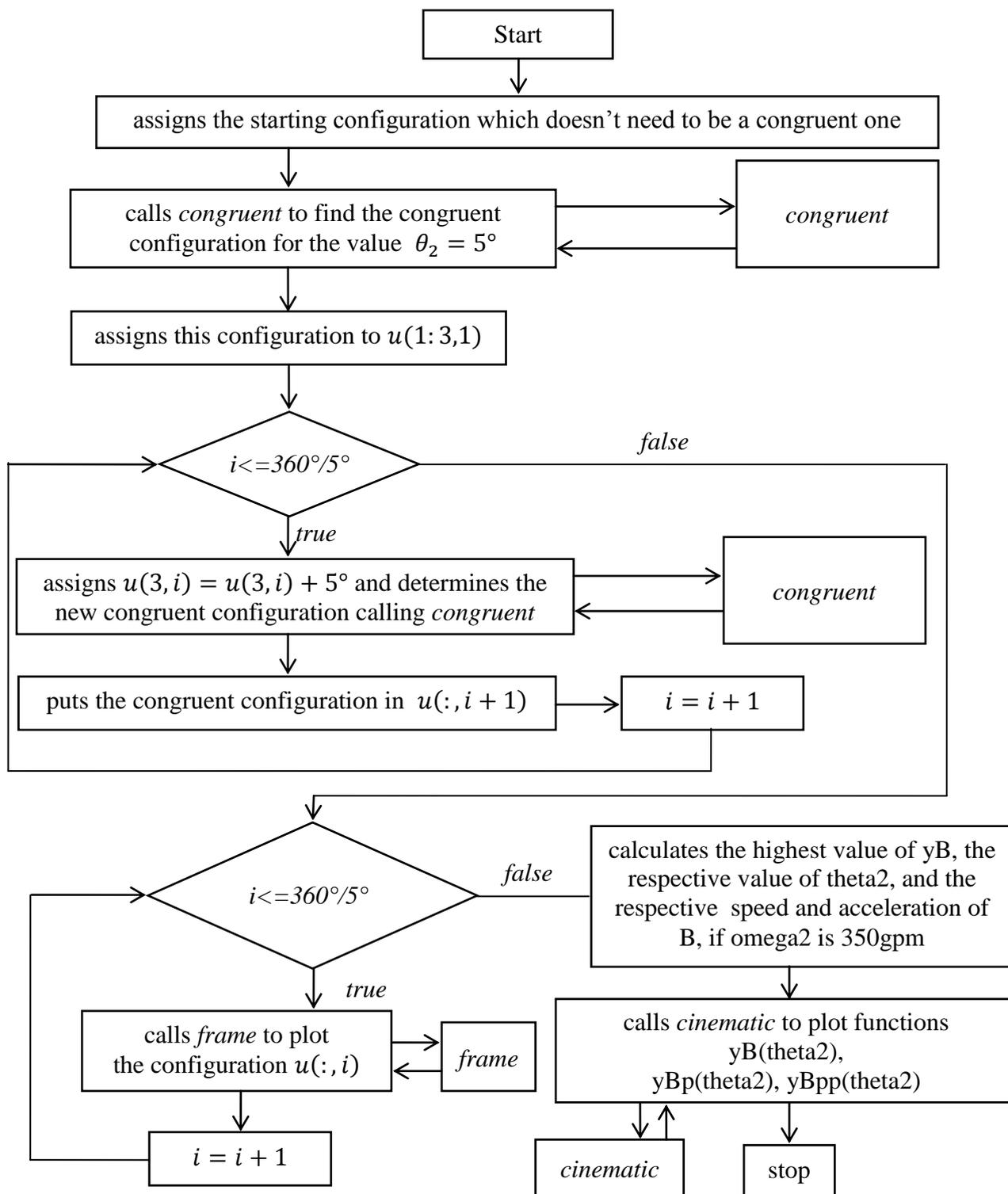
$$9.4) \quad \begin{Bmatrix} y_B^{(i+1)} \\ \theta_3^{(i+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_B^{(i)} \\ \theta_3^{(i)} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -l_3 \sin \theta_3^{(i)} \\ -1 & l_3 \cos \theta_3^{(i)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} l_2 \cos \theta_2^{(i)} + l_3 \cos \theta_3^{(i)} - \overline{A_0N} \\ l_2 \sin \theta_2^{(i)} + l_3 \sin \theta_3^{(i)} - y_B^{(i)} \end{Bmatrix}$$

Si deducono poi dalla figura le seguenti misure per gli elementi geometrici considerati:

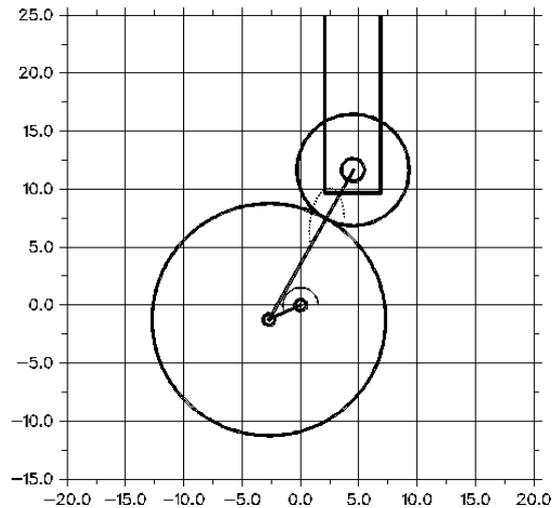
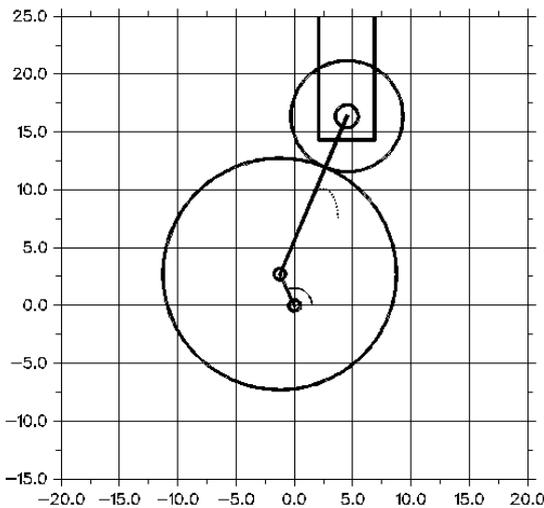


$$9.5) \begin{cases} l_2 = 1.5\text{cm} \cdot 2 \frac{\text{cm}}{\text{cm}} = 3.0\text{cm} \\ l_3 = 7.45\text{cm} \cdot 2 \frac{\text{cm}}{\text{cm}} = 14.9\text{cm} \\ \overline{A_0N} = 2.25\text{cm} \cdot 2 \frac{\text{cm}}{\text{cm}} = 4.50\text{cm} \end{cases}$$

Scrivo un programma in Fortran per sviluppare il metodo 9.4 e per ricavare il diagramma delle alzate, secondo il diagramma di flusso seguente.



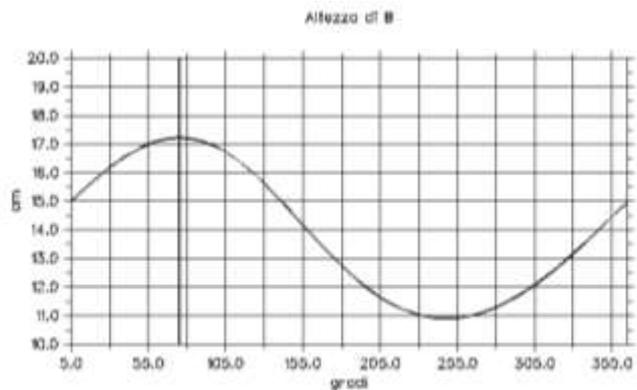
Il programma consente di disegnare la configurazione del meccanismo per valori crescenti di θ_2 , ottenendo in tal modo un'animazione della camma per il movente che descrive un angolo giro. In figura due fotogrammi dell'animazione in parola:



Il programma calcola anche il valore massimo dell'alzata e il valore di θ_2 per il quale si ottiene. Dal *prompt* si legge

The highest value of yB is 17.224026
for theta2= 74.99999°

Il programma fornisce il diagramma delle alzate, della velocità di B e della sua accelerazione per $\omega_2 = 350 \text{ gpm}$, dove è evidenziata la configurazione di massima alzata.



10. Massima alzata, analisi cinematica. L'equazione fondamentale della cinematica permette di scrivere l'equazione

$$10.1) \vec{v}_B = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_A$$

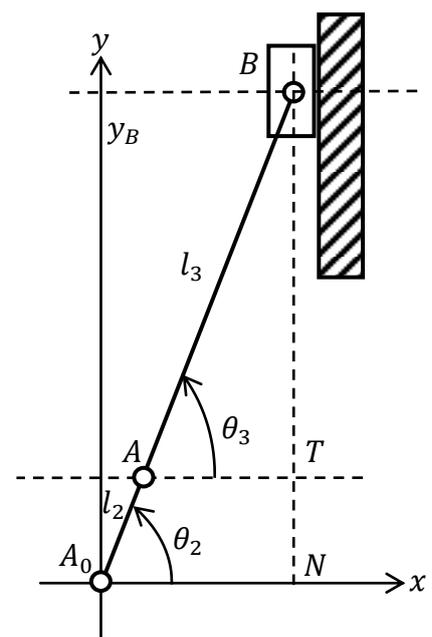
la quale si traduce nella tabella

$\vec{v}_B =$	$\vec{v}_{BA} +$	\vec{v}_A	
?	?	$\omega_2 \overline{AA_0}$	modulo
verticale	$\perp \overline{AB}$	$\perp \overline{AA_0}$	versore

La soluzione attraverso i diagrammi polari permette di ricavare in particolare la velocità angolare del moto 3-2. Considerando che

$$|\vec{v}_A| = \omega_2 \overline{AA_0} = 36.65 \frac{r}{s} 0.03m = 1.09 \frac{m}{s}$$

dalla lettura del diagramma si ha



posso tracciare il diagramma polare dal quale si evince

$$10.5) \quad |\vec{a}_B| = 5.1cm \cdot \sigma_A = 5.1cm \cdot 10 \frac{\frac{m}{s^2}}{cm} = 51 \frac{m}{s^2}$$

Come verifica del risultato ottenuto utilizzo la seconda delle 4.4 la quale porge

$$10.6) \quad \ddot{y}_B = 1343.22 \frac{cm}{s^2} [-3 \cdot 0.96 - 1.0656 \cdot 0.26 + 0.592(-0.866)] = -49.29 \frac{m}{s^2}$$

dove si è considerato che

$$10.7) \quad \begin{cases} \theta_2 = 75^\circ = 1.3r \\ \dot{\theta}_2 = 36.65 \frac{r}{s} \\ \sin \theta_2 = 0.96 \\ \cos \theta_2 = 0.26 \\ \cos 2\theta_2 = -0.866 \end{cases}$$

11. Condizione di non distacco. Si può allora calcolare la forza di inerzia del cedente:

$$11.1) \quad \vec{F}_3^{in} = -m_3 \vec{a}_B \Rightarrow |\vec{F}_3^{in}| = 1.9kg \cdot 51 \frac{m}{s^2} = 96.9N$$

mentre quella del movente è

$$11.2) \quad \vec{F}_2^{in} = -m_2 \vec{a}_{G2} \Rightarrow |\vec{F}_2^{in}| = 2.4kg \cdot 40.29 \frac{m}{s^2} = 96.69N$$

Il PLV nel caso della configurazione di massima alzata si scrive:

$$11.3) \quad \delta L_v = M_m \delta \alpha + (-P_2 + F_2^{in} \sin(75^\circ)) \delta v_A + F_2^{in} \cos(75^\circ) \delta u_A + (F_3^{in} - P_3 - P) \delta v_B = 0$$

dove

$$11.4) \quad \begin{cases} P_2 = 2.4kg \cdot g = 23.54N \\ P_3 = 1.9kg \cdot g = 18.63N \end{cases}$$

Dalla figura si legge d'altra parte che

$$11.5) \quad \begin{cases} \frac{\delta v_A}{A_0 A \cos \theta_2} = \delta \alpha \\ \frac{-\delta u_A}{A_0 A \sin \theta_2} = \delta \alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$11.6) \quad \begin{cases} \delta v_A = \overline{A_0 A} \cos \theta_2 \cdot \delta \alpha = 1cm \cdot \delta \alpha \\ \delta u_A = -\overline{A_0 A} \sin \theta_2 \cdot \delta \alpha = -3cm \cdot \delta \alpha \end{cases}$$

Facendo riferimento al diagramma delle velocità utilizzato per l'analisi cinematica del primo ordine, si ha poi

$$11.7) \quad \delta v_B = 0.0cm$$

Dunque la 11.3 porge

$$\begin{aligned}
 M_m \delta \alpha &= -(-P_2 + F_2^{in} \sin(75^\circ)) \delta v_A - F_2^{in} \cos(75^\circ) \delta u_A \Rightarrow \\
 \Rightarrow M_m &= -(-P_2 + F_2^{in} \sin(75^\circ)) cm + F_2^{in} \cos(75^\circ) 3cm \Rightarrow \\
 \Rightarrow M_m &= -(-23.54N + 96.69N \cdot 0.96) cm + 96.69N \cdot 0.25 \cdot 3cm \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$11.8) \quad M_m = -69.28Ncm + 72.51Ncm \Rightarrow 3.28Ncm$$

La minima forza P per la quale si evita il distacco è quella che bilancia la forza verticale agente su 3, in corrispondenza a una R_{23} nulla. Si ha dunque

$$11.9) \quad P_{min} = F_3^{in} - P_3 = 96.9N - 18.63N = 78.27N$$

12. Codice dell'unità principale. Segue il codice in Fortran della unità chiamante che risolve il problema della configurazione della massima alzata.

```

PROGRAM main_ese_dieci
!
!this code uses the graphic library DISLIN
!
USE DISLIN
!
!this code uses the module mod_ese_dieci
!
USE mod_ese_dieci
!
!declarative section
!
IMPLICIT NONE
!
!! declare the array which will contain the coordinates
!
REAL,DIMENSION(3,100)::u = 0.
!
!! declare arrays for speed and acceleration of point B
!
REAL,DIMENSION(100)::YBp = 0.
REAL,Dimension(100)::theta2p = 0.
REAL,DIMENSION(100)::YBpp = 0.
REAL,DIMENSION(100)::theta2pp = 0.
!
!! declare the array which will contain the congruent configuration
!
REAL,DIMENSION(3)::conf
!
!the initial guess
!
REAL::yB = 15.
REAL::theta3 = 77.*(3.1415927/180.)
REAL::theta2 = 5.*(3.1415927/180.)
!
!theta2 incremnt
!
REAL::delta_rad
REAL::delta_gra = 5.

```

```

!
!angular speed
!
REAL::omega2 = 50*2*3.1415927/60.
!
!time increment and total_time
!
REAL::delta_t, total_t
!
!the highest value of yB and its angle
!
REAL::hmax, theta2max
!
!the number of increments
!
INTEGER::n
!
!cycle index
!
INTEGER::i,m
!
!a characters array used to close the program
!
CHARACTER(len=10):: chiusura
!
!executive section
!
!! calculate delta_rad
!
delta_rad = delta_gra*(3.1415927/180)
!
!the first congruent configuration
!
CALL congruent (yB,theta3,theta2,conf)
!
!! print the configuration on the screen
!
WRITE(*,*) " "
WRITE(*,*) "The configuration for theta2=", theta2*180/3.1415927,"is"
WRITE(*,*) " "
WRITE(*,*) "yB=", conf(1)
WRITE(*,*) "theta3=", conf(2)*180/3.1415927
WRITE(*,*) "theta2=", conf(3)*180/3.1415927
WRITE(*,*) " "
!
!! assing the first congruent configuration
!
u(:,1) = conf
!
!! determine n
!
n=1+INT(360/delta_gra)
!
!During this cycle will be determined all the n configurations
!
ciclo: DO i=2,n,1
!

```

```

        yB = u(1,i-1)
        theta3 = u(2,i-1)
        theta2 = u(3,i-1)+delta_rad
!
!the configuration compatible with current theta2 will be determined
!
        CALL congruent (yB,theta3,theta2,conf)
!
!! assing the congruent configuration to u(:,i)
!
        u(:,i)=conf
!
!! print the configuration on the screen
!
        WRITE(*,*) " "
        WRITE(*,*) "The configuration for theta2=", theta2*180/3.1415927,"is"
        WRITE(*,*) " "
        WRITE(*,*) "yB=", conf(1)
        WRITE(*,*) "theta3=", conf(2)*180/3.1415927
        WRITE(*,*) "theta2=", conf(3)*180/3.1415927
        WRITE(*,*) " "
!
END DO ciclo
!
!! plot the n configurations
!
ciclo_2: DO i=1,n,1
!
        m=i
        !CALL frames (u,n,m)
!
END DO ciclo_2
!
!! calculate delat_t
!
delta_t = omega2/delta_rad
!
!! calculate point B's speed
!
ciclo_3: DO i=1,n-1,1
!
        yBp(i) = (u(1,i+1) - u(1,i))/delta_t
        theta2p(i) = (delta_gra/2.) + delta_gra*i
!
END DO ciclo_3
!
!! calculate point B's acceleration
!
ciclo_4: DO i=2,n-1,1
!
        yBpp(i) = (yBp(i) - yBp(i-1))/delta_t
        theta2pp(i)= delta_gra*i
!
END DO ciclo_4
!
yBpp(1) = (yBp(1)- yBp(n-1))/delta_t
theta2pp(1)= delta_gra

```

```

yBpp(n) = (yBp(1)-yBp(n-1))/delta_t
theta2pp(n)= delta_gra*n
!
!! plot the law of motion for point B
!
CALL cinematic (u,yBp,theta2p,yBpp,theta2pp,n)
!
!The highest value of yB
!
hmax = MAXVAL(u(1,:))
!
!the value of theta2 which gives the highest value for yB
!
ciclo_5: DO i=1,n,1

        IF (u(1,i+1)<u(1,i)) EXIT

END Do ciclo_5
!
theta2max = u(3,i)*180/3.1415927
!
WRITE (*,*) "The highest value of yB is", hmax
WRITE (*,*) "for theta2=", theta2max
WRITE (*,*) "The speed and the acceleration for this value of theta2"
WRITE (*,*) "and for an angular speed of", omega2, "are"
WRITE (*,*) "speed:", yBp(i)
WRITE (*,*) "acceleration:", yBpp(i)
!
WRITE (*,*) " "
WRITE (*,*) "To close the program press any key. Then press RETURN."
READ (*,*) chiusura
!
STOP
!
END PROGRAM main_ese_dieci

```

13. Codice del modulo. Il modulo con le subroutine.

```

MODULE mod_ese_dieci
!
!sezione dichiarativa
!
IMPLICIT NONE
!
!dichiaro le costanti geometriche del quadrilatero

REAL, PARAMETER:: l2=3.
REAL, PARAMETER:: l3= 14.8
REAL, PARAMETER:: AON= 4.5

!fisso il formato di output per i diagrammi

CHARACTER(len=4):: formato ='bmp '

!scrivo le subroutine

CONTAINS

```

```

!-----
SUBROUTINE congruent (yBb,theta3b,theta2b,conf)

!sezione dichiarativa

IMPLICIT NONE

!dichiaro gli argomenti fittizi

REAL,INTENT(OUT),DIMENSION(3)::conf
REAL,INTENT(IN)::yBb,theta3b,theta2b

!dichiaro le variabili locali

!dichiaro le coordinate

REAL::yB,theta3,theta2

!dichiaro il vettore delle coordinate dipendenti

REAL,DIMENSION(2,1000)::u

!dichiaro la funzione delle equazioni di vincolo

REAL,DIMENSION(2,1000)::psi

!dichiaro la matrice jacobiana e la sua inversa

REAL(KIND=8),DIMENSION (2,2,1000)::j
REAL(KIND=8),DIMENSION (2,2)::invj

!dichiaro il vettore dei resti

REAL,DIMENSION(2,1000)::resto

!dichiaro la norma del vettore dei resti

REAL,DIMENSION(1000):: norma

!altre variabili di lavoro

INTEGER::i !indici dei cicli

!sezione esecutiva

yB = yBb
theta3 = theta3b
theta2 = theta2b

!inizializzo i valori d'innescio di u

u(1,1) = yB
u(2,1) = theta3

WRITE(*,*) "Coordinate, iterara", 0.

```

```
WRITE(*,*) u(1,1)
WRITE(*,*) u(2,1)
```

!inizializzo la matrice jacobiana con i valori costanti

```
j(1,1,:) = 0.
j(2,1,:) = -1.
```

!inizializzo il vettore resto

```
resto = 0.
```

!ciclo del metodo Newton-Raphson

```
i=0
```

ciclo: DO

```
    i=i+1
```

```
        yB = u(1,i)
        theta3 = u(2,i)
```

!calcolo la matrice jacobiana

```
        j(1,2,i) = -1.*l3*SIN(theta3)
        j(2,2,i) = l3*COS(theta3)
```

```
        WRITE(*,*) "Matrice jacobiana, iterara", i
        WRITE(*,*) j(1,1,i), j(1,2,i)
        WRITE(*,*) j(2,1,i), j(2,2,i)
```

!calcolo l'inversa della matrice jacobiana

```
        invj(1,1) = j(2,2,i)/(j(1,1,i)*j(2,2,i)-j(1,2,i)*j(2,1,i))
        invj(1,2) = -1.*j(1,2,i)/(j(1,1,i)*j(2,2,i)-j(1,2,i)*j(2,1,i))
        invj(2,1) = -1.*j(2,1,i)/(j(1,1,i)*j(2,2,i)-j(1,2,i)*j(2,1,i))
        invj(2,2) = j(1,1,i)/(j(1,1,i)*j(2,2,i)-j(1,2,i)*j(2,1,i))
```

```
        WRITE(*,*) "Inversa della matrice jacobiana, iterara", i
        WRITE(*,*) invj(1,1), invj(1,2)
        WRITE(*,*) invj(2,1), invj(2,2)
```

!calcolo la funzione psi

```
        psi(1,i) = l2*COS(theta2) + l3*COS(theta3) - A0N
        psi(2,i) = l2*SIN(theta2) + l3*SIN(theta3) - YB
```

!calcola il vettore resto

```
        resto(:,i) = MATMUL(invj,psi(:,i))
```

```
        WRITE(*,*) "Vettore resto, iterara", i
        WRITE(*,*) resto(1,i)
        WRITE(*,*) resto(2,i)
```

!calcola la norma del resto

```
norma(i) = SQRT(DOT_PRODUCT(resto(:,i),resto(:,i)))
```

```
!verifico il valore della norma e in caso esco
```

```
IF (norma(i)<=0.01) EXIT ciclo
```

```
!calcola le coordinate della iterata successiva
```

```
u(1,i+1) = u(1,i)- resto(1,i)
```

```
u(2,i+1) = u(2,i)- resto(2,i)
```

```
WRITE(*,*) "Coordinate, iterara", i+1
```

```
WRITE(*,*) u(i+1,i)
```

```
WRITE(*,*) u(i+2,i)
```

```
END DO ciclo
```

```
!assegna il valore a conf
```

```
conf(1) = u(1,i)
```

```
conf(2) = u(2,i)
```

```
conf(3) = theta2
```

```
END SUBROUTINE congruent
```

```
!-----
```

```
SUBROUTINE frames (u,n,m)
```

```
!sezione dichiarativa
```

```
!dichiaro gli argomenti fittizi
```

```
!dichiaro l'array di tutte le configurazioni calcolate
```

```
REAL,INTENT(IN),DIMENSION(3,1000)::u
```

```
!dichiaro il numero di configurazioni calcolate
```

```
INTEGER,INTENT(IN)::n,m
```

```
!dichiaro le variabili locali
```

```
!stringa usata per la legenda
```

```
CHARACTER(len=30)::stringa
```

```
!dichiaro l'indice del ciclo
```

```
INTEGER::i
```

```
!dichiaro le coordinate
```

```
REAL::yB,theta3,theta2
```

```
!dichiaro gli estremi del lato l2
```

```
REAL::I2A0x
REAL::I2A0y
REAL::I2Ax
REAL::I2Ay
```

```
!dichiaro gli estremi del lato I3
```

```
REAL::I3Ax
REAL::I3Ay
REAL::I3Bx
REAL::I3By
```

```
!dichiaro le coordinate di M2,M3
```

```
REAL,DIMENSION(1000):: xM2,xM3
REAL,DIMENSION(1000):: yM2,yM3
```

```
!sezione esecutiva
```

```
CALL METAFL ('bmp') !indico il formato dell'output
```

```
!fisso risoluzione dell'immagine in formato .bmp
```

```
CALL BMPMOD (25000,'meter','resolution')
```

```
CALL SCRMOD ('revers') !scritta nera su fondo bianco
```

```
CALL DISINI !richiama alcune impostazioni di default
```

```
CALL PAGERA !traccio un bordo per il piano xy
```

```
CALL DUPLX !font a doppio spessore
```

```
CALL AXSPOS (700,1700) !coordinate angolo basso sinistra
```

```
CALL AXSLEN (1500,1500)!lunghezza dei due assi in pixel
```

```
CALL GRAF (-20.,20.,-20.,5.,-15.,25.,-15.,5.)
```

```
CALL GRID (1,1) !impone una griglia sul piano coordinato
```

```
CALL XAXGIT !traccio la retta x=0
```

```
CALL YAXGIT !traccio la retta y=0
```

```
CALL NAME ('cm','x')!nome delle ascisse
```

```
CALL NAME ('cm','y')!nome delle ordinate
```

```
CALL TITLIN ("camma a rullo",1) !prima riga del titolo
```

```
CALL TITLE !stampa il titolo di cui sopra
```

```
CALL DASH !tratteggio per gli assi coordinati
```

```
CALL LINWID (8) !spessore della linea
```

```
CALL MYLINE (1,1) !impone una linea continua
```

```
ciclo: DO i=1,m,1
```

```
!assegno le coordinate
```

```
yB = u(1,i)
```

```
theta3 = u(2,i)
```

```
theta2 = u(3,i)
```

```
!assegno gli estremi dei lati I2
```

```
I2A0x = 0.
```

```
I2A0y = 0.  
I2Ax = I2*COS(theta2)  
I2Ay = I2*SIN(theta2)
```

```
!assegno gli estremi del lato I3
```

```
I3Ax = I2Ax  
I3Ay = I2Ay  
I3Bx = I2Ax + I3*COS(theta3)  
I3By = yB
```

```
!calcolo la posizione di M2, M3
```

```
xM2(i) = I2Ax/2.  
yM2(i) = I2Ay/2.  
xM3(i) = I3Ax + (I3Bx-I3Ax)/2.  
yM3(i) = I3Ay + (I3By-I3Ay)/2.
```

```
END DO ciclo
```

```
!disegno ciascuno dei lati indicando gli estremi
```

```
CALL RLINE (I2A0x,I2A0y,I2Ax,I2Ay)  
CALL RLINE (I3Ax,I3Ay,I3Bx,I3By)
```

```
!traccio l'asta del rullo
```

```
CALL RLREC (I3Bx - 2.4,I3By +16., 4.8, 18.)
```

```
!traccio la circonferenza del movente
```

```
CALL RLCIRC (I2Ax,I2Ay,10.)
```

```
!traccio la circonferenza del rullo
```

```
CALL RLCIRC (I3Bx,I3By,4.8)
```

```
!traccio la cerniera del movente
```

```
CALL RLCIRC (I2A0x,I2A0y,0.5)
```

```
!Traccio la cerniera fra I2 e I3
```

```
CALL RLCIRC (I2Ax,I2Ay,0.5)
```

```
!traccio la cerniera della slitta
```

```
CALL RLCIRC (I3Bx,I3By,1.0)
```

```
!traccio le traiettorie dei punti medi
```

```
CALL CHNCRV ('line') !usa tratti diversi per le due curve  
CALL LINWID (2) !spessore della linea  
CALL CURVE (xM2,yM2,m)  
CALL CURVE (xM3,yM3,m)
```

```
CALL DISFIN
```

END SUBROUTINE frames

!-----

SUBROUTINE cinematic (u,yBp,theta2p,yBpp,theta2pp,n)

!sezione dichiarativa

!dichiaro gli argomenti fittizi

!dichiaro gli array

REAL,INTENT(IN),DIMENSION(3,100):: u

REAL,INTENT(IN),DIMENSION(100) :: yBp,yBpp,theta2p,theta2pp

!dichiaro il numero di configurazioni calcolate

INTEGER,INTENT(IN)::n

!dichiaro le variabili locali

!array con la funzione da plottare

REAL,DIMENSION(1000)::yB

REAL,DIMENSION(1000)::x

!valori estremi di yBp e yBpp

REAL:: minp, maxp, minpp, maxpp

!stringa usata per la legenda

CHARACTER(len=30)::stringa

!dichiaro l'indice del ciclo

INTEGER::i

!sezione esecutiva

!registro l'array delle posizioni

ciclo: DO i=1,n,1

 yB(i)=u(1,i)

 x(i)=u(3,i)*180/3.1415927

 WRITE(*,*) yB(i), x(i), i

END DO ciclo

!calcolo gli estremi di velocita' e accelerazione

maxp = MAXVAL(yBp)

minp = MINVAL(yBp)

maxpp= MAXVAL(yBpp)

minpp= MINVAL(yBpp)

!disegno il grafico di y_B rispetto a θ_2

CALL METAFL ('bmp') !indico il formato dell'output

!fisso risoluzione dell'immagine in formato .bmp

CALL SCRMOD ('revers') !scritta nera su fondo bianco

CALL DISINI !richiama alcune impostazioni di default

CALL PAGERA !traccio un bordo per il piano xy

CALL DUPLX !font a doppio spessore

CALL AXSPOS (550,1300) !coordinate angolo basso sinistra

CALL AXSLEN (2000,1000)!!lunghezza dei due assi in pixel

CALL NAME ('gradi','x')!nome delle ascisse

CALL NAME ('cm','y')!nome delle ordinate

CALL TITLIN ("Altezza di B",3) !prima riga del titolo

CALL GRAF (5.,365.,5.,50.,10.,20.,10.,1.)

