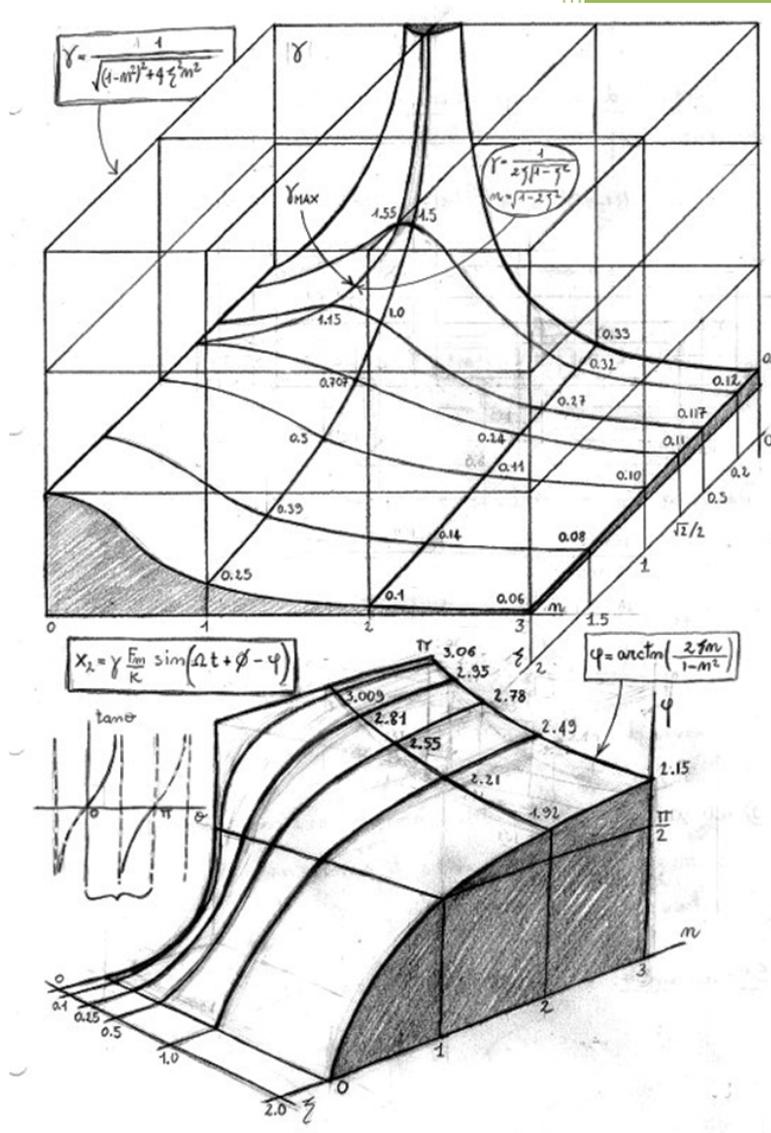


2014

MECCANICA DELLE VIBRAZIONI

Sistemi ad un grado di libertà



Paolo Maccallini

Teoria

Capitolo 1. Introduzione alle vibrazioni	
1.1. Concetti preliminari	1
1.2. Cinematica della vibrazione libera	6
1.3. Composizione di moti armonici	9
1.4. Battimenti	11

Capitolo 2. Vibrazioni libere per sistemi a un grado di libertà	
2.1. Definizione	16
2.2. Equazioni del moto: deduzione newtoniana	17
2.3. Equazione del moto: deduzione con criterio energetico	21
2.4. Vibrazioni libere naturali e numeri complessi	23
2.5. Esempio numerico	26
2.6. Pulsazione naturale: metodo del Rayleigh	30
2.7. Sistema massa-cinghia-puleggia	33
2.8. Pendolo semplice	38

Capitolo 3. Vibrazioni libere smorzate per sistemi a un grado di libertà	
3.1. Smorzamento viscoso	50
3.2. Smorzamento viscoso con $\zeta > 1$	52
3.3. Smorzamento viscoso con $\zeta = 1$	53
3.4. Esempio numerico di moto smorzato aperiodico per $\zeta = 1$	55
3.5. Esempio numerico di moto smorzato aperiodico per $\zeta > 1$	58
3.6. Smorzamento viscoso con $\zeta < 1$	63
3.7. Decremento logaritmico	70

Capitolo 4. Vibrazioni forzate per sistemi a un grado di libertà	
4.1. Introduzione	73
4.2. Equazione newtoniana	76
4.3. Risonanza	79

Capitolo 5. Vibrazioni forzate e smorzate per sistemi a un grado di libertà	
5.1. Equazione newtoniana	84
5.2. Riepilogo sulle oscillazioni forzate	86
5.3. Procedimento analitico	88
5.4. Condizioni al contorno per $\zeta \in]0,1[$	91
5.5. Condizioni al contorno per $\zeta = 1$	94

5.6. Condizioni al contorno per $\zeta > 1$	95
5.7. Riepilogo sulle oscillazioni forzate e smorzate	99
5.8. Procedimento vettoriale	101
5.9. Fasori	103
5.10. Coefficiente di amplificazione dinamica	107
5.11. Sfasamento	111
5.12. Regione quasi statica (o sottocritica)	112
5.13. regione di risonanza (o critica)	116
5.14. Regione sismografica (o ipercritica)	117
5.15. Metodo dei numeri complessi	119
5.16. Esempio numerico	124

Capitolo 6. Isolamento dalle vibrazioni	
6.1. Assenza di smorzamento	127
6.2. Presenza di smorzamento	132

Capitolo 7. Costanti elastiche equivalenti	
7.1. Elementi elastici in serie	139
7.2. Elementi elastici in parallelo	140
7.3. Molle in serie e in parallelo	141
7.4. Costante elastica equivalente per geometria complessa	142
7.5. Massa su trave incastrata	144
7.6. Massa su trave incastrata a geometria variabile	146
7.7. Anello flessibile	148
7.8. Molla elicoidale	155
7.9. Molla conica	166
7.10. Anello a rosetta	178
7.11. Trave appoggiata con tratto rinforzato	181
7.12. Telaio ad L	186
7.13. Trave appoggiata	187
7.14. Trave appoggiata con sbalzo	189
7.15. Trave tra incastro e appoggio	190
7.16. Trave incastrata su carrello con sbalzo	193
7.17. Trave a doppio incastro	195

Applicazioni

Capitolo 8. Applicazioni sulle oscillazioni libere	
8.1. Vibrazioni flessionali	199
8.2. Pulsazione naturale della molla elicoidale	201
8.3. Pulsazione naturale della molla conica	201
8.4. Trave con molla	211
8.5. Tubo a U	212
8.6. Serbatoio	215
8.7. Carrello	216
8.9. Rullio di una imbarcazione	220
8.10. Pendolo composto	222
8.11. Pendolo a semicerchio	225
8.12. Dondolo semicircolare	226
8.13. barra con sospensione bifilare	237
8.14. Molla pesante	244
8.15. Pendolo composto a barra	247
8.16. pendolo composto a barra con massa	247
8.17. Massa fra due cerniere	248
8.18. pendolo composto su asse inclinato	256
8.19. Pendolo torsionale, momento di inerzia	262
8.20. pendolo torsionale, modulo di elasticità tangenziale	264
8.21. pendolo torsionale, riepilogo	265
8.22. Pendoli torsionali in serie	266
8.23. Sistema con costanti elastiche in serie	269
8.24. Pendolo torsionale a quattro fili	274
8.25. Pendolo torsionale doppio	278
8.26. Pendolo torsionale doppio bi-materiale	287
Pendoli torsionali accoppiati con ruote dentate	291

Capitolo 9. Applicazioni sulle oscillazioni libere smorzate	
9.1. Primo esempio numerico	300
9.2. Sistema a due masse	304
9.3. Sistema a due molle con serie molla-smorzatore	306
9.4. Pendolo torsionale in fluido viscoso	312
9.5. Pendolo torsionale in fluido viscoso, calcolo del coef. di smorzamento	314
9.6. Pendolo invertito con molla e smorzatore	319
9.7. Pendolo invertito, dimensionamento dl perno	323

9.8. Massa con due molle in parallelo e smorzatore	332
--	-----

Capitolo 10. Applicazioni sulle oscillazioni forzate	
10.1. Sistema locomotiva-carro merci	334
10.2. Macchina ammortizzata con un pistone	347
10.3. Autocentrimento di un albero rotante con volano calettato in mezzeria	357
10.4. Sistema massa-molla con forzante periodica	362
10.5. Trave a doppio T sollecitata in mezzeria	368
10.6. Pendolo a torsione con coppia pulsante	371
10.7. Ancora sul sistema massa-molla con forzante periodica	374
10.8. Motore con massa sbilanciata	375
10.9. Pendolo con sostegno mobile	382
10.10. Pendolo con sostegno mobile e carico critico	386
10.11. Indicatore di pressione	387

Capitolo 11. Applicazioni sulle oscillazioni forzate e smorzate	
11.1. Motore con massa sbilanciata	391
11.2. Massa-molla con telaio oscillante	395
11.3. Massa-molla con smorzatore collegato elasticamente	396
11.4. Esempio numerico	400
11.5. Un pendolo torsionale smorzato	402
11.6. Massa sospesa	403
11.7. Sistema massa-molla	404
11.8. Pendolo da torsione	405
11.9. Sistema massa-molla-smorzatore	407
11.10. Pendolo di torsione	408
11.11. Massa-molla-smorzatore	409
11.12. Prima espressione alternativa per γ	410
11.13. Seconda espressione alternativa per γ	411
11.14. Smorzatore viscoso semplice	413
11.15. Smorzatore viscoso regolabile, configurazione ad assi coincidenti	419
11.16. Smorzatore viscoso regolabile, configurazione a condotti disassati	422

Capitolo 12. Applicazioni sull'isolamento dalle vibrazioni	
12.1. Ammortizzatore	424
12.2. Impianto frigorifero	426
12.3. Decremento logaritmico	431
12.4. Ancora sull'impianto frigorifero	432

12.5. Molle per l'impianto frigorifero	432
--	-----

Capitolo 13. Composizione di moti armonici	
13.1. Differenza di fase	440
13.2. Somma di moti armonici	441
13.3. Differenza di moti armonici	442
13.4. Somma di moti armonici con diversa pulsazione	444
13.5. Somma di moti armonici con stessa pulsazione	446

Appendici

Appendice I. Somma di potenze	
Somma di potenze nulle	449
Somma di quadrati	449
Somma di cubi	450

Appendice II. Calcolo di un momento di inerzia	
Momenti del segmento circolare	451
Primo integrale trigonometrico	459
Secondo integrale trigonometrico	461

Appendice III. Integrali ellittici	
Integrale ellittico di prima specie	463
Integrali riconducibili ad integrale ellittico di prima specie	468
Integrale ellittico di seconda specie	471

Appendice IV. Pendolo di Foucault	
Sistema di riferimento	473
Metodo energetico	474
Teorema dei moti relativi	489

Appendice V. Snellezza	
Definizione di snellezza	497
Snellezza e carico critico	497
Trave incastrata	498
Trave appoggiata	499
Trave fra incastro e carrello	499
Trave tra incastro e incastro	500

Carico critico e vibrazioni	500
Conclusione	500

Appendice VI. La matematica delle vibrazioni forzate smorzate	
Il modello matematico	502
Una soluzione particolare	502
Coefficiente di amplificazione dinamica	506
Sfasamento	506
L'integrale generale	509
Integrale generale per $\zeta = 0$ e $\Omega \neq \omega_n$	510
Integrale generale per $\zeta = 0$ e $\Omega = \omega_n$	511
Integrale generale per $\zeta \in]0,1[$	512
Integrale generale per $\zeta = 1$	513
Integrale generale per $\zeta > 1$	515
Tabella riassuntiva	516
Espressione alternativa di γ	518

Appendice VII. Fuso circolare	
Definizione	519
Area del fuso circolare	519
Cerchi con stesso raggio	520

Appendice VIII. Curve di estinzione	
Considerazioni sullo spostamento	523
Curve di estinzione	526
Esempio numerico	529

Appendice IX. Piano complesso e vibrazioni	
Numero complesso associato	531
Rappresentazione sul piano complesso	532
Derivazione	533
Applicazione alle vibrazioni forzate smorzate	534
Applicazione all'isolamento dalle vibrazioni	537

Capitolo uno. Introduzione alle vibrazioni

1.1. Concetti preliminari. Definisce le vibrazioni e espone alcuni esempi.

DEF. 1. VIBRAZIONE. È il movimento oscillatorio di un sistema meccanico intorno a una CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO, anche detta POSIZIONE NEUTRALE oppure POSIZIONE CENTRALE.

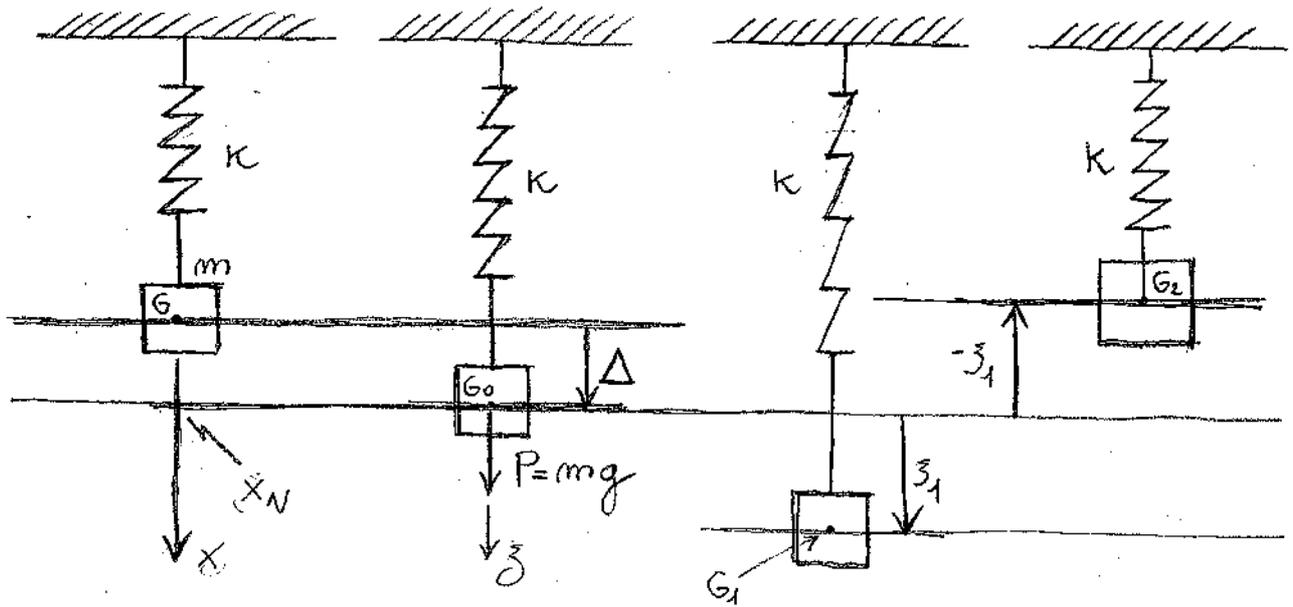
DEF. 2. CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO. È quella che un sistema meccanico assume se sottoposto alla sola forza peso e ad altri campi costanti.

DEF. 3. FORZE ECCITATRICI (O PERTURBATIVE). Sono le forze che generano e mantengono le vibrazioni.

DEF. 4. FORZE ECCITATRICI ALTERNATIVE. Sono forze eccitatrie che mantengono costante la direzione e variano il modulo.

DEF. 5. FORZE ECCITATRICI ROTANTI. Sono le forze eccitatrie che mantengono costante il modulo ma non la direzione.

OSSERVAZIONE 1.1. SISTEMA MASSA MOLLA. Illustra un semplice sistema vibrante. Una massa m concentrata è vincolata a muoversi lungo l'asse verticale x .

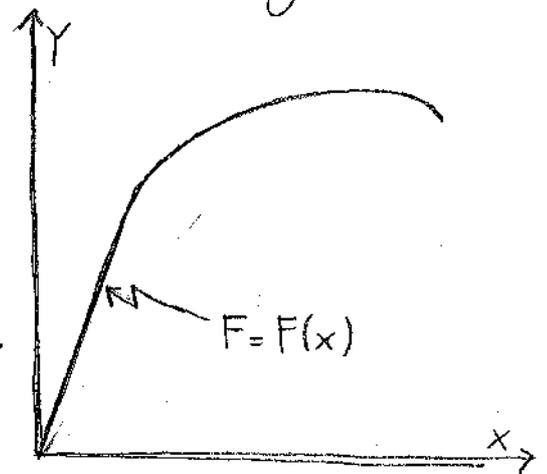


Lo spostamento Δ che subisce la massa quando è sottoposta al proprio peso definisce la posizione centrale (o neutrale, o di equilibrio).

La molla deformata esercita sulla massa una forza

$$(1.1) F = F(x)$$

la quale presenta un andamento qualitativo del tipo indicato in figura. Lo sviluppo in serie di Taylor della (1.1) porge



$$(1.2) F(x) = \left(\frac{dF}{dx} \right)_{x=x_N} (x - x_N) + o((x - x_N)^2)$$

Si può assumere come x_N ad esempio la configurazione in cui la molla equilibra il proprio peso. A questo punto si definisce un nuovo axe delle ascisse ξ con origine nella posizione x_0 del baricentro nella configurazione di equilibrio. Con ciò la (1.2) si scrive

$$(1.3) F(\xi) = -K\xi$$

dove è stato trascurato l'infinitesimo di ordine superiore. La costante

$$(1.4) K = \left(\frac{dF}{dx} \right)_{x=x_N}$$

prende il nome di RIGIDEZZA e consente di stabilire il legame approssimato (1.3) fra forza e spostamento. Si supponga ora di allontanare la massa dalle sue posizione di equilibrio portando il baricentro su una posizione ξ_1 ; rilasciando la massa - in assenza di forze

memi dissipativi - avremo che esse si muovono continuamente fra le posizioni s_1 e $-s_1$, oscillando appunto. In questo caso si ha che

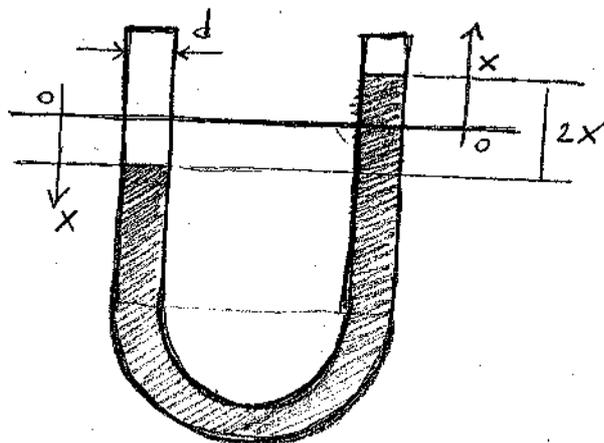
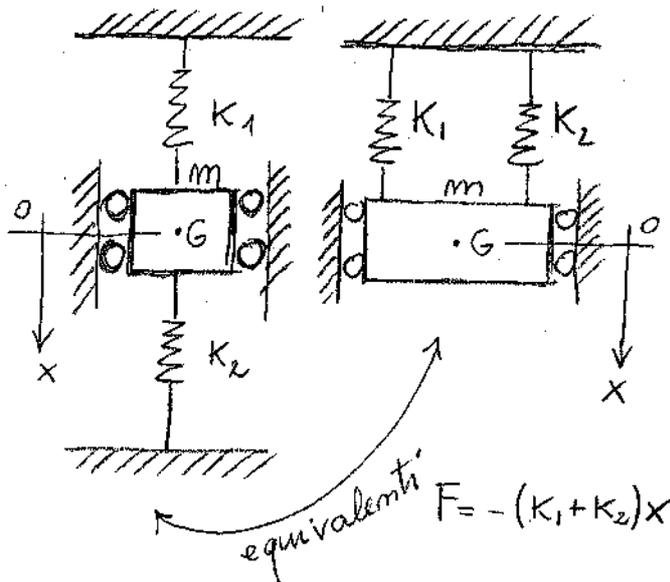
- F costituisce la FORZA ELASTICA DI RICHIAMO;
- P costituisce la FORZA ECCITATRICE.

Si dice poi che

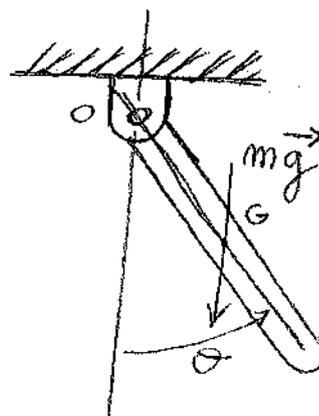
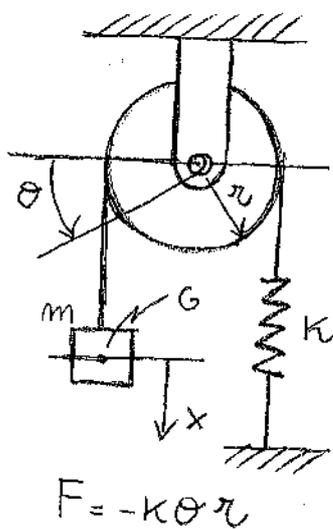
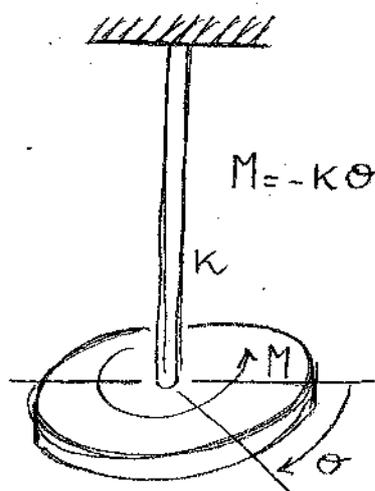
- s_1 costituisce l'AMPIEZZA MASSIMA dell'oscillazione;
- T ovvero il tempo necessario a tornare a x_1 , partendo da x_1 prende il nome di PERIODO dell'oscillazione.

Il moto qui descritto prende il nome di VIBRAZIONI LIBERE del sistema molla-molle, il quale rappresenta l'esempio più semplice di SISTEMA AD UN GRADO DI LIBERTÀ.

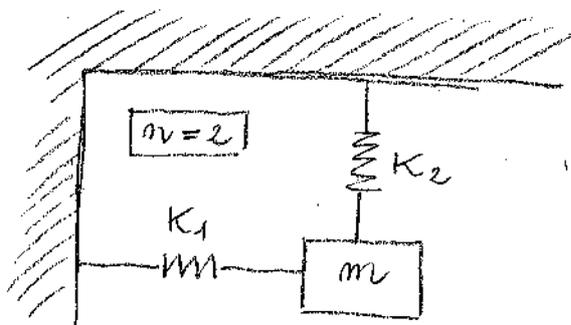
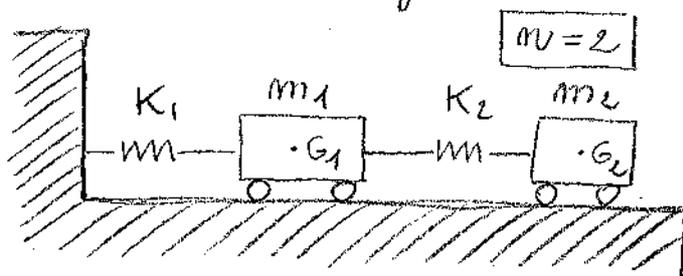
OSSERVAZIONE 1.2. SISTEMI A UN GRADO DI LIBERTÀ. Propongo ora una rassegna di ulteriori sistemi meccanici a un grado di libertà, evidenziando per ciascuno il legame fra forza di richiamo, spostamento e rigidità.

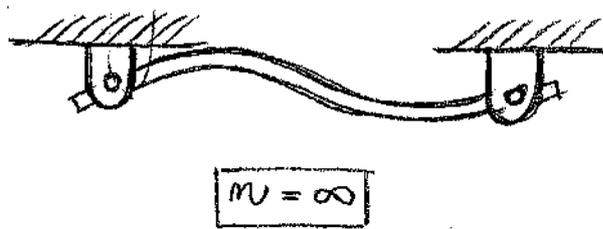
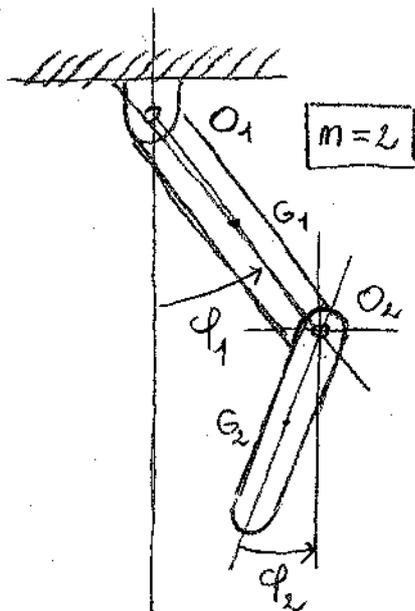


$$F = 2x \rho \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 2x \rho \pi \frac{d^2}{4} = x \rho \pi \frac{d^2}{2}$$



OSSERVAZIONE 1.3. SISTEMI A PIÙ GRADI DI LIBERTÀ'. Illustra alcuni sistemi a più gradi di libertà.





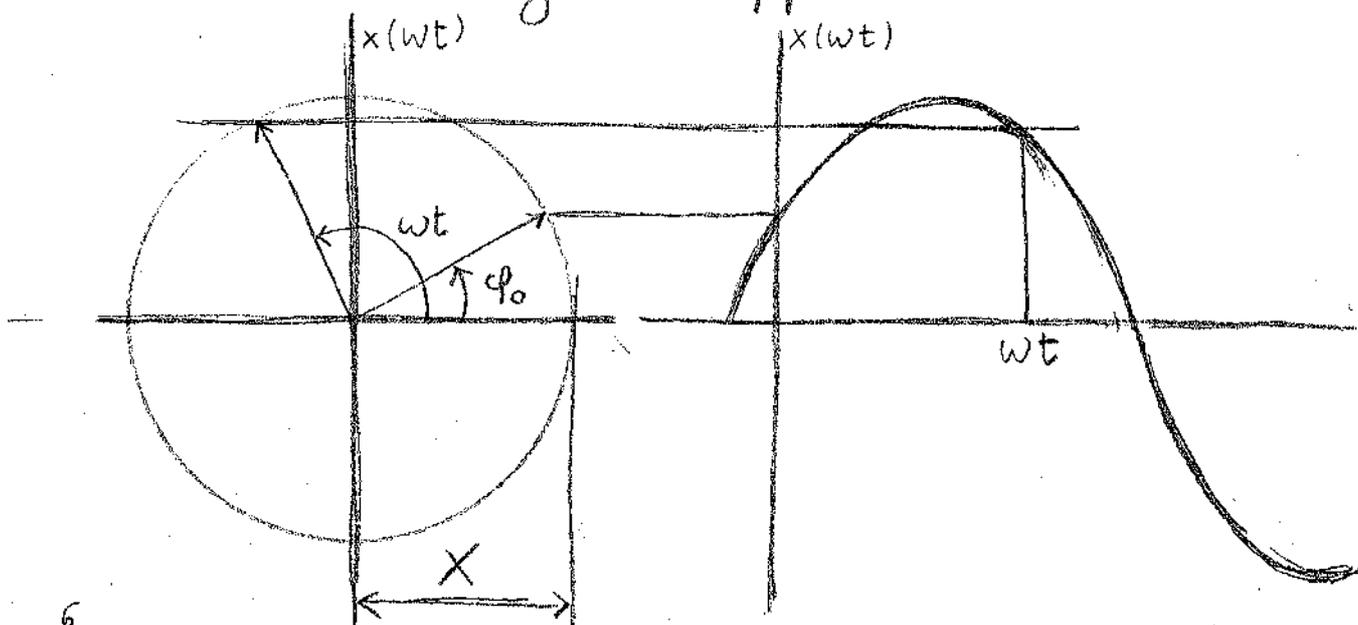
1.2. Cinematiche delle vibrazioni libere. La vibrazione di un sistema ad un grado di libertà è esprimibile come

$$(1.6) \quad x = X \sin(\omega t + \phi_0)$$

FASE INIZIALE
AMPIEZZA

FASE

dove X è l'AMPIEZZA, ω è la PULSAZIONE, $\omega t + \phi_0$ è la FASE, ϕ_0 è la FASE INIZIALE. La funzione (1.6) può essere resa dalle seguenti rappresentazioni.



DEF. 6. MOTO ARMONICO. Si definisce moto armonico la vibrazione di un sistema ad un grado di libertà la quale abbia l'andamento sinusoidale (1.6).

DEF. 7. AMPIERZA, PULSAZIONE, FASE E FASE INIZIALE. Nel moto armonico (1.6) si dice che X costituisca l'ampiezza, ω costituisca la pulsazione, $\omega t + \varphi_0$ costituisca la fase e φ_0 costituisca la fase iniziale.

DEF. 8. PERIODO. Nel moto armonico (1.6) si definisce periodo T il minimo intervallo di tempo nel quale il moto si ripropone uguale a stesso. Dunque

$$\omega T + \varphi_0 = \varphi_0 + 2\pi \iff$$

$$(1.7) T = 2\pi/\omega$$

DEF. 9. FREQUENZA. Si definisce frequenza del moto armonico (1.6) il rapporto

$$(1.8) f = \frac{1}{T}$$

OSSERVAZIONE 1.4, UNITA' DI MISURA. Si vede - dalle 1.7, 1.8 - che la pulsazione $2\pi/T$ e la frequenza $f = 1/T$ coincidono

no le stesse dimensioni. Tuttavia è consuetudine misurare le frequenze in Hertz e le pulsazioni in radianti al secondo.

OSSERVAZIONE 1.5, CONFRONTO FRA LE FASI. Si considerino due moti armonici

$$(1.9) \quad x_1 = X_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_{01})$$

$$(1.10) \quad x_2 = X_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_{02})$$

La differenza di fase si scrive

$$(1.11) \quad \Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01}$$

Allora si hanno le seguenti possibilità:

- $\Delta\varphi = 0 \leftarrow$ accordo di fase
- $\Delta\varphi = \pm\pi/2 \leftarrow$ quadratura
- $\Delta\varphi = \pm\pi \leftarrow$ opposizione di fase
- $\Delta\varphi = \pm 2k\pi \leftarrow$ apparente accordo di fase
- $0 < \Delta\varphi < \pi \leftarrow$ il fenomeno 1.10 è in anticipo di fase rispetto al 1.9
- $-\pi < \Delta\varphi < 0 \leftarrow$ il fenomeno 1.10 è in ritardo di fase rispetto al 1.9.

La derivazione successive del moto (1.6) porge

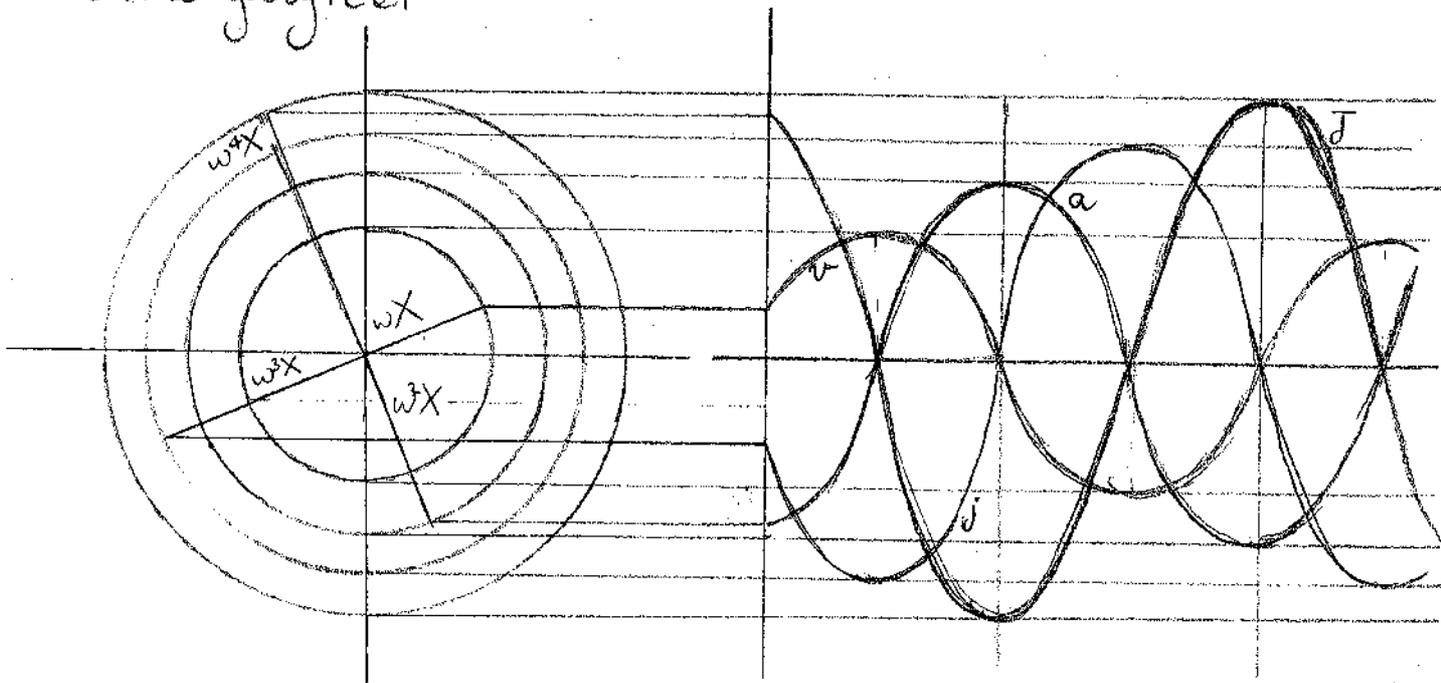
$$(1.12) \quad v = X\omega \cos(\omega t + \varphi_0) = X\omega \sin(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$(1.13) \quad a = -X\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -X\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$(1.14) \quad \text{jerk} = -X\omega^3 \cos(\omega t + \varphi_0) = -X\omega^3 \sin(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$(1.15) \quad \text{jounce} = X\omega^4 \sin(\omega t + \varphi_0) = X\omega^4 \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{4})$$

Queste funzioni sono suscettibili di tutte le seguenti rappresentazioni grafiche.

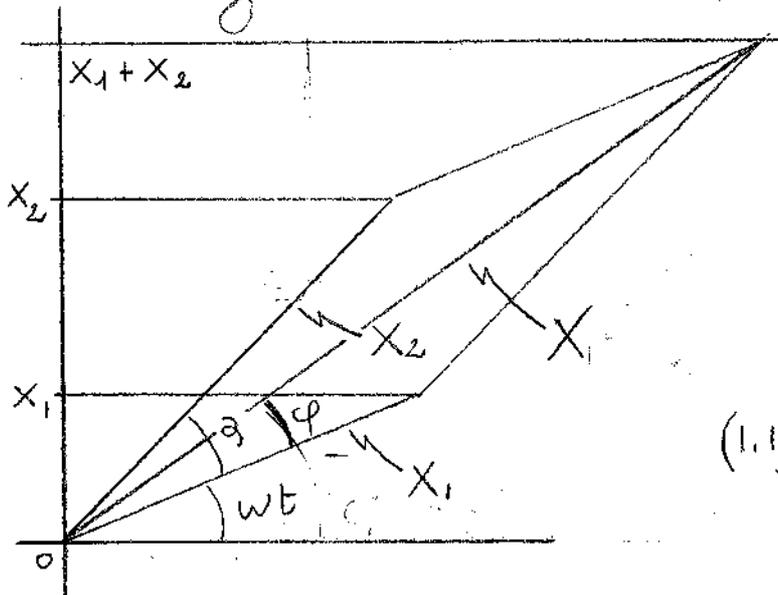


1.3. Composizione di moti armonici. Vediamo ora come comporre moti armonici con stessa pulsazione e fasi differenti. Dati ad esempio i due moti

$$(1.16) \quad x_1 = X_1 \sin \omega t$$

$$(1.17) \quad x_2 = X_2 \sin(\omega t + \alpha)$$

Ed ora vogliamo ricavare il moto armonico somma,



Procedendo per via grafica si ottiene il moto

$$(1.18) \quad x = X \sin(\omega t + \varphi)$$

dove X, φ si leggono dalla figura. Ma si può procedere anche analiticamente.

$$x_1 + x_2 = X_1 \sin \omega t + X_2 \sin(\omega t + \alpha) \iff$$

$$X \sin(\omega t + \varphi) = X_1 \sin \omega t + X_2 \sin(\omega t + \alpha) \iff$$

$$X(\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) = X_1 \sin \omega t + X_2 \sin \omega t \cos \alpha + X_2 \cos \omega t \sin \alpha \iff$$

$$\begin{cases} X \cos \varphi = X_1 + X_2 \cos \alpha \\ X \sin \varphi = X_2 \sin \alpha \end{cases} \iff X^2 = (X_1 + X_2 \cos \alpha)^2 +$$

$$+ X_2^2 \sin^2 \alpha = X_1^2 + X_2^2 \cos^2 \alpha + 2X_1 X_2 \cos \alpha + X_2^2 \sin^2 \alpha$$

Quindi per l'ampiezza si ha

$$(1.18) X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 \cos \alpha}$$

mentre per la fase si ha

$$(1.19) \tan \varphi = \frac{X_2 \sin \alpha}{X_1 + X_2 \cos \alpha}$$

1.4. Battimenti. Consideriamo ora la somma di due moti armonici aventi pulsazione differente e ritardo di fase in generale diverso. Si abbiano i moti armonici

$$(1.20) x_1 = X_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_{01})$$

$$(1.21) x_2 = X_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_{02})$$

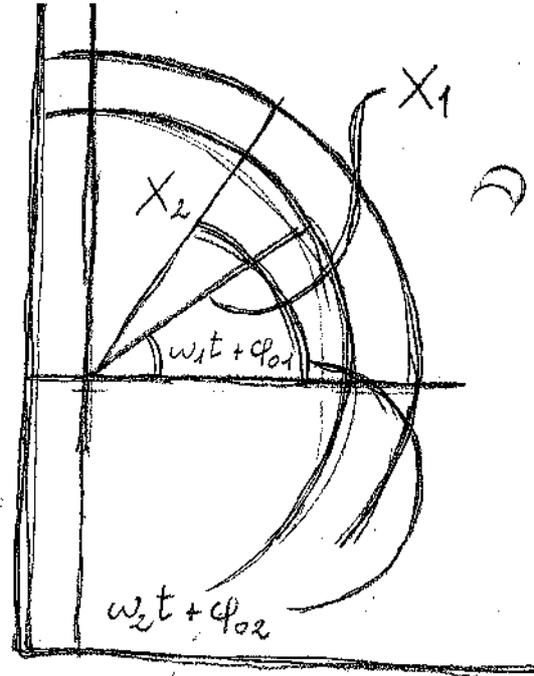
Il moto armonico somma si scrive allora

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = X_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_{01}) + X_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_{02}) = \\ &= X_1 \sin \omega_1 t \cos \varphi_{01} + X_1 \cos \omega_1 t \sin \varphi_{01} + X_2 \sin \omega_2 t \cos \varphi_{02} + \\ &+ X_2 \cos \omega_2 t \sin \varphi_{02} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{\left(X_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}) + X_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{02}) \right)^2 + \\ &+ \left(X_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_{01}) + X_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_{02}) \right)^2} = \end{aligned}$$

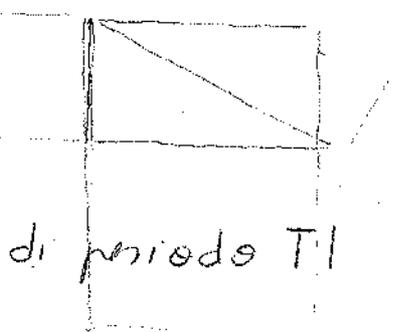
$$= \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 \cos(\omega_1 t + \phi_{01}) \cos(\omega_2 t + \phi_{02}) + 2X_1X_2 \sin(\omega_1 t + \phi_{01}) \sin(\omega_2 t + \phi_{02})} =$$

$$= \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 \cos(\omega_1 t + \phi_{01} - \omega_2 t - \phi_{02})}$$



Nel caso particolare in cui si abbia uno stesso sfasamento allora l'ampiezza è data da

$$(1.22) \quad X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t]}^*$$



Si ha allora una funzione periodica di periodo T :

$$(\omega_1 - \omega_2)T = 2\pi \iff T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} \iff \frac{1}{T} = \frac{\omega_1}{2\pi} - \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}$$

Prova a ricavare la fase per via analitica nel caso qui considerato in cui $\phi_{01} = \phi_{02}$. Abbiamo

$$(1.23) \quad x_1 = X_1 \sin(\omega_1 t + \phi_0)$$

$$(1.24) \quad x_2 = X_2 \sin(\omega_2 t + \phi_0)$$

$$(1.25) \quad x = X \sin(\omega t + \tilde{\phi}_0) = x_1 + x_2$$

$$(1.26) \quad X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t]}$$

* Si ritrova il teorema di Carnot, secondo il quale $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

Dalla (1.25) si deduce che

$$x = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t]} \sin(\omega t + \tilde{\varphi}) =$$

$$= X_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0) + X_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_0) \iff$$

$$\sin(\omega t + \tilde{\varphi}) = \frac{X_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0) + X_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_0)}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t]}} \iff$$

$$(1.27) \quad \omega t + \tilde{\varphi} = \arcsin \left(\frac{X_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0) + X_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_0)}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t]}} \right)$$