CALL GRID (2,1) !impone una griglia sul piano coordinato

CALL TITLE !stampa il titolo di cui sopra

CALL LINWID (3) !spessore della linea

CALL RLINE (74.9999,0.,74.9999,20.)

CALL CURVE (x,yB,n)

CALL XAXGIT !traccio la retta $x=0$

CALL YAXGIT !traccio la retta $y=0$

!traccio il grafico

CALL DISFIN

CALL METAFL ('bmp') !indico il formato dell'output

!fisso risoluzione dell'immagine in formato .bmp

CALL SCRMOD ('revers') !scritta nera su fondo bianco

CALL DISINI !richiama alcune impostazioni di default

CALL PAGERA !traccio un bordo per il piano xy

CALL DUPLX !font a doppio spessore

CALL LABDIG (4,'y') !chiedo 5 cifre decimali per le ordinate

CALL AXSPOS (550,1850) !coordinate angolo basso sinistra

CALL AXSLEN (2000,1500)!!lunghezza dei due assi in pixel

CALL NAME ('gradi','x')!nome delle ascisse

CALL NAME ('cm/s','y')!nome delle ordinate

CALL TITLIN ("Velocita' di B",2) !prima riga del titolo

CALL TITLIN ("per ω_2 di 350 gpm",3) !seconda riga del titolo

CALL GRAF (5.,365.,5.,50.,minp-0.0001,maxp+0.0001,-0.0007,0.0002)

CALL GRID (2,2) !impone una griglia sul piano coordinato

CALL TITLE !stampa il titolo di cui sopra

```

CALL LINWID (3) !spessore della linea

CALL RLINE (74.9999,minp-0.0001,74.9999,maxp+0.0001)
CALL CURVE (theta2p,yBp,n-1)

CALL XAXGIT          !traccio la retta x=0
CALL YAXGIT          !traccio la retta y=0

!traccio il grafico

CALL DISFIN

CALL METAFL ('bmp') !indico il formato dell'output

!fisso risoluzione dell'immagine in formato .bmp

CALL SCRMOD ('revers') !scritta nera su fondo bianco
CALL DISINI          !richiama alcune impostazioni di default
CALL PAGERA          !traccio un bordo per il piano xy
CALL DUPLX           !font a doppio spessore
CALL LABDIG (8,'y') !chiedo otto cifre decimali per le ordinate
CALL AXSPOS (550,1850) !coordinate angolo basso sinistra
CALL AXSLEN (2000,1500) !lunghezza dei due assi in pixel
CALL NAME ('gradi','x') !nome delle ascisse
CALL NAME ('cm/s^2','y') !nome delle ordinate

CALL TITLIN ("Accelerazione di B",2)          !prima riga del titolo
CALL TITLIN ("per omega2 di 350 gpm",3)       !seconda riga del titolo

CALL GRAF (5.,365.,5.,50.,minpp-2.E-8,maxpp+2.E-8,-17.0E-8,2.E-8)
CALL GRID (2,2)          !impone una griglia sul piano coordinato

CALL TITLE              !stampa il titolo di cui sopra

CALL LINWID (3) !spessore della linea

CALL RLINE (74.9999,minpp-2.E-8,74.9999,maxpp+2.E-8)
CALL CURVE (theta2pp,yBpp,n)

CALL XAXGIT          !traccio la retta x=0
CALL YAXGIT          !traccio la retta y=0

!traccio il grafico

CALL DISFIN

END SUBROUTINE cinematic

!-----

END MODULE mod_ese_dieci

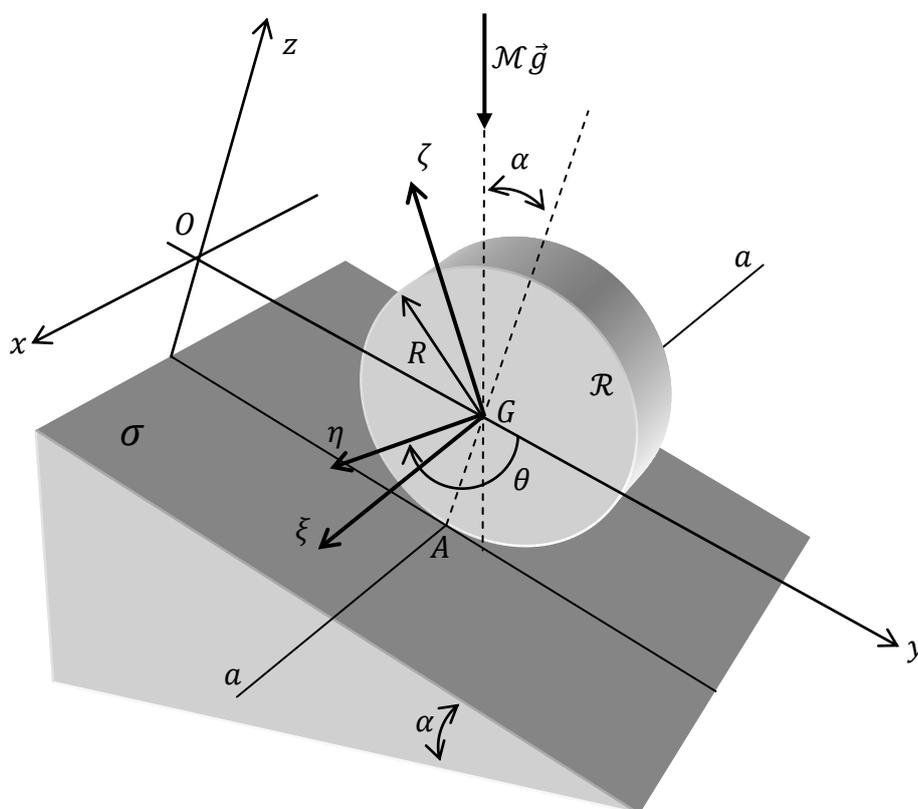
```

Ruota su piano inclinato

1. Il quesito. Abbiamo un piano scabro σ di inclinazione α e un disco rigido e omogeneo \mathcal{R} di raggio R . Vogliamo determinare gli eventuali moti di \mathcal{R} i quali soddisfino le condizioni seguenti:

- 1.1) \mathcal{R} appartenga costantemente a un piano fisso verticale che intercetta σ lungo una direttrice di massima pendenza;
- 1.2) il contatto fra le due superficie sia costante³.

Il sistema di riferimento fisso sia $RC(O; x, y, z)$ con origine coincidente con la posizione iniziale del baricentro G di \mathcal{R} e con piano yz coincidente con il piano del moto. Sia $R\Gamma(G; \xi, \eta, \zeta)$ una delle terne centrali di inerzia del disco.



Si richiede

- 1.3) di ricavare il sistema fondamentale della dinamica per il sistema.

Si chiede inoltre di studiare il moto nelle due seguenti condizioni:

- 1.4) assenza di strisciamento con coefficiente di attrito statico f_s ;
- 1.5) strisciamento con coefficiente di attrito radente f_r .

2. Equazioni della dinamica, metodo del Free Body. La forza effettiva attiva agente sul corpo è il peso. Abbiamo poi la reazione del piano, che scompongo nelle componenti normale e tangenziale. Infine vi sono le forze inerziali, dovute alla accelerazione del centro di massa e alla rotazione in generale non uniforme del disco. Ciò posto le equazioni cardinali della dinamica si scrivono:

³ Si parla in questo caso di moto di confine.

$$2.1) \quad \begin{cases} \vec{R}_{12} + \mathcal{M}\vec{g} - \mathcal{M}\vec{a} = 0 \\ \vec{T} \times \vec{AG} - I_{\xi}\vec{\alpha} = 0 \end{cases}$$

Volendo proiettare sugli assi x, y, z si consideri che

$$2.2) \quad \begin{cases} \vec{R}_{12} = \vec{T} + \vec{N} = -T\hat{j} + N\hat{k} \\ \mathcal{M}\vec{g} = -\mathcal{M}g \cos \alpha \hat{k} + \mathcal{M}g \sin \alpha \hat{j} \\ \mathcal{M}\vec{a} = \mathcal{M}\ddot{y}\hat{j} \\ \vec{\alpha} = \ddot{\theta}\hat{i} \end{cases}$$

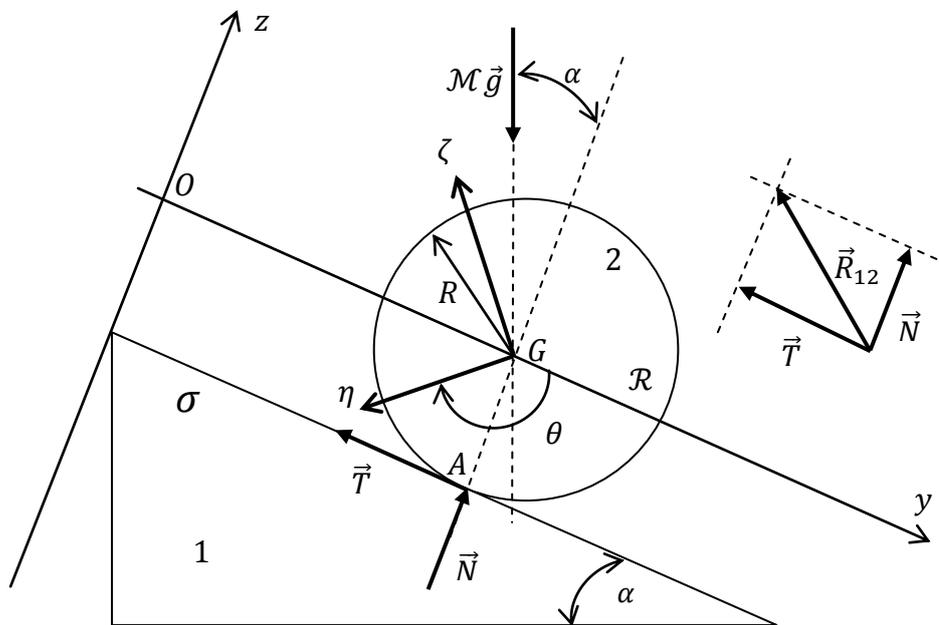
Inoltre il momento reattivo si scrive

$$2.3) \quad \vec{T} \times \vec{AG} = -T\hat{j} \times R\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -T & 0 \\ 0 & 0 & R \end{vmatrix} = -RT\hat{i}$$

Sostituendo pertanto le 2.2, 2.3 nella 2.1 abbiamo

$$\begin{cases} -T\hat{j} + N\hat{k} - \mathcal{M}g \cos \alpha \hat{k} + \mathcal{M}g \sin \alpha \hat{j} - \mathcal{M}\ddot{y}\hat{j} = 0 \\ -RT\hat{i} - I_{\xi}\ddot{\theta}\hat{i} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2.4) \quad \begin{cases} -T + \mathcal{M}g \sin \alpha - \mathcal{M}\ddot{y} = 0 \\ N - \mathcal{M}g \cos \alpha = 0 \\ RT + I_{\xi}\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$



Si consideri poi che -come noto- il momento di inerzia del disco è

$$2.5) \quad I_{\xi} = \mathcal{M} \frac{R^2}{2}$$

dunque le 2.4 si scrivono

$$2.6) \quad \begin{cases} -T + \mathcal{M}g \sin \alpha - \mathcal{M}\dot{y} = 0 \\ N - \mathcal{M}g \cos \alpha = 0 \\ T + \frac{\mathcal{M}R\dot{\theta}}{2} = 0 \end{cases}$$

3. Equazioni della dinamica, metodo energetico. L'energia cinetica del sistema è data da

$$3.1) \quad T = \frac{1}{2}\mathcal{M}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I_{\xi}\dot{\theta}^2$$

L'energia potenziale gravitazionale invece è data da

$$3.2) \quad \Pi = -\mathcal{M}gy \sin \alpha$$

Dunque l'energia totale si scrive

$$3.3) \quad E = T + \Pi = \frac{1}{2}\mathcal{M}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I_{\xi}\dot{\theta}^2 - \mathcal{M}gy \sin \alpha$$

Nel caso in cui si abbia puro rotolamento non si ha dispersione di energia per attrito e dunque è possibile imporre la condizione di conservazione dell'energia totale, imponendo l'annullamento della 3.3 rispetto al tempo:

$$3.4) \quad \mathcal{M}\dot{y}\ddot{y} + I_{\xi}\dot{\theta}\ddot{\theta} - \mathcal{M}g\dot{y} \sin \alpha = 0$$

Ma in assenza di strisciamento si ha

$$3.5) \quad y = -R\theta \Rightarrow \dot{y} = -R\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{y} = -R\ddot{\theta}$$

Sostituendo la 3.5 nella 3.4 si ha

$$3.6) \quad \mathcal{M}R\dot{\theta}R\ddot{\theta} + I_{\xi}\dot{\theta}\ddot{\theta} + \mathcal{M}gR\dot{\theta} \sin \alpha = 0$$

Considerando poi la 2.5 abbiamo in conclusione

$$3.7) \quad 3R\ddot{\theta} + 2g \sin \alpha = 0$$

4. Equazioni della dinamica, metodo dei Lavori Virtuali. Il principio in parola può essere utilizzato nel caso in cui si escluda la possibilità di strisciamento, porgendo

$$\delta L^v = (\mathcal{M}\vec{g} - \mathcal{M}\vec{a}) \cdot \delta y\hat{j} - I_{\xi}\ddot{\theta}\hat{i} \cdot \delta\theta\hat{i} = 0 \Leftrightarrow$$

$$4.1) \quad \mathcal{M}(\vec{g} - \vec{a}) \cdot \delta y\hat{j} - I_{\xi}\ddot{\theta}\hat{i} \cdot \delta\theta\hat{i} = 0$$

Considerando ora che in assenza di strisciamento vale la 3.5, segue che $\delta y = -R\delta\theta$ e dunque la 4.1 si scrive

$$4.2) \quad -\mathcal{M}(\vec{g} - \vec{a}) \cdot R\hat{j} - I_{\xi}\ddot{\theta}\hat{i} \cdot \hat{i} = 0$$

D'altra parte si ha anche che

$$4.3) \quad \begin{cases} \vec{a} = \ddot{y}\hat{j} \\ \vec{g} = g \sin \alpha \hat{j} - g \cos \alpha \hat{k} \end{cases}$$

Sostituendo le 4.3 nella 4.2 abbiamo

$$\begin{aligned} & -\mathcal{M}(g \sin \alpha \hat{j} - g \cos \alpha \hat{k} - \ddot{y}\hat{j}) \cdot R\hat{j} - I_{\xi}\ddot{\theta}\hat{i} \cdot \hat{i} = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -\mathcal{M}R(g \sin \alpha \hat{j} \cdot \hat{j} - g \cos \alpha \hat{k} \cdot \hat{j} - \ddot{y}\hat{j} \cdot \hat{j}) - I_{\xi}\ddot{\theta}\hat{i} \cdot \hat{i} = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -\mathcal{M}R(g \sin \alpha - \ddot{y}) - (RT + I_{\xi}\ddot{\theta}) = 0 \Leftrightarrow -\mathcal{M}R(g \sin \alpha + R\ddot{\theta}) - I_{\xi}\ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -\mathcal{M}R(g \sin \alpha + R\ddot{\theta}) - \mathcal{M}\frac{R^2}{2}\ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 2\mathcal{M}Rg \sin \alpha + 2\mathcal{M}R^2\ddot{\theta} + \mathcal{M}R^2\ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$4.4) \quad 2g \sin \alpha + 3R\ddot{\theta} = 0$$

Si ritrova così la soluzione 3.7 per il caso in cui non vi sia strisciamento.

5. Puro rotolamento. Questo caso è risolto dalla equazione differenziale 3.7, ottenuta con metodo energetico (ovvero dalla 4.4, ottenuta con il PLV). In questa sede tuttavia ricavo nuovamente l'equazione differenziale utilizzando il sistema 2.6 in cui pongo la condizione 3.5 di assenza di strisciamento. Si ha

$$5.1) \quad \begin{cases} -T + \mathcal{M}g \sin \alpha + \mathcal{M}\ddot{\theta}R = 0 \\ N - \mathcal{M}g \cos \alpha = 0 \\ T + \frac{\mathcal{M}R\ddot{\theta}}{2} = 0 \end{cases}$$

Sostituendo la terza equazione nella prima si ha

$$5.2) \quad \begin{cases} 2g \sin \alpha + 3\ddot{\theta}R = 0 \\ N - \mathcal{M}g \cos \alpha = 0 \\ T = -\frac{\mathcal{M}R\ddot{\theta}}{2} \end{cases}$$

La prima equazione restituisce correttamente la 3.7. La risolvo per integrazioni successive:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\frac{2g \sin \alpha}{3R} \Rightarrow \dot{\theta} = -\frac{2g \sin \alpha}{3R}t + C_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \theta = -\frac{2g \sin \alpha}{3R}\frac{t^2}{2} + C_1t + C_2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$5.3) \quad \begin{cases} \theta = -\frac{g \sin \alpha}{3R}t^2 + C_1t + C_2 \\ \dot{\theta} = -\frac{2g \sin \alpha}{3R}t + C_1 \end{cases}$$

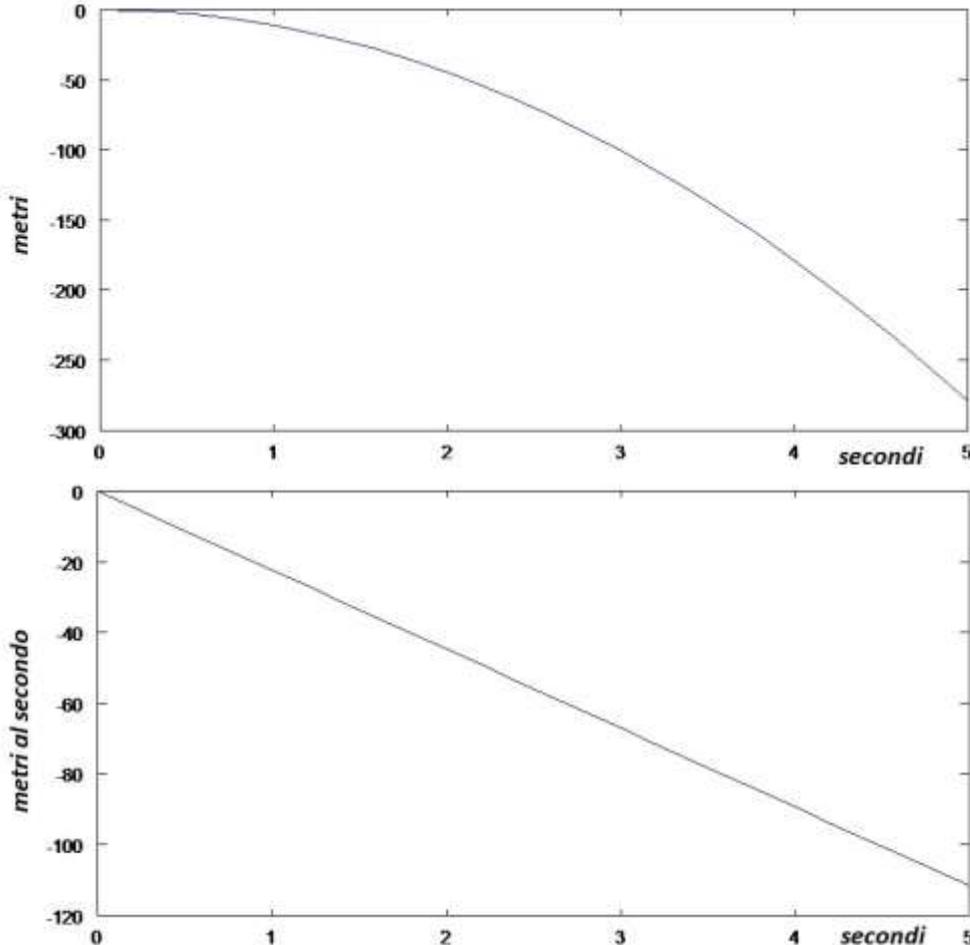
Imponendo le condizioni iniziali si risolve completamente il moto. Se ad esempio ammettiamo le condizioni iniziali

$$5.4) \quad \begin{cases} \theta(t=0) = 0 \\ \dot{\theta}(t=0) = 0 \end{cases}$$

si ottiene $C_1, C_2 = 0$ e dunque

$$5.5) \quad \begin{cases} \theta = -\frac{g \sin \alpha}{3R} t^2 \\ \dot{\theta} = -\frac{2g \sin \alpha}{3R} t \end{cases}$$

Queste funzioni sono tracciate nei grafici in figura, in cui si è assunta una inclinazione del piano $\alpha = 20^\circ$ e un raggio del disco di 10 cm .



Per le reazioni del vincolo il sistema 5.2 porge poi

$$5.6) \quad \begin{cases} N = \mathcal{M}g \cos \alpha \\ T = \frac{\mathcal{M}g \sin \alpha}{3} \end{cases}$$

Se il coefficiente di attrito statico è assegnato e vale f_s , questa soluzione sussiste finché è verificata la condizione

$$5.7) \quad \frac{T}{N} \leq f_s \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \leq 3f_s$$

6. Strisciamento. Se la condizione 5.7 non è verificata, allora si ha strisciamento e sussiste la relazione:

$$6.1) \quad T = Nf_r$$

Allora il sistema 2.6 porge

$$\begin{cases} -T + \mathcal{M}g \sin \alpha - \mathcal{M}\ddot{y} = 0 \\ N = \mathcal{M}g \cos \alpha \\ T = -\frac{\mathcal{M}R\ddot{\theta}}{2} \\ T = Nf_r \end{cases} \Rightarrow$$

$$6.2) \begin{cases} \dot{y} = g(\sin \alpha - f_r \cos \alpha) \\ \ddot{\theta} = -\frac{2gf_r \cos \alpha}{R} \\ T = \mathcal{M}gf_r \cos \alpha \\ N = \mathcal{M}g \cos \alpha \end{cases}$$

La soluzione può essere poi immediatamente ottenuta per integrazione successiva:

$$6.3) \begin{cases} \dot{y} = g(\sin \alpha - f_r \cos \alpha)t + A_1 \\ y = \frac{g(\sin \alpha - f_r \cos \alpha)t^2}{2} + A_1t + A_2 \end{cases}$$

$$6.4) \begin{cases} \dot{\theta} = -\frac{2gf_r \cos \alpha}{R}t + B_1 \\ \theta = -\frac{gf_r \cos \alpha}{R}t^2 + B_1t + B_2 \end{cases}$$

Imponendo poi le condizioni iniziali si ricavano le costanti A_1, A_2, B_1, B_2 .

Ruote dentate

1. Il quesito. Sia assegnata una coppia di ruote dentate con le seguenti caratteristiche

$$1.1) \quad \begin{cases} i = 0.3m & \leftarrow \text{interasse} \\ \tau = \frac{r_1}{r_2} = 0.5 & \leftarrow \text{rap. di trasmissione} \\ \theta = 22^\circ = 0.384r & \leftarrow \text{angolo di pressione} \\ m = 0.01m & \leftarrow \text{modulo} \\ \omega_1 = 150 \frac{\text{giri}}{\text{minuto}} = 15.70 \frac{r}{s} \end{cases}$$

Si richiedono allora:

- 1.2) gli elementi geometrici della dentatura;
- 1.3) la lunghezza della linea di ingranamento, dell'arco di accesso, di quello di recesso e dell'arco d'azione;
- 1.4) la verifica della continuità del moto;
- 1.5) la verifica della non interferenza in accesso e in recesso;
- 1.6) le velocità di strisciamento nei punti di accesso e di recesso.

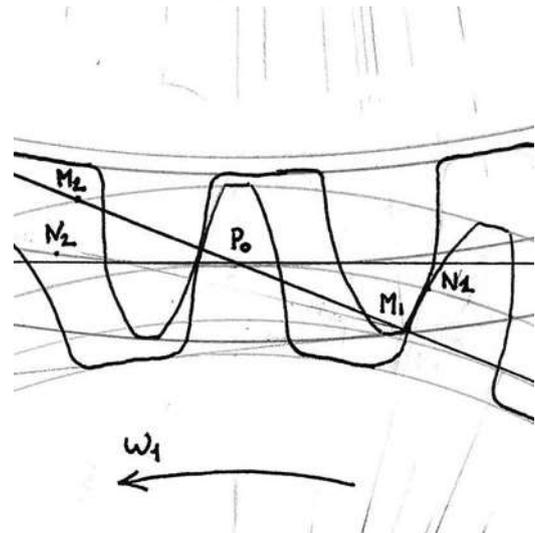
2. Caratteristiche geometriche generali. La prima e la seconda delle 1.1 permettono di calcolare i raggi delle circonferenze primitive:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = i \\ \frac{r_1}{r_2} = \tau \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{i\tau}{1+\tau} \\ r_2 = \frac{i}{1+\tau} \end{cases}$$

$$2.1) \quad \begin{cases} r_1 = 0.1m \\ r_2 = 0.2m \end{cases}$$

Per i raggi delle circonferenze fondamentali si ha invece

$$2.2) \quad \begin{cases} r_{F1} = r_1 \cos \theta = 9.27cm \\ r_{F2} = r_2 \cos \theta = 18.5m \end{cases}$$



L'addendum e il dedendum -assunto che l'ingranaggio sia modulare- valgono invece

$$2.3) \quad \begin{cases} a = m = 0.01m \\ b = \frac{5}{4}a = 0.0125m \end{cases}$$

3. Caratteristiche geometriche della dentatura. Calcolo il passo e il numero dei denti

$$3.1) \quad \begin{cases} p = m\pi = 31.41mm \\ z_1 = \frac{2r_1}{m} = 20 \\ z_2 = \frac{2r_2}{m} = 40 \end{cases}$$

Fissato lo spessore g del dente lungo le primitive è possibile calcolare gli spessori g'_1, g'_2 lungo le circonferenze di troncatura esterna, attraverso le formule

$$3.2) \begin{cases} g' = 2(r+a) \left(\frac{g}{2r} - \tan \theta' + \theta' + \tan \theta - \theta \right) \\ \cos \theta' = \frac{r \cos \theta}{r+a} \end{cases}$$

Posto allora ad esempio $g = 0.4p$, le 3.2 applicate alla ruota uno e due porgono rispettivamente

$$3.3) \begin{cases} g'_1 = 2(r_1 + a) \left(\frac{g}{2r_1} - \tan \theta'_1 + \theta'_1 + \tan \theta - \theta \right) = 2.79mm \\ \cos \theta'_1 = \frac{r_1 \cos \theta}{r_1 + a} = 0.84 \Rightarrow \theta'_1 = 0.568r \end{cases}$$

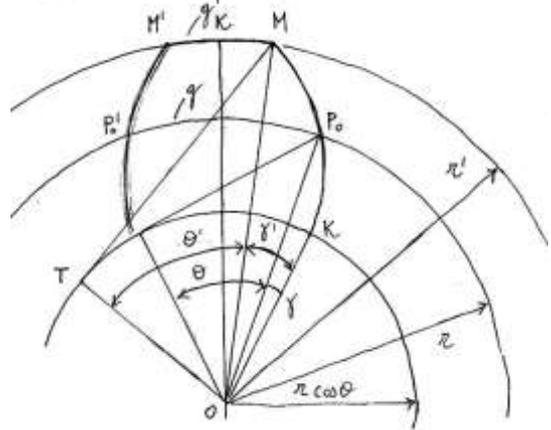
$$3.4) \begin{cases} g'_2 = 2(r_2 + a) \left(\frac{g}{2r_2} - \tan \theta'_2 + \theta'_2 + \tan \theta - \theta \right) = 3.56mm \\ \cos \theta'_2 = \frac{r_2 \cos \theta}{r_2 + a} = 0.84 \Rightarrow \theta'_2 = 0.488r \end{cases}$$

Ricavo anche gli angoli che sottendono gli archi, così da facilitarne la rappresentazione:

$$3.5) \begin{cases} \alpha_1 r_1 = g \Rightarrow \alpha_1 = 0.12r = 7.2^\circ \\ \alpha_2 r_2 = g \Rightarrow \alpha_2 = 0.062r = 3.6^\circ \\ \alpha'_1 r_1 = g'_1 \Rightarrow \alpha'_1 = 0.032r = 1.85^\circ \\ \alpha'_2 r_2 = g'_2 \Rightarrow \alpha'_2 = 0.019r = 0.97^\circ \end{cases}$$

Gli angoli che sottendono il passo sulle due circonferenze primitive sono invece

$$3.6) \begin{cases} \beta_1 r_1 = p \Rightarrow \alpha_1 = 0.314r = 18^\circ \\ \beta_2 r_2 = p \Rightarrow \alpha_2 = 0.157r = 9^\circ \end{cases}$$



4. Studio della continuità del moto. Per i tratti in accesso e in recesso della linea di ingranamento si ha rispettivamente

$$4.1) \begin{cases} \overline{P_0 M_1} = \frac{m}{2} \left(\sqrt{z_2^2 \sin^2 \theta + 4z_2 + 4} - z_2 \sin \theta \right) = 0.023m \\ \overline{P_0 M_2} = \frac{m}{2} \left(\sqrt{z_1^2 \sin^2 \theta + 4z_1 + 4} - z_1 \sin \theta \right) = 0.021m \end{cases}$$

La linea di ingranamento complessiva è dunque

$$4.2) \quad \overline{M_1 M_2} = \overline{P_0 M_1} + \overline{P_0 M_2} = 0.044m$$

Per i tratti in accesso e in recesso dell'arco d'azione si

$$4.3) \begin{cases} \overline{P_0 N_1} = \frac{\overline{P_0 M_1}}{\cos \theta} = 0.024m \\ \overline{P_0 N_2} = \frac{\overline{P_0 M_2}}{\cos \theta} = 0.022m \end{cases}$$

L'arco d'accesso vale complessivamente

$$4.4) \quad e = \overline{P_0 N_1} + \overline{P_0 N_2} = 0.046m$$

Il fattore di ricoprimento vale allora

$$4.5) \quad f = \frac{e}{p} = \frac{0.046m}{31.41mm} > 1$$

Dunque la continuità di moto è assicurata, e anzi vi è una fase del moto in cui sono due le coppie di denti coinvolte nella trasmissione.