Possiamo ricavare le fasi iniziali imponendo $t=0$. Si ha

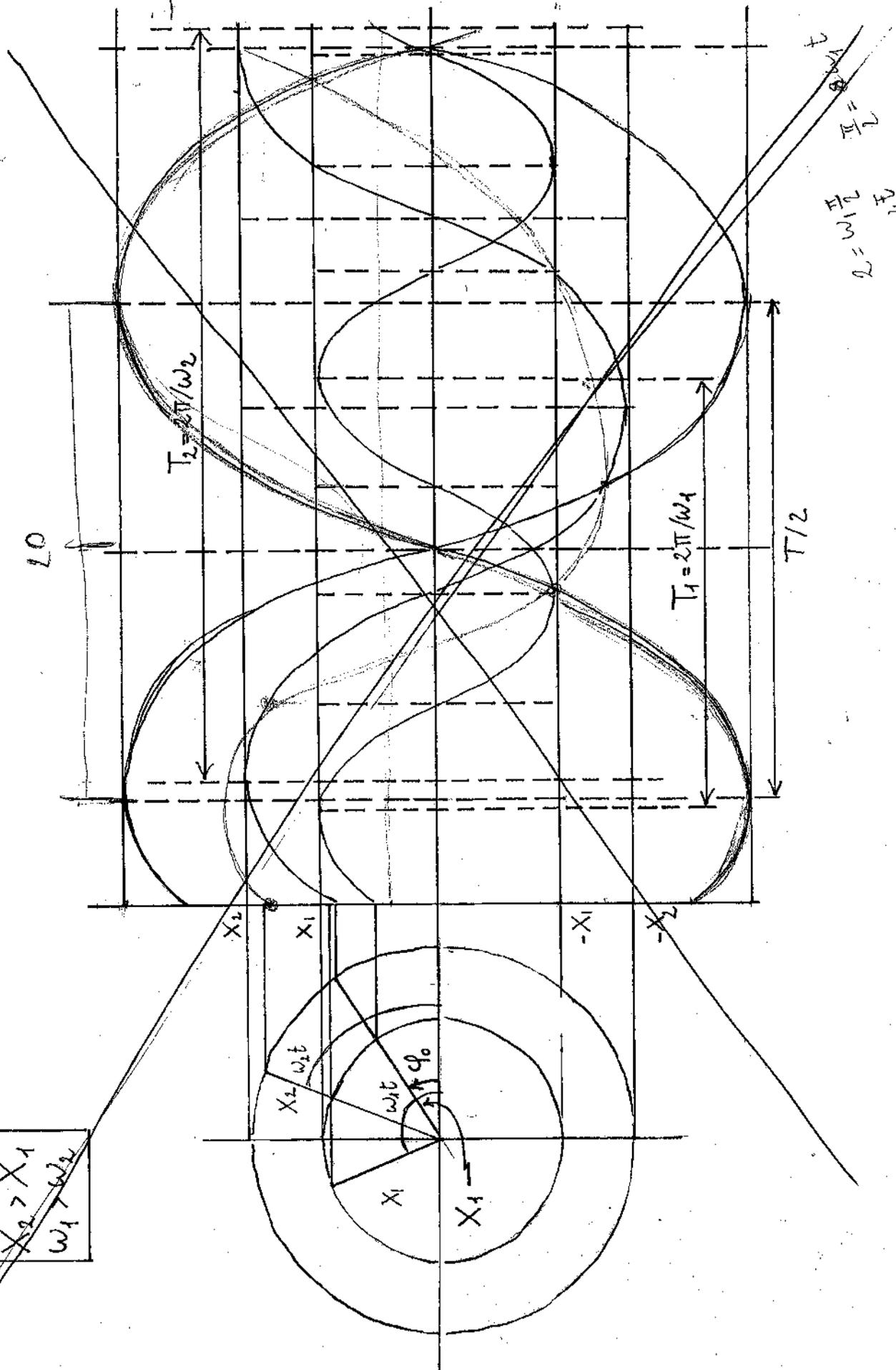
$$(1.28) \quad \tilde{\varphi} = \arcsin \left(\frac{X_1 \sin \varphi_0 + X_2 \sin \varphi_0}{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2} \right) = \arcsin \left(\frac{X_1 + X_2}{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2} \right)$$

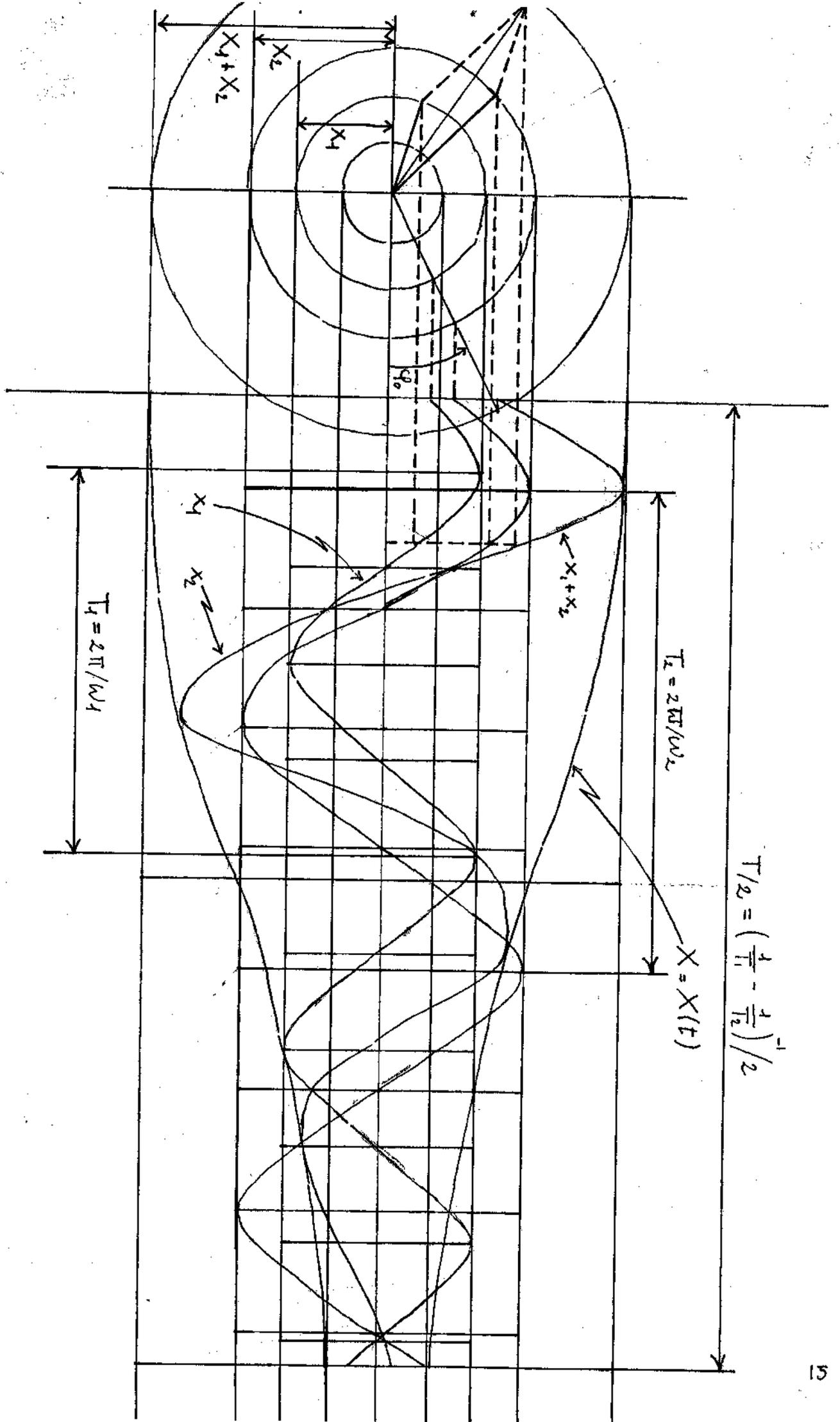
e dunque per le pulsazioni si ha

$$(1.29) \quad \omega = \frac{1}{t} \left(\arcsin \frac{X_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0) + X_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_0)}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t]}} - \right.$$

$$\left. - \arcsin \left(\frac{X_1 + X_2}{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2} \right) \right)$$

Da un punto di vista grafico possiamo tracciare i seguenti diagrammi.





Capitolo due. Vibrazioni libere per sistemi a un grado di libertà

2.1. Definizioni. Alcune definizioni.

DEF. 2.1. SISTEMA PARAMETRICO. È un sistema meccanico i cui parametri (masse, rigidità etc) variano nel tempo.

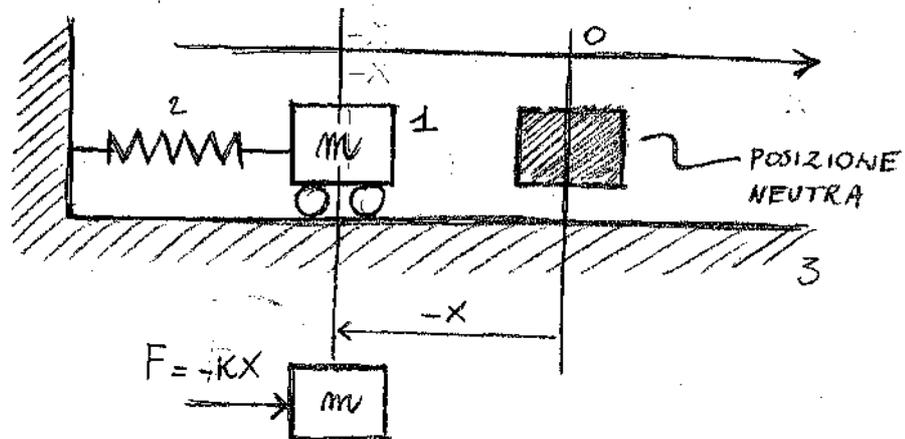
DEF. 2.2. SISTEMA LINEARE. È un sistema meccanico la cui equazioni (vincolari, cinematiche) sono lineari. Altrimenti si parla di sistemi NON LINEARE.

DEF. 2.3. VIBRAZIONI LIBERE. Sono quelle che avvengono in assenza di una forza eccitatrice (vedi def. 1.3).

DEF. 2.4. VIBRAZIONI LIBERE NATURALI (O PROPRIE). Sono le vibrazioni libere che si realizzano in assenza di forze resistenti, ovvero in presenza esclusiva di una forza di richiamo (forza elastica, forza gravitazionale etc).

DEF. 2.5. VIBRAZIONI LIBERE SMORZATE. Sono quelle vibrazioni libere in cui è presente una forza resistente di qualsiasi natura.

2.2. Equazioni del moto: deduzione newtoniana. Si consideri il sistema massa-molla in figura. La seconda



da equazione di Newton per $\vec{F} = m\vec{a}$, ovvero

$$(2.1) \quad -kx = m\ddot{x} \iff m\ddot{x} + kx = 0 \iff \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

DEF. 2.6. PULSAZIONE NATURALE (O PROPRIA). Si ottiene che nelle (2.2) k si misura in N/m , mentre m si misura in kg , dunque k/m si misura in $\frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot m} \cdot \frac{1}{kg}$ ovvero in $(1/s)^2$. Dunque k/m ha le dimensioni di una pulsazione al quadrato e questo giustifica la posizione

$$(2.3.6) \quad \frac{k}{m} = \omega_m^2 \iff \omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Com'è la 2.2 si misura

$$(2.41) \quad \ddot{x} + \omega_m^2 x = 0$$

Traffarsi di equazioni dif. lineare a coef. costanti omogenee, il cui polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 + \omega_m^2 = 0 \iff \lambda^2 = -\omega_m^2 \iff \lambda = \pm i\omega_m$$

Quindi l'integrale generale delle 2.41 si scrive

$$(2.5) \quad x(t) = C_1 \cos(\omega_m t) + C_2 \sin(\omega_m t)$$

da cui si deriva

$$(2.6) \quad \dot{x}(t) = -C_1 \omega_m \sin(\omega_m t) + C_2 \omega_m \cos(\omega_m t)$$

Imponendo le condizioni iniziali $x(t=0) = x_0$, $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$ si ha che

$$(2.7) \quad x(t=0) = C_1 = x_0$$

$$(2.8) \quad \dot{x}(t=0) = C_2 \omega_m = \dot{x}_0 \iff C_2 = \dot{x}_0 / \omega_m$$

$$(2.9) \quad x(t) = x_0 \cos(\omega_m t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t)$$

La 1.36 può essere posta in una forma alternativa, più sup.

gestiva. Si osserva che

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos \omega_m t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_m} \sin \omega_m t \\ x(t) = C \sin(\omega_m t + \varphi_0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = C_1 \cos \omega_m t + C_2 \sin \omega_m t = C (\sin \varphi_0 \cos \omega_m t + \cos \varphi_0 \sin \omega_m t) \\ x(t) = C \sin(\omega_m t + \varphi_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = C \sin(\omega_m t + \varphi_0) \Rightarrow \\ \left. \begin{aligned} C \sin \varphi_0 &= x_0 \\ C \cos \varphi_0 &= \frac{\dot{x}_0}{\omega_m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tan \varphi_0 = \frac{x_0 \omega_m}{\dot{x}_0} \Rightarrow \varphi_0 = \arctan\left(\frac{x_0 \omega_m}{\dot{x}_0}\right)$$

$$\Rightarrow C^2 (\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0) = x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_m^2} \Rightarrow C = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_m^2}}$$

Demque ho trovato

$$(2.10) \quad x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_m^2}} \sin\left(\omega_m t + \arctan\left(\frac{x_0 \omega_m}{\dot{x}_0}\right)\right)$$

$$(2.11) \quad x(t) = C \sin(\omega_m t + \varphi_0) \quad \text{con} \quad \begin{cases} C = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_m^2}} \\ \varphi_0 = \arctan\left(\frac{x_0 \omega_m}{\dot{x}_0}\right) \end{cases}$$

Ricavo ora il periodo del moto:

$$\sin [w_m(t+T) + \phi_0] = \sin (w_m t + \phi_0) \iff$$

$$w_m(t+T) + \phi_0 = w_m t + \phi_0 + 2\pi \iff$$

$$\cancel{w_m t} + w_m T = \cancel{w_m t} + 2\pi \iff T = \frac{2\pi}{w_m} \implies$$

$$(2.12) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

Ora si riprende il sistema massa-molla verticale del capitolo uno. Volendo ricavare l'equazione del moto le 2^e equ. di Newton per

$$(2.13) \quad mg - kx = m\ddot{x}$$

Considerando per l'axe z

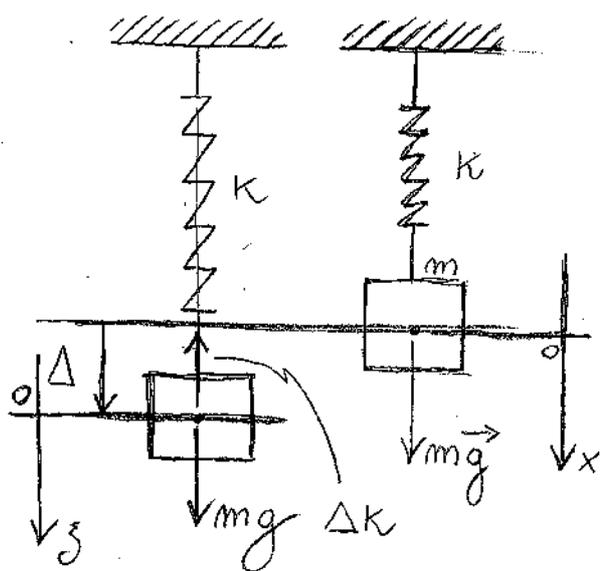
$$\text{si ha } x - \Delta = z \implies x = z + \Delta \implies$$

$$mg - k(z + \Delta) = m\ddot{z} \iff$$

$$m\ddot{z} + kz + k\Delta - mg = 0 \iff$$

$$(2.14) \quad \ddot{z} + \frac{k}{m}z + \frac{k\Delta - mg}{m} = 0 \iff \ddot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{mg - k\Delta}{m}$$

Si osserva ora che dall'equilibrio statico della massa si



ricava $mg = k\Delta$ e dunque la (1.41) porge

$$(2.15) \quad \ddot{z} + \frac{k}{m} z = 0$$

ovvero muovamente la (2.1). Quindi si generalizza concludendo che

(2.16) "l'orientamento del sistema massa-molla nel campo gravitazionale non incide sul moto".

2.3. Equazione del moto: deduzione con criteri energetici.

In assenza di fenomeni dissipativi l'energia somma di quella potenziale e di quella cinetica si conserva, ovvero

$$(2.17) \quad \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = 0$$

essendo T quella cinetica e V quella potenziale. Si ricorda che l'energia potenziale è l'opposto della primitiva del campo di forze conservative. Nel caso del sistema massa-molla orizzontale si ha

$$(2.18) \quad \frac{dV}{dx} = -F = kx \Rightarrow V = \frac{kx^2}{2} + C \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} 2kx\dot{x} = kx\dot{x}$$

$$(2.19) \quad T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \Rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} 2 m \dot{x} \ddot{x} = m \dot{x} \ddot{x}$$

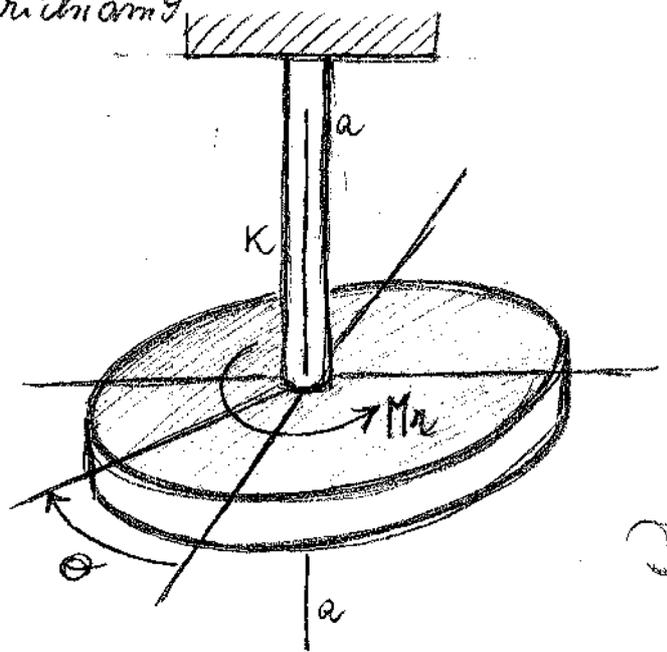
Dunque la 1.44 page

$$(2.20) \quad m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = 0 \Leftrightarrow (m \ddot{x} + k x) \dot{x} = 0$$

Escludendo la possibilità che sia $\dot{x} = 0 \forall t$, si ritrova la (2.1). Vediamo ora come applicare il metodo energetico per dedurre il moto del pendolo torsionale, nel quale si abbia un momento elastico di richiamo

$$(2.21) \quad M_z = -k\theta \quad (\curvearrowright)$$

assumendo positive le rotazioni orarie e positivi i momenti anti-orari. Si ha



$$(2.22) \quad \frac{dU}{d\theta} = +M_z = +k\theta \Rightarrow U = +k \int \theta d\theta = +\frac{k\theta^2}{2} + C \Rightarrow \frac{dU}{dt} = +\frac{k \& \theta \dot{\theta}}{\&} = +k\theta \dot{\theta}$$

$$(2.23) \quad T = \frac{1}{2} I_a \dot{\theta}^2 \Rightarrow \frac{dT}{dt} = I_a \dot{\theta} \ddot{\theta}$$

Dunque la (1.44) page

$$-k\theta + I_e \ddot{\theta} = 0 \iff \dot{\theta}(-k\theta + I_e \ddot{\theta}) = 0 \iff$$

$$(2.24) \quad -k\theta + I_e \ddot{\theta} = 0$$

Definendo poi come PULSAZIONE NATURALE la

$$(2.25) \quad \omega_m = \sqrt{\frac{k}{I_e}}$$

abbiamo in definitiva

$$(2.26) \quad \ddot{\theta} + \omega_m^2 \theta = 0$$

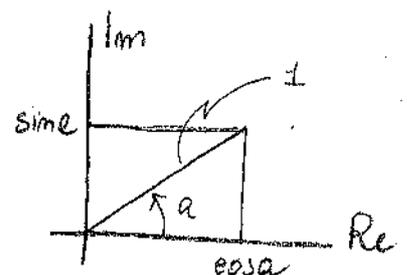
le quali - come discusso nel paragrafo 2.2 - pongono

$$(2.27) \quad \theta(t) = \sqrt{\theta_0^2 + \frac{\dot{\theta}_0^2}{\omega_m^2}} \sin\left(\omega_m t + \arctan\left(\frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0} \omega_m\right)\right)$$

2.4. Vibrazioni libere naturali e numeri complessi. Si ricordi

da che indicata i l'unità immaginaria $\sqrt{-1}$ si ha

$$(2.28) \quad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$



Si ricorda inoltre che dato il numero complesso \bar{V} avente modulo $|\bar{V}|$ e fase φ si ha

$$(2.29) \quad \bar{V} = |\bar{V}| (\cos \alpha + i \sin \alpha) = |\bar{V}| e^{i\alpha}$$

e dunque la moltiplicazione per $e^{i\varphi}$ porge

$$\begin{aligned} \bar{V} e^{i\varphi} &= |\bar{V}| (\cos \alpha + i \sin \alpha) (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= |\bar{V}| (\overline{\cos \alpha \cos \varphi + i \sin \varphi \cos \alpha} + \overline{i \cos \varphi \sin \alpha - \sin \alpha \sin \varphi}) = \\ &= |\bar{V}| (\cos(\alpha + \varphi) + i \sin(\alpha + \varphi)) \end{aligned}$$

Dunque la moltiplicazione per $e^{i\varphi}$ determina una anticipazione di fase (rotazione antioraria) di un angolo φ .

Ebbene propongo qui di creare per le (1.31) una soluzione del tipo

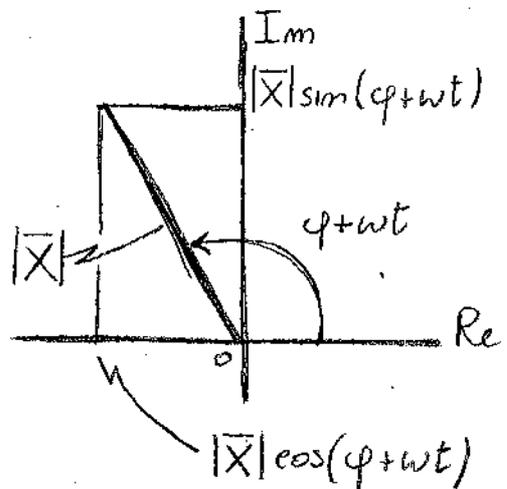
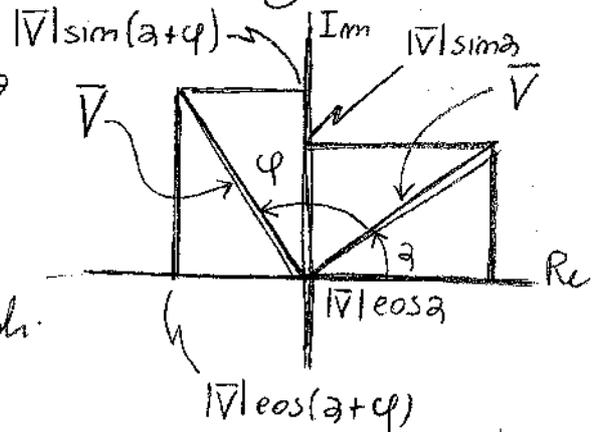
$$(2.30) \quad \bar{x} = \bar{X} e^{i\omega t}$$

avendo \bar{X} un numero complesso di modulo $|\bar{X}|$ e fase φ , ovvero

$$(2.31) \quad \bar{x} = |\bar{X}| (\cos \varphi + i \sin \varphi) e^{i\omega t}$$

Derivando le (2.31) si ha

$$(2.32) \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = |\bar{X}| (\cos \varphi + i \sin \varphi) i \omega e^{i\omega t}$$



$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = |\bar{X}| (\cos \varphi + i \sin \varphi) i \omega i \omega e^{i \omega t} \iff$$

$$(2.33) \quad \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = |\bar{X}| (\cos \varphi + i \sin \varphi) (-1) \omega^2 e^{i \omega t}$$

Sostituendo le (2.31), (2.33) nella (2.4) si ha

$$m |\bar{X}| (\cos \varphi + i \sin \varphi) (-1) \omega^2 e^{i \omega t} + k |\bar{X}| (\cos \varphi + i \sin \varphi) e^{i \omega t} = 0 \iff m (-1) \omega^2 + k = 0 \iff$$

$$-m \omega^2 + k = 0 \iff \omega^2 = k/m \iff \omega = \sqrt{k/m}$$

Dunque una SOLUZIONE COMPLESSA della (2.4) è

$$(2.34) \quad \bar{x} = |\bar{X}| (\cos \varphi + i \sin \varphi) e^{i \sqrt{\frac{k}{m}} t} = |\bar{X}| e^{i(\varphi + \omega_m t)}$$

Se la 2.34 risolve - come soluzione complessa - la

(2.4), allora la sua parte reale sarà soluzione reale

della 2.4. Ovvero abbiamo la soluzione reale

$$(2.35) \quad x = \operatorname{Re} \left(|\bar{X}| (\cos \varphi + i \sin \varphi) e^{i \sqrt{\frac{k}{m}} t} \right) =$$

$$= |\bar{X}| \operatorname{Re} e^{i(\varphi + \sqrt{\frac{k}{m}} t)} = |\bar{X}| \operatorname{Re} \left(\cos(\varphi + \sqrt{\frac{k}{m}} t) + \right.$$

$$\left. + i \sin(\varphi + \sqrt{\frac{k}{m}} t) \right) = \underline{|\bar{X}| \cos(\omega_m t + \varphi)}$$

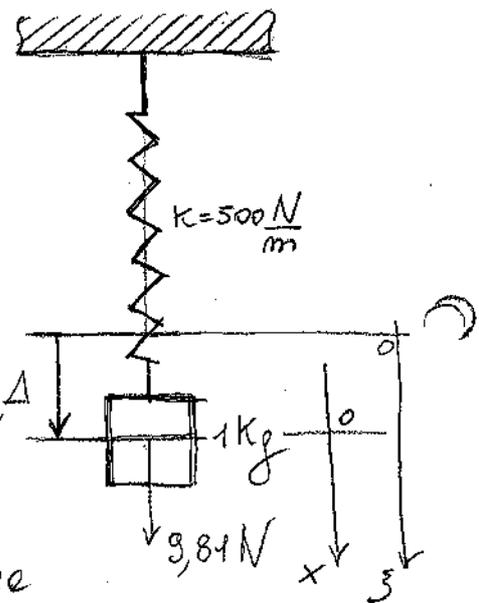
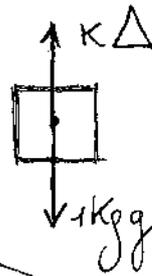
Si ritrova con l'integrale generale (2.5).

2.5. Esempio numerico. Si abbia un oscillatore libero sospeso, con parametri inerziali come in figura. Calcola intanto la freccia statica Δ imponendo l'equilibrio meccanico:

$$1\text{kg}g = k\Delta \Rightarrow \Delta = \frac{9,81\text{N}}{500\text{N/m}} =$$

$$= 0,01962\text{m} = \frac{mg}{k}$$

$$\frac{mg}{k}$$



Assumendo come origine dell'asse x il punto individuato dalla freccia statica Δ allora l'equazione di Newton si scrive

$$m\ddot{x} = mg - k(\Delta + x) = 0 \iff$$

$$m\ddot{x} = mg - k\left(\frac{mg}{k} + x\right) = 0 \iff$$

$$m\ddot{x} = \cancel{mg} - \cancel{mg} - kx = 0 \iff m\ddot{x} + kx = 0$$

Si noti che volendo invece ricavare l'equazione di Newton relativa all'asse z con origine nella posizione di riposo della molla, allora si ha

$$m\ddot{z} = mg - \kappa z \iff m\ddot{z} + \kappa z = mg$$

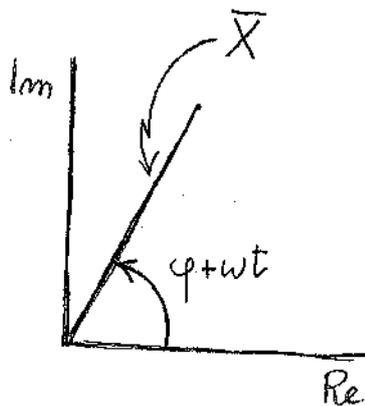
Dunque si ottiene una equazione dif. leggermente più articolata rispetto quelle precedenti, che dunque predi-
ligo. Ora si consideri una soluzione complessa del tipo

$$\begin{aligned} \bar{x} &= |\bar{x}| e^{i\varphi + i\omega t} = |\bar{x}| [\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)] = \\ &= |\bar{x}| e^{i\omega t} e^{i\varphi} = |\bar{x}| (\cos \varphi + i \sin \varphi) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Derivando successivamente si ha

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = |\bar{x}| (\cos \varphi + i \sin \varphi) i\omega e^{i\omega t} = \bar{x} i\omega$$

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = |\bar{x}| (\cos \varphi + i \sin \varphi) (-1)\omega^2 e^{i\omega t}$$



Sostituendo in $m\ddot{x} + \kappa x = 0$ si ha

$$\begin{aligned} -m|\bar{x}| (\cos \varphi + i \sin \varphi) \omega^2 e^{i\omega t} + \kappa |\bar{x}| (\cos \varphi + i \sin \varphi) e^{i\omega t} &= 0 \iff \\ \iff \omega^2 = \frac{\kappa}{m} \iff \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \end{aligned}$$

Dunque abbiamo la soluzione complessa seguente

$$\begin{cases} \bar{x} = |\bar{X}| e^{i(\omega t + \varphi)} \\ \dot{\bar{x}} = |\bar{X}| i\omega e^{i(\omega t + \varphi)} \end{cases} \text{ con } \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = 22,36 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Per ricavare $|\bar{X}|$ e φ si impongono le cc e quali siano

$$\begin{cases} \text{Re}(\bar{x})|_0 = 0,01 \text{ m} \\ \text{Re}(\dot{\bar{x}})|_0 = 0,3 \text{ m/s} \end{cases}$$

D'altra parte si ha

$$\begin{aligned} \text{Re}(\bar{x}) &= |\bar{X}| \text{Re}[e^{i(\omega t + \varphi)}] = |\bar{X}| \text{Re}(\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)) = \\ &= |\bar{X}| \cos(\omega t + \varphi) \\ \text{Re}(\dot{\bar{x}}) &= |\bar{X}| \text{Re}[i\omega e^{i(\omega t + \varphi)}] = |\bar{X}| \text{Re}[i\omega(\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi))] = \\ &= |\bar{X}| \text{Re}(i\omega \cos(\omega t + \varphi) - \omega \sin(\omega t + \varphi)) = -|\bar{X}| \omega \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Dunque imponendo le c.c. si ha

$$\begin{cases} |\bar{X}| \cos \varphi = 0,01 \text{ m} \\ -|\bar{X}| \omega \sin \varphi = 0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \iff |\bar{X}| \sin \varphi = -\frac{1}{\omega} 0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -0,0134 \text{ m} \end{cases}$$

Quadrando e sommando abbiamo

$$|\bar{X}|^2 \cos^2 \varphi + |\bar{X}|^2 \sin^2 \varphi = (0,01 \text{ m})^2 + (0,0134 \text{ m})^2 = 0,27 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \Rightarrow$$

$$|\bar{X}| = \sqrt{0,27 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2} = 1,67 \cdot 10^{-2}$$

Dividendo si ha

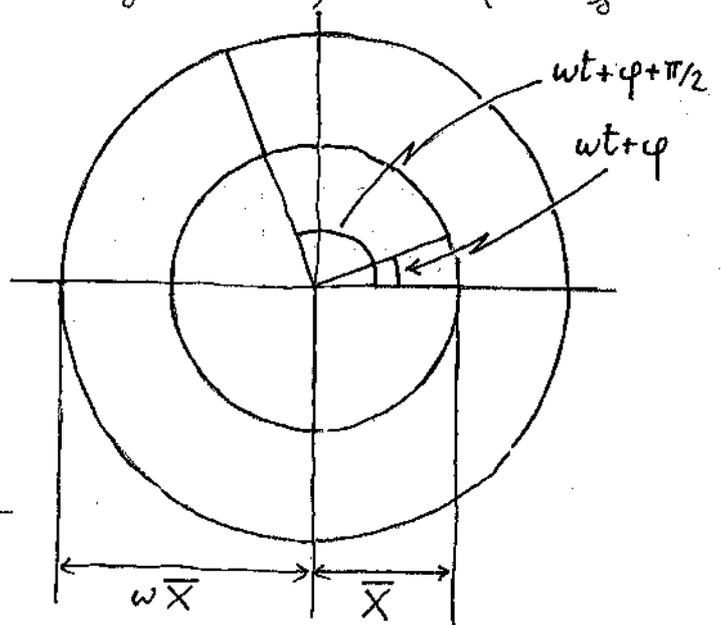
$$\tan \varphi = - \frac{0,0134}{0,01} = -1,34 \Rightarrow \varphi = -0,92 \text{ rad}$$

Dunque ho trovato le soluzioni complesse

$$\begin{cases} \bar{X} = 1,67 \cdot 10^{-2} \text{ m} \left[\cos\left(22,36 \frac{\pi}{s} t - 0,92 \pi\right) + i \sin\left(22,36 \frac{\pi}{s} t - 0,92 \pi\right) \right] \\ \dot{\bar{X}} = \bar{X} i \omega \end{cases}$$

alle quale corrisponde la soluzione reale seguente

$$x = 1,67 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cos\left(22,36 \frac{\pi}{s} t - 0,92 \pi\right)$$



Come verifica posso utilizzare la soluzione (1.37) la quale porge

$$\begin{cases} \sqrt{X_0^2 + \frac{\dot{X}_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{0,01^2 + \frac{0,3^2}{22,36^2}} \quad m = 1,67 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{0,01}{0,3} \cdot 22,36\right) = 0,64 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = 1,67 \cdot 10^{-2} \text{ m} \sin\left(22,36 \frac{\pi}{s} t + 0,64 \pi\right) = 1,67 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cos\left(22,36 \frac{\pi}{s} t + \dots\right)$$

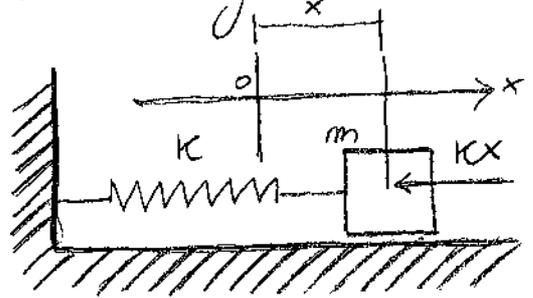
$$+ 0,64 - \frac{\pi}{2}) = 1,67 \cdot 10^{-2} \cos\left(22,36 \frac{\pi t}{s} - 0,93\right)$$

Si ritrova così la medesima soluzione.

2.6. Pulsazione naturale: metodo di Rayleigh. Si supponga

che l'oscillatore libero orizzontale. La sua energia cinetica è

$$(2.36) \quad T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$



Il potenziale della forza elastica si scrive invece

$$-kx = \frac{\partial \Pi}{\partial x} \Rightarrow \Pi = -k \int x dx = -\frac{kx^2}{2} + c$$

e dunque l'energia potenziale vale

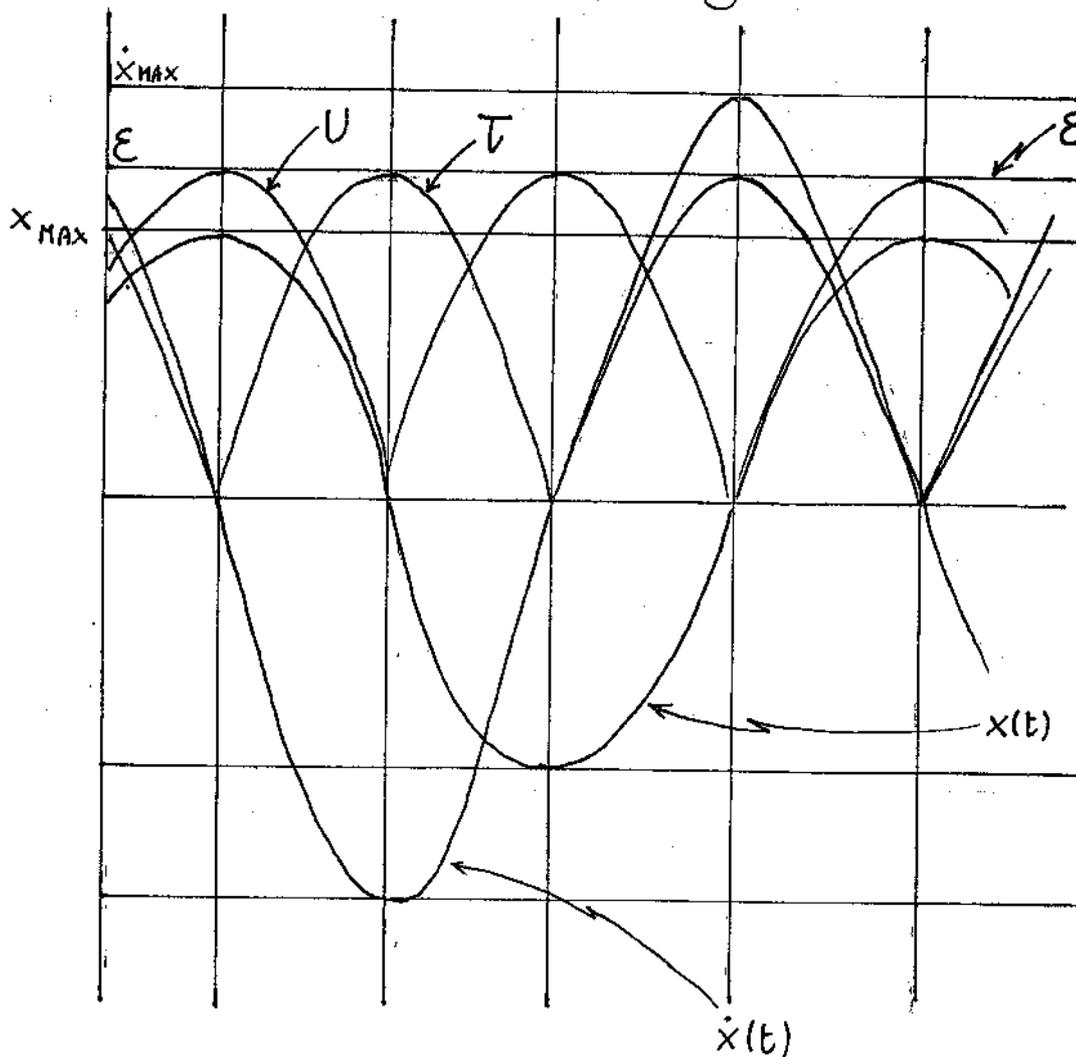
$$(2.37) \quad U = -\Pi = \frac{kx^2}{2} + C$$

mentre l'energia totale si scrive

$$(2.38) \quad E = T + U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{kx^2}{2} + C$$

Posto - come è stato - uguale a zero la costante C , allora l'onda

mento delle energie per la soluzione (1.37) con generiche condizioni iniziali x_0, \dot{x}_0 è il seguente



Si osserva che nel caso di moto armonico si ha $E = T_{\max} = U_{\max}$. Lo si evince dal grafico, tuttavia questo risultato può essere ricavato anche analiticamente considerando la 1.38, secondo la quale si ha

$$\begin{cases} x = C \sin(\omega t + \varphi) \\ \dot{x} = C\omega \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = C^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \\ \dot{x}^2 = C^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = \frac{1}{2} m C^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \\ U = \frac{1}{2} k C^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{\text{MAX}} = \frac{1}{2} m C^2 \omega^2 \\ U_{\text{MAX}} = \frac{1}{2} k C^2 \end{cases}$$

Si è ormai d'altre parte che $\omega^2 = k/m$ e dunque abbiamo

$$E = T + U = \frac{1}{2} m C^2 \frac{k}{m} \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} k C^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} C^2 k$$

Si conclude allora appunto che nel moto armonico si ha

$$(2.39) \quad E = T_{\text{max}} = U_{\text{max}} = \frac{1}{2} C^2 k = \frac{1}{2} \left(x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_m^2} \right) k$$

Ebbene il criterio di Rayleigh si basa sulla (2.39) e afferma che

(2.40) "Se un moto è armonico allora le sue energie cinetiche massime è pari alle sue energie potenziale massime"

Il criterio suddetto può essere usato - nel caso di moto armonico - per ricavare la pulsazione naturale a prescindere dalle conoscenze delle equazioni del moto.

Nel caso dell'oscillatore libero orizzontale il criterio di Rayleigh porge esattamente

$$(2.41) T_{MAX} = V_{MAX} \iff \frac{1}{2} m \omega^2 = \frac{1}{2} k x^2 \iff \omega^2 = \frac{k}{m} \iff \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

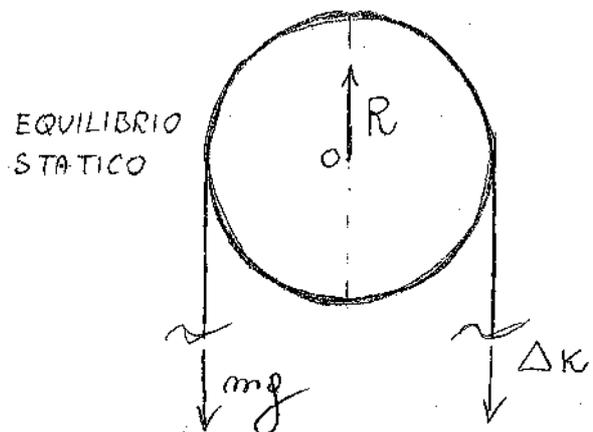
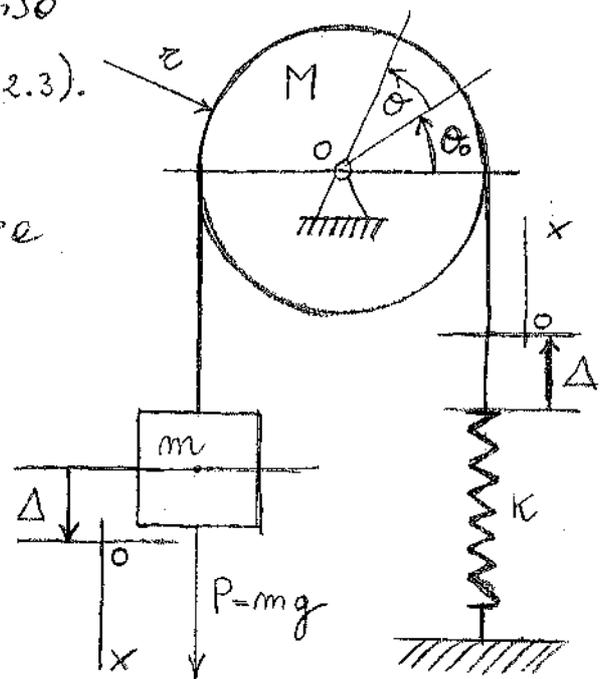
2.7. Sistema masse-cinghia-pulleggie. Si richiede lo studio del moto delle masse m del sistema in figura. Si ammette le cinghie inestensibili e le pulleggie senza strisciamento. Studia il meccanismo attraverso l'EQUAZIONE DI NEWTON (par. 2.3).

$$(2.42) \begin{cases} \Delta = r \theta_0 \leftarrow \text{funca statica} \\ x = r \theta \end{cases}$$

Intanto ricavo le funca statiche imponendo l'equilibrio meccanico alla pulleggia:

$$\begin{cases} R = mg + \Delta k \\ mg r = \Delta k r \Rightarrow \end{cases}$$

$$(2.43) \Delta = mg/k \iff \theta_0 = \frac{mg}{kr}$$



Ricavo ora l'equazione differenziale del moto. Il sistema delle dinamiche per il disco poggia

$$(2.44) \quad mgx - m\ddot{x}r - k(x+\Delta)r - I\ddot{\theta} = 0$$

D'altra parte si ha $x = \theta r$ e $I = \pi r^2 \rho r^2 / 2 = Mr^2 / 2$ e $\Delta = mg / k$, dunque

$$(2.44) \quad \cancel{mgx} - m\ddot{\theta}r^2 - k\cancel{r^2\theta} - \cancel{k\frac{mg}{k}r} - \frac{Mr^2}{2}\ddot{\theta} = 0 \iff$$

$$(2.45) \quad \left(\frac{M}{2} + m\right)\ddot{\theta} + k\theta = 0 \implies$$