5. Studio della interferenza. Verifico ora che non si abbia interferenza. La condizione di non interferenza in accesso è rispettata, essendo per la prima delle 4.1:

$$\overline{P_0M_1} \leq \overline{P_0T_1} = r_1 \sin \theta \Leftrightarrow 0.023m \leq 0.037$$

Altrettanto verificata è la condizione di non interferenza in recesso, avendosi

$$\overline{P_0M_2} \leq \overline{P_0T_2} = r_2 \sin \theta \Leftrightarrow 0.021m \leq 0.074$$

6. Velocità di strisciamento. Calcolo la velocità angolare del moto della ruota due rispetto la ruota uno. Si ha

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_{12} + \vec{\omega}_2 \Rightarrow \vec{\omega}_{12} = \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2 \Rightarrow \omega_{12} = \omega_1 - (-\omega_2) \Rightarrow$$

$$6.1) \quad \omega_{12} = \omega_1 + \omega_2 = \omega_1 + \tau\omega_1 = (1 + \tau)\omega_1 = 1.5\omega_1 = 23.56 \frac{r}{s}$$

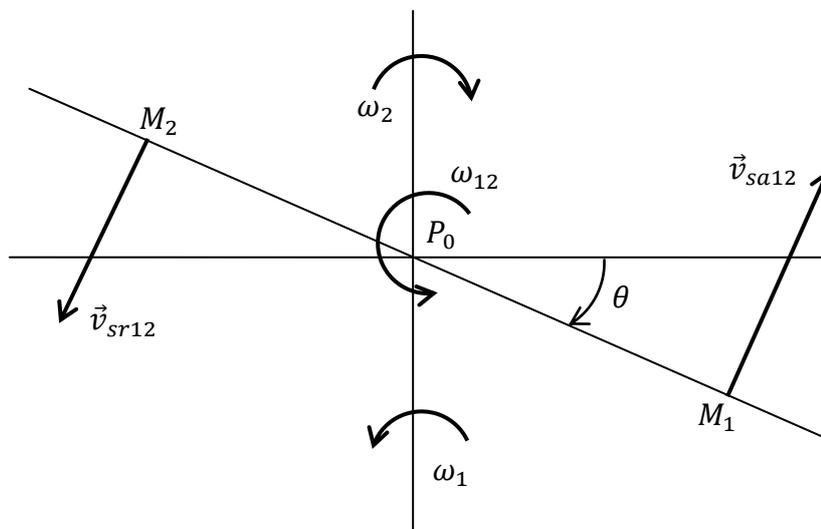
Dunque il modulo della velocità di strisciamento in accesso è dato da

$$6.2) \quad v_{sa12} = \omega_{12} \overline{P_0M_1} = 0.541 \frac{m}{s}$$

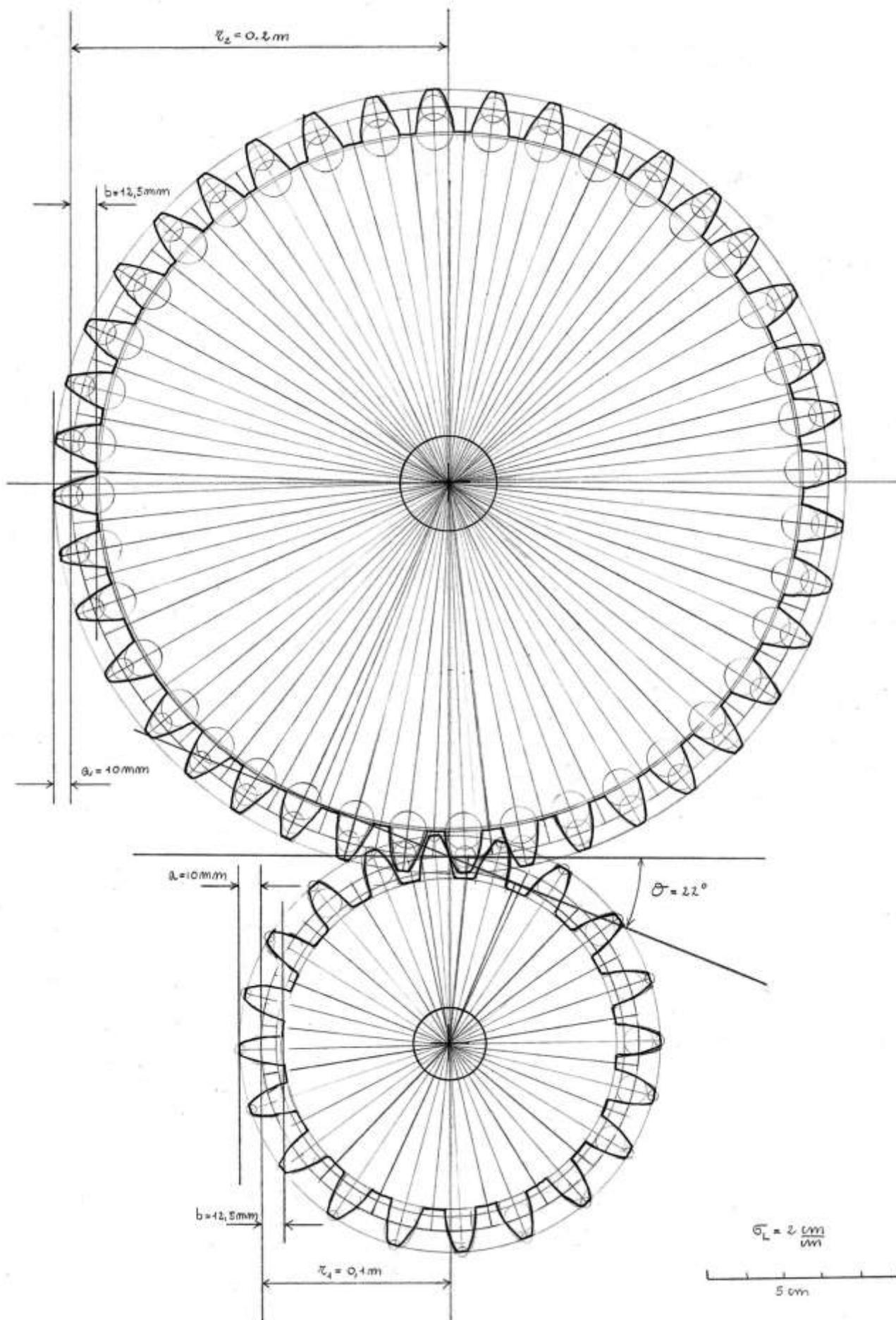
Il modulo della velocità di strisciamento in recesso è invece

$$6.3) \quad v_{sr12} = \omega_{12} \overline{P_0M_2} = 0.494 \frac{m}{s}$$

Le grandezze cinematiche introdotte sono rappresentate nelle loro caratteristiche vettoriali nella seguente illustrazione qualitativa.



7. Rappresentazione grafica. Segue una rappresentazione in scala $\sigma_L = 2cm/cm$, ulteriormente scalata per essere inserita in questo testo.



Oscillatore libero smorzato

1. Il quesito. E' assegnato un oscillatore libero (cioè senza forzante) smorzato, caratterizzato dai parametri seguenti:

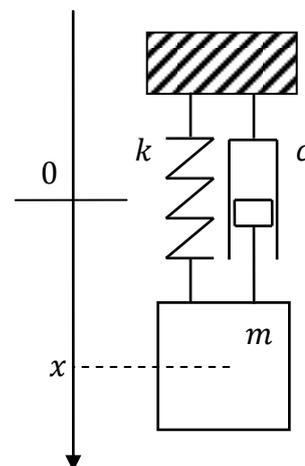
$$1.1) \quad \begin{cases} m = 8 \text{ kg} \\ \zeta = 1.8 \\ \omega_n = 0.2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \omega_n^2 m = 0.32 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \\ c = 2m\zeta\omega_n = 5.76 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \end{cases}$$

e le seguenti condizioni al contorno

$$1.2) \quad \begin{cases} x(t=0) = 0. \\ \dot{x}(t=0) = 1.5 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \end{cases}$$

Si chiede quanto segue:

- 1.3) ricavare la legge del moto per via analitica;
- 1.4) ricavare la legge del moto per via numerica;
- 1.5) tracciare i diagrammi dello spostamento in funzione del tempo e della velocità;
- 1.6) calcolare il valore dello spostamento massimo dalla configurazione iniziale.



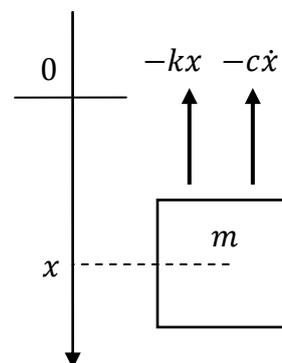
2. Oscillatore libero smorzato, generalità. Considerando il diagramma di corpo libero in figura, l'equilibrio meccanico per esso porge

$$2.1) \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Si ha dunque un'equazione omogenea lineare a coefficienti costanti, per il cui polinomio caratteristico si ha:

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

Si consideri ora che



$$\begin{aligned} \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} &= \frac{-c \pm \sqrt{4mk} \sqrt{\left(\frac{c}{2\sqrt{mk}}\right)^2 - 1}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\left(\frac{c}{2\sqrt{mk}}\right)^2 - 1} = \\ &= -\frac{c}{2m} \frac{\sqrt{km}}{\sqrt{km}} \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\left(\frac{c}{2\sqrt{mk}}\right)^2 - 1} = -\frac{c}{2\sqrt{km}} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}} \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\left(\frac{c}{2\sqrt{mk}}\right)^2 - 1} \end{aligned}$$

Date allora le definizioni

$$2.3) \quad \begin{cases} \omega_n = \sqrt{k/m} \\ \zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \end{cases}$$

abbiamo

$$2.4) \quad \lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Si possono allora distinguere tre casi, a seconda del segno del radicando in 2.4.

3. Oscillatore libero smorzato per $\zeta \in]0, 1[$. In questo caso il radicando in 2.4 è negativo, quindi si procede mettendo in evidenza l'unità immaginaria, ottenendo

$$3.1) \quad \lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n i\sqrt{1 - \zeta^2}$$

è l'integrale generale della 2.1 si scrive

$$3.2) \quad x = e^{-\zeta\omega_n t} [C_1 \cos(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t) + C_2 \sin(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t)]$$

dove le costanti C_1, C_2 vanno calcolate imponendo le condizioni al contorno. La c.c. per lo spostamento porge:

$$3.3) \quad x(0) = C_1$$

Derivando poi la 3.2 si ha

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} [C_1 \cos(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t) + C_2 \sin(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t)] + \\ &+ e^{-\zeta\omega_n t} [-C_1\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \sin(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t) + C_2\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \cos(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t)] = \\ &= -\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} [C_1 \cos(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t) + C_2 \sin(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t)] + \\ &+ e^{-\zeta\omega_n t} [-C_1\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \sin(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t) + C_2\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \cos(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t)] \end{aligned}$$

Imponendo la relativa c.c. si ha

$$\dot{x}(0) = -\zeta\omega_n C_1 + \omega_n C_2\sqrt{1 - \zeta^2} \Rightarrow$$

$$3.4) \quad C_2 = \frac{\dot{x}(0) + \zeta\omega_n C_1}{\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Dunque la soluzione particolare del caso dell'oscillatore libero smorzato per $\zeta \in]0, 1[$ è definita dalle 3.2, 3.3, 3.4 le quali porgono

$$3.5) \quad x = e^{-\zeta\omega_n t} \left[x_0 \cos(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t) + \frac{\dot{x}(0) + \zeta\omega_n x_0}{\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t) \right]$$

4. Oscillatore libero smorzato per $\zeta = 1$. In questo caso il radicando in 2.4 è nullo, quindi l'equazione caratteristica presenta una soluzione multipla, e l'integrale generale della 2.1 si scrive pertanto

$$4.1) \quad x = e^{-\zeta\omega_n t} (C_3 + tC_4)$$

La condizione al contorno sullo spostamento porge

$$4.2) \quad x(0) = C_3 \Rightarrow C_3 = x_0$$

Derivando la 4.1 abbiamo poi

$$4.3) \quad \dot{x} = -\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}(C_3 + tC_4) + e^{-\zeta\omega_n t}C_4$$

Imponendo la c.c. sulla velocità si ottiene dunque

$$\dot{x}(0) = -\zeta\omega_n C_3 + C_4 \Rightarrow$$

$$4.4) \quad C_4 = \dot{x}(0) + \zeta\omega_n C_3$$

Dunque la soluzione particolare del caso dell'oscillatore libero smorzato per $\zeta = 1$ è definita dalle 4.1, 4.3, 4.4 le quali porgono

$$4.5) \quad x = e^{-\zeta\omega_n t}[x_0 + (\dot{x}(0) + \zeta\omega_n x_0)t]$$

5. Oscillatore libero smorzato per $\zeta > 1$. In questo caso il radicando in 2.4 è positivo, quindi l'equazione caratteristica ammette due soluzioni distinte e l'integrale generale si scrive

$$5.1) \quad x = C_5 e^{-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t} + C_6 e^{-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t} = e^{-\omega_n \zeta t} (C_5 e^{-\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}t} + C_6 e^{\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}t})$$

L'imposizione della c.c. sullo spostamento porge

$$5.2) \quad x(0) = C_5 + C_6$$

Derivando poi la 5.1 si ha

$$\begin{aligned} \dot{x} = & -\omega_n \zeta e^{-\omega_n \zeta t} (C_5 e^{-\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}t} + C_6 e^{\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}t}) + \\ & + e^{-\omega_n \zeta t} (-\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} C_5 e^{-\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}t} + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} C_6 e^{\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}t}) \end{aligned}$$

Imponendo quindi la c.c. sulla velocità si trova

$$5.3) \quad \dot{x}(0) = -\omega_n \zeta (C_5 + C_6) + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} (-C_5 + C_6)$$

Mettendo a sistema le 5.2, 5.3 si ha

$$\begin{aligned} & \begin{cases} C_5 + C_6 = x_0 \\ -\omega_n \zeta (C_5 + C_6) + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} (-C_5 + C_6) = \dot{x}_0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} C_5 + C_6 = x_0 \\ -\omega_n \zeta x_0 + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} (-x_0 + C_6 + C_6) = \dot{x}_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_5 = x_0 - C_6 \\ -\omega_n \zeta x_0 + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} (-x_0 + 2C_6) = \dot{x}_0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} C_5 = x_0 - C_6 \\ -\omega_n \zeta x_0 - x_0 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} + 2C_6 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} = \dot{x}_0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ 5.4) & \begin{cases} C_5 = \frac{(\sqrt{\zeta^2 - 1} - \zeta)x_0 \omega_n - \dot{x}_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \\ C_6 = \frac{\dot{x}_0 + (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})x_0 \omega_n}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \end{cases} \end{aligned}$$

Dunque la soluzione particolare del caso dell'oscillatore libero smorzato per $\zeta > 1$ è definita dalle 5.1, 5.4, le quali porgono

$$5.5) \quad x = e^{-\omega_n \zeta t} \left[\frac{(\sqrt{\zeta^2 - 1} - \zeta)x_0 \omega_n - \dot{x}_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t} + \frac{\dot{x}_0 + (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})x_0 \omega_n}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t} \right]$$

6. Soluzione analitica. In base ai dati in 1.1 si ha nel nostro caso $\zeta > 1$; dunque la soluzione particolare del sistema assegnato è la 5.5. Essendo lo spostamento iniziale nullo, la 5.5 si semplifica nella

$$6.1) \quad x = e^{-\omega_n \zeta t} \frac{\dot{x}_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(-e^{-\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t} + e^{\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t} \right)$$

Derivando si ha la velocità

$$6.2) \quad \dot{x} = e^{-\omega_n \zeta t} \frac{\dot{x}_0}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[-\zeta \left(-e^{-\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t} + e^{\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t} \right) + \sqrt{\zeta^2 - 1} \left(e^{-\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t} + e^{\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t} \right) \right]$$

Sostituendo nelle 6.1, 6.2 i valori numerici assegnati in 1.1, 1.2 si completa la soluzione analitica del problema assegnato.

7. Metodo di Runge-Kutta classico per sistemi. L'equazione differenziale lineare del secondo ordine in 2.1 può essere ridotta a un sistema di due equazioni differenziali lineari del primo ordine, il quale è poi suscettibile di integrazione numerica con metodo di Runge-Kutta classico per sistemi, che richiamo qui di seguito nel caso di un sistema di due equazioni del primo ordine. Dato il sistema

$$7.1) \quad \begin{cases} \dot{y} = f(t, y, z) \\ \dot{z} = g(t, y, z) \\ y(0) = y_0 \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

allora il metodo in parola si scrive

$$7.2) \quad \begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i) \\ z_{i+1} = z_i + \frac{h}{6} (l_1^i + 2l_2^i + 2l_3^i + l_4^i) \end{cases}$$

dove si abbia

$$7.3) \quad \begin{cases} k_1^i = f(t_i, y_i, z_i) \\ k_2^i = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1^i, z_i + \frac{h}{2} l_1^i\right) \\ k_3^i = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_2^i, z_i + \frac{h}{2} l_2^i\right) \\ k_4^i = f(t_i + h, y_i + h k_3^i, z_i + h l_3^i) \end{cases}$$

$$7.4) \quad \begin{cases} l_1^i = g(t_i, y_i, z_i) \\ l_2^i = g\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1^i, z_i + \frac{h}{2}l_1^i\right) \\ l_3^i = g\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2^i, z_i + \frac{h}{2}l_2^i\right) \\ l_4^i = g(t_i + h, y_i + hk_3^i, z_i + hl_3^i) \end{cases}$$

8. Integrazione numerica. Data l'equazione in 2.1, si facciano le seguenti posizioni:

$$8.1) \quad \begin{cases} y(t) = x(t) \\ z(t) = \dot{x}(t) \end{cases}$$

Derivando le 8.1 si ha

$$8.2) \quad \begin{cases} \dot{y}(t) = \dot{x}(t) = z(t) \\ \dot{z}(t) = \ddot{x}(t) \end{cases}$$

Sostituendo poi le 8.1 e la seconda della 8.2 nella 2.1 abbiamo

$$8.3) \quad m\dot{z}_2(t) + cz_2(t) + kz_1(t) = 0$$

Quindi si ottiene il seguente sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$8.4) \quad \begin{cases} \dot{y} = f(t, y, z) = z \\ \dot{z} = g(t, y, z) = -\frac{c}{m}z - \frac{k}{m}y \end{cases}$$

con le relative condizioni al contorno

$$8.5) \quad \begin{cases} y(0) = x_0 \\ z(0) = \dot{x}_0 \end{cases}$$

Utilizzando allora il metodo in 7.2, 7.3, 7.4 si ha

$$8.6) \quad \begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i) \\ z_{i+1} = z_i + \frac{h}{6}(l_1^i + 2l_2^i + 2l_3^i + l_4^i) \end{cases}$$

con le posizioni

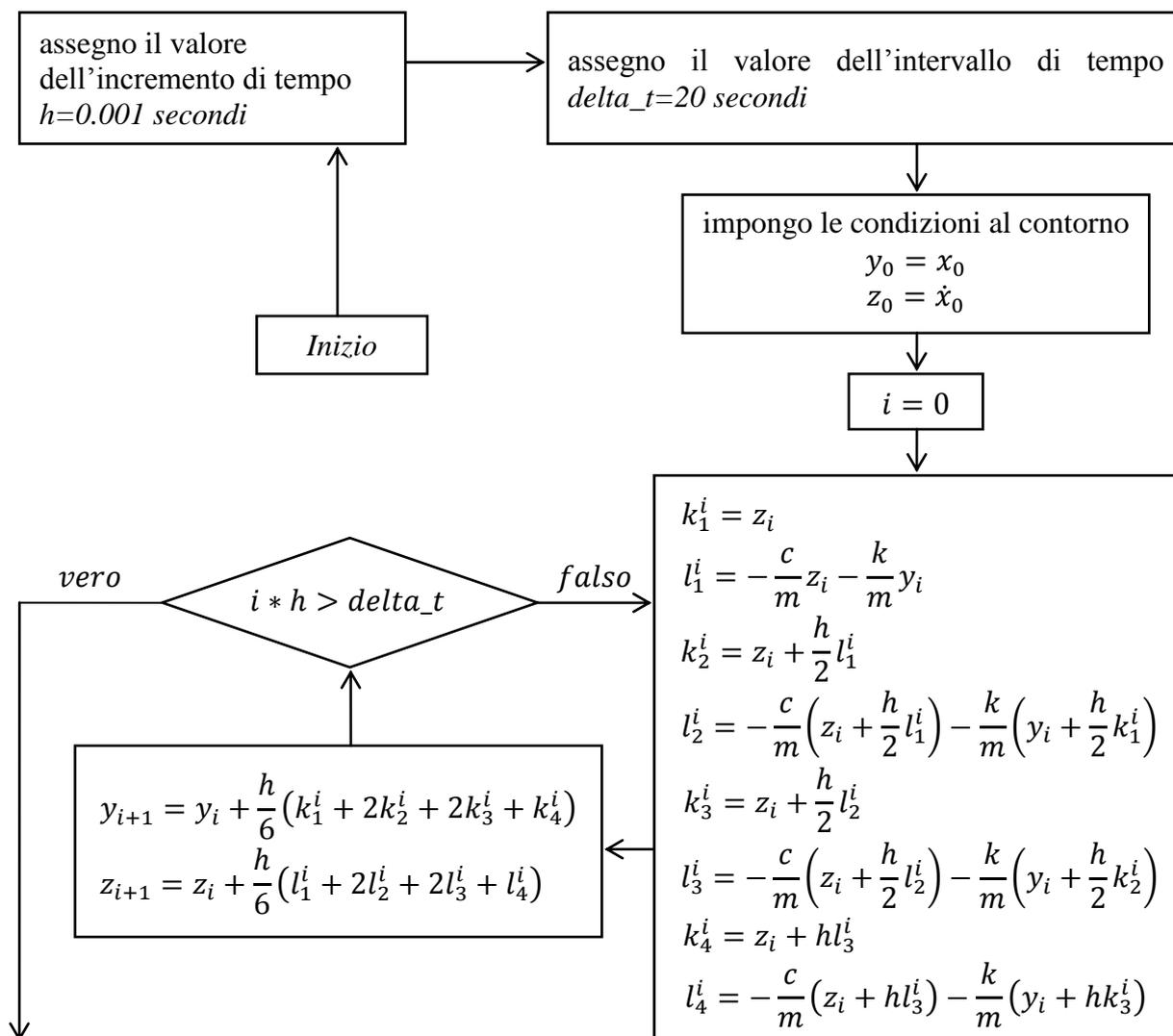
$$8.7) \quad \begin{cases} k_1^i = z_i \\ k_2^i = z_i + \frac{h}{2}l_1^i \\ k_3^i = z_i + \frac{h}{2}l_2^i \\ k_4^i = z_i + hl_3^i \end{cases}$$

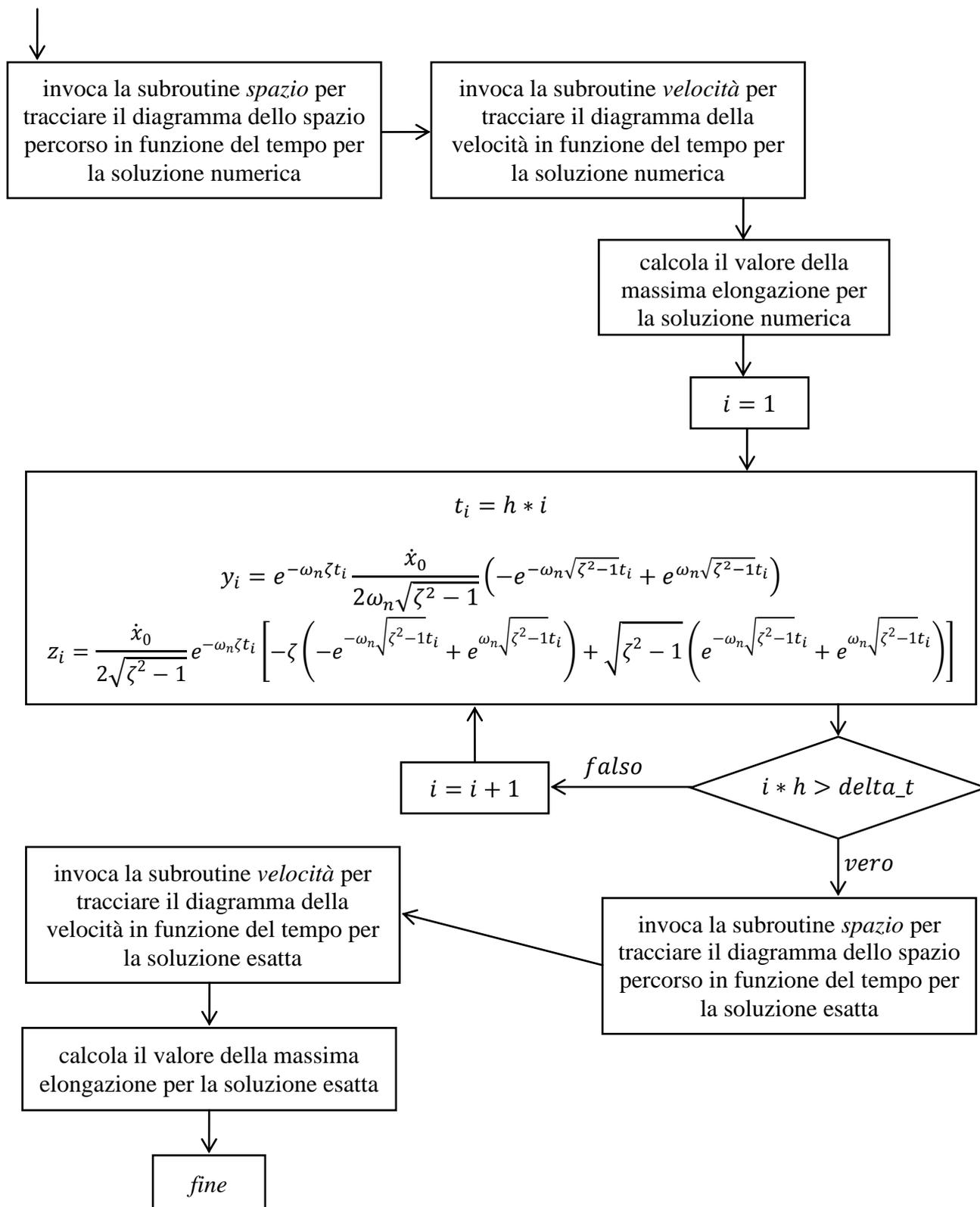
$$8.8) \begin{cases} l_1^i = -\frac{c}{m}z_i - \frac{k}{m}y_i \\ l_2^i = -\frac{c}{m}\left(z_i + \frac{h}{2}l_1^i\right) - \frac{k}{m}\left(y_i + \frac{h}{2}k_1^i\right) \\ l_3^i = -\frac{c}{m}\left(z_i + \frac{h}{2}l_2^i\right) - \frac{k}{m}\left(y_i + \frac{h}{2}k_2^i\right) \\ l_4^i = -\frac{c}{m}\left(z_i + hl_3^i\right) - \frac{k}{m}\left(y_i + hk_3^i\right) \end{cases}$$

9. Algoritmo risolutivo. Per rispondere ai quesiti 1.4, 1.5, 1.6 sono stati scritti in Fortran i seguenti codici:

- l'unità chiamante *main_ese_12*, la quale si occupa del calcolo della soluzione analitica, della soluzione numerica, e del calcolo della massima elongazione;
- il modulo *mod_ese_12*, il quale contiene le costanti del problema, oltre alle seguenti procedure di modulo:
 - subroutine *spazio*, la quale si occupa di tracciare i diagrammi dello spazio percorso in funzione del tempo sia per la soluzione esatta, che per quella numerica;
 - subroutine *velocità*, la quale si occupa di tracciare i diagrammi della velocità della massa, sia per la soluzione esatta che per quella numerica.

Di seguito il diagramma di flusso del codice.



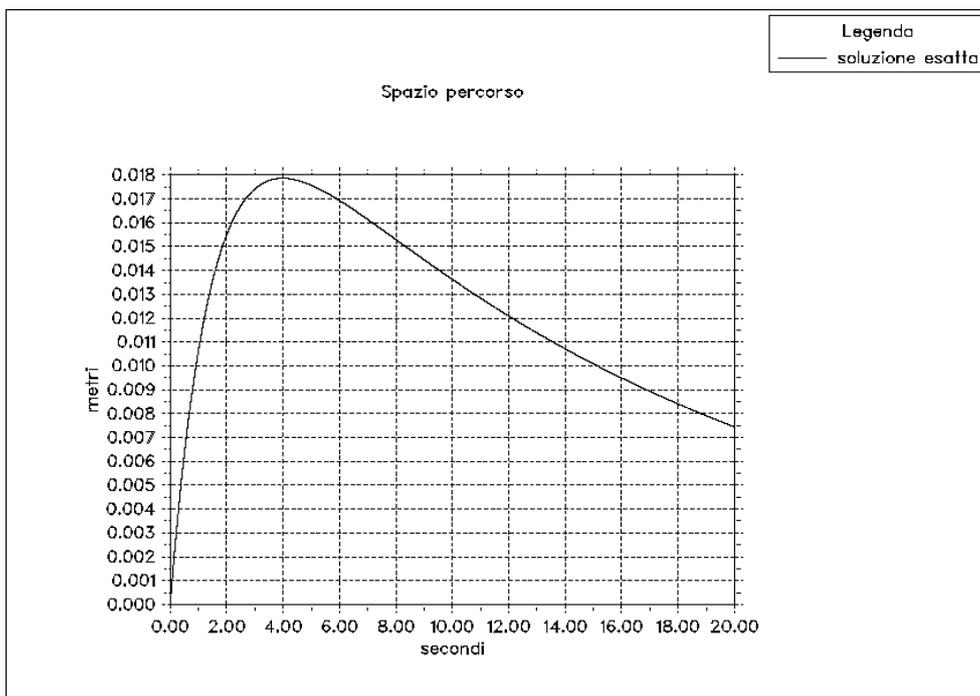
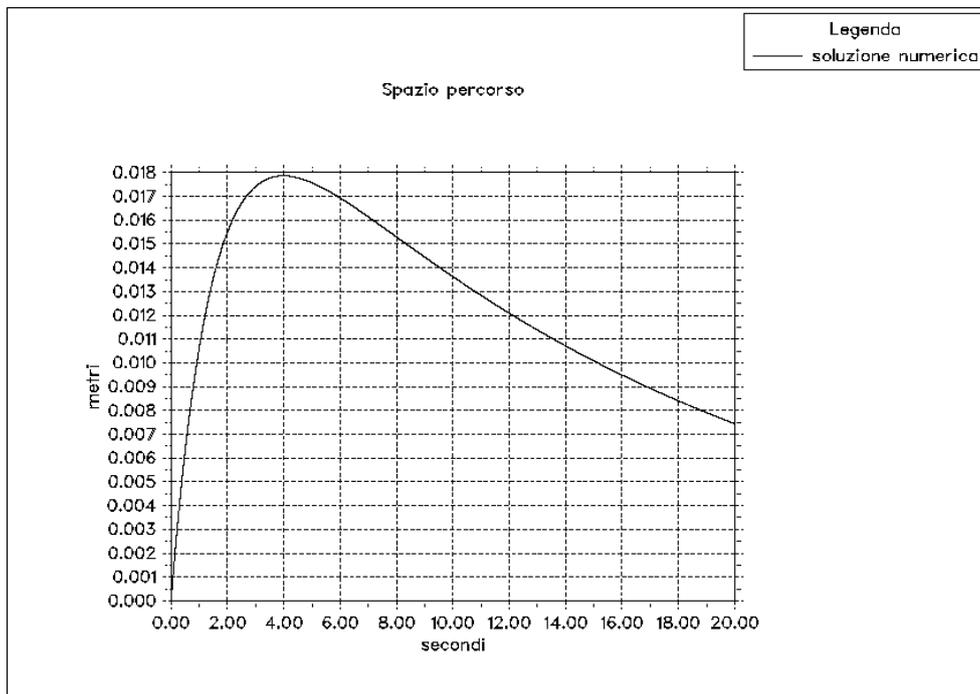


10. Esecuzione del programma. Per quanto riguarda la massima elongazione, l'esecuzione del programma fornisce i seguenti risultati, presi direttamente dal *prompt*:

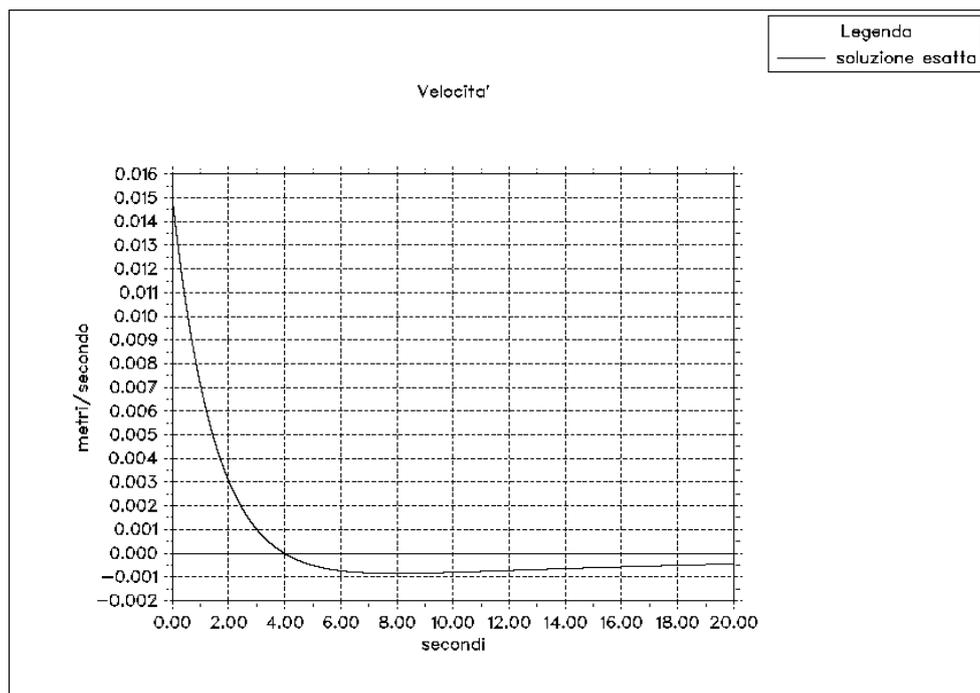
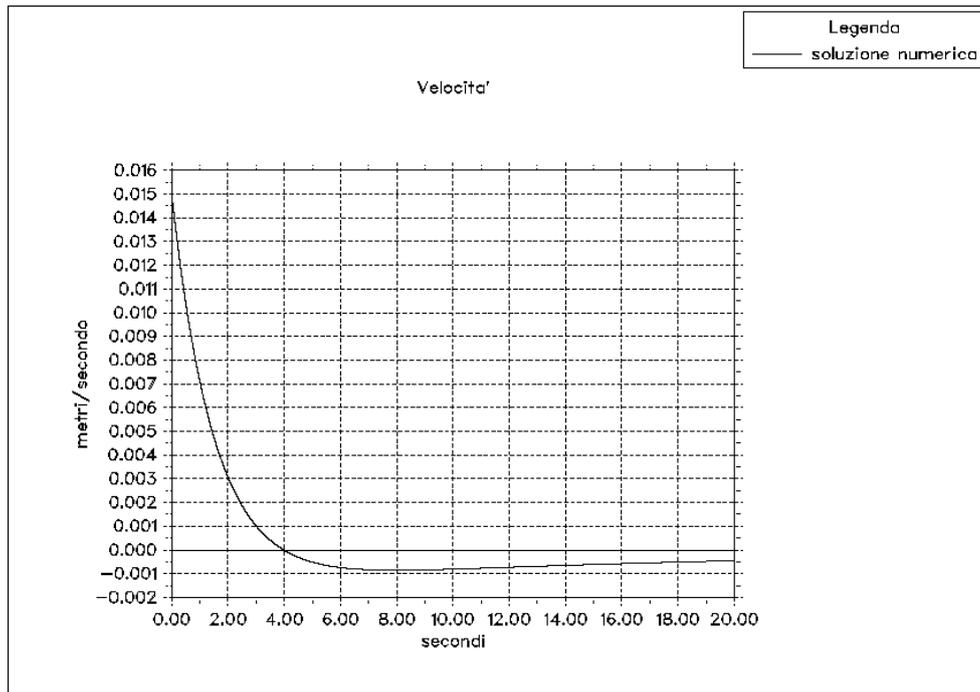
La massima elongazione secondo la soluzione numerica e' di
 La massima elongazione secondo la soluzione esatta e' di

0.01786428 metri
 0.017864289 metri

I diagrammi dello spazio percorso, ottenuti dalla integrazione numerica e dalla soluzione esatta rispettivamente, sono riportati di seguito:



Come si vede l'integrazione numerica proposta non si discosta apprezzabilmente dalla soluzione ottenuta mediante integrazione analitica della equazione di Newton. Discorso analogo per la velocità della massa, di cui riporto i grafici ottenuti rispettivamente con integrazione numerica e attraverso la soluzione analitica.



11. Codice dell'unità chiamante.

```
PROGRAM main_ese_12

!usa DISLIN

USE DISLIN

!usa il modulo mod_ese_12

USE mod_ese_12
```

```

!sezione dichiarativa

IMPLICIT NONE

!dichiaro l'array che contiene lo spazio percorso
REAL, DIMENSION (0:50000):: y = 0.

!dichiaro l'array che contiene la velocita'
REAL, DIMENSION (0:50000):: z = 0.

!dichiaro gli array usati nella integrazione numerica
REAL, DIMENSION (0:50000):: k_1, k_2, k_3, k_4
REAL, DIMENSION (0:50000):: l_1, l_2, l_3, l_4

!dichiaro l'array che contiene gli istanti di tempo
REAL, DIMENSION (0:50000):: tempo = 0.

!dichiaro parti della soluzione esatta
REAL:: esp_1, esp_2

!dichiaro la costante che contiene l'incremento temporale
REAL, PARAMETER:: h = 0.001

!dichiaro la costante che contiene l'intervallo di tempo
REAL, PARAMETER:: delta_t = 20.

!dichiaro la elongazione massima
REAL:: max_e

!dichiaro l'indice del ciclo
INTEGER:: i

!dichiaro il numero di iterazioni calcolate
INTEGER:: iterazioni

!dichiaro la stringa per chiudere il programma
CHARACTER(len=10):: chiusura

!sezione esecutiva

!impongo le condizioni iniziali
y(0) = x_0
z(0) = v_0

!eseguo l'intergrazione numerica con Runge-Kutta
ciclo_n: DO i = 0, 50000, 1

```

```

IF (REAL(i)*h>delta_t) EXIT ciclo_n

k_1(i) = z(i)
l_1(i) = -(c/m)*z(i)-(k/m)*y(i)
k_2(i) = z(i) + (h/2.)*l_1(i)
l_2(i) = -(c/m)*( z(i) + (h/2.)*l_1(i) ) - (k/m)*( y(i) + (h/2.)*k_1(i) )
k_3(i) = z(i) + (h/2.)*l_2(i)
l_3(i) = -(c/m)*( z(i) + (h/2.)*l_2(i) ) - (k/m)*( y(i) + (h/2.)*k_2(i) )
k_4(i) = z(i) + h*l_3(i)
l_4(i) = -(c/m)*( z(i) + h*l_3(i) ) - (k/m)*( y(i) + h*k_3(i) )

y(i+1) = y(i) + (h/6.)*( k_1(i) + 2*k_2(i) + 2*k_3(i) + k_4(i) )
z(i+1) = z(i) + (h/6.)*( l_1(i) + 2*l_2(i) + 2*l_3(i) + l_4(i) )

tempo(i) = 0. + REAL(i)*h

iterazioni = i

END DO ciclo_n

!traccia il diagramma dello spazio in funzione del tempo
CALL spazio (y, tempo, iterazioni, 'soluzione numerica ')

!traccia il diagramma della velocita' in funzione del tempo
CALL velocita (z, tempo, iterazioni, 'soluzione numerica ')

!calcola l'elongazione massima
max_e = MAXVAL(ABS(y))

!scrive sullo schermo il valore della elongazione massima

WRITE(*,*) " "
WRITE(*,*)"La massima elongazione secondo la soluzione numerica"
WRITE(*,*)"e' di", max_e, "metri"

!inizializzo gli array con la soluzione esatta

ciclo_e: DO i = 0, 50000, 1

IF (REAL(i)*h>delta_t) EXIT ciclo_e

tempo(i) = 0. + REAL(i)*h

esp_1 = EXP(-omega*SQRT(-1.+chi**2.)*tempo(i) )
esp_2 = EXP( omega*SQRT(-1.+chi**2.)*tempo(i) )

y(i) = EXP(-omega*chi*tempo(i))*(v_0/(2*omega*SQRT(-1.+chi**2.)))*(-esp_1+esp_2)

z(i)=EXP(-omega*chi*tempo(i))*(v_0/(2*SQRT(-1.+chi**2.)))*(-chi*(-esp_1+esp_2)+&
&SQRT(-1.+chi**2.)*(esp_1+esp_2))

END DO ciclo_e

!traccia il diagramma dello spazio in funzione del tempo
CALL spazio (y, tempo, iterazioni, 'soluzione esatta ')

```

```

!traccia il diagramma della velocita' in funzione del tempo

CALL velocita (z, tempo, iterazioni, 'soluzione esatta  ')

max_e = MAXVAL(ABS(y))

!scrive sullo schermo il valore della elongazione massima

WRITE(*,*)" "
WRITE(*,*)"La massima elongazione secondo la soluzione esatta"
WRITE(*,*)"e' di", max_e, "metri"

!le seguenti righe permettono di agevolare il lancio del programma dalla icona

WRITE (*,*)" "
WRITE (*,*)"To close the program press any key. Then press RETURN."
READ (*,*) chiusura

STOP

END PROGRAM main_ese_12

```

11. Codice del modulo.

```

MODULE mod_ese_12

!sezione dichiarativa

IMPLICIT NONE

!dichiaro le costanti fisiche del sistema

REAL, PARAMETER:: m = 8.
REAL, PARAMETER:: chi = 1.8
REAL, PARAMETER:: omega = 0.2
REAL, PARAMETER:: k = 0.32
REAL, PARAMETER:: c = 5.76

!dichiaro le condizioni iniziali

REAL, PARAMETER:: x_0 = 0. !metri
REAL, PARAMETER:: v_0 = 0.015 !metri/secondo

!scrivo le subroutine

CONTAINS

!-----

SUBROUTINE spazio (array, tempo, iterazioni, titolo)

!sezione dichiarativa

!dichiaro gli argomenti fittizi

!dichiaro l'array dello spazio e quello del tempo

REAL,INTENT(IN),DIMENSION(0:50000):: array, tempo

!dichiaro il numero di istanti considerati

```

```

INTEGER,INTENT(IN):: iterazioni

!dichiaro la stringa usata per il titolo

CHARACTER(len=20),INTENT(IN):: titolo

!dichiaro le variabili locali

!stringa usata per la legenda

CHARACTER(len=20)::stringa

!sezione esecutiva

!imposto il formato del file

CALL METAFL ('bmp')           !indico il formato dell'output
CALL BMPMOD (50000,'meter','resolution') !risoluzione del formato .bmp

!imposto la pagina

CALL SCRMOD ('revers')       !scritta nera su fondo bianco
CALL DISINI                   !richiama alcune impostazioni di default
CALL PAGERA                   !traccio un bordo per il piano xy
CALL DUPLX                    !font a doppio spessore

!imposto gli assi x,y

CALL AXSPOS (700,2700)       !coordinate angolo basso sinistra
CALL AXSLEN (1700,1300)     !lunghezza dei due assi in pixel
CALL NAME ('secondi','x')    !nome delle ascisse
CALL NAME ('metri','y')     !nome delle ordinate
CALL LABDIG (2,'x')         !chiedo 2 cifre decimali per l'asse x
CALL LABDIG (3,'y')         !chiedo 3 cifre decimali per l'asse y
CALL DASH                    !tratteggio per gli assi coordinati

CALL GRAF (0.0,20.,0.0,2.,0.0,0.018,0.0,0.001) !inizio, fine, intervallo assi x, y
CALL GRID (1,1)              !impone una griglia sul piano coordinato

CALL XAXGIT                   !traccio la retta x=0
CALL YAXGIT                   !traccio la retta y=0

!traccio la curva

CALL MYLINE (1,1)            !chiede una linea continua per la curva
CALL CURVE (tempo, array, iterazioni) !traccio lo spazio in funzione del tempo

!imposto il titolo

CALL TITLIN ("Spazio percorso",1)!prima riga del titolo
CALL TITLE                   !stampa il titolo di cui sopra

!imposto la legenda

CALL LEGINI (stringa,1,20)    !variabile di carattere, righe, lunghezza
CALL LEGLIN (stringa,titolo,1) !contenuto della legenda
CALL LEGTIT ('Legenda')      !titolo legenda
CALL LEGEND (stringa,3)      !posizine in alto a destra

```

```

CALL DISFIN

END SUBROUTINE spazio

!-----

SUBROUTINE velocita (array, tempo, iterazioni, titolo)

!sezione dichiarativa

!dichiaro gli argomenti fittizi

!dichiaro l'array dello spazio e quello del tempo

REAL,INTENT(IN),DIMENSION(0:50000):: array, tempo

!dichiaro il numero di istanti considerati

INTEGER,INTENT(IN):: iterazioni

!dichiaro la stringa usata per il titolo

CHARACTER(len=20),INTENT(IN):: titolo

!dichiaro le variabili locali

!stringa usata per la legenda

CHARACTER(len=20)::stringa

!sezione esecutiva

!imposto il formato del file

CALL METAFL ('bmp')           !indico il formato dell'output
CALL BMPMOD (50000,'meter','resolution') !risoluzione del formato .bmp

!imposto la pagina

CALL SCRMOD ('revers')       !scritta nera su fondo bianco
CALL DISINI                   !richiama alcune impostazioni di default
CALL PAGERA                   !traccio un bordo per il piano xy
CALL DUPLX                    !font a doppio spessore

!imposto gli assi x,y

CALL AXSPOS (700,2700)       !coordinate angolo basso sinistra
CALL AXSLEN (1700,1300)     !lunghezza dei due assi in pixel
CALL NAME ('secondi','x')    !nome delle ascisse
CALL NAME ('metri/secondo','y') !nome delle ordinate
CALL LABDIG (2,'x')          !chiedo 2 cifre decimali per l'asse x
CALL LABDIG (3,'y')          !chiedo 3 cifre decimali per l'asse y
CALL DASH                    !tratteggio per gli assi coordinati

CALL GRAF (0.0,20.,0.0,2.0,-0.002,0.016,-0.002,0.001) !inizio, fine, intervallo assi x, y
CALL GRID (1,1)              !impone una griglia sul piano coordinato

CALL XAXGIT                   !traccio la retta x=0
CALL YAXGIT                   !traccio la retta y=0

```

!traccio la curva

CALL MYLINE (1,1)

!chiede una linea continua per la curva

CALL CURVE (tempo, array, iterazioni)

!traccio lo spazio in funzione del tempo

!imposto il titolo

CALL TITLIN ("Velocita",1)

!prima riga del titolo

CALL TITLE

!stampa il titolo di cui sopra

!imposto la legenda

CALL LEGINI (stringa,1,20)

!variabile di carattere, righe, lunghezza

CALL LEGLIN (stringa,titolo,1)

!contenuto della legenda

CALL LEGTIT ('Legenda')

!titolo legenda

CALL LEGEND (stringa,3)

!posizine in alto a destra

CALL DISFIN

END SUBROUTINE velocita

!-----

END MODULE mod_ese_12

Dinamica del pendolo composto

1. Il quesito. E' assegnato il pendolo composto indicato in figura i cui parametri inerziali e geometrici sono

$$1.1) \quad \begin{cases} m = 5 \text{ kg} & \leftarrow \text{massa complessiva} \\ I_G = 0.05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 & \leftarrow \text{momento d'inerzia baricentrico} \\ AG = 5 \text{ cm} \end{cases}$$

Si intende che I_G è calcolato rispetto all'asse baricentrale ortogonale al piano del pendolo. Si assuma che il corpo sia soggetto alla sola forza peso e che la cerniera in A_0 sia senza attrito. Allora si chiede

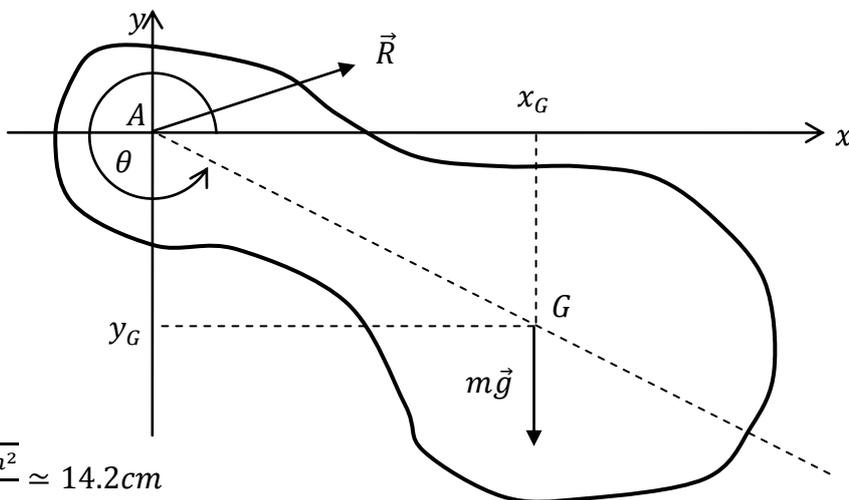
- 1.2) di determinare attraverso il metodo del FREE-BODY l'equazione del moto;
- 1.3) di integrarla per via numerica;
- 1.4) di ricavare le reazioni vincolari in funzione del tempo.

Si assumano le seguenti condizioni iniziali:

$$1.5) \quad \begin{cases} \theta(t=0) = 180^\circ \\ \dot{\theta}(t=0) = 0 \end{cases}$$

Si osserva che un particolare pendolo composto avente le caratteristiche inerziali in 1.1 è quello la cui massa sia costituita da un cerchio di centro G , massa m e raggio dato da

$$1.6) \quad R = \sqrt{\frac{2I_G}{m}} = \sqrt{2 \frac{0.05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{5 \text{ kg}}} \approx 14.2 \text{ cm}$$



Infatti per questo particolare pendolo il momento di inerzia rispetto l'asse baricentrale ortogonale al piano del moto è dato da

$$I_g = m \frac{R^2}{2} = 5 \text{ kg} \frac{(0.142 \text{ m})^2}{2} = 0.050 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

ovvero proprio quello assegnato.

2. Metodo del FREE-BODY. La sollecitazione effettiva agente sul meccanismo proposto è data da

$$2.1) \quad \begin{cases} \left. \begin{aligned} m\vec{g} &= \{0, -mg\} \\ \vec{R} &= \{R_x, R_y\} \end{aligned} \right\} \leftarrow \text{applicate in } G \\ \vec{M}_G^e = \vec{R} \times \overline{AG} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ R_x & R_y & 0 \\ AG \cos \theta & AG \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = AG(R_x \sin \theta - R_y \cos \theta) \hat{k} \end{cases}$$

La sollecitazione d'inerzia invece è data da

$$2.2) \quad \begin{cases} -m\vec{a}_G = -m\{\ddot{x}_G, \ddot{y}_G\} \leftarrow \text{applicata in } G \\ \vec{M}_G^i = -\vec{\alpha}I_G = -\ddot{\theta}I_G\hat{k} \end{cases}$$

Essendo poi l'espressione generale del sistema fondamentale della dinamica data da

$$2.3) \quad \begin{cases} \vec{F}^e + \vec{F}^i = \vec{0} \\ \vec{M}_G^e + \vec{M}_G^i = \vec{0} \end{cases}$$

dove l'apice e si riferisce alla sollecitazione effettiva, mentre l'apice i indica la sollecitazione d'inerzia; dunque sostituendo le 2.1, 2.2 nella 2.3 abbiamo

$$2.4) \quad \begin{cases} m\vec{g} + \vec{R} - m\vec{a}_G = \vec{0} \\ \vec{R} \times \vec{AG} - \vec{\alpha}I_G = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_x - m\ddot{x}_G = 0 \\ R_y - mg - m\ddot{y}_G = 0 \\ AG(R_x \sin \theta - R_y \cos \theta) - \ddot{\theta}I_G = 0 \end{cases}$$

Si consideri ora che per le coordinate cartesiane del baricentro si ha

$$\begin{cases} x_G = AG \cos \theta \\ y_G = AG \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_G = -AG\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y}_G = AG\dot{\theta} \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_G = -AG(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \\ \ddot{y}_G = AG(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \end{cases}$$

Dunque le 2.4 si riscrivono

$$2.5) \quad \begin{cases} R_x + mAG(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) = 0 \\ R_y - mg - mAG(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = 0 \\ AG(R_x \sin \theta - R_y \cos \theta) - \ddot{\theta}I_G = 0 \end{cases}$$

Dalla terza equazione si ricava

$$2.6) \quad \ddot{\theta} = \frac{AG(R_x \sin \theta - R_y \cos \theta)}{I_G}$$

Dalle prime due del 2.5 si ricavano le reazioni vincolari

$$2.7) \quad \begin{cases} R_x = -mAG(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \\ R_y = mg + mAG(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \end{cases}$$

Sostituendo le 2.7 nella 2.6 si ha

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= mAG \frac{(-AG(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \sin \theta - (g + AG(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta)) \cos \theta)}{I_G} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ddot{\theta} &= mAG \frac{(-AG\ddot{\theta} \sin^2 \theta - AG\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - g \cos \theta - AG\ddot{\theta} \cos^2 \theta + AG\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta)}{I_G} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ddot{\theta} = -mAG \frac{AG\ddot{\theta} + g \cos \theta}{I_G} \Leftrightarrow \ddot{\theta}I_G = -mAG^2\ddot{\theta} - mAGg \cos \theta \end{aligned}$$

Abbiamo trovato dunque la legge del moto

$$2.8) \quad (I_G + AG^2m)\ddot{\theta} + AGmg \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{1}{2} \frac{2AGmg}{I_G + AG^2m} \cos \theta = -\frac{1}{2A^2} \cos \theta$$

Le 2.7 risolvono il quesito 1.4, la 2.8 risponde al quesito 1.2.

3. Metodo del PLV. Come verifica della 2.8 vediamo ora di risolvere il quesito 1.2 attraverso l'applicazione del Principio dei Lavori Virtuali; il lavoro virtuale della sollecitazione effettiva (attiva e reattiva) e della sollecitazione inerziale si scrive

$$3.1) \quad \delta L = \vec{R} \cdot \vec{\delta}(A) + (m\vec{g} - m\vec{a}_G) \cdot \vec{\delta}(G) - \vec{\alpha} \cdot \delta\theta \hat{k} I_G$$

Si consideri ora che $\vec{\delta}(A) = 0$ per rispetto del vincolo di cerniera; inoltre si ha

$$3.2) \quad \vec{\delta}(G) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_G dt \\ \dot{y}_G dt \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -AG\dot{\theta} dt \sin \theta \\ AG\dot{\theta} dt \cos \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -AG \sin \theta \delta\theta \\ AG \cos \theta \delta\theta \end{Bmatrix}$$

Quindi la 3.1 si scrive

$$3.3) \quad \delta L = m \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -AG(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \\ AG(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \end{Bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} -AG \sin \theta \delta\theta \\ AG \cos \theta \delta\theta \end{Bmatrix} - \ddot{\theta} \delta\theta I_G$$

Il PLV porge poi $\delta L = 0$ ovvero

$$\begin{aligned} & m \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -AG(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \\ AG(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \end{Bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} -AG \sin \theta \\ AG \cos \theta \end{Bmatrix} - \ddot{\theta} I_G = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & m \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -AG \sin \theta \\ AG \cos \theta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -AG(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \\ AG(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -AG \sin \theta \\ AG \cos \theta \end{Bmatrix} \right) - \ddot{\theta} I_G = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & m \left(-gAG \cos \theta - AG^2 \left((\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \sin \theta + (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \cos \theta \right) \right) = \ddot{\theta} I_G \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & m \left(-gAG \cos \theta - AG^2(\ddot{\theta} \sin^2 \theta + \ddot{\theta} \cos^2 \theta) \right) = \ddot{\theta} I_G \Leftrightarrow m(-gAG \cos \theta - AG^2\ddot{\theta}) = \ddot{\theta} I_G \end{aligned}$$

Abbiamo trovato dunque

$$3.4) \quad AGmg \cos \theta + (mAG^2 + I_G)\ddot{\theta} = 0$$

Si ritrova così la 2.8.

4. Abbassamento dell'ordine della equazione differenziale. Nella 3.4 si ponga

$$4.1) \quad z(\theta) = \dot{\theta}(t)$$

Allora si ha

$$4.2) \quad \ddot{\theta}(t) = \frac{dz(\theta)}{d\theta} \dot{\theta}(t)$$

Sostituendo le 4.1, 4.2 nella 3.4 si ha

$$4.3) \quad AGmg \cos \theta + (mAG^2 + I_G) \frac{dz(\theta)}{d\theta} z(\theta) = 0$$

Questa equazione differenziale si può agevolmente risolvere per separazione di variabili, infatti

$$\frac{dz(\theta)}{d\theta} z(\theta) = -\frac{AGmg \cos \theta}{mAG^2 + I_G} \Leftrightarrow z dz = -\frac{AGmg}{mAG^2 + I_G} \cos \theta d\theta \Leftrightarrow \frac{z^2}{2} = -\frac{AGmg}{mAG^2 + I_G} \int d \sin \theta$$

Quindi si trova

$$4.4) \quad z^2 = -2 \frac{AGmg}{mAG^2 + I_G} \sin \theta + C$$

Sostituendo poi la 4.1 nella 4.4 si ha

$$\dot{\theta}^2(t) = -2 \frac{AGmg}{mAG^2 + I_G} \sin \theta(t) + C$$

Imponendo poi le condizioni iniziali si ha

$$0 = -2 \frac{AGmg}{mAG^2 + I_G} \sin \theta_0 + C \Rightarrow C = 2 \frac{AGmg}{mAG^2 + I_G} \sin \theta_0$$

e quindi si conclude

$$4.5) \quad \dot{\theta}^2(t) = 2 \frac{AGmg}{mAG^2 + I_G} [\sin \theta_0 - \sin \theta(t)]$$

Si osservi ora che la 4.5 impone che sia sempre $\sin \theta_0 \geq \sin \theta(t)$, ovvero che il baricentro del corpo non risalga mai oltre la posizione assunta all'istante iniziale. Questo è perfettamente compatibile con la conservazione dell'energia del sistema.