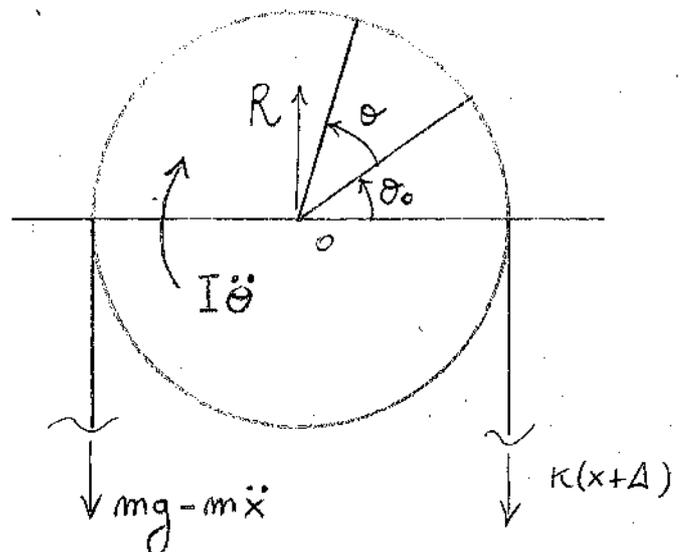
$$\left(m + \frac{M}{2}\right)\lambda^2 + k = 0 \iff \lambda^2 = -\frac{k}{m + \frac{M}{2}} \iff \lambda = i\sqrt{\frac{k}{m + \frac{M}{2}}} \implies$$

$$(2.46) \quad \theta = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m + \frac{M}{2}}} t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m + \frac{M}{2}}} t\right)$$

La pulsazione del moto è pertanto

$$(2.47) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m + M/2}}$$

BILANCIO
DINAMICO



Studio il meccanismo attraverso il CRITERIO ENERGETICO (par. 2.3). Il potenziale elastico della molla è

$$(2.48) \quad \frac{d\Pi^e}{dx} = -k(x+x_0) \Rightarrow \Pi^e = -k\left(\frac{x^2}{2} + x_0x\right) + C^e$$

Il potenziale gravitazionale della massa è

$$(2.49) \quad \frac{d\Pi^g}{dx} = mg \Rightarrow \Pi^g = mgx + C^g$$

Dunque l'energia potenziale complessiva della massa è

$$(2.50) \quad U = -\Pi^g - \Pi^e = -mgx + k\left(\frac{x^2}{2} + x_0x\right) + C$$

Il disco ha energia potenziale costante. L'energia cinetica del meccanismo vale

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(mr^2\dot{\theta}^2 + Mr^2\dot{\theta}^2\right) \Rightarrow$$

$$(2.51) \quad T = \frac{r^2}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)\dot{\theta}^2$$

L'energia meccanica complessiva è dunque

$$(2.52) \quad \mathcal{E} = \frac{r^2}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)\dot{\theta}^2 - mgx + k\left(\frac{x^2}{2} + x_0x\right) + C$$

Imponiamo le costanze si ha

$$\frac{\pi^2}{2} \left(m + \frac{M}{2} \right) \ddot{\theta} - mgx + k \left(\frac{x}{r} \dot{x} + x_0 \dot{x} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\pi^2 \left(m + \frac{M}{2} \right) \dot{\theta} \ddot{\theta} - mgx \dot{\theta} + k \left(\theta r \dot{\theta} r + \theta_0 r \dot{\theta} r \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(m + \frac{M}{2} \right) \ddot{\theta} - \frac{mg}{r} + k \left(\theta + \theta_0 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(m + \frac{M}{2} \right) \ddot{\theta} - \frac{mg}{r} + k\theta + \frac{kmg}{kr} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2.53) \quad \left(m + \frac{M}{2} \right) \ddot{\theta} + k\theta = 0$$

Ritroviamo così la (2.45) cvd. Applichiamo ora il CRITERIO DI RAYLEIGH (2.40) e calcoliamo direttamente le pulsazioni naturali. Dalle (2.50), (2.51) si ricava

$$(2.54) \quad \begin{cases} U_{\max} = \frac{k X_{\max}^2}{2} \\ T_{\max} = \frac{\pi^2}{2} \left(m + \frac{M}{2} \right) \dot{\theta}_{\max}^2 \end{cases} \Rightarrow k X_{\max}^2 = \pi^2 \left(m + \frac{M}{2} \right) \dot{\theta}_{\max}^2$$

D'altra parte se la soluzione è armonica si ha

$$\begin{cases} \theta = A \cos(\omega t + \varphi) \\ x = r\theta = rA \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \\ x = rA \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow$$

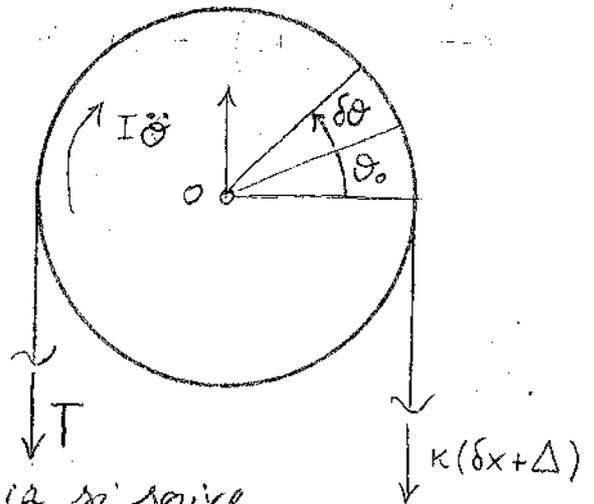
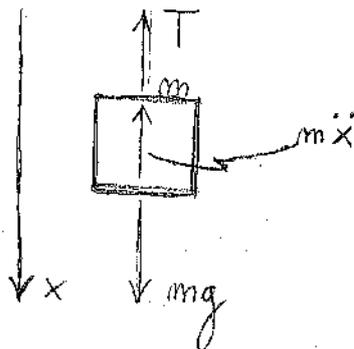
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta}_{max} = A\omega \\ x_{max} = rA \end{cases}$$

Sostituendo nelle (2.54) si ha

$$k r^2 A^2 = r^2 \left(m + \frac{M}{2}\right) A^2 \omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m + M/2}$$

Si ritrova dunque la pulsazione (2.47). Vediamo ora come ricavare il moto attraverso il PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI. Il lavoro virtuale per la massa si scrive

$$(2.55) \delta L^m = mg \delta x - m \ddot{x} \delta x - T \delta x$$



Il lavoro virtuale per la puleggia si scrive

$$(2.56) \delta L^p = T r \delta \theta - \kappa (x + \Delta) r \delta \theta - I \ddot{\theta} \delta \theta$$

Dunque il PLV porge

$$\delta L = \delta L^p + \delta L^m = 0 \Leftrightarrow T r \delta \theta - \kappa (x + \Delta) r \delta \theta - I \ddot{\theta} \delta \theta + mg \delta x - m \ddot{x} \delta x - T \delta x = 0 \Leftrightarrow T r \delta \theta - \kappa (r x + \Delta) r \delta \theta - I \ddot{\theta} \delta \theta +$$

$$\begin{aligned}
 + mg r \delta\theta - m \ddot{x} r \delta\theta - T r \delta\theta &= 0 \iff \cancel{T r} - \kappa(x + \Delta)r - I \ddot{\theta} + \\
 + mg r - m \ddot{x} r - \cancel{T r} &= 0 \iff -\kappa x - \kappa \Delta r - I \ddot{\theta} + mg r - m \ddot{x} r = 0 \\
 \iff -\kappa x - \kappa r \frac{mg}{\kappa} - I \ddot{\theta} + mg r - m \ddot{x} r &= 0 \iff -\kappa \theta r - I \ddot{\theta} - \\
 - m \ddot{\theta} r^2 = 0 \iff \kappa \theta r + \frac{M r^2}{2} \ddot{\theta} + m r^2 \ddot{\theta} &= 0
 \end{aligned}$$

Dunque si è trovato

$$(2.37) \quad \frac{\kappa}{r} \theta + \left(\frac{M}{2} + m \right) \ddot{\theta} = 0$$

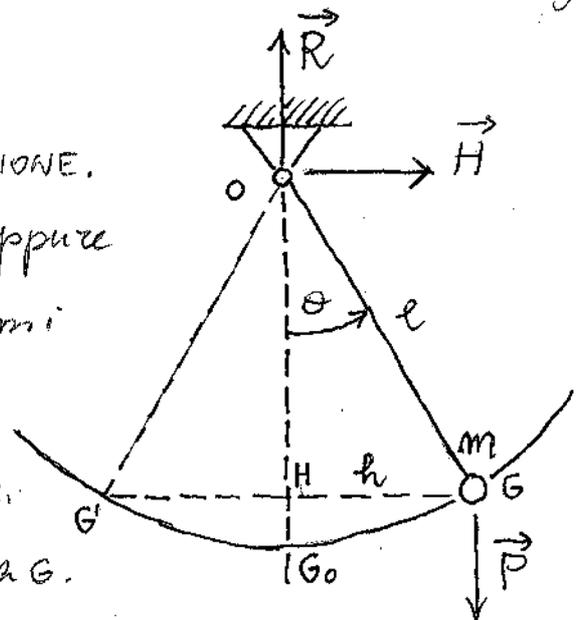
ovvero di nuovo la (2.45).

2.8. Pendolo semplice. Il filo si assume inestensibile e di massa trascurabile; le masse si considerano puntiformi. Si pongono le definizioni seguenti:

OSCILLAZIONE SEMPLICE O SEMIOSCILLAZIONE.

È il moto delle masse da G a G_0 , oppure da G' a G_0 , essendo G, G' i due estremi delle oscillazioni.

OSCILLAZIONE COMPLETA. È il moto di andata da G a G' e di ritorno da G' a G .



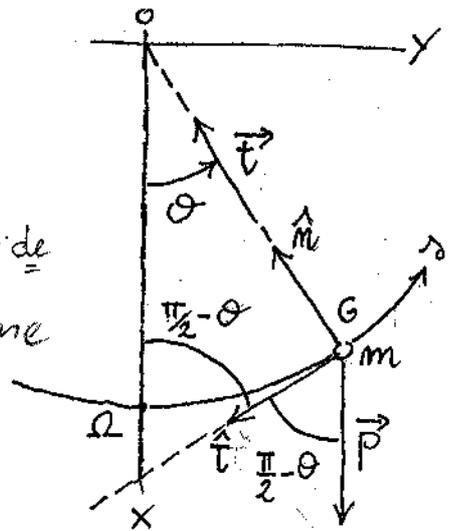
PERIODO DI OSCILLAZIONE. Il tempo impiegato a descrivere una oscillazione completa.

Vediamo come ricavare ora l'equazione del moto partendo dal BILANCIO MECCANICO. L'equilibrio dei momenti rispetto il polo O per la massa m porge

$$(2.58) \quad \vec{P} \times \vec{GO} - m\vec{a}_G \times \vec{GO} + \vec{T} \times \vec{GO} = 0$$

essendo \vec{T} la tensione del cavo. Considerando i versori \hat{t}, \hat{n} indicati in figura si ha per \vec{a}_G che

$$(2.59) \quad \vec{a}_G = \frac{\dot{\theta}^2}{l} \hat{n} - \ddot{\theta} \hat{t}$$



dove $s = l\theta$ è l'ascissa curvilinea indicato in figura. Allora la (2.59) si scrive

$$(2.60) \quad \vec{a}_G = l\ddot{\theta} \hat{n} - l\dot{\theta}^2 \hat{t} \quad -P\cos\theta + T = ml\dot{\theta}^2$$

$$T = P\cos\theta + ml\dot{\theta}^2$$

La (2.58) allora porge

$$\left[[mg \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) \hat{t} - mg \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) \hat{n}] - m [l\ddot{\theta} \hat{n} - l\dot{\theta}^2 \hat{t}] + \right.$$

$$l\ddot{\theta} P \sin\theta$$

$$+ \hat{t} \hat{m} \} \times l \hat{m} = m g \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \hat{t} \times \hat{m} + m l \ddot{\theta} \hat{t} \times l \hat{m} = 0 \iff$$

$$\iff g \sin \theta \hat{t} \times \hat{m} + \ddot{\theta} l \hat{t} \times \hat{m} = 0 \iff$$

$$(2.61) \quad g \sin \theta + l \ddot{\theta} = 0 \iff \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0}$$

Consideriamo ora il caso delle cosiddette PICCOLE OSCILLAZIONI,
ove sono ritenute tali quelle per le quali:

$$(2.62) \quad |\theta| \leq 14 \div 15^\circ$$

In tal caso si ammette valida l'approssimazione $\sin \theta \approx \theta$,
dunque la (2.61) si scrive

$$(2.63) \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

La quale è formalmente analoga alla 2.4 ove si ponga

$$(2.64) \quad \omega = \sqrt{g/l}$$

Dunque si ha l'integrale generale

$$(2.65) \quad \theta = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{con } \omega = \sqrt{g/l}$$

e le costanti A, φ da determinare imponendo le c.c.

Per il periodo si ricava

$$(2.66) \quad \omega T = 2\pi \Leftrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Dalle (2.66) si deduce immediatamente che

(2.67) il periodo non dipende dall'ampiezza della oscillazione, cioè le piccole oscillazioni sono ISOCRONE;

(2.68) si può calcolare l'accelerazione gravitazionale g dalla misura sperimentale del periodo.

Riprendiamo ora il caso delle oscillazioni che non verificano le condizioni (2.62). Allora segue che l'equazione del moto va ricavata integrando la (2.61), che tuttavia non permette di avere risolta per via analitica, se non in modo approssimato, sviluppando in serie.

Si osserva che la (2.61) è una equazione del secondo ordine che si può tentare di ridurre a una equazione del primo facendo la posizione

$$(2.69) \quad \ddot{\theta} = z(\theta)$$

da cui discende

$$\ddot{\theta} = \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0 \Rightarrow \frac{dz}{d\theta} z + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow z dz = - \frac{g}{l} \sin\theta d\theta \Rightarrow \int z dz = - \frac{g}{l} \int \sin\theta d\theta \Rightarrow \frac{z^2}{2} =$$

$$= + \frac{g}{l} \int d\cos\theta \Rightarrow \frac{z^2}{2} = \frac{g}{l} \cos\theta + C$$

Dunque abbiamo trovato

costanti arbitrarie

$$(2.70) \quad \dot{\theta}^2 - \frac{2g}{l} \cos\theta = C$$

Per determinare le costanti arbitrarie andrò imposte una o due delle due c.c..

Alternativamente si può operare con il CRITERIO ENERGETICO allo scopo di ricavare direttamente la (2.70). Infatti l'energia cinetica si scrive

$$(2.71) \quad T = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 l^2$$

Mentre per l'energia potenziale si ha

$$mg \vec{e}_1 = -\frac{dU}{dx} \vec{e}_1 \Rightarrow +mg = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow U = -mgx + C \Rightarrow$$

$$(2.72) U = -mg l \cos\theta + C$$

Dunque l'energia totale si scrive

$$(2.73) E = T + U = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 l^2 - mgl \cos\theta + C$$

Questa energia deve mantenersi costante e dunque si ha

$$(2.74) \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 l^2 - g l \cos\theta = C \iff \dot{\theta}^2 - 2 \frac{g}{l} \cos\theta = C$$

Si ritrova così l'eq. 2.70. Procediamo per separazione di variabili.

$$\dot{\theta}^2 = C + 2 \frac{g}{l} \cos\theta \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{C + 2 \frac{g}{l} \cos\theta} \Rightarrow$$

$$(2.75) \frac{-d\theta}{\sqrt{C + 2 \frac{g}{l} \cos\theta}} = dt$$

Si osserva che con l'estrazione di radice e il segno scelto ci si limite alle fasi del moto in cui $\dot{\theta} > 0$, nel riferimento anzidetto. Supponiamo ora che in corrispondenza dell'angolo θ_0 il pendolo abbia velocità nulla, allora

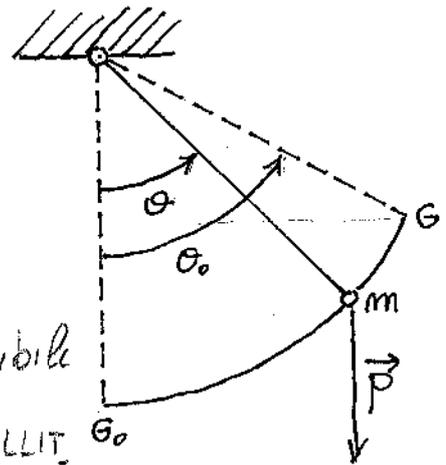
$$0 = \sqrt{C + \frac{2g}{l} \cos \theta_0} \Rightarrow 0 = C + \frac{2g}{l} \cos \theta_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = -\frac{2g}{l} \cos \theta_0 \Rightarrow$$

$$(2.76) \quad \frac{-d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0)}} = dt \iff t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{-d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \theta_0)}}$$

La (2.76) vale per una semioscillazione, in particolare per quella indicata in figura, per la quale $\dot{\theta} < 0$. Si consideri ora l'integrale che compare in (2.76):

$$(2.77) \quad \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta_0}}$$



Si ha che questo integrale non è esprimibile in termini finiti, ovvero è un integrale ELLITTICO, come si dice. Se in particolare vogliamo ricavare da (2.76) il valore del periodo T piuttosto che l'equazione del moto, allora dobbiamo considerare

$$(2.78) \quad T = 4 \int_{\theta_0}^0 \frac{-d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0)}} = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

Si consideri ora che

$$(2.77) \quad \sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \Rightarrow \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} \Rightarrow$$

$$2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Dunque abbiamo trovato

$$(2.79) \quad \begin{cases} \cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ \cos \theta_0 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \end{cases}$$

Si ponga ora

$$(2.80) \quad \begin{cases} \sin \frac{\theta_0}{2} = k \\ \sin \frac{\theta}{2} = k \sin \varphi \end{cases}$$

Sostituendo le (2.80) nelle (2.79) abbiamo

$$\begin{cases} \cos \theta = 1 - 2k^2 \sin^2 \varphi \\ \cos \theta_0 = 1 - 2k^2 \end{cases} \Rightarrow \cos \theta - \cos \theta_0 = \cancel{1} - 2k^2 \sin^2 \varphi - \cancel{1} + 2k^2 = 2k^2(1 - \sin^2 \varphi) \Rightarrow$$

$$(2.81) \quad \boxed{\cos \theta - \cos \theta_0 = 2k^2 \cos^2 \varphi = 2k^2(1 - \sin^2 \varphi)}$$

Si ottiene che dalla seconda delle (2.80) segue

$$(2.82) \quad \frac{d \sin \frac{\theta}{2}}{d \varphi} = k \cos \varphi$$

D'altra parte abbiamo anche

$$(2.83) \quad \frac{d \operatorname{sim} \theta/2}{d\varphi} = \frac{d \operatorname{sim} \theta/2}{d\theta} \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\cos \theta}{2} \frac{1}{2} \frac{d\theta}{d\varphi}$$

Confrontando le (2.82), (2.83) abbiamo

$$k \operatorname{eos} \varphi = \frac{\cos \theta}{2} \frac{1}{2} \frac{d\theta}{d\varphi} \Rightarrow d\varphi = \frac{\frac{1}{2} \cos \theta}{k \operatorname{eos} \varphi} d\theta \Rightarrow$$

$$(2.84) \quad \boxed{d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\cos \theta}{2} \frac{1}{k \operatorname{eos} \varphi} d\theta} \Rightarrow d\theta = \frac{2k \operatorname{eos} \varphi d\varphi}{\cos \theta/2}$$

Sostituendo le (2.81), (2.84) nell'integrale in (2.78) si ha

$$(2.85) \quad \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \int_0^{\theta_0} \frac{2k \operatorname{eos} \varphi d\varphi}{\cos \frac{\theta}{2}} \frac{1}{\sqrt{2} k \operatorname{eos} \varphi} = \sqrt{2} \int_0^{\theta_0} \frac{d\varphi}{\operatorname{eos} \theta/2}$$

D'altra parte la seconda delle (2.80) porge

$$(2.86) \quad \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \operatorname{sim}^2 \frac{\theta}{2}} = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sim}^2 \varphi}$$

Sostituendo le (2.86) nella (2.85) si ha

$$(2.87) \quad \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \sqrt{2} \int_0^{\theta_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sim}^2 \varphi}}$$

Per gli estremi di integrazione si consideri che

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 \Rightarrow \sin \frac{\theta_0}{2} = \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \varphi_1 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \\ \theta = 0 \Rightarrow \sin 0 = \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \varphi \Rightarrow \varphi = 0 \end{cases}$$

Dunque l'integrale (2.87) si scrive

$$(2.88) \quad \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (\text{con } k = \sin \frac{\theta_0}{2})$$

Si ricordi ora il seguente sviluppo in serie per $x \in]-1, 1[$ ^{$a \in \mathbb{R}$}

$$(2.89) \quad (1+x)^a = \sum_0^{\infty} \binom{a}{k} x^k = \sum_0^{\infty} \frac{a!}{k!(a-k)!} x^k = 1 + \frac{a!}{(a-1)!} x +$$

$$+ \frac{a!}{2!(a-2)!} x^2 + \frac{a!}{3!(a-3)!} x^3 + \frac{a!}{4!(a-4)!} x^4 + \dots$$

Dunque abbiamo anche

$$(2.90) \quad (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} = 1 + (-1/2)(-k^2 \sin^2 \varphi) +$$

$$+ \frac{(-1/2)(-1/2-1)(-k^2 \sin^2 \varphi)^2}{2!} + \frac{(-1/2)(-1/2-1)(-1/2-2)(-k^2 \sin^2 \varphi)^3}{3!} +$$

$$+ \frac{(-1/2)(-1/2-1)(-1/2-2)(-1/2-3)(-k^2 \sin^2 \varphi)^4}{4!} + \dots$$

Quindi fermiamoci al 5° addendo si ha

$$(2.91) \quad (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi + \frac{3}{8} k^4 \sin^4 \varphi + \\ + \frac{15}{48} k^6 \sin^6 \varphi + \frac{105}{384} k^8 \sin^8 \varphi$$

Ne segue che per l'integrale in (2.88) possiamo scrivere

$$(2.92) \quad \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \approx \int_0^{\pi/2} d\varphi + \frac{1}{2} k^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi + \\ + \frac{3}{8} k^4 \int_0^{\pi/2} \sin^4 \varphi d\varphi + \frac{15}{48} k^6 \int_0^{\pi/2} \sin^6 \varphi d\varphi + \frac{105}{384} k^8 \int_0^{\pi/2} \sin^8 \varphi d\varphi$$

Dunque abbiamo trovato che

$$(2.93) \quad T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \sqrt{k} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \approx \\ \approx 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{k^2}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{3k^4}{8} \int_0^{\pi/2} \sin^4 \varphi d\varphi + \right. \\ \left. + \frac{15k^6}{48} \int_0^{\pi/2} \sin^6 \varphi d\varphi + \frac{105k^8}{384} \int_0^{\pi/2} \sin^8 \varphi d\varphi \right)$$

Si hanno per i seguenti integrali trigonometrici:

$$(2.94) \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \, d\varphi \cong 0,7853 \quad \int_0^{\pi/2} \sin^6 \varphi \, d\varphi \cong 0,4908$$
$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 \varphi \, d\varphi \cong 0,5890 \quad \int_0^{\pi/2} \sin^8 \varphi \, d\varphi \cong 0,4295$$

Sostituendo le (2.94) nelle (2.93) si ricave

$$(2.95) \quad T \cong 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \left(\frac{\pi}{2} + 0,3926 K^2 + 0,2208 K^4 + 0,1533 K^6 + 0,1174 K^8 \right)$$

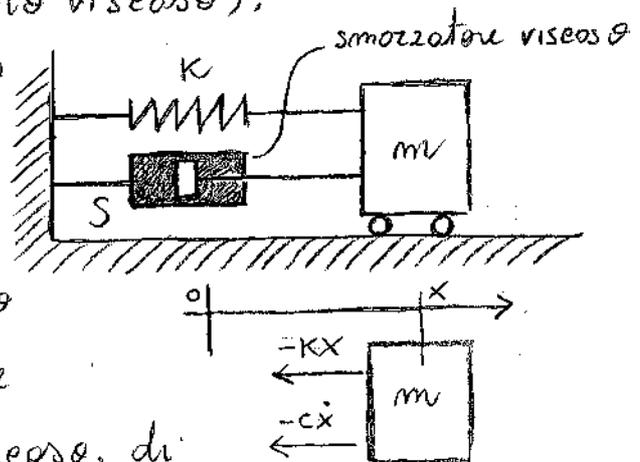
dove $K = \sin \theta_0/2$.

Capitolo tre. Vibrazioni libere smorzate in sistemi a un grado di libertà.

3.1. Smorzamento viscoso. Lo smorzamento per attrito esterno si dice viscoso quando è legato alle resistenze che il corpo incontra nel moto attraverso un corpo fluido non ideale (e cioè appunto viscoso).

Un esempio di smorzamento viscoso è quello che si ha con un dispositivo S (detto SMORZATORE VISCOSO) costituito

da un pistone che si muove immerso ed un fluido viscoso, di viscosità dinamica μ . Allora l'equilibrio meccanico delle masse poggia



$$(3.1) \quad m \ddot{x} = -Kx - cx' \iff m \ddot{x} + cx' + Kx = 0$$

dove la costante c è detta COEFFICIENTE DI SMORZAMENTO.
Il polinomio caratteristico delle 3.1 poggia

$$m\lambda^2 + c\lambda + K = 0 \iff \lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mK}}{2m} \iff$$

$$(3.2) \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \\ \lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \end{cases}$$

Dunque l'integrale generale delle (3.1) si scrive

$$(3.3) \quad x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Si definisce COEFFICIENTE DI SMORZAMENTO CRITICO

$$(3.4) \quad c_0 \triangleq \sqrt{4mk} = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{\frac{km}{m^2}} m = 2\omega_m m$$

essendo definita la PULSAZIONE NATURALE

$$(3.5) \quad \omega_m \triangleq \sqrt{k/m}$$

Si definisce inoltre il FATTORE DI SMORZAMENTO

$$(3.6) \quad \zeta \triangleq \frac{c}{c_0} = \frac{c}{2\omega_m m} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

Dalle (3.6), (3.4) si ha

$$\sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\frac{c^2}{4m^2 k} - 1} = \omega_m \sqrt{\frac{c^2}{4mk} - 1} =$$

$$= \omega_m \sqrt{\left(\frac{c}{\sqrt{4mk}}\right)^2 - 1} = \omega_m \sqrt{\left(\frac{c}{c_0}\right)^2 - 1} = \omega_m \sqrt{\xi^2 - 1}$$

Si consideri inoltre che

$$\xi \omega_m = \frac{c}{c_0} \omega_m = \frac{c}{2\omega_m m} \omega_m = \frac{c}{2m}$$

Dunque la (3.2) possiamo ora riscrivere come segue

$$(3.7) \begin{cases} \lambda_1 = -\xi \omega_m + \omega_m \sqrt{\xi^2 - 1} = -\omega_m (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \\ \lambda_2 = -\xi \omega_m - \omega_m \sqrt{\xi^2 - 1} = -\omega_m (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \end{cases}$$

e l'integrale generale (3.3) si scrive

$$(3.8) \begin{cases} x = C_1 e^{-\omega_m (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) t} + C_2 e^{-\omega_m (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) t} \\ \omega_m = \sqrt{k/m}, \quad \xi = \frac{c}{c_0}, \quad c_0 = 2\omega_m m \end{cases}$$

Si distinguono allora tre casi: $\xi > 1$, $\xi = 1$, $\xi < 1$.

3.2. Smorzamento viscoso con $\xi > 1$. In questo caso si ottengono esponenti λ_1, λ_2 negativi. Si ha

$$\begin{cases} \sqrt{(\zeta^2-1)} < \zeta \Rightarrow \zeta - \sqrt{\zeta^2-1} > 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0 \\ \sqrt{\zeta^2-1} + \zeta > 0 \Rightarrow \lambda_2 < 0 \end{cases}$$

Posto allora

$$(3.9) \quad \begin{cases} \alpha = \omega_m \zeta \\ \beta = \omega_m \sqrt{\zeta^2-1} \end{cases}$$

abbiamo l'integrale generale

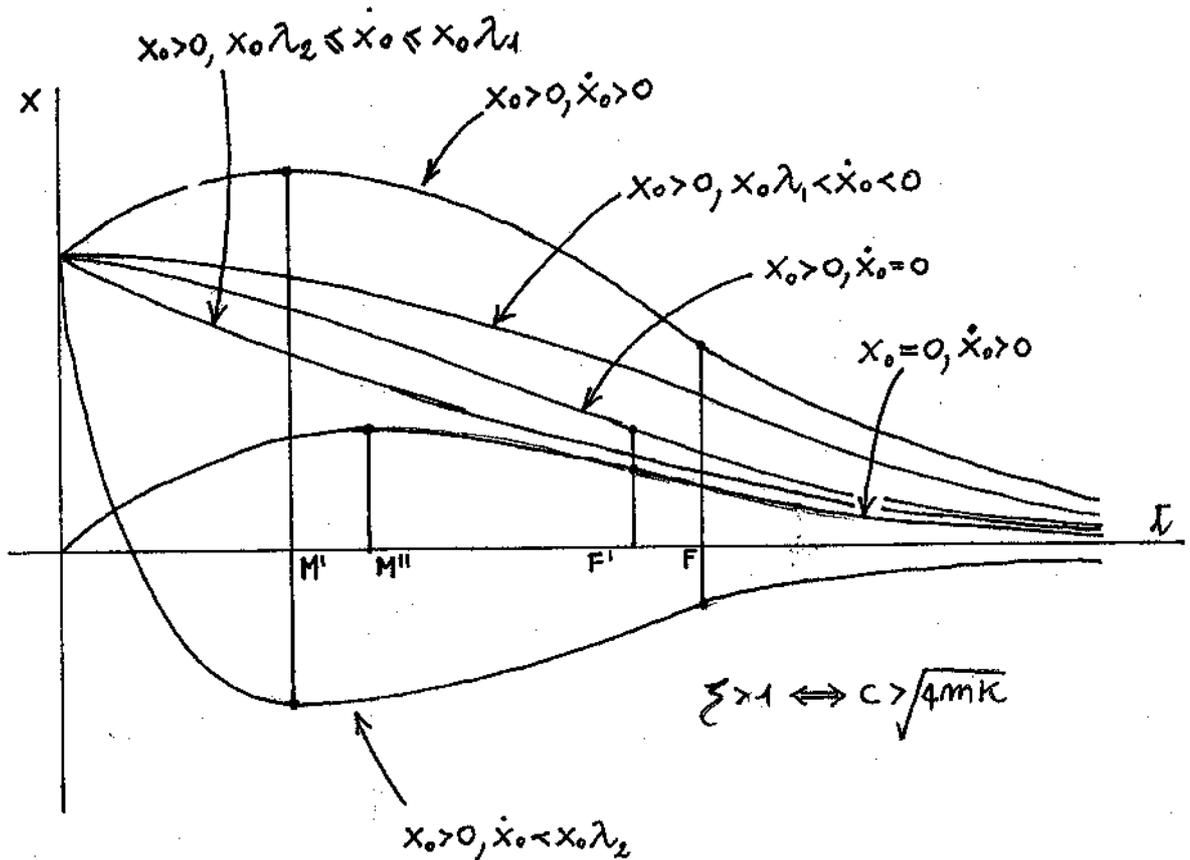
$$(3.10) \quad x = C_1 e^{-\alpha t - \beta t} + C_2 e^{-\alpha t + \beta t} = e^{-\alpha t} (C_1 e^{-\beta t} + C_2 e^{\beta t})$$

il quale può essere scritto anche

$$(3.11) \quad x = e^{-\alpha t} [(C_1 + C_2) \cosh \beta t + (C_1 - C_2) \sinh \beta t]$$

Questo tipo di moto è detto MOTO SMORZATO APERIODICO e il suo andamento è rappresentato di seguito per ogni possibile combinazione di condizioni iniziali.

3.3. Smorzamento viscoso con $\zeta = 1$. In questo caso le
3.7 pag. 68



$$F = \frac{1}{2\omega_m \sqrt{\zeta^2 - 1}} \ln \left[\frac{\lambda_2 (\dot{x}_0 2m\omega_m \sqrt{\zeta^2 - 1} + 2x_0 K + \dot{x}_0 C)}{\lambda_1 (\dot{x}_0 2m\omega_m \sqrt{\zeta^2 - 1} - 2x_0 K - \dot{x}_0 C)} \right]$$

$$F' = \frac{1}{2\omega_m \sqrt{\zeta^2 - 1}} \ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)$$

$$M'' = \frac{1}{2\omega_m \sqrt{\zeta^2 - 1}} \ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) = F'$$

$$M' = \frac{1}{2\omega_m \sqrt{\zeta^2 - 1}} \ln \left(- \frac{\dot{x}_0 2m\omega_m \sqrt{\zeta^2 - 1} + 2x_0 K + \dot{x}_0 C}{\dot{x}_0 2m\omega_m \sqrt{\zeta^2 - 1} - 2x_0 K - \dot{x}_0 C} \right)$$

$$(3.12) \begin{cases} \lambda_1 = -\omega_m \\ \lambda_2 = -\omega_m \end{cases}$$

Daunque il polinomio caratteristico della (3.1) ammette due soluzioni reali e coincidenti, per cui il suo integrale generale si scrive

$$(3.13) x = C_1 e^{-\omega_m t} + C_2 t e^{-\omega_m t}$$

$$\begin{cases} C_1 = x_0 \\ C_2 = -(\omega_m x_0 + \dot{x}_0) \end{cases}$$

Gli andamenti possibili in questo caso sono qualitativamente simili a quelli del caso $\zeta > 1$ e anche qui si parla di MOTO SMORZATO APERIODICO.

3.4. Esempio numerico di moto smorzato aperiodico per $\zeta = 1$.

Sie assegnato il seguente sistema smorzato:

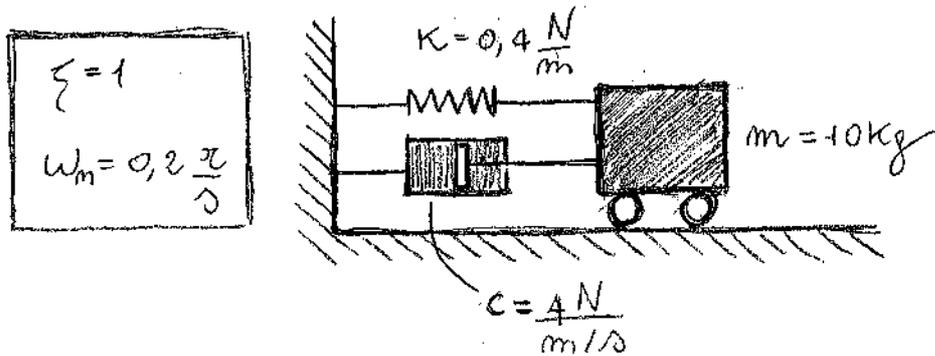
$$(3.14) \begin{cases} m = 10 \text{ kg} \\ \omega_m = 0,2 \frac{\pi}{s} \\ x_0 = 0 \\ \dot{x}_0 = 1 \text{ cm/s} \\ \zeta = 1 \end{cases}$$

Volendo ricavare i parametri c, k del sistema si considerino le (3.5), (3.6) le quali pongono

$$\begin{cases} \omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \zeta = \frac{c}{2\omega_m m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = m \omega_m^2 \\ c = 2\omega_m m \zeta \end{cases} \Rightarrow$$

$$(3.15) \begin{cases} k = 10 \text{ kg} \left(0,2 \frac{\pi}{s}\right)^2 = 10 \text{ kg} \frac{0,04 \pi^2}{s^2} = 0,4 \frac{\text{kg} \pi^2}{s^2} = 0,4 \frac{\text{N}}{\text{m}} \\ c = 2 \cdot 0,2 \frac{\pi}{s} \cdot 10 \text{ kg} \cdot 1 = 4 \frac{\text{kg}}{s} = 4 \text{ kg} \frac{\text{m}}{s^2 \text{ m}} = \frac{4 \text{ N}}{\text{m/s}} \end{cases}$$

Dunque abbiamo il seguente sistema viscoso.



L'equazione del moto è quella in (3.13) che si porta con le c.i. in (3.14):

$$(3.16) \begin{cases} x = C_1 e^{-\omega_m t} + C_2 t e^{-\omega_m t} \\ x_0 = 0 \\ \dot{x}_0 = 1 \frac{\text{cm}}{s} \end{cases}$$

Impongo le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned}
 x(0) = C_1 &\Rightarrow C_1 = x_0 = 0 \Rightarrow \dot{x} = C_2 \frac{d}{dt} (t e^{-w_m t}) = \\
 &= C_2 (e^{-w_m t} + t(-w_m) e^{-w_m t}) = C_2 (e^{-w_m t} - w_m t e^{-w_m t}) = \\
 &= C_2 (1 - w_m t) e^{-w_m t} \Rightarrow \dot{x}(0) = C_2 \Rightarrow C_2 = 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

Abbiamo trovato l'equazione oraria

$$(3.17) \quad x = 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}} t e^{-0,2\pi t} \iff \begin{cases} x = C_2 t e^{-w_m t}, & x_0 = 0 \text{ m} \\ C_2 = 10^{-2} \text{ m/s}, & \dot{x}_0 = 10^{-2} \text{ m/s} \\ w_m = 0,2\pi / \text{s} \end{cases}$$

Ne studio il grafico. Si osserva che non interseca l'asse del tempo, se non in $t=0$. Cerco il punto di massimo:

$$\dot{x} = C_2 (e^{-w_m t} + t(-w_m) e^{-w_m t}) \Rightarrow \dot{x} = 0 \iff 1 = t w_m \iff t = \frac{1}{w_m} \leftarrow 5 \text{ s}$$

Cerco il valore del massimo:

$$x\left(\frac{1}{w_m}\right) = C_2 \frac{1}{w_m} e^{-1} = C_2 \frac{1}{e w_m} = \frac{10^{-2} \text{ m/s}}{e \cdot 0,2\pi / \text{s}} = \frac{1}{20e} \frac{\text{m}}{\pi} \approx \frac{1,83 \text{ m}}{10^2}$$

Cerco il punto di flesso:

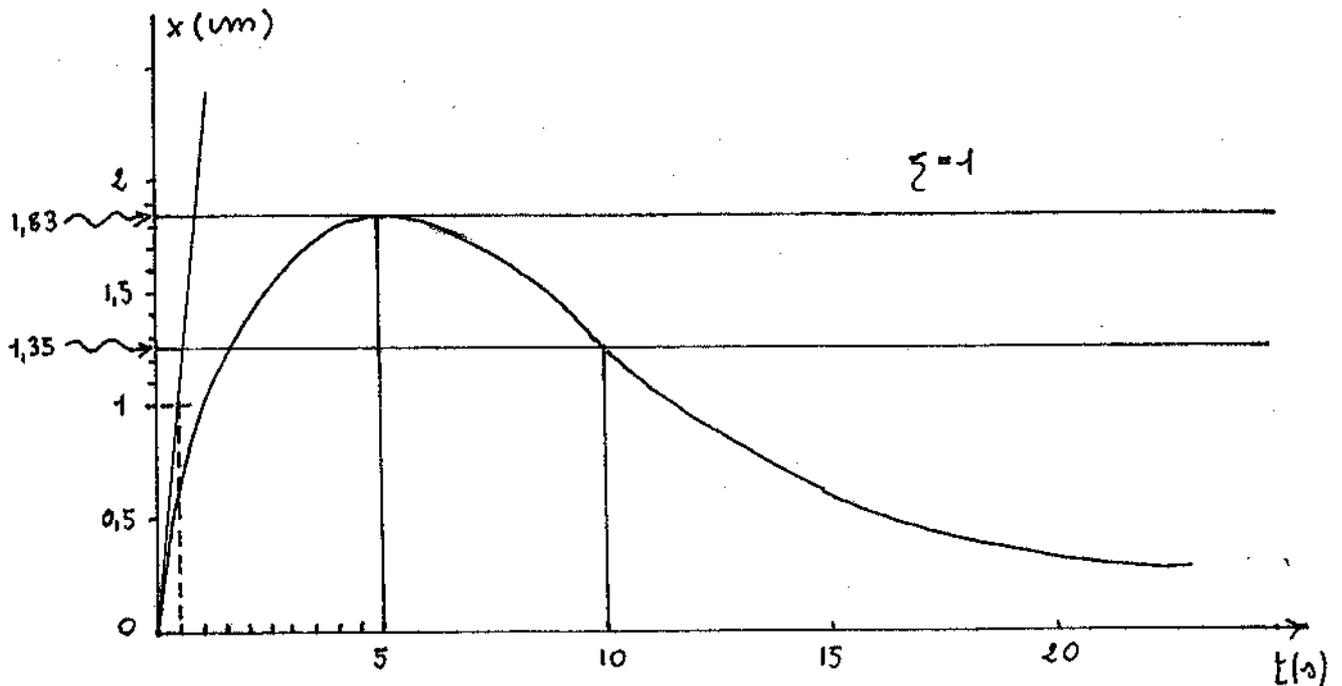
$$\begin{aligned}
 \dot{x} = C_2 e^{-w_m t} (1 - w_m t) &\Rightarrow \ddot{x} = C_2 \left[(-w_m) e^{-w_m t} (1 - w_m t) + \right. \\
 &\left. + e^{-w_m t} (-w_m) \right] = C_2 e^{-w_m t} (-w_m) (1 - w_m t + 1) = C_2 e^{-w_m t} (-w_m) (2 - w_m t) \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\ddot{x} = 0 \iff 2 - \omega_m t = 0 \iff t_F = \frac{2}{\omega_m} = 10 \text{ s}$$

Cerco il valore nel punto di flesso

$$x(t_F) = x\left(\frac{2}{\omega_m}\right) = 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \frac{2}{\omega_m} e^{-0,2 \frac{\pi}{\text{s}} \frac{2}{\omega_m}} \approx 1,35 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Si ottiene così il seguente grafico.