Per risolvere l'equazione differenziale dobbiamo ora metterla in forma normale, ovvero occorre estrarre la radice; questo limiterà la validità della soluzione all'ambito temporale in cui la velocità non cambia di segno. Poiché a partire dalle condizioni iniziali 1.5 la velocità angolare risulta positiva, segue che sceglieremo di scrivere la 4.5 nella forma seguente

$$4.6) \quad \begin{cases} \dot{\theta}(t) = \frac{1}{A} \sqrt{\sin \theta_0 - \sin \theta(t)} \\ \frac{1}{A} = \sqrt{2 \frac{AGmg}{mAG^2 + I_G}} = 8.8588 s^{-1} \\ \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Risolvo ora la 4.6 ancora per separazione di variabili:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{1}{A} \sqrt{\sin \theta_0 - \sin \theta(t)} \Leftrightarrow A \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta_0 - \sin \theta(t)}} = dt \Leftrightarrow$$

$$4.7) \quad t = A \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{d\gamma}{\sqrt{\sin \theta_0 - \sin \gamma}}, \quad \theta \in \left[\theta_0, \frac{3\pi}{2} \right]$$

L'integrale a secondo membro non può essere risolto in forma esatta, si tratta cioè di un integrale ellittico.

5. Metodo energetico. Provo ora come sia possibile pervenire alla 4.6 molto velocemente con considerazioni energetiche. L'energia cinetica del pendolo composto è data da

$$5.1) \quad T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m(v_G^2) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \left(\frac{1}{2}mAG^2 + \frac{1}{2}I_G\right)\dot{\theta}^2$$

L'energia potenziale associata al campo gravitazionale è data invece da

$$\begin{aligned} \Pi = -L &= -\int m\vec{g} \cdot \vec{v}_G dt = -m \int \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{y}_G \end{Bmatrix} dt = -m \int \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -AG\dot{\theta} \sin \theta \\ AG\dot{\theta} \cos \theta \end{Bmatrix} dt = \\ &= mgAG \int \dot{\theta} \cos \theta dt = mgAG \int \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

Dunque abbiamo

$$5.2) \quad \Pi = mgAG \sin \theta + C$$

L'energia totale del sistema è pertanto

$$5.3) \quad E = T + \Pi = \left(\frac{1}{2}mAG^2 + \frac{1}{2}I_G\right)\dot{\theta}^2 + mgAG \sin \theta + C$$

D'altra parte l'energia totale relativa alle condizioni iniziali 1.5 è tutta potenziale e vale

$$5.4) \quad E = \Pi(t_0) = mgAG \sin \theta_0 + C$$

Sostituendo la 5.4 nella 5.3 abbiamo

$$mgAG \sin \theta_0 + C = \left(\frac{1}{2}mAG^2 + \frac{1}{2}I_G\right)\dot{\theta}^2 + mgAG \sin \theta + C \Rightarrow$$

$$5.5) \quad \left(\frac{1}{2}mAG^2 + \frac{1}{2}I_G\right)\dot{\theta}^2 + mgAG(\sin \theta - \sin \theta_0) = 0$$

che è proprio la 4.6.

6. Integrale ellittico incompleto di prima specie. In questo paragrafo discutiamo un particolare integrale -detto ellittico di prima specie- a cui ricondurrò in un secondo momento quello in 4.7. Si tratta del seguente integrale

$$6.1) \quad \begin{cases} F_1(k, \phi) = \int_0^\phi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \\ k \sin \varphi \in]-1,1[\end{cases}$$

il quale non può essere risolto in forma esatta. Qui ne propongo la soluzione per mezzo di uno sviluppo in serie di potenze. A tale scopo si consideri il noto sviluppo

$$\left\{ \begin{aligned} (1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!} x^k = 1 + \frac{\alpha!}{(\alpha-1)!} x + \frac{\alpha!}{2!(\alpha-2)!} x^2 + \frac{\alpha!}{3!(\alpha-3)!} x^3 + \dots \\ &\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1, 1[\end{aligned} \right.$$

Operando le sostituzioni $x = -k^2 \sin^2 \varphi$ e $\alpha = -1/2$ abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1/2)!}{k!(-1/2-k)!} (-k^2 \sin^2 \varphi)^k = \\ &= 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2} k^4 \sin^4 \varphi - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{6} k^6 \sin^6 \varphi + \\ &\quad + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\left(-\frac{1}{2}-3\right)}{24} k^8 \sin^8 \varphi + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi + \frac{3}{8} k^4 \sin^4 \varphi + \frac{15}{48} k^6 \sin^6 \varphi + \frac{105}{384} k^8 \sin^8 \varphi + \dots \end{aligned}$$

Dunque l'integrale $F_1(k, \phi)$ può essere scritto in modo equivalente come

$$6.2) \quad F_1(k, \phi) = \int_0^\phi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1/2)!}{k!(-1/2-k)!} (k^2 \sin^2 \varphi)^k d\varphi$$

Se in particolare ci limitiamo al quinto addendo dello sviluppo in serie, allora una scrittura approssimata di $F_1(k, \phi)$ è la seguente

$$\begin{aligned} F_1(k, \phi) &\cong \int_0^\phi \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi + \frac{3}{8} k^4 \sin^4 \varphi + \frac{15}{48} k^6 \sin^6 \varphi + \frac{105}{384} k^8 \sin^8 \varphi \right) d\varphi = \\ &= \phi + \frac{1}{2} k^2 \int_0^\phi \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{3}{8} k^4 \int_0^\phi \sin^4 \varphi d\varphi + \frac{15}{48} k^6 \int_0^\phi \sin^6 \varphi d\varphi + \frac{105}{384} k^8 \int_0^\phi \sin^8 \varphi d\varphi \end{aligned}$$

Per gli integrali trigonometrici si calcola poi

$$\begin{aligned} \int_0^\phi \sin^2 \varphi d\varphi &= \frac{\varphi - \sin \varphi \cos \varphi}{2} \Big|_0^\phi = \frac{\phi - \sin \phi \cos \phi}{2} \\ \int_0^\phi \sin^4 \varphi d\varphi &= \frac{3\varphi - 3 \sin \varphi \cos \varphi - 2 \sin^3 \varphi \cos \varphi}{8} \Big|_0^\phi = \frac{3\phi - 3 \sin \phi \cos \phi - 2 \sin^3 \phi \cos \phi}{8} \\ \int_0^\phi \sin^6 \varphi d\varphi &= \left(-\frac{\sin^5 \varphi \cos \varphi}{6} + \frac{15}{48} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) - \frac{5}{24} \sin^3 \varphi \cos \varphi \right) \Big|_0^\phi = \\ &= -\frac{\sin^5 \phi \cos \phi}{6} + \frac{15}{48} (\phi - \sin \phi \cos \phi) - \frac{5}{24} \sin^3 \phi \cos \phi \\ \int_0^\phi \sin^8 \varphi d\varphi &= \frac{7}{8} \int_0^\phi \sin^6 \varphi d\varphi - \frac{\sin^7 \varphi \cos \varphi}{8} \Big|_0^\phi = \\ &= -7 \frac{\sin^5 \phi \cos \phi}{48} + \frac{105}{384} (\phi - \sin \phi \cos \phi) - \frac{35}{192} \sin^3 \phi \cos \phi - \frac{\sin^7 \phi \cos \phi}{8} \end{aligned}$$

Dunque l'integrale F_1 può scriversi in maniera approssimata come

$$\begin{aligned}
F_1(k, \phi) \cong & \phi + \frac{1}{2}k^2 \frac{\phi - \sin \phi \cos \phi}{2} + \frac{3}{8}k^4 \frac{3\phi - 3 \sin \phi \cos \phi - 2 \sin^3 \phi \cos \phi}{8} + \\
& + \frac{15}{48}k^6 \left(-\frac{\sin^5 \phi \cos \phi}{6} + \frac{15}{48}(\phi - \sin \phi \cos \phi) - \frac{5}{24} \sin^3 \phi \cos \phi \right) + \\
& + \frac{105}{384}k^8 \left(-7\frac{\sin^5 \phi \cos \phi}{48} + \frac{105}{384}(\phi - \sin \phi \cos \phi) - \frac{35}{192} \sin^3 \phi \cos \phi - \frac{\sin^7 \phi \cos \phi}{8} \right)
\end{aligned}$$

7. Integrale ellittico completo di prima specie. Quando si ponga $\phi = \pi/2$ nell'integrale ellittico incompleto di prima specie, allora si ottiene la forma completa, ovvero l'integrale

$$7.1) \quad \begin{cases} K_1(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \\ k \sin \varphi \in]-1,1[\end{cases}$$

Operando la sostituzione $\phi = \pi/2$ nella espressione approssimata ottenuta per la forma incompleta abbiamo

$$\begin{aligned}
K_1(k) \cong & \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}k^2 + \frac{9}{128}\pi k^4 + \frac{225}{4608}\pi k^6 + \frac{11025}{294912}\pi k^8 \cong \\
\cong & 1.5707 + 0.3926k^2 + 0.2208k^4 + 0.1533k^6 + 0.1174k^8
\end{aligned}$$

Dunque possiamo scrivere

$$7.2) \quad K_1(k) \cong 1.5707 + 0.3926k^2 + 0.2208k^4 + 0.1533k^6 + 0.1174k^8$$

8. Integrale trigonometrico riconducibile a integrale ellittico completo di prima specie. Si consideri l'integrale

$$8.1) \quad \int_0^{\theta} \frac{d\gamma}{\sqrt{\cos \gamma - \cos \theta}}, \quad \theta \in [0, \pm\pi]$$

dove $i = 0,1,2 \dots$ Si operino le sostituzioni seguenti

$$\begin{cases} \sin \frac{\theta}{2} = k \\ \sin \frac{\gamma}{2} = k \sin \varphi \end{cases}$$

Allora abbiamo che

$$\begin{cases} \cos \gamma = \cos^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \\ \cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\cos \gamma - \cos \theta} = \sqrt{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2}}$$

$$\begin{cases} \gamma = \theta \Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{\theta}{2} = k \sin \phi \\ \sin \frac{\theta}{2} = k \end{cases} \Rightarrow \sin \phi = 1 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \\ \gamma = 0 \Rightarrow 0 = k \sin \phi \Rightarrow \phi = 0 \end{cases}$$

$$d\left(\sin \frac{\gamma}{2}\right) = d(k \sin \phi) \Rightarrow \frac{1}{2} \cos \frac{\gamma}{2} d\gamma = k \cos \phi d\phi \Rightarrow d\gamma = \frac{2k \cos \phi}{\cos \frac{\gamma}{2}} d\phi$$

Dunque la sostituzione proposta porge

$$\int_0^\theta \frac{d\gamma}{\sqrt{\cos \gamma - \cos \theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2k \cos \phi}{\sqrt{2} \cos \frac{\gamma}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2}}} d\phi = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \cos \phi}{\cos \frac{\gamma}{2} |k| \sqrt{1 - \sin^2 \phi}} d\phi$$

Si consideri ora che poiché $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ si ha $\cos \phi \geq 0$ e dunque $\sqrt{1 - \sin^2 \phi} = \cos \phi$, pertanto abbiamo ottenuto sin qui

$$\int_0^\theta \frac{d\gamma}{\sqrt{\cos \gamma - \cos \theta}} = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k}{\cos \frac{\gamma}{2} |k|} d\phi$$

A questo punto si deve specificare l'ambito di variabilità di θ . Si hanno solo i seguenti casi:

$$\begin{aligned} \theta \in [0, \pi] &\Rightarrow \begin{cases} k \geq 0 \\ \cos \frac{\gamma}{2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \int_0^\theta \frac{d\gamma}{\sqrt{\cos \gamma - \cos \theta}} = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} d\phi \\ \theta \in [0, -\pi] &\Rightarrow \begin{cases} k \leq 0 \\ \cos \frac{\gamma}{2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \int_0^\theta \frac{d\gamma}{\sqrt{\cos \gamma - \cos \theta}} = -\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} d\phi \end{aligned}$$

Si riconosce a secondo membro l'integrale ellittico di prima specie in forma completa, dunque possiamo fornire la seguente soluzione approssimata:

$$\begin{aligned} 8.2) \quad \int_0^\theta \frac{d\gamma}{\sqrt{\cos \gamma - \cos \theta}} &= \pm \sqrt{2} K_1 \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) \cong \\ &\cong \pm \sqrt{2} \left[1.5707 + 0.3926 \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^2 + 0.2208 \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^4 + 0.1533 \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^6 + 0.1174 \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^8 \right] \end{aligned}$$

dove $\theta \in [0, \pm\pi]$.

9. Integrazione per serie. Vediamo ora come ricondurre l'integrale in 4.7 a quello discusso nel precedente paragrafo. Operando la sostituzione $\theta = \alpha + 3\pi/2$ nell'integrale 4.7 abbiamo

$$9.1) \quad \begin{cases} \sin \theta_0 = \sin \left(\alpha_0 + \frac{3\pi}{2} \right) = -\cos \alpha_0 \\ \sin \theta = \sin \left(\alpha + \frac{3\pi}{2} \right) = -\cos \alpha \\ \theta_0 = \alpha_0 + \frac{3\pi}{2}, \theta = \alpha + \frac{3\pi}{2}, d\theta = d\alpha \end{cases} \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{d\gamma}{\sqrt{\sin \theta_0 - \sin \gamma}} = \int_{\alpha_0}^{\alpha(t)} \frac{d\beta}{\sqrt{\cos \beta - \cos \alpha_0}}$$

Possiamo scrivere anche

$$9.2) \quad \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{d\gamma}{\sqrt{\sin \theta_0 - \sin \gamma}} = - \int_0^{\alpha_0} \frac{d\beta}{\sqrt{\cos \beta - \cos \alpha_0}} + \int_0^{\alpha(t)} \frac{d\beta}{\sqrt{\cos \beta - \cos \alpha_0}}$$

Considerando i risultati del precedente paragrafo -e tendo conto delle condizioni iniziali in 1.5- si ha

$$9.3) \quad \begin{cases} \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{\cos \beta - \cos \alpha_0}} = -\sqrt{2}K_1 \left(\sin \frac{\pi}{4} \right) \\ \int_0^{\alpha(t)} \frac{d\beta}{\sqrt{\cos \beta - \cos \alpha_0}} = -\sqrt{2}K_1 \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right) \\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \theta - \frac{3\pi}{2} \right] \subseteq \left[-\frac{\pi}{2}, 0 \right] \end{cases}$$

Dunque l'equazione 4.7 si può riscrivere

$$9.4) \quad t = A\sqrt{2} \left(K_1 \left(\sin \frac{\pi}{4} \right) - K_1 \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right) \right), \quad \theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right], \alpha = \theta - \frac{3\pi}{2}$$

dove si deve sostituire

$$9.5) \quad \begin{cases} K_1 \left(\sin \frac{\pi}{4} \right) \cong \left[1.5707 + 0.3926 \left(\sin \frac{\pi}{4} \right)^2 + 0.2208 \left(\sin \frac{\pi}{4} \right)^4 + 0.1533 \left(\sin \frac{\pi}{4} \right)^6 + 0.1174 \left(\sin \frac{\pi}{4} \right)^8 \right] \cong 1.8450 \\ K_1 \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right) \cong \left[1.5707 + 0.3926 \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 + 0.2208 \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)^4 + 0.1533 \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)^6 + 0.1174 \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)^8 \right] \end{cases}$$

In realtà si trova che le 9.5, 9.6 non funzionano, e non so bene perché. Invece la 9.3 funziona se la si usa per calcolare il tempo necessario a descrivere un quarto della oscillazione. In tal caso infatti si ottiene

$$\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{d\gamma}{\sqrt{\sin \theta_0 - \sin \gamma}} = - \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{\cos \beta - \cos \alpha_0}} = \sqrt{2}K_1 \left(\sin \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow t = A\sqrt{2}K_1 \left(\sin \frac{\pi}{4} \right) \cong 0.2951s$$

Dunque si ottiene un periodo

$$9.6) \quad T = 4 \cdot 0.2951s = 1.18s$$

10. Metodo di Runge-Kutta classico. Ricordo il metodo di Runge-Kutta classico per l'integrazione numerica, secondo il quale assegnato il problema di Cauchy

$$10.1) \quad \begin{cases} \frac{dy(t)}{dx} = f(x, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con un'unica soluzione in $I = [t_0, t_0 + \beta]$, allora definita la partizione seguente di I in $n + 1$ nodi

$$10.2) \quad x_i = x_0 + i \frac{\beta}{n} = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

segue che la funzione incognita può essere costruita secondo l'espressione

$$10.3) \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i)$$

con

$$10.4) \quad \begin{cases} k_1^i = f(x_i, y_i) \\ k_2^i = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1^i\right) \\ k_3^i = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2^i\right) \\ k_4^i = f(x_i + h, y_i + hk_3^i) \end{cases}$$

11. Integrazione numerica. Volendo applicare il metodo di integrazione esposto nel precedente paragrafo al problema di Cauchy qui in esame, che ricordo

$$11.1) \quad \begin{cases} \dot{\theta}(t) = \frac{1}{A} \sqrt{-\sin \theta(t)} & \text{con } A = \frac{1}{\sqrt{2 \frac{AGmg}{mAG^2 + IG}}} \\ \theta(t=0) = 180^\circ \\ \dot{\theta}(t=0) = 0 \\ \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

si utilizza quanto esposto nel precedente paragrafo. In particolare, si definisce la partizione

$$11.2) \quad t_i = x_0 + i \frac{\beta}{n} = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Quindi il metodo Runge-Kutta classico porge l'algoritmo

$$11.3) \quad \theta_{i+1} = \theta_i + \frac{h}{6} (k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i)$$

con

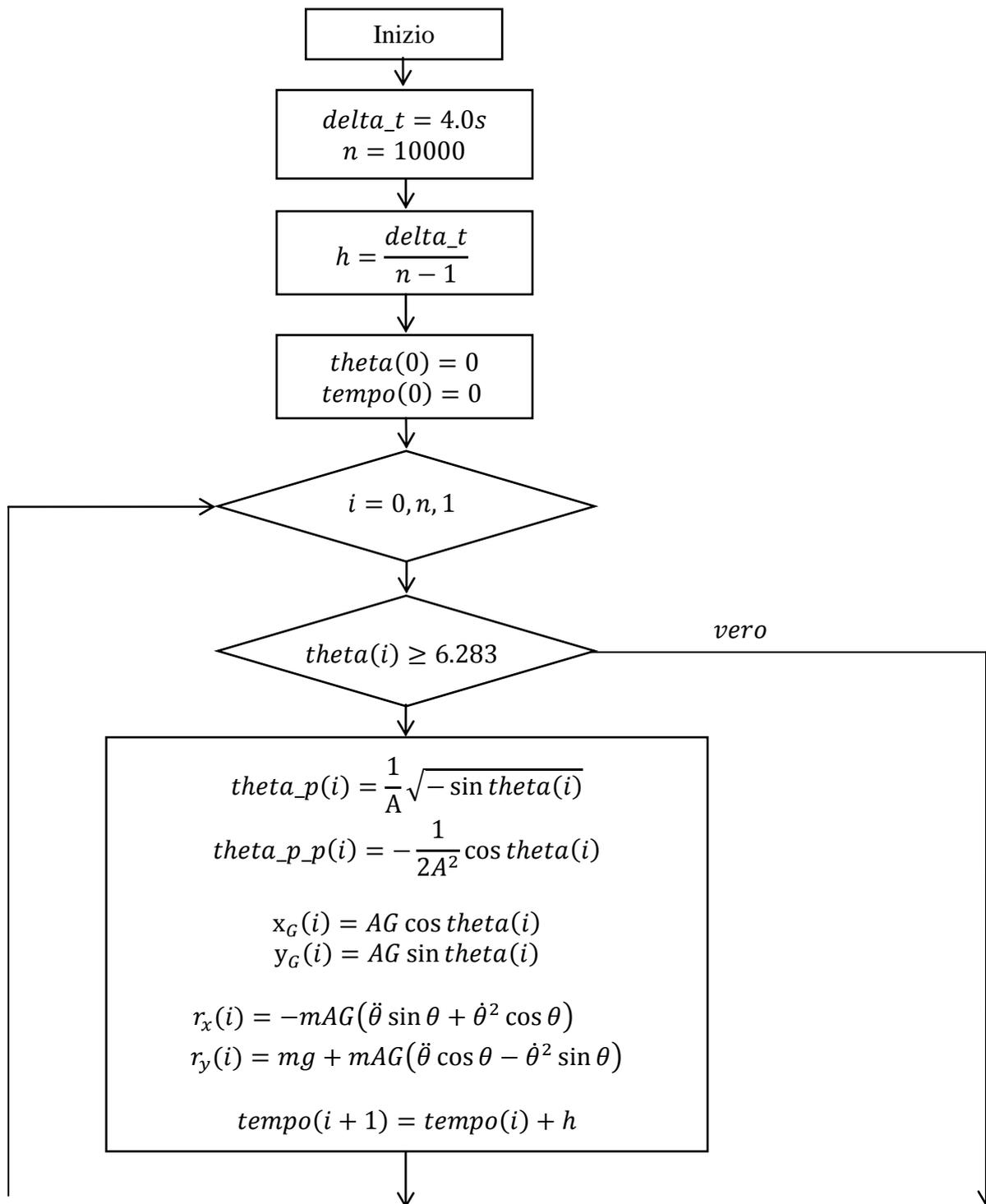
$$11.4) \quad \begin{cases} k_1^i = \frac{1}{A} \sqrt{-\sin \theta_i} \\ k_2^i = \frac{1}{A} \sqrt{-\sin\left(\theta_i + \frac{h}{2}k_1^i\right)} \\ k_3^i = \frac{1}{A} \sqrt{-\sin\left(\theta_i + \frac{h}{2}k_2^i\right)} \\ k_4^i = \frac{1}{A} \sqrt{-\sin(\theta_i + hk_3^i)} \end{cases}$$

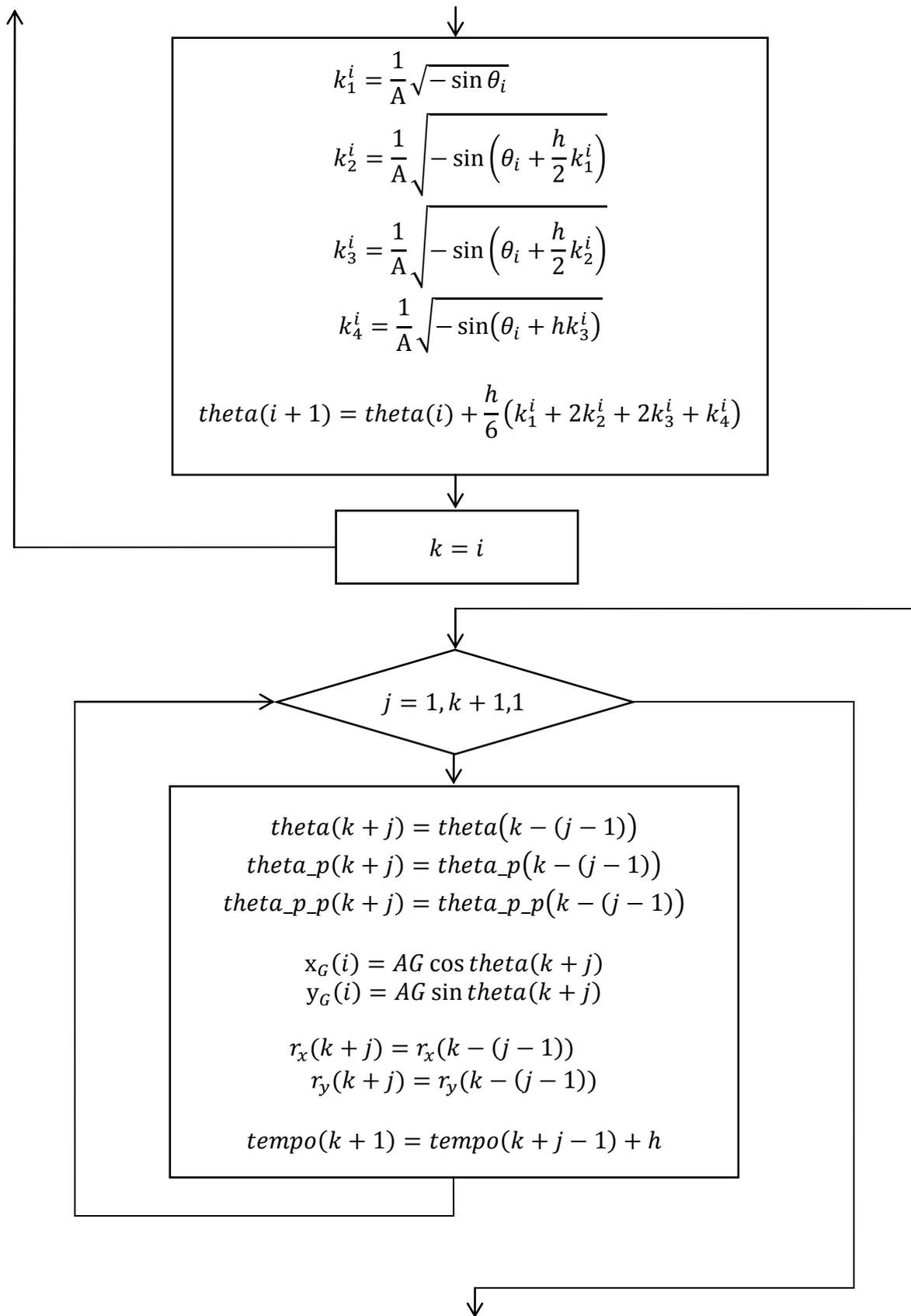
Una volta che si sia ricavato dalla 10.3 l'array dei valori di θ è possibile ricavare dalla 3.4 quello dei corrispondenti valori di $\ddot{\theta}$ e l'array dei valori di $\dot{\theta}_i$ dalla prima delle 4.6, avendosi

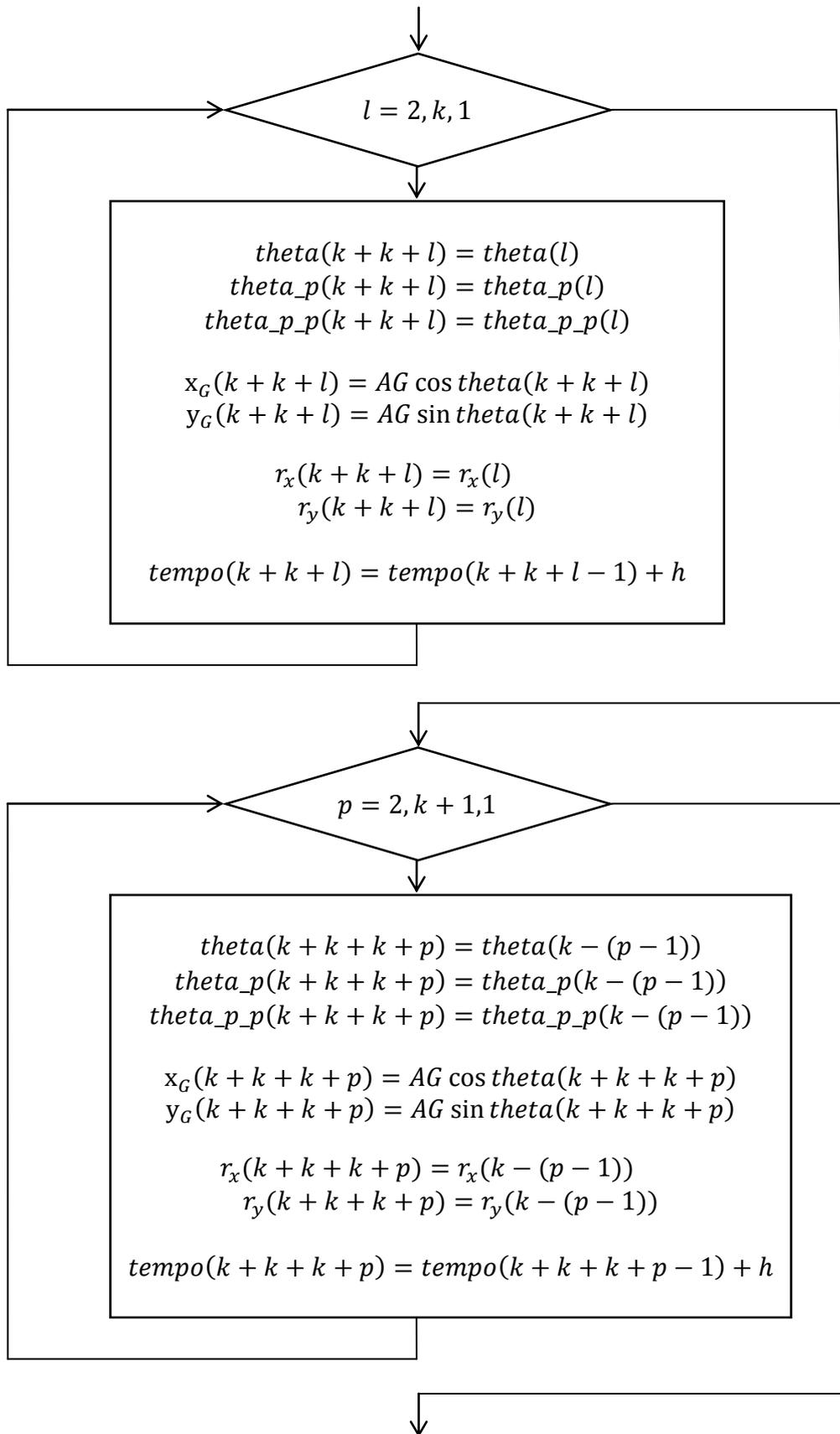
$$11.5) \begin{cases} \dot{\theta}_i = \frac{1}{A} \sqrt{-\sin \theta_i} \\ \ddot{\theta}_i = -\frac{AGmg}{mAG^2 + I_G} \cos \theta_i \end{cases}$$