3.5. Esempio numerico di moto smorzato aperiodico per $\zeta > 1$.

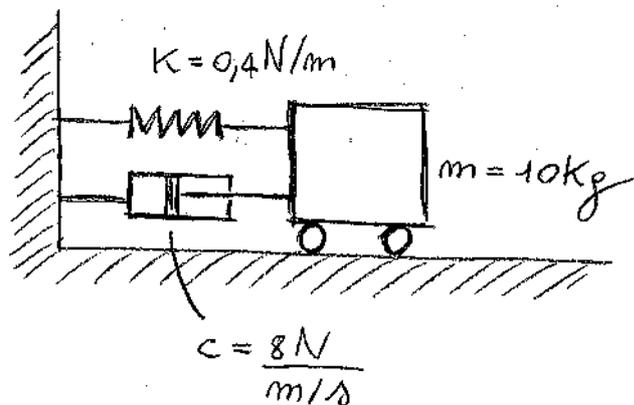
Si consideri un sistema con sterna morsa e pulsazione naturale di quello del paragrafo precedente, ma si assuma queste volte $\zeta = 2$. Dunque si ha

$$\begin{cases} m = 10 \text{ kg} \\ \omega_m = 0,2 \text{ 1/s} \\ x_0 = 0 \\ \dot{x}_0 = 10 \text{ cm/s} \\ \zeta = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{k}{m} = \omega_m^2 = \frac{0,04}{\text{s}^2} \implies k = 0,4 \frac{\text{N}}{\text{m}} \\ \frac{c}{2\sqrt{km}} = \zeta = 2 \implies c = 4\sqrt{km} = 8 \frac{\text{N}}{\text{m/s}} \end{cases}$$

Dunque si ha il seguente sistema meccanico:

$$\zeta = 2$$

$$\omega_n = 0,2 \frac{\pi}{s}$$



L'equazione del moto in questo caso è la (3.10) dove α, β sono dati da

$$(3.18) \quad \begin{cases} \alpha = 0,2 \frac{\pi}{s} \cdot 2 = 0,4 \pi / s \\ \beta = 0,2 \frac{\pi}{s} \sqrt{4-1} = 0,2 \frac{\pi}{s} \sqrt{3} \cong 0,34 \pi / s \end{cases}$$

Dunque abbiamo l'integrale generale

$$(3.19) \quad e^{-0,4 \frac{\pi}{s} t} \left(C_1 e^{-0,34 \frac{\pi}{s} t} + C_2 e^{0,34 \frac{\pi}{s} t} \right) = x$$

Impongo la condizione iniziale sullo spostamento:

$$0 = e^{-20} \left(C_1 e^{-\beta 0} + C_2 e^{\beta 0} \right) \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 0$$

Allora - usando la scrittura (3.11) abbiamo l'int. generale

$$(3.20) \quad x = e^{-at} (C_1 - C_2) \sinh \beta t = e^{-at} (C_1 - C_2) \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2}$$

Ricavo le derivate prime

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (C_1 - C_2) \left(-a \left(e^{-at} \right) \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2} + \left(e^{-at} \right) \frac{\beta e^{\beta t} + \beta e^{-\beta t}}{2} \right) = \\ &= (C_1 - C_2) \frac{e^{-at}}{2} \left(-a (e^{\beta t} - e^{-\beta t}) + \beta (e^{\beta t} + e^{-\beta t}) \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(3.21) \quad \dot{x} = (C_1 - C_2) \frac{e^{-at}}{2} \left(-a (e^{\beta t} - e^{-\beta t}) + \beta (e^{\beta t} + e^{-\beta t}) \right)$$

Impongo le condizioni al contorno sulla velocità:

$$\dot{x}(0) = (C_1 - C_2) \frac{1}{2} (+\beta \cdot 2) = (C_1 - C_2) \beta \Rightarrow$$

$$(3.22) \quad C_1 - C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\beta} = \frac{10^{-2} \text{ m/s}}{0,34 \pi / \text{s}} \cong 2,94 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Si ottiene dunque la soluzione

$$(3.23) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= e^{-at} (C_1 - C_2) \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2} = (C_1 - C_2) e^{-at} \sinh \beta t \\ \dot{x} &= (C_1 - C_2) \frac{e^{-at}}{2} \left(-a (e^{\beta t} - e^{-\beta t}) + \beta (e^{\beta t} + e^{-\beta t}) \right) = \\ &= (C_1 - C_2) e^{-at} \left(-a \sinh \beta t + \beta \cosh \beta t \right) \\ C_1 - C_2 &\cong 2,94 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ a &= 0,4 \pi / \text{s} \quad \beta = 0,34 \pi / \text{s} \end{aligned} \right.$$

- Ricavo anche le derivate seconde, che usano per individuare il punto di flesso.

$$\ddot{x} = (C_1 - C_2) \left[(-a) e^{-at} (-a \sinh pt + \beta \cosh pt) + e^{-at} (-a\beta \cosh pt + \beta^2 \sinh pt) \right] = (C_1 - C_2) e^{-at} \left[-a(-a \sinh pt + \beta \cosh pt) + \beta(-a \cosh pt + \beta \sinh pt) \right] \Rightarrow$$

○ (3.24) $\dot{x} = (C_1 - C_2) e^{-at} \left[a(a \sinh pt - \beta \cosh pt) + \beta(\beta \sinh pt - a \cosh pt) \right]$

Studio la soluzione in (3.23). Si ottiene che anche in questo caso l'unica radice si ha per $t=0$. Cerco il punto di massimo:

$$\begin{aligned} \dot{x} = 0 &\iff a \sinh pt = \beta \cosh pt \iff a \frac{e^{pt} - e^{-pt}}{2} = \beta \frac{e^{pt} + e^{-pt}}{2} \iff \\ a e^{pt} - \frac{a}{e^{pt}} &= \beta e^{pt} + \frac{\beta}{e^{pt}} \iff (a - \beta) e^{pt} = (a + \beta) \frac{1}{e^{pt}} \iff e^{2pt} = \frac{a + \beta}{a - \beta} \iff \end{aligned}$$

○ $2pt = \ln \frac{a + \beta}{a - \beta} \Rightarrow$

$$(3.25) t_M = \frac{1}{2\beta} \ln \frac{a + \beta}{a - \beta} = \frac{1}{2 \cdot 0,347} \ln \frac{0,4 + 0,34}{0,06} \approx 3,69 \text{ s}$$

Calcolo il valore di massimo

$$x_M = (C_1 - C_2) e^{-\alpha t_M} \sinh \beta t_M = 2,94 \cdot 10^{-2} e^{-0,4 \frac{\pi}{\Delta} 3,69 \Delta} \sinh 0,34 \frac{\pi}{\Delta} 3,69 \Delta = 1,08 \text{ cm}$$

Calcolo il punto di flesso:

$$\alpha^2 \sinh \beta t - \alpha \beta \cosh \beta t + \beta^2 \sinh \beta t - \alpha \beta \cosh \beta t = 0 \iff$$

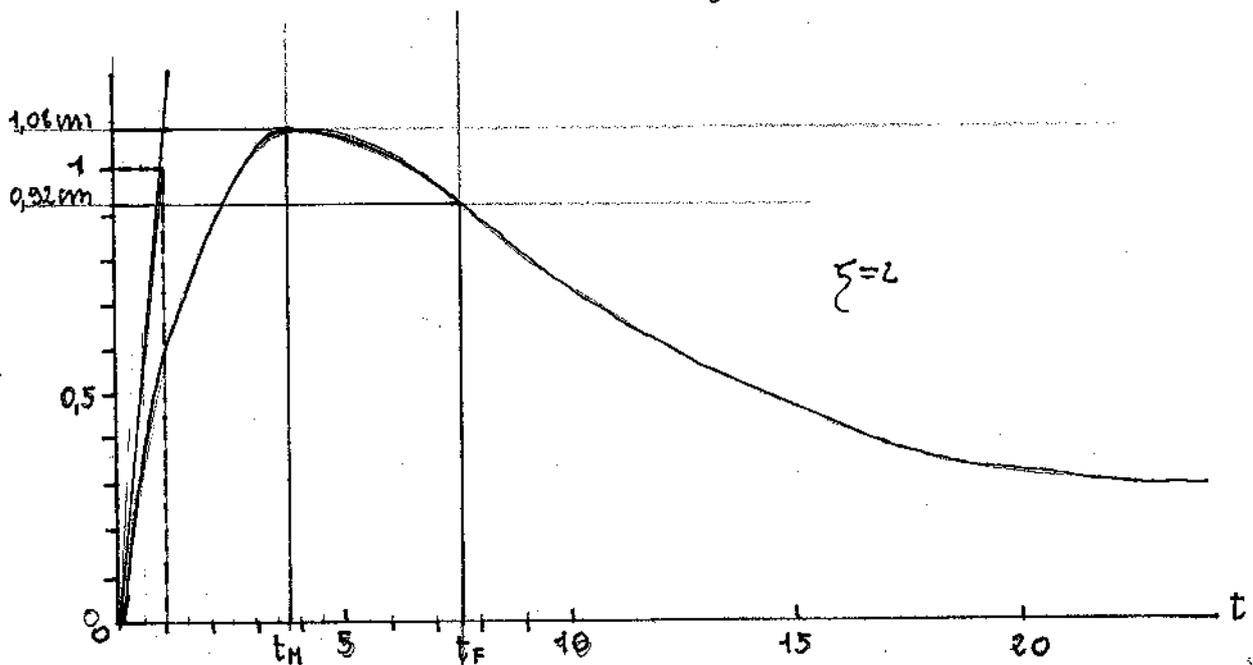
$$(\alpha^2 + \beta^2) \sinh \beta t = 2\alpha\beta \cosh \beta t \iff \frac{0,275}{\cancel{\beta}} \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{\cancel{\alpha}} = \frac{0,272}{\cancel{\beta}} \frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{\cancel{\alpha}} \iff$$

$$\frac{0,275 - 0,272}{\cancel{\beta}} e^{\beta t} = \frac{0,272 + 0,275}{\cancel{\beta}} e^{-\beta t} \iff 0,003 e^{\beta t} = 0,547 e^{-\beta t} \iff$$

$$e^{2\beta t} = \frac{0,547}{0,003} = 182,33 \iff 2\beta t_F = 5,20 \iff t_F = \frac{5,20}{2\beta} \cong 7,65 \Delta$$

Calcolo il valore nel punto di flesso.

$$x_F = 2,94 \cdot 10^{-2} \text{ m } e^{-0,4 \frac{\pi}{\Delta} 7,65 \Delta} \sinh 0,34 \frac{\pi}{\Delta} 7,65 \Delta = 0,92 \text{ cm}$$



3.6. Smorzamento viscoso con $\zeta < 1$. In questo caso le (3.7) si scrivono nel seguente modo

$$(3.26) \begin{cases} \lambda_1 = -\omega_m (\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2}) = -\omega_m \zeta + i\omega_m \sqrt{1-\zeta^2} \\ \lambda_2 = -\omega_m (\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2}) = -\omega_m \zeta - i\omega_m \sqrt{1-\zeta^2} \end{cases}$$

Si definisce allora la PULSAZIONE DEL MOTO SMORZATO

$$(3.27) \omega_s \triangleq \omega_m \sqrt{1-\zeta^2}$$

e le (3.26) si riscrivono

$$(3.28) \begin{cases} \lambda_1 = -\omega_m \zeta + i\omega_s \\ \lambda_2 = -\omega_m \zeta - i\omega_s \end{cases}$$

In questo caso l'integrale generale delle (3.1) è dato da

$$(3.29) x = e^{-\omega_m \zeta t} (A \cos \omega_s t + B \sin \omega_s t)$$

Si osserva che fatte le posizioni

$$(3.30) \begin{cases} A = C \sin \varphi \\ B = C \cos \varphi \end{cases}$$

si ha che

$$\begin{aligned} A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t &= C \sin \varphi \cos \omega_0 t + C \cos \varphi \sin \omega_0 t = \\ &= C \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

e dunque la (3.29) si risolve

$$(3.31) \quad x = e^{-\omega_m \zeta t} C \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Derivando si ha che

$$\begin{aligned} (3.32) \quad \dot{x} &= C \left(-\omega_m \zeta e^{-\omega_m \zeta t} \sin(\omega_0 t + \varphi) + e^{-\omega_m \zeta t} \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \right) = \\ &= C e^{-\omega_m \zeta t} \left[-\omega_m \zeta \sin(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \right] \end{aligned}$$

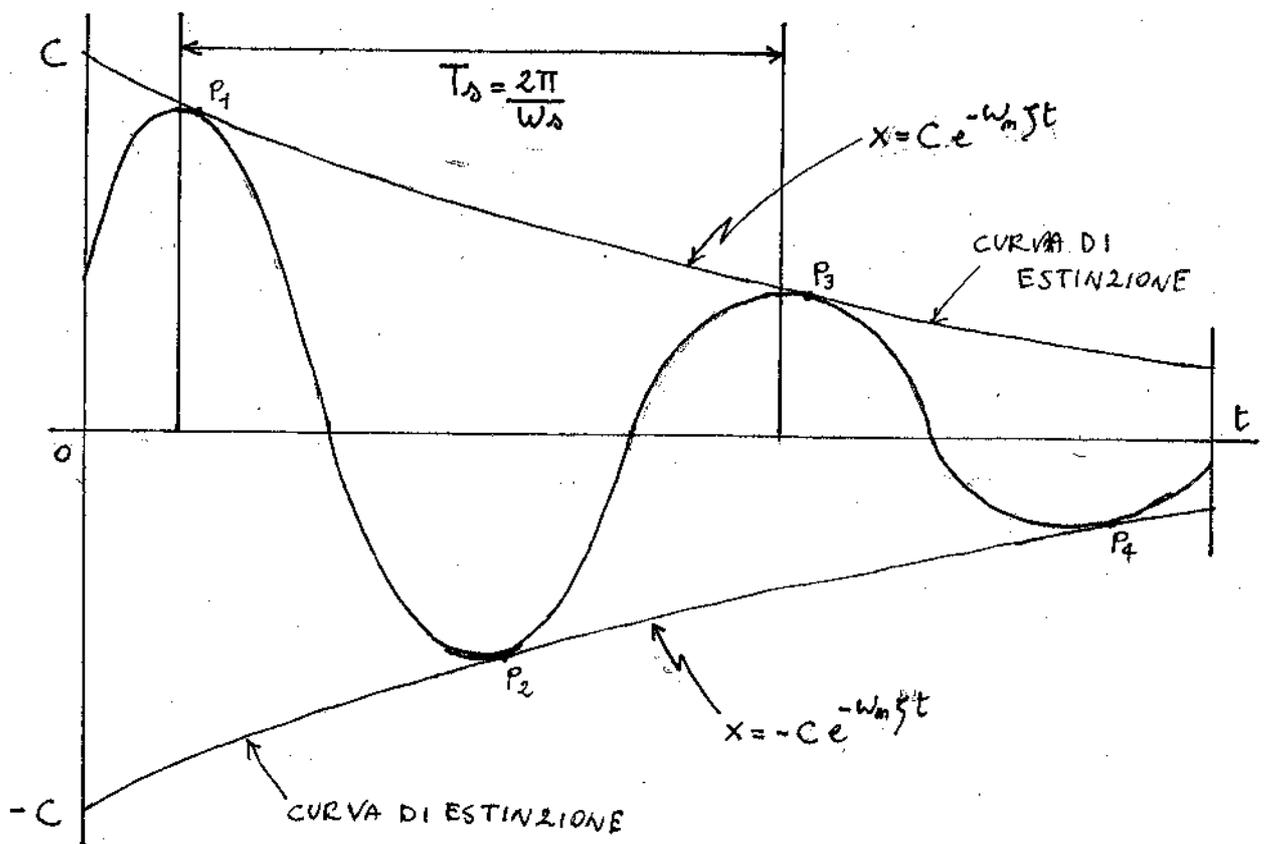
Imponendo le condizioni iniziali si ha

$$\begin{cases} x(0) = C \sin \varphi = x_0 \\ \dot{x}(0) = C (-\omega_m \zeta \sin \varphi + \omega_0 \cos \varphi) = \dot{x}_0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} C \sin \varphi = x_0 \\ -\omega_m \zeta x_0 + C \omega_0 \cos \varphi = \dot{x}_0 \end{cases} \iff \begin{cases} C \sin \varphi = x_0 \\ C \cos \varphi = \frac{\dot{x}_0 + \omega_m \zeta x_0}{\omega_0} \end{cases} \iff$$

$$(3.33) \begin{cases} t_m \varphi = \frac{x_0 \omega_s}{\dot{x}_0 + \omega_m \int x_0} \\ C = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + \omega_m \int x_0)^2}{\omega_s^2}} \end{cases}$$

La rappresentazione qualitativa delle soluzioni (3.31) è qui riportata.



I punti P_1, P_2, \dots sono quelli in cui la funzione oscillante (3.31) condivide la tangente con le due curve di estinzione. Si segnala che questi punti si discostano da quelli di estremo relativo

della funzione originale. Se consideriamo infatti la (3.32) posso ricavare i punti di estremo relativo:

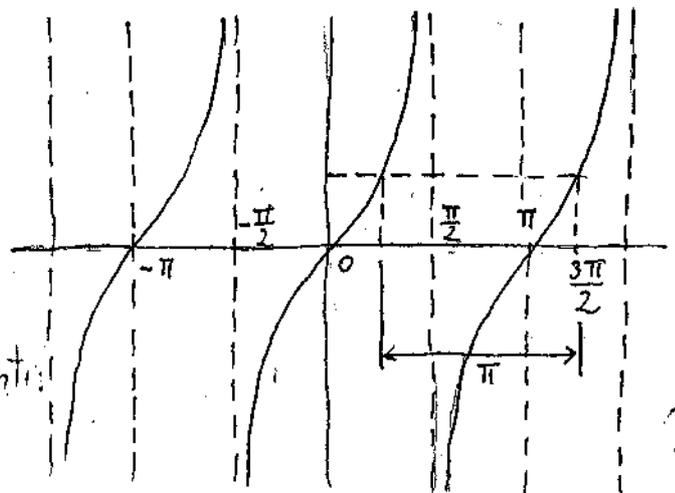
$$\dot{X} = 0 \iff -w_m \zeta \sin(\omega_s t + \varphi) + w_s \cos(\omega_s t + \varphi) = 0 \iff$$

$$\frac{w_m \zeta}{w_s} = \frac{\cos(\omega_s t + \varphi)}{\sin(\omega_s t + \varphi)} \iff \frac{w_s}{\zeta w_m} = \tan(\omega_s t + \varphi) \iff$$

$$\tan(\omega_s t + \varphi) = \frac{w_m \sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta w_m} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \iff \omega_s t + \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

$$\iff \omega_s t = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) - \varphi \iff t = \frac{1}{\omega_s} \left(\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) - \varphi \right)$$

Tenendo presente l'andamento delle funzione tangente e delle sue inverse abbiamo più precisamente che i punti di estremo relativo si raggiungono negli istanti:



$$\omega_s t + \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) + k\pi \implies$$

$$\omega_s t = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) + k\pi - \varphi \implies$$

$$(3.33) \quad t_{ei} = \frac{1}{\omega_s} \left(\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) + k\pi - \varphi \right)$$

Si consideri poi che $2\pi/T_s = \omega_s \implies \frac{1}{\omega_s} = \frac{T_s}{2\pi}$ e dunque si ha

$$(3.34) \quad t_{xz} = \frac{T_0}{2\pi} \left[\arcsin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) - \varphi \right] + \frac{k T_0}{2} \quad k=0,1,2,\dots$$

Dobbiamo invece ora considerare i punti in cui $x(t)$ egua-
glia le due curve di estinzione. Si ha

$$x = e^{-\frac{\omega_n \zeta t}{2}} \left(\sin(\omega_0 t + \varphi) \right) = e^{-\frac{\omega_n \zeta t}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \sin(\omega_0 t + \varphi) \Leftrightarrow$$

$$\omega_0 t + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi h \quad \Leftrightarrow \quad \omega_0 t = \frac{\pi}{2} + 2\pi h - \varphi \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi h - \varphi \right)$$

$$\Leftrightarrow t_H = \frac{T_0}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi h - \varphi \right) = \frac{T_0}{4} + T_0 h - \frac{T_0 \varphi}{2\pi}$$

$$x = e^{-\frac{\omega_n \zeta t}{2}} \left(\sin(\omega_0 t + \varphi) \right) = -e^{-\frac{\omega_n \zeta t}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_0 t + \varphi = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m \Leftrightarrow$$

$$\omega_0 t = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m - \varphi \quad \Leftrightarrow \quad t_m = \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi m - \varphi \right) = \frac{T_0}{2\pi} \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi m - \varphi \right) =$$

$$= \frac{T_0 3}{4} + T_0 m - \frac{\varphi T_0}{2\pi}$$

Quindi abbiamo gli istanti relativi ai punti P superiori e
inferiori. Si ha

$$(3.35) \quad \begin{cases} t_H = T_0 \left(\frac{1}{4} + h \right) - \frac{T_0 \varphi}{2\pi} & h = 0, 1, 2, 3, \dots \\ t_m = T_0 \left(\frac{3}{4} + m \right) - \frac{T_0 \varphi}{2\pi} & m = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Per accoppiare le due espressioni e confrontarle con le (3.34)

si consideri quanto segue:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \frac{1}{4} + h \right\} &= \left\{ \frac{1}{4} + \frac{4h}{4} \right\} = \left\{ \frac{1+4h}{4} \right\} = \overset{\frac{1}{4}}{\uparrow} \frac{1+4}{4}, \overset{\frac{5}{4}}{\downarrow} \frac{1+8}{4}, \overset{\frac{9}{4}}{\downarrow} \frac{1+12}{4}, \dots \\
 \left\{ \frac{3}{4} + m \right\} &= \left\{ \frac{3}{4} + \frac{4m}{4} \right\} = \left\{ \frac{3+4m}{4} \right\} = \overset{\frac{3}{4}}{\uparrow} \frac{3+4}{4}, \overset{\frac{7}{4}}{\downarrow} \frac{3+8}{4}, \overset{\frac{11}{4}}{\downarrow} \frac{3+12}{4}, \dots \\
 \Downarrow \\
 \left\{ \frac{2k+1}{4} \right\} &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \dots \quad k=0,1,2,\dots
 \end{aligned}$$

Dunque i punti P_k si hanno in

$$(3.36) \quad t_p = T_0 \left(\frac{2k+1}{4} \right) - \frac{T_0 \varphi}{2\pi} \quad k=1,2,3,\dots$$

Confrontando le (3.36) con le (3.34) si ha

$$\begin{aligned}
 t_p - t_{ez} &= T_0 \left(\frac{2k+1}{4} \right) - \frac{T_0 \varphi}{2\pi} - \frac{T_0}{2\pi} \left[\operatorname{tm}^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) - \varphi \right] - \frac{kT_0}{2} = \\
 &= T_0 \left(\frac{2k+1}{4} \right) - \frac{kT_0}{2} - \frac{T_0 \varphi}{2\pi} - \frac{T_0}{2\pi} \operatorname{tm}^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) + \frac{T_0 \varphi}{2\pi} = \\
 &= \frac{T_0 \cancel{2k}}{\cancel{4}2} + \frac{T_0}{4} - \frac{kT_0}{2} - \frac{T_0}{2\pi} \operatorname{tm}^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) = \\
 &= \frac{T_0}{4} - \frac{T_0}{2\pi} \operatorname{tm}^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)
 \end{aligned}$$

Quindi abbiamo trovato che le distanze temporali fra l'estremo relativo e il successivo punto P è data da

$$(3.37) \quad \Delta t = \frac{T_s}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{42} - \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right) = \frac{T_s}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right)$$