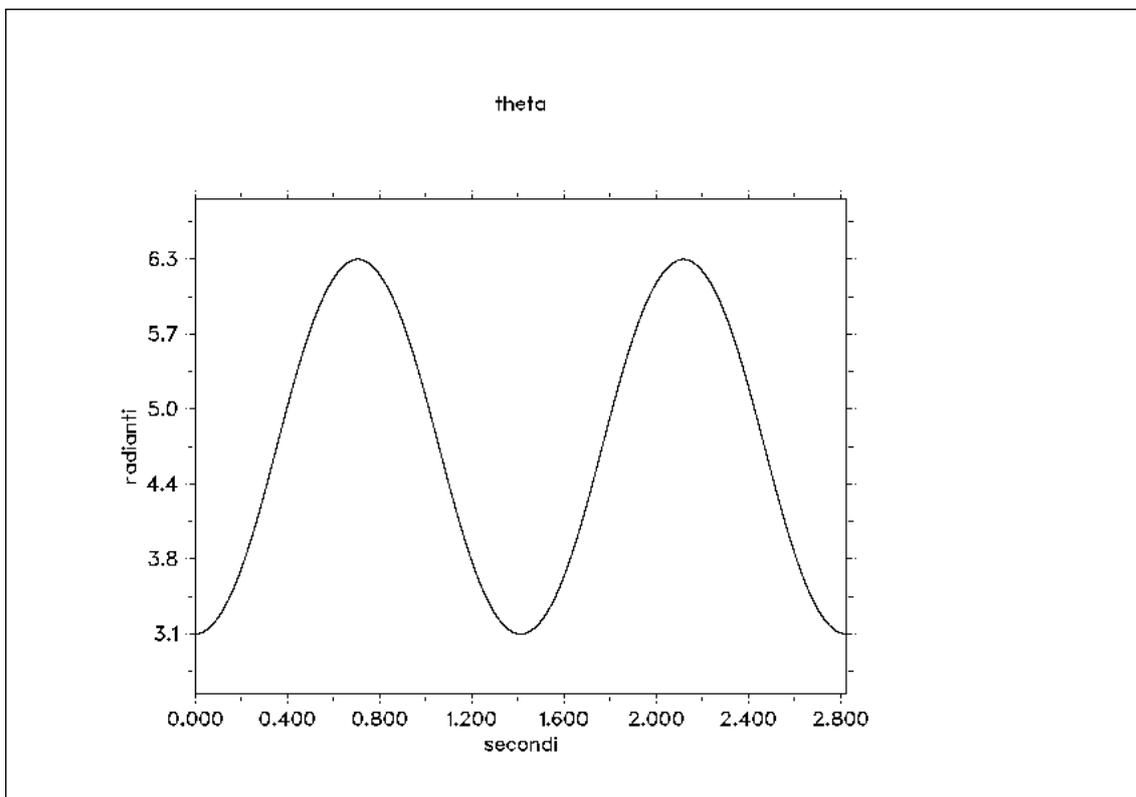
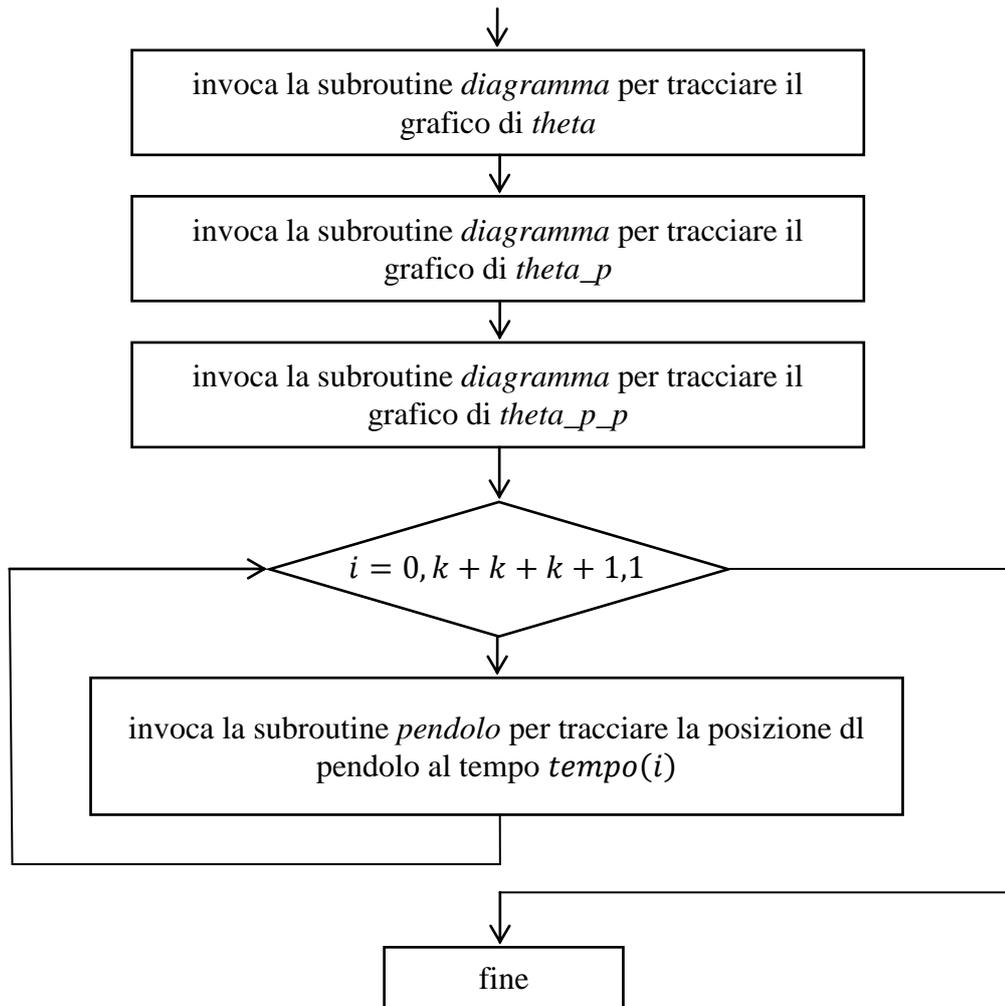
Quindi si ricavano le reazioni vincolari dalle 2.7, le quali porgono

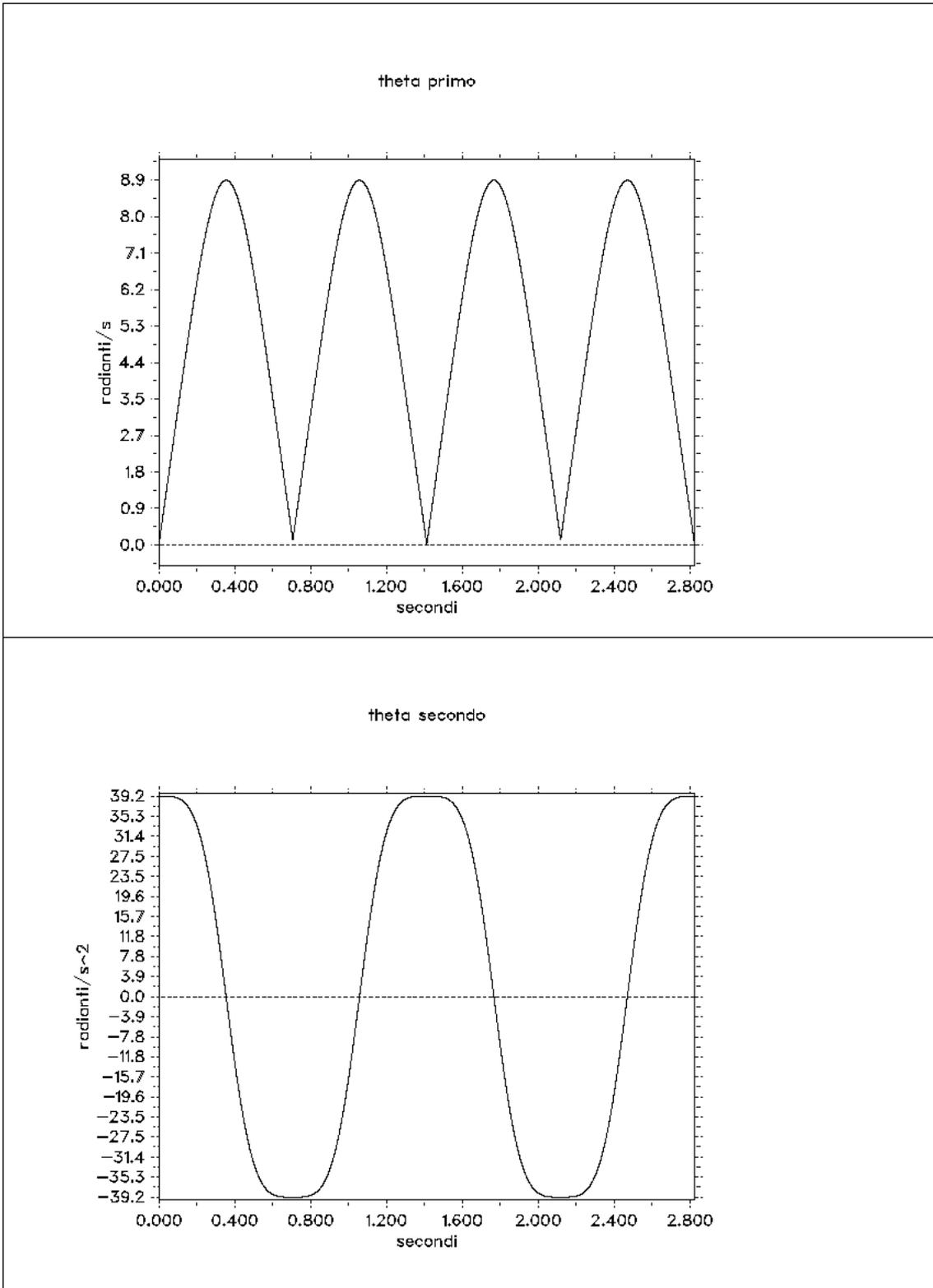
$$11.6) \begin{cases} R_x^i = -mAG (\ddot{\theta}_i \sin \theta_i + \dot{\theta}_i^2 \cos \theta_i) \\ R_y^i = mg + mAG (\ddot{\theta}_i \cos \theta_i - \dot{\theta}_i^2 \sin \theta_i) \end{cases}$$











12. Algoritmo risolutivo. Per effettuare l'integrazione numerica sono stati scritti in Fortran i seguenti codici:

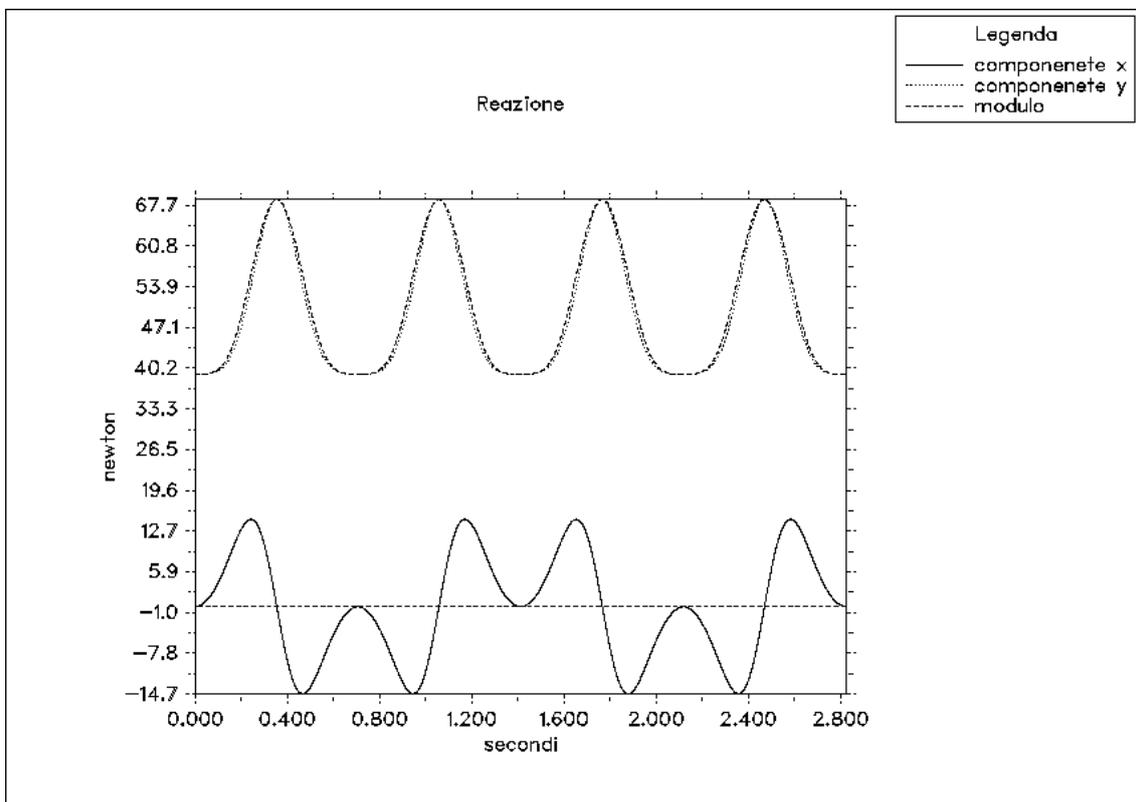
- l'unità chiamante *main_ese_14_a*, la quale si occupa del calcolo della legge oraria e delle reazioni vincolari;
- il modulo *mod_ese_14_a*, il quale contiene le costanti geometriche 1.1 oltre alle seguenti procedure di modulo:

- subroutine *diagramma*, la quale si occupa di tracciare l'andamento nel tempo delle funzioni $\theta(t), \dot{\theta}(t), \ddot{\theta}(t)$;
- subroutine *reazioni*, la quale si occupa di tracciare l'andamento nel tempo delle funzioni $R_x(t), R_y(t)$;
- subroutine *pendolo*, la quale si occupa di tracciare i fotogrammi con la posizione del pendolo (si tratta del pendolo equivalente circolare di cui si parla nel paragrafo iniziale) per più istanti consecutivi; questi fotogrammi sono stati poi usati per realizzare una animazione della oscillazione del pendolo.

In figura il diagramma di flusso complessivo.

13. Esecuzione del programma. Il programma restituisce l'andamento nel tempo delle seguenti funzioni, che riporto nelle figure precedenti e nella successiva.

- $\theta = \theta(t), \dot{\theta} = \dot{\theta}(t), \ddot{\theta} = \ddot{\theta}(t)$
- $r_x = r_x(t), r_y = r_y(t), r = r(t)$



14. Codice del programma chiamante. Segue lo script della unità chiamante del programma che risolve il quesito.

```
PROGRAM main_ese_14_a

USE DISLIN    !libreria grafica
USE mod_ese_14_a

!sezione dichiarativa

IMPLICIT NONE
```

```

!dichiaro gli array di theta e delle sue derivate
REAL,DIMENSION(0:n-1):: theta, theta_p, theta_p_p

!dichiaro gli array delle componenti e del valore totale della reazione vincolare
REAL,DIMENSION(0:n-1):: rx, ry, r

!dichiaro l'array del tempo
REAL, DIMENSION(0:n-1):: tempo

!dichiaro gli array della posizione del baricentro
REAL,DIMENSION(0:n-1):: xG, yG

!dichiaro gli array dei coefficienti k del metodo Runge-Kutta
REAL,DIMENSION(0:n-1):: k1, k2, k3, k4

!dichiaro la costante A presente nella equazione differenziale
REAL:: A

!dichiaro gli indici del ciclo e una variabile di lavoro
INTEGER:: i,j,l,p,k

!indico una stringa che uso per chiudere il programma
CHARACTER(len=10):: chiusura

!dichiaro i titoli dei diagrammi
CHARACTER(len=13):: titolo_1 = "theta   "
CHARACTER(len=13):: titolo_2 = "theta primo "
CHARACTER(len=13):: titolo_3 = "theta secondo"
CHARACTER(len=13):: unita_1 = "radianti   "
CHARACTER(len=13):: unita_2 = "radianti/s  "
CHARACTER(len=13):: unita_3 = "radianti/s^2 "

!sezione esecutiva

!calcolo h
h = delta_t/REAL(n-1)

WRITE(*,*) h

!calcolo la costante A
A = SQRT( ( (m*AG**2.)+IG )/( 2.*AG*m*g ) )

!impongo la condizione iniziale
theta(0) = 3.141593
tempo(0) = 0.

!ciclo del metodo di Runge-Kutta

```

andata_1: DO i=0, n, 1

IF (theta(i)>=6.283) EXIT andata_1

!calcolo la velocità angolare e l'accelerazione angolare

theta_p(i) = (1./A)*SQRT((-1.)*SIN(theta(i)))
theta_p_p(i) = (-1.)*COS(theta(i))/(2*A**2.)

!calcolo la posizione del baricentro

xG(i) = AG*COS(theta(i))
yG(i) = AG*SIN(theta(i))

!calcolo le componenti della reazione vincolari e il modulo della reazione

rx(i) = (-1.)*m*AG*(theta_p_p(i)*SIN(theta(i)) + (theta_p(i)**2)*COS(theta(i)))
ry(i) = m*g + m*AG*(theta_p_p(i)*COS(theta(i)) - (theta_p(i)**2)*SIN(theta(i)))
r (i) = SQRT(rx(i)**2 + ry(i)**2)

!calcolo i coefficienti k del metodo runge-kutta

k1(i) = (1./A)*SQRT((-1.)*SIN(theta(i)))
k2(i) = (1./A)*SQRT((-1.)*SIN(theta(i) + 0.5*h*k1(i)))
k3(i) = (1./A)*SQRT((-1.)*SIN(theta(i) + 0.5*h*k2(i)))
k4(i) = (1./A)*SQRT((-1.)*SIN(theta(i) + h*k3(i)))

!calcolo il valore di theta(i+1)

theta(i+1) = theta(i) + (h/6.)*(k1(i) + 2*k2(i) + 2*k3(i) + k4(i))

!calcolo i valori dell'array del tempo

tempo(i+1) = tempo(i) + h

!assegno il valore k

k=i

WRITE(*,*) theta(i), rx(i), ry(i), r(i)

END DO andata_1

!assegno gli altrivalori degli array invertendo il moto sin qui ottenuto

ritorno_1: DO j=1, k+1, 1

theta(k+j) = theta(k-(j-1))
theta_p(k+j) = theta_p(k-(j-1))
theta_p_p(k+j) = theta_p_p(k-(j-1))

xG(k+j) = AG*COS(theta(k+j))
yG(k+j) = AG*SIN(theta(k+j))

rx(k+j)= rx(k-(j-1))
ry(k+j)= ry(k-(j-1))
r (k+j) = r(k-(j-1))

!calcolo i valori dell'array del tempo

tempo(k+j) = tempo(k+j-1) + h

WRITE(*,*) theta(k+j), rx(k+j), ry(k+j), r(k+j)

END DO ritorno_1

!assegno i valori per la seconda andata del pendolo

andata_2: DO l=2, k, 1

theta(k+k+l) = theta(l)
theta_p(k+k+l) = theta_p(l)
theta_p_p(k+k+l) = theta_p_p(l)

xG(k+k+l) = AG*COS(theta(k+k+l))
yG(k+k+l) = AG*SIN(theta(k+k+l))

rx(k+k+l)=rx(l)
ry(k+k+l)=ry(l)
r(k+k+l) =r (l)

!calcolo i valori dell'array del tempo

tempo(k+k+l) = tempo(k+k+l-1) + h

WRITE(*,*) theta(k+k+l), rx(k+k+l), ry(k+k+l), r(k+k+l)

END DO andata_2

!assegno i valori del secondo ritorno

ritorno_2: DO p=1, k+1, 1

theta(k+k+k+p) = theta(k-(p-1))
theta_p(k+k+k+p) = theta_p(k-(p-1))
theta_p_p(k+k+k+p) = theta_p_p(k-(p-1))

xG(k+k+k+p) = AG*COS(theta(k+k+k+p))
yG(k+k+k+p) = AG*SIN(theta(k+k+k+p))

rx(k+k+k+p)=rx(k-(p-1))
ry(k+k+k+p)=ry(k-(p-1))
r(k+k+k+p)=r(k-(p-1))

!calcolo i valori dell'array del tempo

tempo(k+k+k+p) = tempo(k+k+k+p-1) + h

WRITE(*,*) theta(k+k+k+p), rx(k+k+k+p), ry(k+k+k+p), r(k+k+k+p)

END DO ritorno_2

WRITE(*,*) k

!traccio il diagramma di theta in funzione del tempo

CALL diagramma (theta, tempo, titolo_1, unita_1, k)

!traccio il diagramma di theta_p in funzione del tempo

```

CALL diagramma (theta_p, tempo, titolo_2, unita_2, k)

!traccio il diagramma di theta_p_p in funzione del tempo

CALL diagramma (theta_p_p, tempo, titolo_3, unita_3, k)

!traccio il diagramma della reazione vincolare in funzione del tempo

CALL reazione (rx, ry, r, tempo, k)

!traccio la posizione del pendolo istante per istante

animazione: DO i=0,k+k+k+k+1,10

                CALL pendolo (xG, yG, rx, ry, tempo, i)

END DO animazione

WRITE (*,*)"Per chiudere il programma premi una lettera qualunque."
WRITE (*,*)"Tutti i dati andranno persi."
READ (*,*) chiusura

STOP

END PROGRAM main_ese_14_a

```

15. Codice del modulo. Seguono le linee di programma del modulo utilizzato dalla unità chiamante.

```

MODULE mod_ese_14_a

!sezione dichiarativa

IMPLICIT NONE

!dichiaro i parametri inerziali e geometrici del pendolo

REAL, PARAMETER:: m = 5.0  !la massa in kg
REAL, PARAMETER:: IG = 0.05 !il momento d'inerzia in kg per m^2
REAL, PARAMETER:: AG = 0.05 !distanza fra cerniera e baricentro in m
REAL, PARAMETER:: g = 9.807 !accelerazione gravitazionale
REAL, PARAMETER:: Ra= 0.142 !raggio di un pendolo equivalente

!dichiaro il numero di iterazioni, l'intervallo e l'incremento temporale

INTEGER, PARAMETER:: n    = 10000
REAL, PARAMETER :: delta_t = 4.
REAL                :: h

!scrivo le subroutine

CONTAINS

!-----

SUBROUTINE diagramma (funzione, tempo, stringa, unita, k)

!sezione dichiarativa

```

!dichiaro gli argomenti fittizi

!dichiaro l'array della funzione e quello del tempo

REAL,INTENT(IN),DIMENSION(0:n-1):: funzione, tempo

!dichiaro la stringa usata per la leggenda

CHARACTER(len=13),INTENT(IN):: stringa

CHARACTER(len=13),INTENT(IN):: unita

!dichiaro il numero di elementi scitti sugli array

INTEGER, INTENT(IN):: k

!dichiaro le variabili locali

!dichiaro il valore massimo e minimo della funzione

REAL:: max, min

!sezione esecutiva

!calcolo il valore massimo della funzione

max = MAXVAL (funzione(0:k+1))

min = MINVAL (funzione(0:k+1))

!imposto il formato del file

CALL METAFL ('bmp') !indico il formato dell'output

CALL BMPMOD (25000,'meter','resolution') !risoluzione del formato .bmp

!imposto la pagina

CALL SCRMOD ('revers') !scritta nera su fondo bianco

CALL DISINI !richiama alcune impostazioni di default

CALL PAGERA !traccio un bordo per il piano xy

CALL DUPLX !font a doppio spessore

!imposto gli assi x,y

CALL AXSPOS (700,2700) !coordinate angolo basso sinistra

CALL AXSLEN (1700,1300) !lunghezza dei due assi in pixel

CALL NAME ('secondi','x') !nome delle ascisse

CALL NAME (unita,'y') !nome delle ordinate

CALL LABDIG (3,'x') !chiedo 3 cifre decimali per l'asse x

CALL DASH !tratteggio per gli assi coordinati

!inizio, fine, intervallo assi x, y

CALL GRAF (0.0,h*(k+k+k+k+1),0.0,delta_t/10,min-0.5,max+0.5,min,max/10.)

CALL XAXGIT !traccio la retta x=0

CALL YAxGIT !traccio la retta y=0

!traccio la curva

CALL MYLINE (1,1) !chiede una linea continua per la curva

CALL CURVE (tempo, funzione, k+k+k+k+1) !traccio lo spazio in funzione del tempo

```

!imposto il titolo

CALL TITLIN (stringa,1)    !prima riga del titolo
CALL TITLE                !stampa il titolo di cui sopra

CALL DISFIN

END SUBROUTINE diagramma

!-----

SUBROUTINE reazione (rx, ry, r, tempo, k)

!sezione dichiarativa

!dichiaro gli argomenti fittizi

!dichiaro l'array della funzione e quello del tempo
REAL,INTENT(IN),DIMENSION(0:n-1):: rx, ry, r, tempo

!dichiaro il numero di elementi scitti sugli array

INTEGER, INTENT(IN):: k

!dichiaro le variabili locali

!dichiaro la stringa usata per la leggenda

CHARACTER(len=13):: stringa

!dichiaro i valori massimi e minimi delle funzioni rx, ry, r

REAL:: max_rx, max_ry, max_r
REAL:: min_rx, min_ry, min_r

!dichiaro il valore massimo dei massimi e minimo dei minimi

REAL:: max_t
REAL:: min_t

!sezione esecutiva

!calcolo il valore massimo e minimo delle funzioni

max_rx = MAXVAL (rx(0:k+1))
min_rx = MINVAL (rx(0:k+1))
max_ry = MAXVAL (ry(0:k+1))
min_ry = MINVAL (ry(0:k+1))
max_r  = MAXVAL (r(0:k+1) )
min_r  = MINVAL (r(0:k+1) )

!calcolo il valore massimo dei massimi e il minimo dei minimi

max_t = MAX(max_rx, max_ry, max_r)
min_t = MIN(min_rx, min_ry, min_r)

!imposto il formato del file

CALL METAFL ('bmp')          !indico il formato dell'output

```

CALL BMPMOD (25000,'meter','resolution') !risoluzione del formato .bmp

!imposto la pagina

CALL SCRMOD ('revers') !scritta nera su fondo bianco
CALL DISINI !richiama alcune impostazioni di default
CALL PAGERA !traccio un bordo per il piano xy
CALL DUPLX !font a doppio spessore

!imposto gli assi x,y

CALL AXSPOS (900,2700) !coordinate angolo basso sinistra
CALL AXSLEN (1700,1300)!lunghezza dei due assi in pixel
CALL NAME ('secondi','x') !nome delle ascisse
CALL NAME ('newton','y') !nome delle ordinate
CALL LABDIG (3,'x') !chiedo 3 cifre decimali per l'asse x
CALL DASH !tratteggio per gli assi coordinati

!inizio, fine, intervallo assi x, y

CALL GRAF (0.0,h*(k+k+k+k+1),0.0,delta_t/10,min_t,max_t,min_t,max_t/10)

CALL XAXGIT !traccio la retta x=0
CALL YAxGIT !traccio la retta y=0

!traccio la curva

CALL MYLINE (1,1) !chiede una linea continua per la curva
CALL CHNCRV ('line') !usa una linea diversa per ogni curva
CALL CURVE (tempo, rx, k+k+k+k+1) !traccio rx in funzione del tempo
CALL CURVE (tempo, ry, k+k+k+k+1) !traccio ry in funzione del tempo
CALL CURVE (tempo, r, k+k+k+k+1) !traccio r in funzione del tempo

!imposto il titolo

CALL TITLIN ('Reazione',1) !prima riga del titolo
CALL TITLE !stampa il titolo di cui sopra

!imposto la legenda

CALL LEGINI (stringa,3,13) !variabile di carattere, righe, lunghezza
CALL LEGLIN (stringa,'componete x',1) !prima riga della legenda
CALL LEGLIN (stringa,'componete y',2) !seconda riga della legenda
CALL LEGLIN (stringa,'modulo',3)!terza riga della legenda
CALL LEGTIT ('Legenda') !titolo legenda
CALL LEGEND (stringa,3)!posizine in alto a destra

CALL DISFIN

END SUBROUTINE reazione

!-----

SUBROUTINE pendolo (xG, yG, rx, ry, tempo, i)

!sezione dichiarativa

!dichiaro gli argomenti fittizi

!dichiaro gli array delle coordinate di G e del tempo

```

REAL,INTENT(IN),DIMENSION(0:n-1):: xG, yG, rx, ry, tempo

!dichiaro il numero del fotogramma

INTEGER, INTENT(IN):: i

!dichiaro le variabili locali

!stringa usata per la legenda

CHARACTER(len=30)::stringa

!sezione esecutiva

!imposto il tipo di file

CALL METAFL ('bmp') !indico il formato dell'output
CALL BMPMOD (25000,'meter','resolution')!risoluzioneformato .bmp

!imposto la pagina

CALL SCRMOD ('revers') !scritta nera su fondo bianco
CALL DISINI          !richiama alcune impostazioni di default
CALL PAGERA         !traccio un bordo per il piano xy
CALL DUPLX          !font a doppio spessore
CALL MYLINE (1,1)   !linea continua

!imposto gli assi

CALL AXSPOS (700,2000)
!coordinate angolo basso sinistra
CALL AXSLEN (1700,1700)
!lunghezza dei due assi in pixel
CALL NAME ('metri','x')      !nome delle ascisse
CALL NAME ('metri','y')      !nome delle ordinate
CALL GRAF (-0.196,0.196,-0.196,0.05,-0.196,0.145,-0.196,.05)
CALL XAXGIT
                                !traccio la retta x=0
CALL YAxGIT
                                !traccio la retta y=0

CALL DASH
!tratteggio per gli assi coordinati
CALL NAME ('metri','x')
!nome delle ascisse
CALL NAME ('metri','y')
!nome delle ordinate

!imposto il titolo

CALL TITLIN ("Pendolo",1)
!prima riga del titolo
CALL TITLE          !stampa il titolo di cui sopra

!disegno il pendolo e la reazione vincolare istante per istante

!traccio la circonferenza del pendolo

CALL RLCIRC (xG(i), yG(i), Ra)

!traccio la cerniera

```

```
CALL RLCIRC (0.,0.,0.01)
```

```
!traccio il vettore che rappresenta la forza peso
```

```
CALL RLVEC (xG(i), yG(i), xG(i), yG(i)-m*g/1000.0, 2211)
```

```
!traccio il vettore che rappresenta la reazione vincolare
```

```
CALL RLVEC (0., 0., rx(i)/1000.0, ry(i)/1000.0, 2211)
```

```
CALL DISFIN
```

```
END SUBROUTINE pendolo
```

```
!-----
```

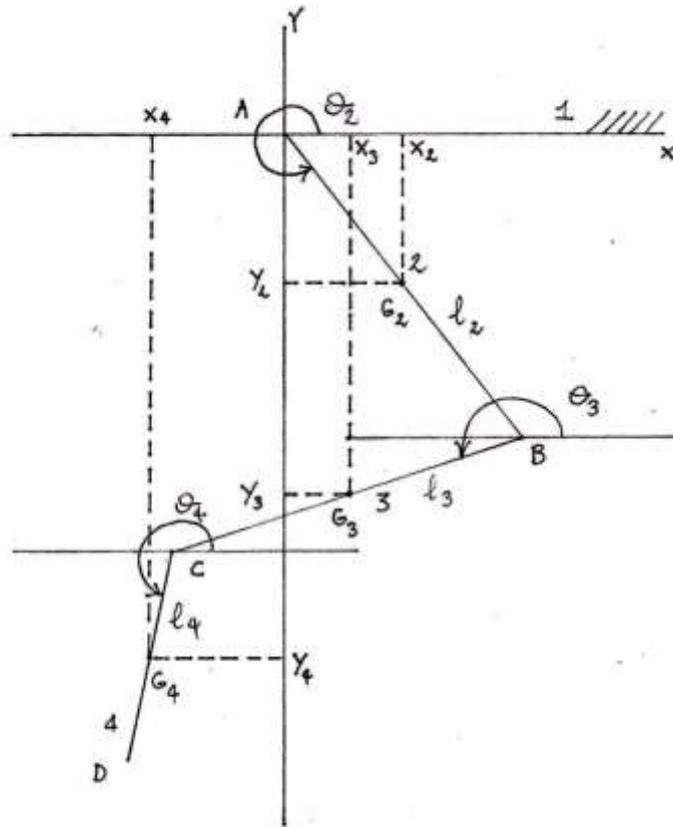
```
END MODULE mod_ese_14_a
```

Dinamica del pendolo triplo

1. Il quesito. Si consideri un pendolo costituito da tre aste caratterizzate dai seguenti parametri geometrici e inerziali:

$$1.1) \quad \begin{cases} m_2 = 10 \text{ kg}, l_2 = 1 \text{ m}, I_{G_2} = \frac{1}{12} m_2 l_2^2 \cong 0.833 \\ m_3 = 7 \text{ kg}, l_3 = 0.7 \text{ m}, I_{G_3} = \frac{1}{12} m_3 l_3^2 \cong 0.285 \\ m_4 = 10 \text{ kg}, l_4 = 1 \text{ m}, I_{G_4} = \frac{1}{12} m_4 l_4^2 \cong 0.833 \end{cases}$$

Si assuma che le cerniere in A, B, C siano senza alcun attrito e si ammetta altresì che l'unica forza attiva agente sia quella dovuta al campo gravitazionale.



Si intende inoltre che $I_{G_2}, I_{G_3}, I_{G_4}$ sono calcolati rispetto ai rispettivi assi baricentrali ortogonali al piano del pendolo. Allora si chiede

- 1.2) di impostare il problema dinamico attraverso il metodo dei moltiplicatori di Lagrange;
- 1.3) di integrarlo per via numerica.

Si assumano le seguenti condizioni iniziali:

$$1.4) \quad \begin{cases} \theta_2(t=0) = -5^\circ, \dot{\theta}_2(t=0) = 0.0 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ \theta_3(t=0) = -15^\circ, \dot{\theta}_3(t=0) = 0.0 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ \theta_4(t=0) = -25^\circ, \dot{\theta}_4(t=0) = 0.0 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{cases}$$

2. Richiami di Meccanica Analitica. Riporto qui quella parte della meccanica analitica a cui ci si può riferire con il nome di *metodologia dei moltiplicatori di Lagrange*. Lo scopo di questa trattazione è quello di rimaneggiare il sistema fondamentale della dinamica in modo da ottenere un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine in cui non siano presenti le reazioni vincolari e che sia di agevole integrazione per via numerica.

Assegnato un meccanismo piano costituito da n corpi rigidi si assuma per il generico corpo j -mo che

- F_{xj}, F_{yj} sono le componenti della risultante della sollecitazione effettiva attiva;
- M_{Gj}^E è il momento risultante della sollecitazione effettiva esterna, rispetto al polo G_j ;
- M_{Gj}^V è il momento risultante della sollecitazione vincolare, rispetto al polo G_j ;
- R_{xj}, R_{yj} sono le componenti della risultante della sollecitazione reattiva;
- m_j è la massa;
- I_{Gj} è il momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrale ortogonale al piano del meccanismo;
- x_{Gj}, y_{Gj} sono le coordinate del baricentro;
- θ_j è l'angolo che definisce la rotazione del corpo.

Allora scrivendo il sistema fondamentale della dinamica per ciascun corpo rigido si ha

$$2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{x1} + R_{x1} = m_1 \ddot{x}_{G1} \\ F_{y1} + R_{y1} = m_1 \ddot{y}_{G1} \\ M_{G1}^E + M_{G1}^V = I_{G1} \ddot{\theta}_1 \\ \dots \\ F_{xn} + R_{xn} = m_n \ddot{x}_{Gn} \\ F_{yn} + R_{yn} = m_n \ddot{y}_{Gn} \\ M_{Gn}^E + M_{Gn}^V = I_{Gn} \ddot{\theta}_n \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{G1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_{G1} \\ \ddot{y}_{G1} \\ \ddot{\theta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{G1}^E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ M_{G1}^V \end{pmatrix} \\ \dots \\ \begin{bmatrix} m_n & 0 & 0 \\ 0 & m_n & 0 \\ 0 & 0 & I_{Gn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_{Gn} \\ \ddot{y}_{Gn} \\ \ddot{\theta}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{xn} \\ F_{yn} \\ M_{Gn}^E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{xn} \\ R_{yn} \\ M_{Gn}^V \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Se ora facciamo -per il corpo j -mo- le seguenti posizioni

- $[M_j] = \begin{bmatrix} m_j & 0 & 0 \\ 0 & m_j & 0 \\ 0 & 0 & I_{Gj} \end{bmatrix} \leftarrow$ *matrice delle masse*
- $\{\ddot{q}_j\} = \{\ddot{x}_{Gj} \quad \ddot{y}_{Gj} \quad \ddot{\theta}_j\}^T \leftarrow$ *vettore delle derivate seconde delle coordinate*
- $\{F_j\} = \{F_{jx} \quad F_{jy} \quad M_{jG}^E\}^T \leftarrow$ *vettore delle azioni effettive esterne*
- $\{R_j\} = \{R_{jx} \quad R_{jy} \quad M_{jG}^V\}^T \leftarrow$ *vettore delle reazioni vincolari*

possiamo riscrivere il sistema 2.1 nel seguente modo

$$2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} [M_1]\{\ddot{q}_1\} = \{F_1\} + \{R_1\} \\ [M_2]\{\ddot{q}_2\} = \{F_2\} + \{R_2\} \\ \dots \\ [M_n]\{\ddot{q}_n\} = \{F_n\} + \{R_n\} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} [M_1] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [M_2] & \dots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \dots & [M_n] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{\ddot{q}_1\} \\ \{\ddot{q}_2\} \\ \dots \\ \{\ddot{q}_n\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \dots \\ \{F_n\} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \{R_1\} \\ \{R_2\} \\ \dots \\ \{R_n\} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Facendo ancora le posizioni

$$2.3) \quad [M] = \begin{bmatrix} [M_1] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [M_2] & \dots & [0] \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ [0] & [0] & \dots & [M_n] \end{bmatrix}$$

$$2.4) \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \dots \\ \{F_n\} \end{Bmatrix}$$

$$2.5) \quad \{R\} = \begin{Bmatrix} \{R_1\} \\ \{R_2\} \\ \dots \\ \{R_n\} \end{Bmatrix}$$

$$2.6) \quad \{\ddot{q}\} = \begin{Bmatrix} \{\ddot{q}_1\} \\ \{\ddot{q}_2\} \\ \dots \\ \{\ddot{q}_n\} \end{Bmatrix}$$

il sistema 2.2 si scriverà

$$2.7) \quad [M]\{\ddot{q}\} = \{F\} + \{R\}$$

3. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Vediamo ora come il metodo dei moltiplicatori di Lagrange permette di eliminare le reazioni vincolari dalla 2.7. Il lavoro virtuale relativo alla sollecitazione vincolare per il corpo *j*-mo si scrive:

$$3.1) \quad \delta L_j^V = R_{jx} \dot{x}_{Gj} dt + R_{jy} \dot{y}_{Gj} dt + M_{jG}^V \dot{\theta}_j dt = \begin{Bmatrix} R_{xj} \\ R_{yj} \\ M_{Gj}^V \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_{Gj} \\ \dot{y}_{Gj} \\ \dot{\theta}_j \end{Bmatrix} dt = 0$$

Per il meccanismo complessivo si ha allora

$$3.2) \quad \sum_{j=1}^n \delta L_j^V = 0 \Leftrightarrow \{R\} \cdot \{\dot{q}\} dt = 0$$

Consideriamo adesso le equazioni di vincolo e operiamone uno sviluppo in serie di Taylor del primo ordine di punto iniziale $\{\bar{q}\}$, essendo questa una configurazione compatibile con i vincoli:

$$3.3) \quad \begin{cases} \psi_1(q) = \psi_1(\bar{q}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_1}{\partial q_j} dq_j + o\left(\sqrt{dq_1^2 + dq_2^2 + \dots + dq_n^2}\right) \\ \psi_2(q) = \psi_2(\bar{q}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_2}{\partial q_j} dq_j + o\left(\sqrt{dq_1^2 + dq_2^2 + \dots + dq_n^2}\right) \\ \dots \\ \psi_p(q) = \psi_p(\bar{q}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_p}{\partial q_j} dq_j + o\left(\sqrt{dq_1^2 + dq_2^2 + \dots + dq_n^2}\right) \end{cases}$$

Si può osservare però che se $\{\bar{q}\}$ è una configurazione compatibile con i vincoli, allora deve risultare $\{\psi(\bar{q})\} = \{0\}$; non solo, se il sistema di spostamenti virtuali è compatibile con i vincoli deve essere anche vero che $\{\psi(q)\} = \{0\}$. Dunque la 2.10 si riscrive

$$3.4) \quad [\psi_q]\{\dot{q}\} dt + \left\{ o\left(\sqrt{dq_1^2 + dq_2^2 + \dots + dq_n^2}\right) \right\} = 0 \Leftrightarrow [\psi_q]\{\dot{q}\} + \frac{\left\{ o\left(dt \sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dots + \dot{q}_n^2}\right) \right\}}{dt} = 0$$

Al limite per $dt \rightarrow 0$ si ha infine

$$3.5) \quad [\psi_q]\{\dot{q}\} = 0 \Leftrightarrow [\psi_q]\{\dot{q}\}dt = 0 \Leftrightarrow [\psi_q]\{\partial q\} = 0$$

Operando il partizionamento delle coordinate indicando con $\{u\}$ quelle dipendenti e con $\{v\}$ quelle indipendenti, allora si ha

$$3.6) \quad [\psi_u]\{\partial u\} + [\psi_v]\{\partial v\} = 0 \Leftrightarrow [\psi_u]\{\partial u\} = -[\psi_v]\{\partial v\}$$

D'altra parte -operando la stessa partizione nel vettore delle reazioni vincolari- la 3.2 può essere scritta come segue

$$3.7) \quad (\{R_u\}^T + \{R_v\}^T) \begin{Bmatrix} \{\delta u\} \\ \{\delta v\} \end{Bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \{R_u\}^T \{\delta u\} = -\{R_v\}^T \{\delta v\}$$

Le 3.6, 3.7 possono essere associate nel seguente sistema lineare

$$3.8) \quad \begin{bmatrix} [\psi_u] \\ \{R_u\}^T \end{bmatrix} \{\delta u\} = - \begin{bmatrix} [\psi_v] \\ \{R_v\}^T \end{bmatrix} \{\delta v\}$$

Si consideri ora che se $[\psi_u]$ è non singolare allora la matrice a primo membro della 3.8 ha righe L.D.; in particolare la riga $p+1$ -ma può essere scritta come combinazione lineare delle altre, ovvero sussiste la relazione

$$\{R_u\}^T = (-\lambda_1) \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial u_p} \end{pmatrix} + (-\lambda_2) \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \psi_2}{\partial u_p} \end{pmatrix} + \dots + (-\lambda_p) \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_p}{\partial u_1} & \frac{\partial \psi_p}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \psi_p}{\partial u_p} \end{pmatrix}$$

ovvero

$$3.9) \quad \{R_u\}^T = -\{\lambda\}^T [\psi_u] \Leftrightarrow \{R_u\} = -[\psi_u]^T \{\lambda\}$$

Sostituendo la 3.9 nella 3.7 abbiamo poi

$$3.10) \quad -\{\lambda\}^T [\psi_u] \{\delta u\} = -\{R_v\}^T \{\delta v\}$$

Sostituendo ora la 3.6 nella 3.10 abbiamo

$$\{\lambda\}^T [\psi_v] \{\partial v\} = -\{R_v\}^T \{\delta v\} \Leftrightarrow (\{\lambda\}^T [\psi_v] + \{R_v\}^T) \{\partial v\} = \{0\}$$

Poiché questa relazione deve essere valida per ogni sistema di spostamenti virtuali congruenti, segue che

$$3.11) \quad \{\lambda\}^T [\psi_v] = -\{R_v\}^T \Leftrightarrow \{R_v\} = -[\psi_v]^T \{\lambda\}$$

Associando le 3.9, 3.11 si ha in fine

$$3.12) \quad \begin{Bmatrix} \{R_u\} \\ \{R_v\} \end{Bmatrix} = -([\psi_u]^T + [\psi_v]^T) \{\lambda\} \Leftrightarrow \{R\} = -[\psi_q]^T \{\lambda\}$$

4. Problema dinamico di indice differenziale tre. Sostituendo la 3.12 nella 2.7 abbiamo

$$4.1) \quad [M]\{\ddot{q}\} + [\psi_q]^T \{\lambda\} = \{F\}$$

Pertanto, associando la 4.1 con le equazioni di vincolo, si ottiene il sistema che risolve il problema dinamico diretto:

$$4.2) \quad \begin{cases} [M]\{\ddot{q}\} + [\psi_q]^T \{\lambda\} = \{F\} \\ \{\psi(q, t)\} = 0 \end{cases} \leftarrow \text{problema di indice differenziale tre}$$

5. Partizionamento delle coordinate. Operiamo ora il già citato partizionamento delle coordinate (paragrafo 3) nel sistema 4.2. In particolare riordinando la matrice d'inerzia 2.3 secondo tale partizionamento si ottiene la matrice

$$5.1) \quad [M] = \begin{bmatrix} [M^{uu}] & [M^{uv}] \\ [M^{vv}] & [M^{vv}] \end{bmatrix}$$

dove $[M^{uv}] = [M^{vu}] = [0]$ mentre $[M^{uu}]$ contiene sulla diagonale principale i parametri inerziali relativi alle coordinate dipendenti e $[M^{vv}]$ contiene quelli relativi alle coordinate indipendenti. Si riordina e partiziona anche il vettore 2.4, ponendo

$$5.2) \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} \{F_u\} \\ \{F_v\} \end{Bmatrix}$$

Con ciò la prima delle 4.2 si scrive

$$\begin{bmatrix} [M^{uu}] & [M^{uv}] \\ [M^{vv}] & [M^{vv}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}\} \\ \{\ddot{v}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\psi_u]^T \\ [\psi_v]^T \end{bmatrix} \{\lambda\} = \begin{Bmatrix} \{F_u\} \\ \{F_v\} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$5.3) \quad \begin{cases} [M^{uu}]\{\ddot{u}\} + [\psi_u]^T \{\lambda\} = \{F_u\} \\ [M^{vv}]\{\ddot{v}\} + [\psi_v]^T \{\lambda\} = \{F_v\} \end{cases}$$

Dalla prima si ricavano i moltiplicatori di Lagrange

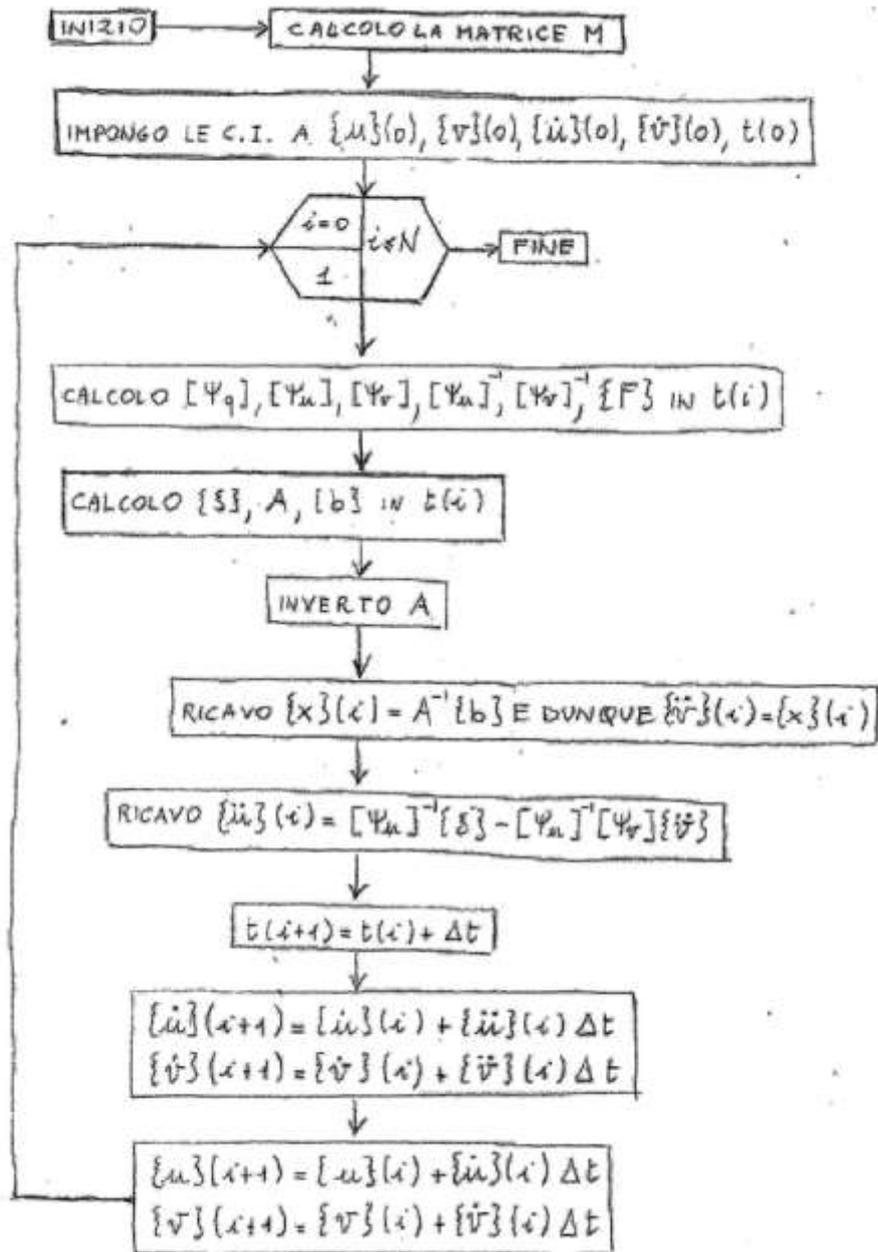
$$5.4) \quad \{\lambda\} = ([\psi_u]^T)^{-1}(\{F_u\} - [M^{uu}]\{\ddot{u}\})$$

che sostituiti nella seconda porgono

$$5.5) \quad [M^{vv}]\{\ddot{v}\} + [\psi_v]^T ([\psi_u]^T)^{-1}(\{F_u\} - [M^{uu}]\{\ddot{u}\}) = \{F_v\}$$

Adesso -per eliminare nella 5.5 le derivate seconde delle coordinate dipendenti- si ripercorra l'analisi cinematica del secondo ordine con il metodo delle equazioni di vincolo. Per vincoli indipendenti dal tempo si ha

$$\begin{aligned} \{\psi(q)\} = \{0\} &\Rightarrow [\psi_q]\{\dot{q}\} = \{0\} \Rightarrow \frac{d[\psi_q]}{dt}\{\dot{q}\} + [\psi_q]\{\ddot{q}\} = \{0\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow [\psi_q]\{\ddot{q}\} = -\frac{d[\psi_q]}{dt}\{\dot{q}\} \Rightarrow [\psi_u]\{\ddot{u}\} = -[\psi_v]\{\ddot{v}\} - \frac{d[\psi_q]}{dt}\{\dot{q}\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{\ddot{u}\} = -[\psi_u]^{-1} \left([\psi_v]\{\ddot{v}\} + \left(([\psi_q]\{\dot{q}\})_u \right) \{\dot{u}\} + \left(([\psi_q]\{\dot{q}\})_v \right) \{\dot{v}\} \right) \Rightarrow \end{aligned}$$



$$5.6) \quad \begin{cases} \{\ddot{u}\} = -[\psi_u]^{-1}([\psi_v]\{\ddot{v}\} - \{\xi\}) \\ \{\xi\} = -\left([\psi_q]\{\dot{q}\}\right)_u \{\dot{u}\} + \left([\psi_q]\{\dot{q}\}\right)_v \{\dot{v}\} \end{cases}$$

Sostituendo la prima delle 5.6 nella 5.5 si ha

$$\begin{aligned} & [M^{vv}]\{\ddot{v}\} + [\psi_v]^T([\psi_u]^T)^{-1}(\{F_u\} + [M^{uu}][\psi_u]^{-1}([\psi_v]\{\ddot{v}\} - \{\xi\})) = \{F_v\} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow [M^{vv}]\{\ddot{v}\} + [\psi_v]^T([\psi_u]^T)^{-1}\{F_u\} + [\psi_v]^T([\psi_u]^T)^{-1}[M^{uu}][\psi_u]^{-1}[\psi_v]\{\ddot{v}\} - \\ & \quad - [\psi_v]^T([\psi_u]^T)^{-1}[M^{uu}][\psi_u]^{-1}\{\xi\} = \{F_v\} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow ([M^{vv}] + [\psi_v]^T([\psi_u]^T)^{-1}[M^{uu}][\psi_u]^{-1}[\psi_v])\{\ddot{v}\} + \\ & \quad + [\psi_v]^T([\psi_u]^T)^{-1}(\{F_u\} - [M^{uu}][\psi_u]^{-1}\{\xi\}) = \{F_v\} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$5.7) \quad ([M^{vv}] + [\psi_v]^T([\psi_u]^T)^{-1}[M^{uu}][\psi_u]^{-1}[\psi_v])\{\ddot{v}\} = [\psi_v]^T([\psi_u]^T)^{-1}([M^{uu}][\psi_u]^{-1}\{\xi\} - \{F_u\}) + \{F_v\}$$

Abbiamo così ottenuto il sistema di equazioni differenziali del secondo ordine:

$$5.8) \quad [A]\{x\} = \{b\}$$

dove si sono fatte le posizioni

$$5.9) \quad \begin{cases} [A] = [M^{vv}] + [\psi_v]^T([\psi_u]^T)^{-1}[M^{uu}][\psi_u]^{-1}[\psi_v] \\ \{x\} = \{\ddot{v}\} \\ \{b\} = [\psi_v]^T([\psi_u]^T)^{-1}([M^{uu}][\psi_u]^{-1}\{\xi\} - \{F_u\}) + \{F_v\} \\ \{\xi\} = -\left([\psi_q]\{\dot{q}\}\right)_u\{\dot{u}\} - \left([\psi_q]\{\dot{q}\}\right)_v\{\dot{v}\} \end{cases}$$

Per integrare poi numericamente il sistema 5.8 si seguirà l'algoritmo indicato in figura.

6. Applicazione al pendolo triplo. Vediamo ora di calcolare le grandezze 5.9 nel caso del pendolo triplo qui in esame. Assumiamo come coordinate lagrangiane sovrabbondanti le

$$6.1) \quad \{q\} = \{\{u\}^T | \{v\}^T\}^T = \{x_2 \quad y_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad x_4 \quad y_4 | \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4\}^T$$

dove ho indicato anche la partizione scelta fra coordinate dipendenti e indipendenti. La relativa matrice di inerzia 5.1 si scrive allora

$$6.2) \quad [M] = \begin{bmatrix} [M^{uu}] & [M^{uv}] \\ [M^{vu}] & [M^{vv}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I_{G1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G3} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

mentre la partizione 6.3 del vettore delle forze si scrive

$$6.3) \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} \{F_u\} \\ \{F_v\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_{G1}^E \\ M_{G2}^E \\ M_{G3}^E \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \{F_u\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_1 g \\ 0 \\ -m_2 g \\ 0 \\ -m_3 g \end{Bmatrix} \\ \{F_v\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

Per le equazioni di vincolo si ricava dalla figura che

$$6.4) \quad \{\psi(q)\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 - x_2 \\ \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 - y_2 \\ l_2 \cos \theta_2 + \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 - x_3 \\ l_2 \sin \theta_2 + \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 - y_3 \\ l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 + \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 - x_4 \\ l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 + \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 - y_4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

Per gli jacobiani si ha allora

$$6.5) \quad [\psi_u] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$6.6) \quad [\psi_v] = \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} \sin \theta_2 & 0 & 0 \\ \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 & -\frac{l_3}{2} \sin \theta_3 & 0 \\ -l_2 \sin \theta_2 & \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 & 0 \\ l_2 \cos \theta_2 & \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 & -\frac{l_4}{2} \sin \theta_4 \\ -l_2 \sin \theta_2 & -l_3 \sin \theta_3 & \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 \\ l_2 \cos \theta_2 & l_3 \cos \theta_3 & \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 \end{bmatrix}$$

Procedo adesso al calcolo di $\{\xi\}$ (definito nella seconda delle 5.6). Tuttavia -essendo probabilmente più veloce- calcolo tale vettore nella sua espressione equivalente $\{\xi\} = -\frac{d[\psi_q]}{dt} \{\dot{q}\}$. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{d[\psi_q]}{dt} &= \frac{d[[\psi_u] \quad [\psi_v]]}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ -\frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 & -\frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 & 0 \\ -l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 & -\frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 & -\frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4 \cos \theta_4 \\ -l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 & -\frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 & -\frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4 \cos \theta_4 \\ -l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 & -l_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 & -\frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 \\ -l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 & -l_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 & -\frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \{\xi\} &= - \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ -\frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 & -\frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 & 0 \\ -l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 & -\frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 & -\frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4 \cos \theta_4 \\ -l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 & -\frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 & -\frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4 \cos \theta_4 \\ -l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 & -l_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 & -\frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 \\ -l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 & -l_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 & -\frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 & \frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 & 0 \\ l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 & \frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 & \frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4 \cos \theta_4 \\ l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 & \frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 & \frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4 \cos \theta_4 \\ l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 & l_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 & \frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 \\ l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 & l_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 & \frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Quindi si conclude che

$$6.7) \quad \{\xi\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 \\ \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 \\ l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + \frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 \\ l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + \frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 \\ l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + l_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 + \frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4 \\ l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + l_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 + \frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4 \end{array} \right\}$$

Sostituendo le 6.2, 6.3, 6.5, 6.6, 6.7 nelle 5.9 e sostituendo a sua volta queste nel 5.8 si ottiene il sistema da integrare con le condizioni iniziali 1.4.

7. Il codice in Fortran. Per integrare il sistema 5.8 sono state scritte in Fortran le seguenti unità:

- *main_ese_14_b* è l'unità chiamante la quale si occupa di integrare il sistema 5.8;
- *mod_ese_14_b* è il modulo, il quale contiene i parametri inerziali e geometrici del problema, oltre alle seguenti subroutine:
 - *inverse* la quale si occupa di invertire la matrice *A*;
 - *pendolo* la quale disegna la configurazione del pendolo per ogni iterazione;
 - *energie* la quale disegna gli andamenti della en. cinetica, potenziale e totale.

Il diagramma di flusso non si discosta -se non in qualche dettaglio- da quello generale indicato nel paragrafo 5. Si precisa inoltre che

- l'integrazione copre un intervallo di 5 secondi;
- si operano *n* iterazioni, ovvero si è applicato un incremento temporale di $5/n$ secondi.

Per verificare la bontà dell'incremento temporale *h* utilizzato per integrare, il sistema 5.8 si può ricorrere all'espressione della energia totale del meccanismo, la quale deve conservarsi poiché ci troviamo in assenza di attrito.

L'energia potenziale del campo gravitazionale è data

$$\begin{aligned} \Pi &= - \int m_2 \vec{g} \cdot \vec{v}_{G2} dt - \int m_3 \vec{g} \cdot \vec{v}_{G3} dt - \int m_4 \vec{g} \cdot \vec{v}_{G4} dt = \\ &= - \int m_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} dt - \int m_3 \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix} dt - \int m_4 \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_4 \\ \dot{y}_4 \end{Bmatrix} dt = \\ &= m_2 g \int \dot{y}_2 dt + m_3 g \int \dot{y}_3 dt + m_4 g \int \dot{y}_4 dt = g(m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4) + C \end{aligned}$$

L'energia cinetica è invece data da

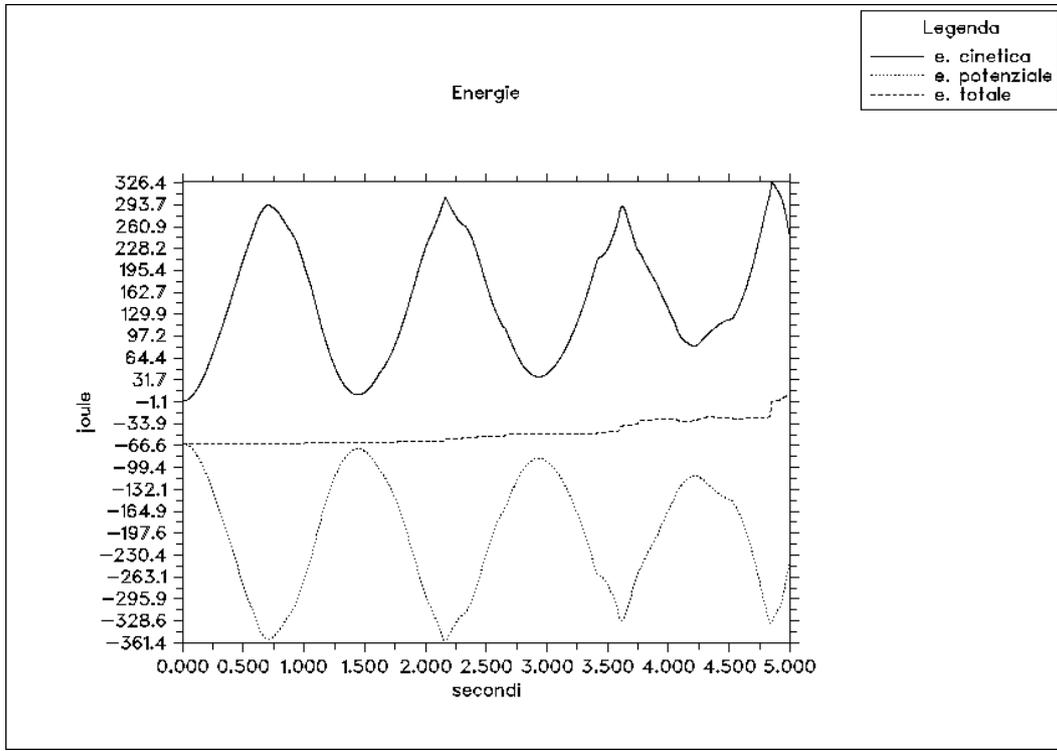
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_2 v_{G2}^2 + \frac{1}{2} I_{G2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_{G3}^2 + \frac{1}{2} I_{G3} \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_{G4}^2 + \frac{1}{2} I_{G4} \dot{\theta}_4^2 = \\ &= \frac{1}{2} (m_2 v_{G2}^2 + m_3 v_{G3}^2 + m_4 v_{G4}^2 + I_{G2} \dot{\theta}_2^2 + I_{G3} \dot{\theta}_3^2 + I_{G4} \dot{\theta}_4^2) \end{aligned}$$

Dunque l'energia totale del sistema è data da

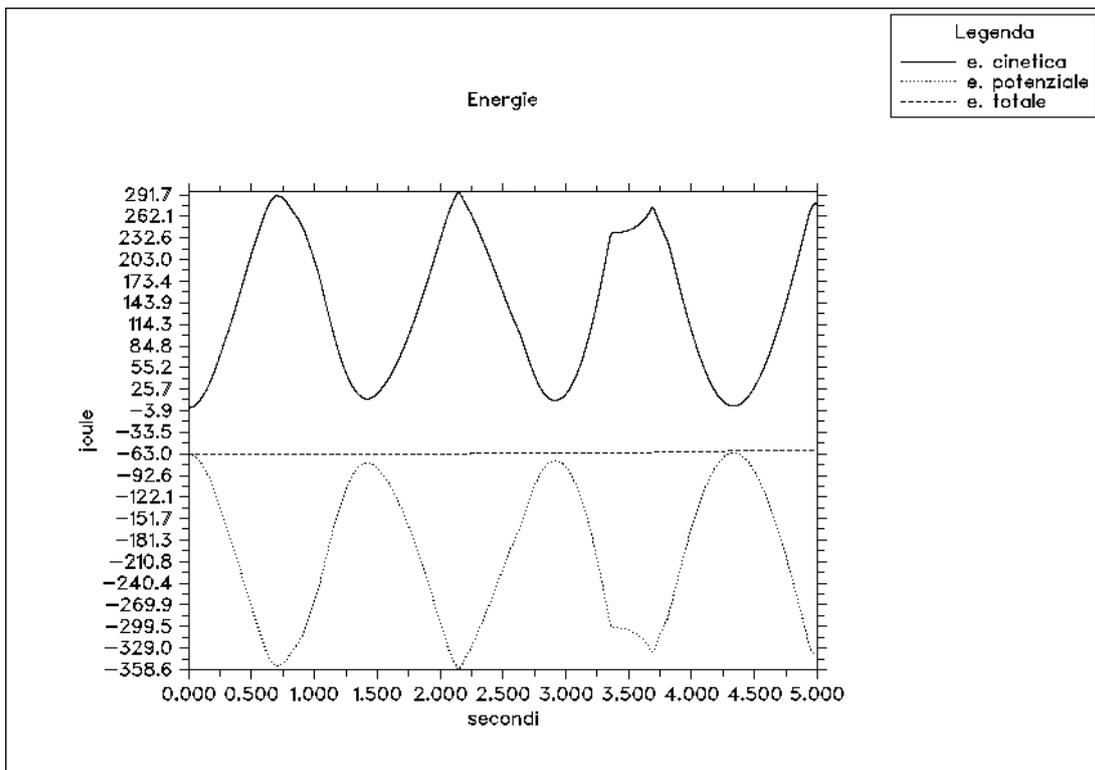
$$7.1) \quad E = \Pi + T = g(m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4) + \frac{1}{2} (m_2 v_{G2}^2 + m_3 v_{G3}^2 + m_4 v_{G4}^2 + I_{G2} \dot{\theta}_2^2 + I_{G3} \dot{\theta}_3^2 + I_{G4} \dot{\theta}_4^2)$$

dove la costante additiva arbitraria C è stata posta pari a zero. Ebbene per un numero di iterazioni

7.2) $n = 3000 \Rightarrow h = 1.666 \cdot 10^{-3}s$



le energie cinetica, potenziale gravitazionale e totale hanno gli andamenti indicati in figura. Si vede quanto tenda ad aumentare -al progredire del numero di iterazione- l'energia totale. Sembra dunque opportuno aumentare il numero di iterazioni.



Attraverso l'analisi grafica qui proposta si scopre che l'energia totale comincia a stabilizzarsi per un numero di iterazioni

$$7.3) \quad n = 8000 \Rightarrow h = 0.625 \cdot 10^{-3} s$$

in corrispondenza si ha l'andamento delle energie indicato in figura. Se si plotta un fotogramma ogni 10 iterazioni si ha un fotogramma ogni $h \cdot 10 = 0.625 \cdot 10^{-2} s$; se poi si usa un tempo di riproduzione del filmato di 0.06s si ha un'animazione rallentata di un fattore $\frac{0.06}{0.625} \cdot 10^{-2} = 9.6$.

8. Codice della unità chiamante.

```
PROGRAM main_ese_14_b

USE DISLIN      !libreria grafica
USE mod_ese_14_b !il modulo

!sezione dichiarativa

IMPLICIT NONE

!dichiaro gli array degli angoli e delle loro derivate

REAL(KIND=8),DIMENSION(0:n-1):: theta2, theta2_p, theta2_p_p
REAL(KIND=8),DIMENSION(0:n-1):: theta3, theta3_p, theta3_p_p
REAL(KIND=8),DIMENSION(0:n-1):: theta4, theta4_p, theta4_p_p

!dichiaro gli array delle coordinate dipendenti

REAL(KIND=8),DIMENSION(0:n-1):: x2, y2, x2_p, y2_p, x2_p_p, y2_p_p
REAL(KIND=8),DIMENSION(0:n-1):: x3, y3, x3_p, y3_p, x3_p_p, y3_p_p
REAL(KIND=8),DIMENSION(0:n-1):: x4, y4, x4_p, y4_p, x4_p_p, y4_p_p

!dichiaro gli array delle variabili dipendenti e indipendenti

REAL(KIND=8),DIMENSION(6,0:n-1):: u, u_p, u_p_p
REAL(KIND=8),DIMENSION(3,0:n-1):: v, v_p, v_p_p

!dichiaro i jacobiani

REAL(KIND=8), DIMENSION(6,6):: psi_u, inv_psi_u
REAL(KIND=8), DIMENSION(6,3):: psi_v

!dichiaro alcune matrici usate nel seguito

REAL(KIND=8), DIMENSION(6,6):: t_inv_psi_u
REAL(KIND=8), DIMENSION(3,6):: t_psi_v
REAL(KIND=8), DIMENSION(3,6):: t_molt
REAL(KIND=8), DIMENSION(6,6):: m_molt

!dichiaro gli array delle forze

REAL(KIND=8),DIMENSION(6):: Fu
REAL(KIND=8),DIMENSION(3):: Fv

!dichiaro le matrici di inerzia

REAL(KIND=8),DIMENSION(6,6):: Muu
```

```

REAL(KIND=8),DIMENSION(3,3):: Mvv

!dichiaro i momenti di inerzia delle aste

REAL:: IG2, IG3, IG4  !i momenti d'inerzia in kg per m^2

!dichiaro gli array del sistema risolvente

REAL(KIND=8),DIMENSION(3,3):: A, inv_A
REAL(KIND=8),DIMENSION(3):: b, b1, b2
REAL(KIND=8),DIMENSION(3):: x
REAL(KIND=8),DIMENSION(6):: csi

!dichiaro l'array del tempo

REAL(KIND=4), DIMENSION(0:n-1):: tempo

!dichiaro l'array della energia cinetica, potenziale e totale

REAL(KIND=4), DIMENSION(0:n-1):: T_2, T_3, T_4, T, P, E

!dichiaro l'indice del ciclo

INTEGER:: i

!indico una stringa che uso per chiudere il programma

CHARACTER(len=10):: chiusura

!sezione esecutiva

!calcolo h

h = intervallo/REAL(n-1)

WRITE(*,*) h

!calcolo i momenti di inerzia

IG2 = (1/12)*m2*l2**2
IG3 = (1/12)*m3*l3**2
IG4 = (1/12)*m4*l4**2

!inizializzo il vettore delle forze

Fu(1) = 0.
Fu(2) = (-1.)*m2*g
Fu(3) = 0.
Fu(4) = (-1.)*m3*g
Fu(5) = 0.
Fu(6) = (-1.)*m4*g

Fv = 0.

!inizializzo le matrici d'inerzia

Muu = 0.
Muu(1,1) = m2
Muu(2,2) = m2
Muu(3,3) = m3

```

Muu(4,4) = m3
Muu(5,5) = m4
Muu(6,6) = m4

Mvv = 0.
Mvv(1,1) = IG2
Mvv(2,2) = IG3
Mvv(3,3) = IG4

!impongo le condizioni iniziali

theta2(0) = theta2_zero
theta2_p(0) = theta2_p_zero
theta3(0) = theta3_zero
theta3_p(0) = theta3_p_zero
theta4(0) = theta4_zero
theta4_p(0) = theta4_p_zero

x2(0) = (12/2.)*COS(theta2(0))
y2(0) = (12/2.)*SIN(theta2(0))
x3(0) = 12*COS(theta2(0)) + (13/2.)*COS(theta3(0))
y3(0) = 12*SIN(theta2(0)) + (13/2.)*SIN(theta3(0))
x4(0) = 12*COS(theta2(0)) + 13*COS(theta3(0)) + (14/2.)*COS(theta4(0))
y4(0) = 12*SIN(theta2(0)) + 13*SIN(theta3(0)) + (14/2.)*SIN(theta4(0))

x2_p(0) = 0.
y2_p(0) = 0.
x3_p(0) = 0.
y3_p(0) = 0.
x4_p(0) = 0.
y4_p(0) = 0.

tempo(0) = 0.

!inizializzo i vettori delle coordinate

u(1,0) = x2(0)
u(2,0) = y2(0)
u(3,0) = x3(0)
u(4,0) = y3(0)
u(5,0) = x4(0)
u(6,0) = y4(0)

v(1,0) = theta2(0)
v(2,0) = theta3(0)
v(3,0) = theta4(0)

!calcolo lo jacobiano delle u

psi_u = 0.
psi_u(1,1) = -1.
psi_u(2,2) = -1.
psi_u(3,3) = -1.
psi_u(4,4) = -1.
psi_u(5,5) = -1.
psi_u(6,6) = -1.

inv_psi_u = psi_u

ciclo: DO i= 0, n-1, 1

!calcolo lo jacobiano di v

psi_v = 0.

psi_v(1,1) = (-1.)*(l2/2.)*SIN(theta2(i))
psi_v(2,1) = (l2/2.)*COS(theta2(i))
psi_v(3,1) = (-1.)*l2*SIN(theta2(i))
psi_v(4,1) = l2*COS(theta2(i))
psi_v(5,1) = (-1.)*l2*SIN(theta2(i))
psi_v(6,1) = l2*COS(theta2(i))

psi_v(3,2) = (-1.)*(l3/2.)*SIN(theta3(i))
psi_v(4,2) = (l3/2.)*COS(theta3(i))
psi_v(5,2) = (-1.)*l3*SIN(theta3(i))
psi_v(6,2) = l3*COS(theta3(i))

psi_v(5,3) = (-1.)*(l4/2.)*SIN(theta4(i))
psi_v(6,3) = (l4/2.)*COS(theta4(i))

!calcolo csi

csi(1) = (l2/2.)*(theta2_p(i)**2)*COS(theta2(i))
csi(2) = (l2/2.)*(theta2_p(i)**2)*SIN(theta2(i))
csi(3) = l2*(theta2_p(i)**2)*COS(theta2(i)) + (l3/2.)*(theta3_p(i)**2)*COS(theta3(i))
csi(4) = l2*(theta2_p(i)**2)*SIN(theta2(i)) + (l3/2.)*(theta3_p(i)**2)*SIN(theta3(i))
csi(5) = l2*(theta2_p(i)**2)*COS(theta2(i)) + l3*(theta3_p(i)**2)*COS(theta3(i)) +
(l4/2.)*(theta4_p(i)**2)*COS(theta4(i))
csi(6) = l2*(theta2_p(i)**2)*SIN(theta2(i)) + l3*(theta3_p(i)**2)*SIN(theta3(i)) +
(l4/2.)*(theta4_p(i)**2)*SIN(theta4(i))

!calcolo b

t_psi_v = TRANSPOSE(psi_v)
t_inv_psi_u = TRANSPOSE(inv_psi_u)
t_molt = MATMUL(t_psi_v,t_inv_psi_u)
m_molt = MATMUL(Muu,inv_psi_u)

b1 = MATMUL(t_molt,MATMUL(m_molt,csi))

b2 = MATMUL(t_molt,Fu)

b = b1 - b2 + Fv

!calcolo A

A = Mvv + MATMUL(t_molt,MATMUL(m_molt,psi_v))

!calcolo l'inversa di A

CALL inverse(A,inv_A,3)

!calcolo x

x = MATMUL(inv_A,b)

!calcolo le derivate seconde delle v e delle u

v_p_p(:,i) = x
u_p_p(:,i) = MATMUL((-1.)*inv_psi_u,(MATMUL(psi_v,v_p_p(:,i)) - csi))

!incremento il tempo

tempo(i+1) = tempo(i) + h

!integro una volta

u_p(:,i+1) = u_p(:,i) + u_p_p(:,i)*h

v_p(:,i+1) = v_p(:,i) + v_p_p(:,i)*h

!integro un'altra volta

u(:,i+1) = u(:,i) + u_p(:,i)*h

v(:,i+1) = v(:,i) + v_p(:,i)*h

!WRITE(*,*) i, u(:,i), v(:,i)

!assegno i valori alle coordinate lagrangiane

x2(i+1) = u(1,i+1)

y2(i+1) = u(2,i+1)

x3(i+1) = u(3,i+1)

y3(i+1) = u(4,i+1)

x4(i+1) = u(5,i+1)

y4(i+1) = u(6,i+1)

x2_p(i+1) = u_p(1,i+1)

y2_p(i+1) = u_p(2,i+1)

x3_p(i+1) = u_p(3,i+1)

y3_p(i+1) = u_p(4,i+1)

x4_p(i+1) = u_p(5,i+1)

y4_p(i+1) = u_p(6,i+1)

theta2(i+1) = v(1,i+1)

theta3(i+1) = v(2,i+1)

theta4(i+1) = v(3,i+1)

theta2_p(i+1) = v_p(1,i+1)

theta3_p(i+1) = v_p(2,i+1)

theta4_p(i+1) = v_p(3,i+1)

!calcolo l'energia cinetica

T_2(i) = (0.5)*(m2*(x2_p(i)**2) + (y2_p(i)**2)) + IG2*theta2_p(i)**2)

T_3(i) = (0.5)*(m3*(x3_p(i)**2) + (y3_p(i)**2)) + IG3*theta3_p(i)**2)

T_4(i) = (0.5)*(m4*(x4_p(i)**2) + (y4_p(i)**2)) + IG4*theta4_p(i)**2)

T(i) = T_2(i) + T_3(i) + T_4(i)

!calcolo l'energia potenziale gravitazionale

P(i) = g*(m2*y2(i) + m3*y3(i) + m4*y4(i))

!calcolo l'energia totale

E(i) = T(i) + P(i)

WRITE(*,*) E(i)

END DO ciclo

```

!disegno i fotogrammi del pendolo

fotogrammi: DO i = 0, n-1, 1

CALL pendolo (x2, y2, x3, y3, x4, y4, theta2, theta3, theta4,i)

END DO fotogrammi

!disegno l'andamento delle energie

CALL energie (T, P, E, tempo)

!comando di chiusura

WRITE (*,*)"Per chiudere il programma premi una lettera qualunque."
WRITE (*,*)"Tutti i dati andranno persi."
READ (*,*) chiusura

STOP

END PROGRAM main_ese_14_b

```

9. Codice del modulo.

```

MODULE mod_ese_14_b

!sezione dichiarativa

IMPLICIT NONE

!dichiaro i parametri inerziali e geometrici del pendolo

REAL(KIND=8), PARAMETER:: m2 = 10.0   !le masse in kg
REAL(KIND=8), PARAMETER:: m3 = 7.0
REAL(KIND=8), PARAMETER:: m4 = 10.0
REAL(KIND=8), PARAMETER:: l2 = 1.0   !le lunghezze
REAL(KIND=8), PARAMETER:: l3 = 0.7
REAL(KIND=8), PARAMETER:: l4 = 1.0
REAL(KIND=8), PARAMETER:: g = 9.807 !accelerazione gravitazionale
REAL(KIND=8), PARAMETER:: pi = 3.1415 !una approssimazione del pi greco

!dichiaro le condizioni iniziali

REAL(KIND=8), PARAMETER:: theta2_zero = (-5)*(pi/180)
REAL(KIND=8), PARAMETER:: theta3_zero = (-15)*(pi/180)
REAL(KIND=8), PARAMETER:: theta4_zero = (-25)*(pi/180)

REAL(KIND=8), PARAMETER:: theta2_p_zero = 0.
REAL(KIND=8), PARAMETER:: theta3_p_zero = 0.
REAL(KIND=8), PARAMETER:: theta4_p_zero = 0.

!dichiaro il numero di iterazioni, l'intervallo e l'incremento temporale

INTEGER, PARAMETER:: n      = 8000
REAL(KIND=8), PARAMETER :: intervallo = 5.
REAL(KIND=8)          :: h

!scrivo le subroutine

```

CONTAINS

```
!-----  
subroutine inverse(a,c,n)  
!=====
```

! Inverse matrix
! Method: Based on Doolittle LU factorization for $Ax=b$
! Alex G. December 2009

```
!-----  
! input ...  
! a(n,n) - array of coefficients for matrix A  
! n - dimension  
! output ...  
! c(n,n) - inverse matrix of A  
! comments ...  
! the original matrix a(n,n) will be destroyed  
! during the calculation  
!=====
```

implicit none
integer n
double precision a(n,n), c(n,n)
double precision L(n,n), U(n,n), b(n), d(n), x(n)
double precision coeff
integer i, j, k

! step 0: initialization for matrices L and U and b
! Fortran 90/95 allows such operations on matrices
L=0.0
U=0.0
b=0.0

! step 1: forward elimination
do k=1, n-1
 do i=k+1, n
 coeff=a(i,k)/a(k,k)
 L(i,k) = coeff
 do j=k+1, n
 a(i,j) = a(i,j)-coeff*a(k,j)
 end do
 end do
end do

! Step 2: prepare L and U matrices
! L matrix is a matrix of the elimination coefficient
! + the diagonal elements are 1.0
do i=1, n
 L(i,i) = 1.0
end do
! U matrix is the upper triangular part of A
do j=1, n
 do i=1, j
 U(i,j) = a(i,j)
 end do
end do

! Step 3: compute columns of the inverse matrix C
do k=1, n
 b(k)=1.0
 d(1) = b(1)

```

! Step 3a: Solve  $Ld=b$  using the forward substitution
do i=2,n
  d(i)=b(i)
  do j=1,i-1
    d(i) = d(i) - L(i,j)*d(j)
  end do
end do
! Step 3b: Solve  $Ux=d$  using the back substitution
x(n)=d(n)/U(n,n)
do i = n-1,1,-1
  x(i) = d(i)
  do j=n,i+1,-1
    x(i)=x(i)-U(i,j)*x(j)
  end do
  x(i) = x(i)/u(i,i)
end do
! Step 3c: fill the solutions x(n) into column k of C
do i=1,n
  c(i,k) = x(i)
end do
b(k)=0.0
end do
end subroutine inverse

```

!-----

```

SUBROUTINE pendolo (x2, y2, x3, y3, x4, y4, theta2, theta3, theta4, i)

```

```

!sezione dichiarativa

```

```

!dichiaro gli argomenti fittizi

```

```

!dichiaro gli array delle coordinate

```

```

REAL(KIND=8),INTENT(IN),DIMENSION(0:n-1):: x2, y2, x3, y3, x4, y4, theta2, theta3, theta4

```

```

!dichiaro il numero del fotogramma

```

```

INTEGER, INTENT(IN):: i

```

```

!dichiaro le variabili locali

```

```

!coordinate degli estremi delle aste

```

```

REAL(KIND=4):: xB, yB, xC, yC, xD, yD

```

```

!stringa usata per la legenda

```

```

CHARACTER(len=30)::stringa

```

```

!sezione esecutiva

```

```

!imposto il tipo di file

```

```

CALL METAFL ('bmp')           !indico il formato dell'output
CALL BMPMOD (25000,'meter','resolution') !risoluzioneformato .bmp

```

```

!imposto la pagina

```

```

CALL SCRMOD ('revers') !scritta nera su fondo bianco

```

```
CALL DISINI      !richiama alcune impostazioni di default
CALL PAGERA     !traccio un bordo per il piano xy
CALL DUPLX      !font a doppio spessore
```

!imposto gli assi

```
CALL AXSPOS (300,1800)           !coordinate angolo basso sinistra
CALL AXSLEN (2000,2000)         !lunghezza dei due assi in pixel
CALL NAME ('metri','x')         !nome delle ascisse
CALL NAME ('metri','y')         !nome delle ordinate
CALL GRAF (-2.7,2.7,-2.7,0.4,-2.7,2.7,-2.7,0.4) !imposto gli estremi degli assi e l'intervallo
CALL XAXGIT                     !traccio la retta x=0
CALL YAxBGIT                    !traccio la retta y=0
CALL NAME ('metri','x')         !nome delle ascisse
CALL NAME ('metri','y')         !nome delle ordinate
```

!imposto il titolo

```
CALL TITLIN ("Pendolo triplo",1) !prima riga del titolo
CALL TITLE                               !stampa il titolo di cui sopra
CALL DASH                                !tratteggio per gli assi coordinati
CALL LINWID (5)   !spessore delle linee
CALL MYLINE (1,1) !linee continue
```

!assegno le coordinate dei punti estremi

```
xB = l2*COS( theta2(i) )
yB = l2*SIN( theta2(i) )
xC = xB + l3*COS( theta3(i) )
yC = yB + l3*SIN( theta3(i) )
xD = xC + l4*COS( theta4(i) )
yD = yC + l4*SIN( theta4(i) )
```

!disegno il pendolo e la reazione vincolare istante per istante

!traccio le cerniere

```
CALL RLCIRC (0.,0.,0.06)
CALL RLCIRC (xB,yB,0.06)
CALL RLCIRC (xC,yC,0.06)
```

!traccio le barre

```
CALL RLINE (0., 0., xB, yB)
CALL RLINE (xB, yB, xC, yC)
CALL RLINE (xC, yC, xD, yD)
```

CALL DISFIN

END SUBROUTINE pendolo

!-----

SUBROUTINE energie (T, P, E, tempo)

!sezione dichiarativa

!dichiaro gli argomenti fittizi

!dichiaro l'array della funzione e quello del tempo

```

REAL,INTENT(IN),DIMENSION(0:n-1):: T, P, E, tempo

!dichiaro le variabili locali

!dichiaro la stringa usata per la leggenda

CHARACTER(len=13):: stringa

!dichiaro i valori massimi e minimi delle funzioni rx, ry, r

REAL:: max_T, max_P, max_E
REAL:: min_T, min_P, min_E

!dichiaro il valore massimo dei massimi e minimo dei minimi

REAL:: max_tot
REAL:: min_tot

!sezione esecutiva

!calcolo il valore massimo e minimo delle funzioni

max_T = MAXVAL (T(0:n-1))
min_T = MINVAL (T(0:n-1))
max_P = MAXVAL (P(0:n-1))
min_P = MINVAL (P(0:n-1))
max_E = MAXVAL (E(0:n-1))
min_E = MINVAL (E(0:n-1))

!calcolo il valore massimo dei massimi e il minimo dei minimi

max_tot = MAX(max_T, max_P, max_E)
min_tot = MIN(min_T, min_P, min_E)

!imposto il formato del file

CALL METAFL ('bmp')           !indico il formato dell'output
CALL BMPMOD (25000,'meter','resolution') !risoluzione del formato .bmp

!imposto la pagina

CALL SCRMOD ('revers')       !scritta nera su fondo bianco
CALL DISINI                   !richiama alcune impostazioni di default
CALL PAGERA                   !traccio un bordo per il piano xy
CALL DUPLX                    !font a doppio spessore

!imposto gli assi x,y

CALL AXSPOS (900,2700)        !coordinate angolo basso sinistra
CALL AXSLEN (1700,1300)      !lunghezza dei due assi in pixel
CALL NAME ('secondi','x')    !nome delle ascisse
CALL NAME ('joule','y')      !nome delle ordinate
CALL LABDIG (3,'x')          !chiedo 3 cifre decimali per l'asse x

!inizio, fine, intervallo assi x, y

CALL GRAF (0.0,5.,0.0,5./10.,min_tot,max_tot,min_tot,max_tot/10.)

!traccio le curve

```

```

CALL CHNCRV ('line')      !usa una linea diversa per ogni curva
CALL CURVE (tempo, T, n)  !traccio rx in funzione del tempo
CALL CURVE (tempo, P, n)  !traccio ry in funzione del tempo
CALL CURVE (tempo, E, n)  !traccio r in funzione del tempo

!imposto il titolo

CALL TITLIN ('Energie',1)      !prima riga del titolo
CALL TITLE                    !stampa il titolo di cui sopra

!imposto la legenda

CALL LEGINI (stringa,3,13)     !variabile di carattere, righe, lunghezza
CALL LEGLIN (stringa,'e. cinetica',1) !prima riga della legenda
CALL LEGLIN (stringa,'e. potenziale',2) !seconda riga della legenda
CALL LEGLIN (stringa,'e. totale',3)   !terza riga della legenda
CALL LEGTIT ('Legenda')        !titolo legenda
CALL LEGEND (stringa,3)       !posizine in alto a destra

CALL DISFIN

END SUBROUTINE energie

!-----
END MODULE mod_ese_14_b

```

INDICE

Dinamica dell'elemento	1
Configurazione del quadrilatero articolato	27
Cinematica del primo ordine del manovellismo	49
Cinematica del secondo ordine del manovellismo	54
Cinematica di una camma	62
Cinematica di una guida Fairbairn	72
Cinematica di una guida Fairbairn	79
Cinematica di un quadrilatero articolato	85
Cicloide	116
Evolvente	134
Statica piana	151
Dinamica di una camma	163
Ruota su piano inclinato	188
Ruote dentate	194
Oscillatore libero smorzato	198
Dinamica del pendolo composto	213
Dinamica del pendolo triplo	237