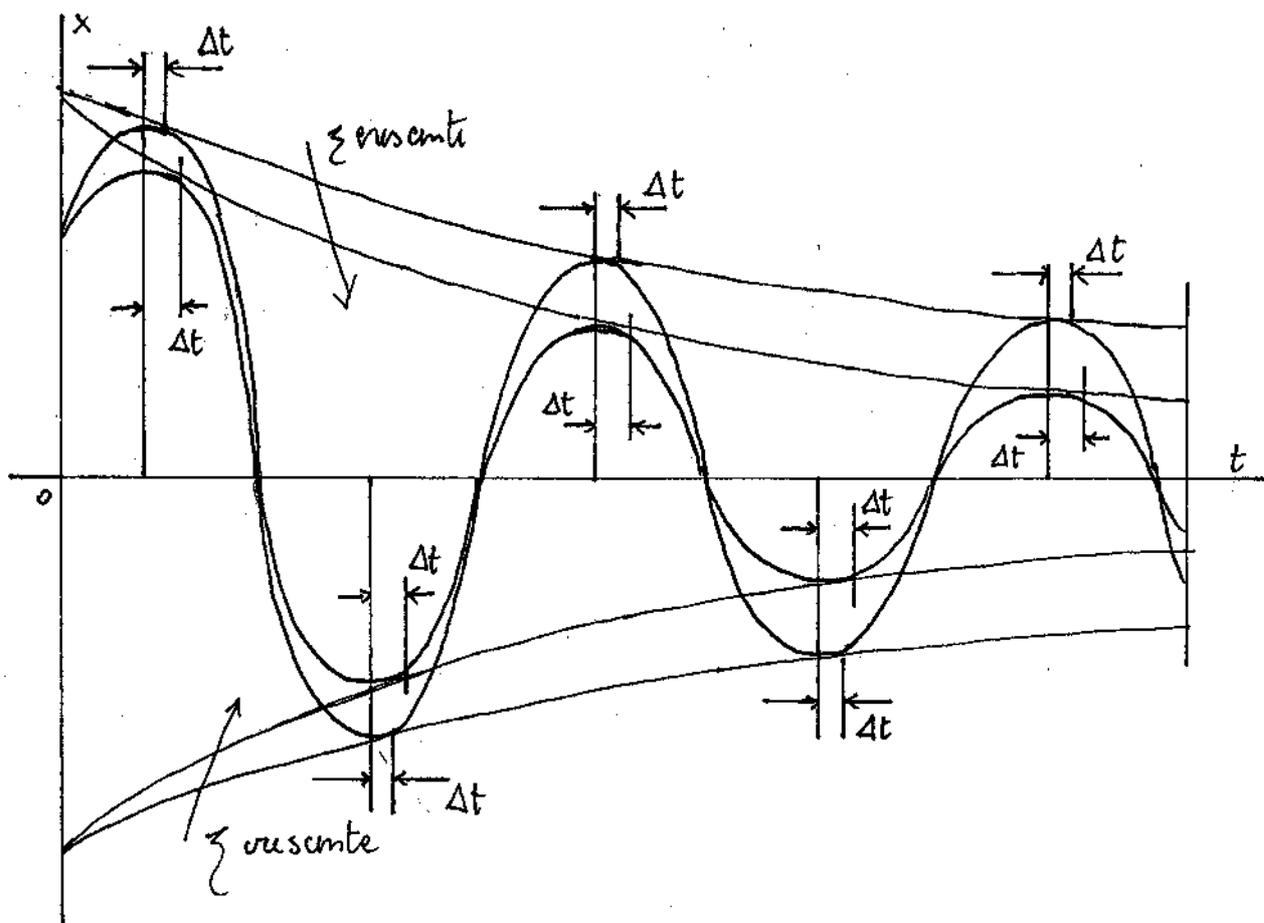
Per smorzamento nullo $\xi = 0$ si ha correttamente

$$\Delta t = \frac{T_s}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\infty) \right) = \frac{T_s}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

Si osserva che Δt è funzione di ξ - a parte del resto. Studiamo tale dipendenza funzionale:

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi}{\omega_m \sqrt{1-\xi^2}} \implies \Delta t = \frac{1}{\omega_m \sqrt{1-\xi^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right)$$

Si osserva allora che tale valore nasce per $\xi \in]0, 1[$, quindi aumentando lo smorzamento (e cioè aumentando e essendo invariato il resto) aumenta le distanze fra gli estremi relativi e i punti P, come indicato in figura.



3.7. Decremento logaritmico. Considerando le curve di estinzione del caso delle oscillazioni periodiche smorzate ($\zeta < 1$) si consideri il rapporto fra le ampiezze di due oscillazioni distanziate da un tempo T_s :

$$\begin{cases} x(t) = C e^{-\omega_n \zeta t} \sin(\omega_n t + \varphi) \\ x(t+T_s) = C e^{-\omega_n \zeta (t+T_s)} \sin(\omega_n (t+T_s) + \varphi) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = C e^{-\omega_m \zeta t} \sin(\omega_s t + \varphi) \\ x(t+T_s) = C e^{-\omega_m \zeta(t+T_s)} \sin(\omega_s t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow$$

$$(3.38) \frac{x(t)}{x(t+T_s)} = \frac{e^{-\omega_m \zeta t}}{e^{-\omega_m \zeta t} e^{-\omega_m \zeta T_s}} = e^{\omega_m \zeta T_s}$$

È bene si definisce DECREMENTO LOGARITMICO la grandezza

$$(3.39) \Theta \triangleq \ln \frac{x(t)}{x(t+T_s)} = \ln e^{\omega_m \zeta T_s} = \omega_m \zeta T_s$$

Si consideri per le 3.27 e si ha

$$(3.40) \Theta = \omega_m \zeta \frac{2\pi}{\omega_s} = 2\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Dunque - supponendo di avere a disposizione il tracciato di una oscillazione aperiodica smorzata, è possibile ricavare Θ dalle sue letture e poi - ricavare ζ attraverso le (3.40), infatti:

$$\begin{aligned} \Theta^2 &= \frac{4\pi^2 \zeta^2}{1-\zeta^2} \Rightarrow \Theta^2(1-\zeta^2) = 4\pi^2 \zeta^2 \Rightarrow \Theta^2 - \Theta^2 \zeta^2 = 4\pi^2 \zeta^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Theta^2 = (\Theta^2 + 4\pi^2) \zeta^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(3.41) \quad \xi = \frac{\sqrt{\theta^2}}{\sqrt{\theta^2 + 4\pi^2}} = \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2 + 4\pi^2}}$$

Si consideri che la misura di θ definita in (3.39) può essere disagiata. A tal proposito si consideri allora che

$$\begin{cases} x(t) = C e^{-\omega_m \xi t} \sin(\omega_s t + \varphi) \\ x(t+mT_s) = C e^{-\omega_m \xi (t+mT_s)} \sin(\omega_s t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x(t)}{x(t+mT_s)} = \frac{C e^{-\omega_m \xi t} \sin(\omega_s t + \varphi)}{C e^{-\omega_m \xi (t+mT_s)} \sin(\omega_s t + \varphi)} = e^{\omega_m \xi m T_s} \Rightarrow$$

$$\ln \frac{x(t)}{x(t+mT_s)} = \ln e^{\omega_m \xi m T_s} = m \omega_m \xi T_s = m \theta$$

Quindi abbiamo provato che

$$(3.42) \quad \theta = \frac{1}{m} \ln \frac{x(t)}{x(t+mT_s)}$$

Si osserva che il rapporto $x(t)/x(t+mT_s)$ può essere più agevole da misurare su un tracciato rispetto al rapporto $x(t)/x(t+T_s)$.

Capitolo quattro. Vibrazioni forzate per sistemi a un grado di libertà

4.1. Introduzione. La DEFINIZIONE DI VIBRAZIONI FORZATE prevede che

(4.1) "il sistema sia sottoposto a fattori esterni (cinematici e/o dinamici) variabili nel tempo con funzione periodica (ad es. armonica), non periodica (di lunga o breve durata), casuale".

In questo contesto considereremo esclusivamente

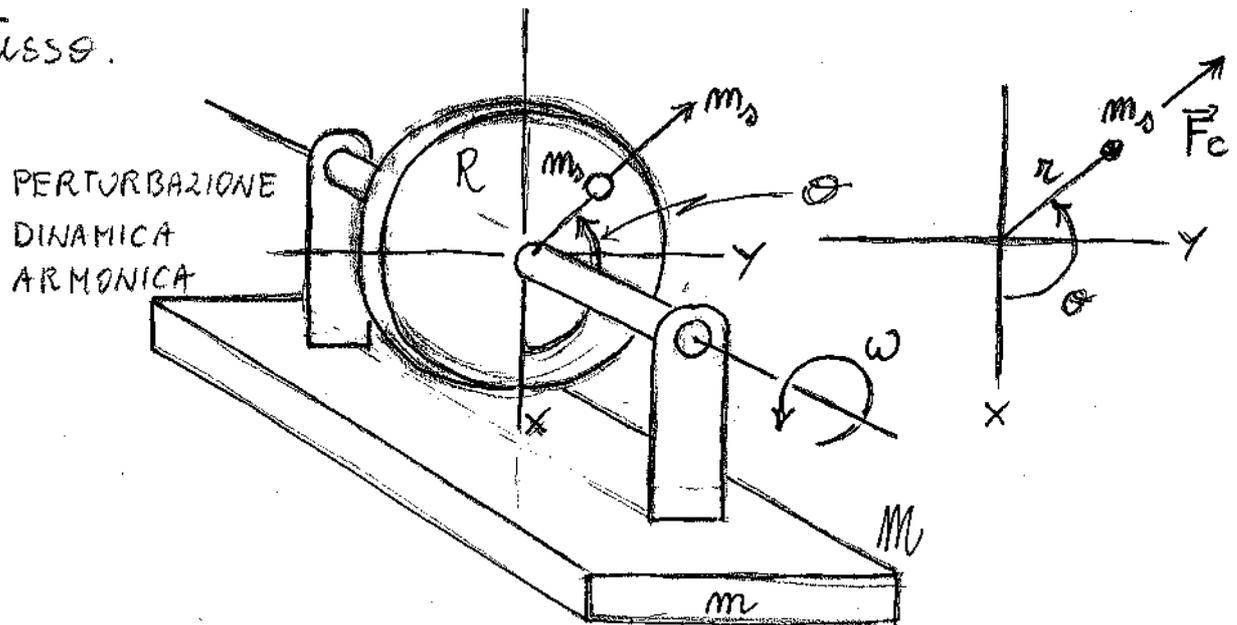
(4.2) "un fattore esterno dinamico (FORZA ECCITATRICE) ad andamento armonico;"

oppure

(4.3) "un fattore esterno cinematico (PERTURBAZIONE CINEMATICA)".

La forza eccitatrice è anche detta PERTURBAZIONE DINAMICA

Si consideri un rotore con una massa sbilanciata m_s posta ad una distanza r dal centro del rotore stesso.



Se la velocità di rotazione è costante la massa m è sottoposta alla sollecitazione di inerzia

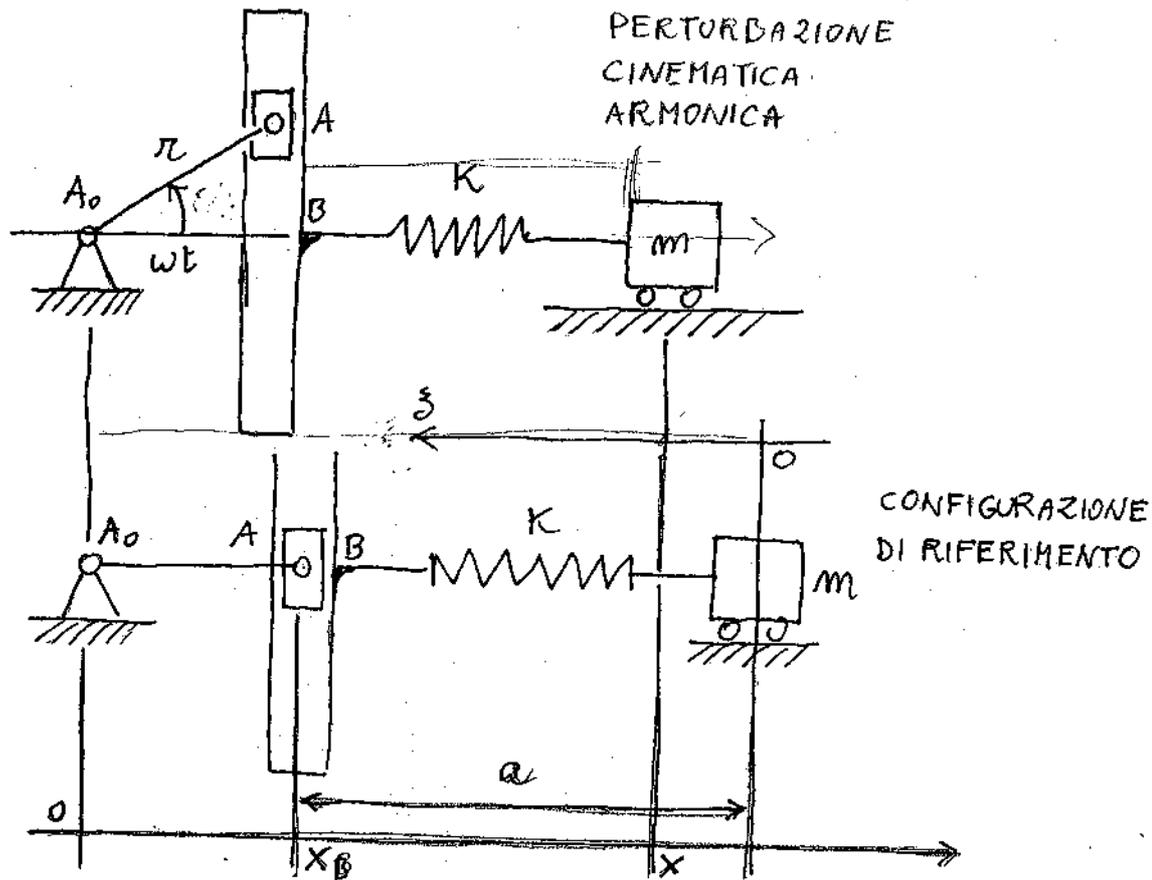
$$(4.4) \vec{F}_c = m_s \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} (\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j})$$

Dunque il rotore R trasmette ad M (che può essere lo statoro di un motore) una forza eccitatrice di componenti verticali

$$(4.5) F_{cx} = m_s \dot{\theta}^2 r \cos\theta$$

che rappresenta dunque un caso di perturbazione dinamica

mecc armonica. Si consideri invece il seguente sistema meccanico, in cui la massa m è collegata attraverso una molla - al meccanismo SCOTCH-YOKE descritto nel paragrafo 11.13.



Se assumo la configurazione di riferimento indicata in figura, allora l'elongazione della molla vale

$$(4.6) \begin{cases} \delta = (X - X_B) - a \\ X_B = r \cos \omega t \end{cases} \Rightarrow \delta = (X - r \cos \omega t) - a = X - r \cos \omega t - a$$

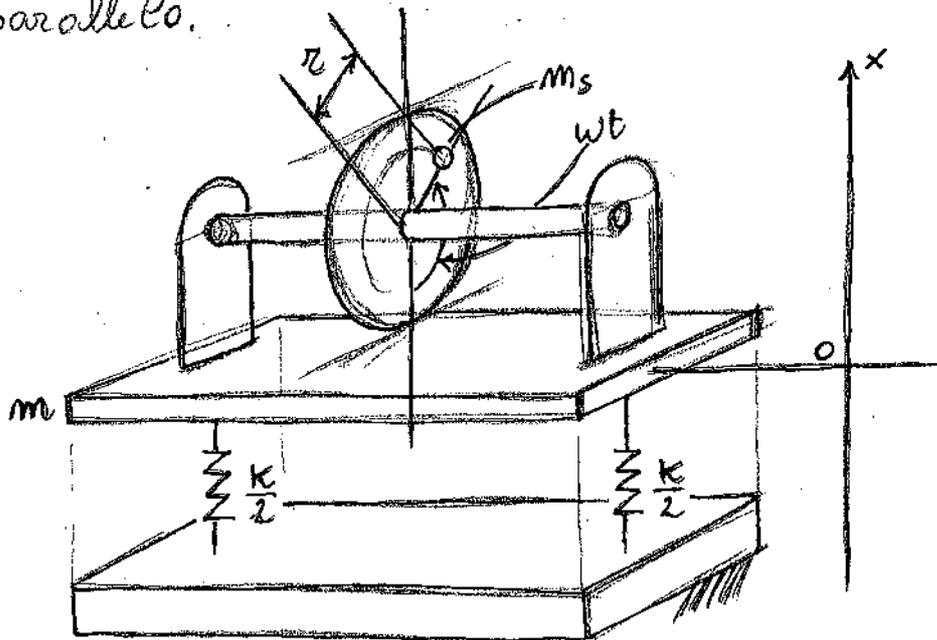
Se invece si ammette come sistema di riferimento l'asse ξ con origine nelle posizione neutre delle molle nella sua configurazione di equilibrio, segue che l'elongazione è

$$\begin{cases} \delta = (\xi_B - \xi) - a = a + (r - r \cos \omega t) - \xi - a = r - r \cos \omega t - \xi \\ \xi_B = a + (r - r \cos \omega t) \end{cases}$$

↓

$$(4.7) \quad \delta = r(1 - \cos \omega t) - \xi$$

4.2. Equazione newtoniana. Si consideri il sistema seguente, ottenuto da quello del precedente paragrafo con aggiunta di due molle in parallelo.



In tal caso il bilancio alle traslazioni delle forze, lungo l'asse x

3 Indicate in figura pinge

$$-m\ddot{x} - \left(\frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa}{2}\right)x + F_{cx} = 0 \Leftrightarrow -m\ddot{x} - \kappa x - m_2 r \omega^2 \cos(\omega t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(4.8) \quad m\ddot{x} + \kappa x = -m_2 r \omega^2 \cos(\omega t)$$

Analogamente il bilancino meccanico del sistema con SCOTCH-YOKE pinge

3

$$-m\ddot{z} + \kappa(r(1 - \cos \omega t) - z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-m\ddot{z} + \kappa r(1 - \cos \omega t) + \kappa z = 0 \Leftrightarrow$$

$$-m\ddot{z} - \kappa z + \kappa r(1 - \cos \omega t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(4.9) \quad m\ddot{z} + \kappa z = \kappa r(1 - \cos \omega t)$$

Ponendo poi $z - r = x$ abbiamo

3

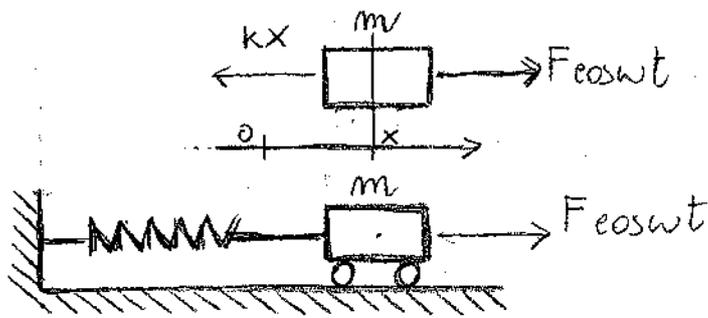
$$m\ddot{z} + \kappa z - \kappa r = -\kappa r \cos \omega t \Leftrightarrow$$

$$m\ddot{z} + \kappa(z - r) = -\kappa r \cos \omega t \Leftrightarrow$$

$$(4.10) \quad m\ddot{x} + \kappa x = -\kappa r \cos \omega t$$

Vediamo se è possibile considerare un sistema massa-molle che sia soggetto alle medesime equazioni.

3



Il bilancio delle forze lungo l'asse x porta

$$-m\ddot{x} - kx + F \cos \omega t = 0 \Rightarrow$$

$$(4.11) \quad m\ddot{x} + kx = -F \cos \omega t$$

Per l'integrale particolare delle (4.11) si considera la funzione $x = X \cos \omega t$. Sostituendole nelle (4.11) si ha

$$x = X \cos \omega t \Rightarrow \dot{x} = -X \omega \sin \omega t \Rightarrow \ddot{x} = -X \omega^2 \cos \omega t \Rightarrow$$

$$-mX \omega^2 \cos \omega t + kX \cos \omega t = F \cos \omega t \Rightarrow$$

$$(-m\omega^2 + k)X \cos \omega t = F \cos \omega t \Rightarrow X = \frac{F}{(k - m\omega^2)}$$

Pertanto l'integrale generale delle (4.11) si scrive

$$(4.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \left[C_1 \sin \omega_m t + C_2 \cos \omega_m t \right] + \frac{F}{m(\omega_m^2 - \omega^2)} \cos \omega t \\ \omega_m = \sqrt{k/m} \end{array} \right.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ricavano poi C_1, C_2 :

$$x(0) = C_2 + \frac{F}{m(\omega_m^2 - \omega^2)} = x_0 \Rightarrow C_2 = x_0 - \frac{F}{m(\omega_m^2 - \omega^2)}$$

$$\dot{x}(t) = \omega_m C_1 \cos \omega_m t - \omega_m C_2 \sin \omega_m t - \frac{\omega F}{m(\omega_m^2 - \omega^2)} \sin \omega t \Rightarrow$$

$$\dot{x}(0) = \omega_m C_1 = \dot{x}_0 \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_m}}$$

Abbiamo trovato dunque

$$(4.13) \begin{cases} x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_m} \sin \omega_m t + \left(x_0 - \frac{F}{m(\omega_m^2 - \omega^2)} \right) \cos \omega_m t + \frac{F}{m(\omega_m^2 - \omega^2)} \cos \omega t \\ \dot{x}(t) = \dot{x}_0 \cos \omega_m t - \omega_m \left(x_0 - \frac{F}{m(\omega_m^2 - \omega^2)} \right) \sin \omega_m t - \frac{\omega F}{m(\omega_m^2 - \omega^2)} \sin \omega t \end{cases}$$

Prova a scrivere le (4.13) in modo alternativo:

$$(4.14) \begin{cases} x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_m} \sin \omega_m t + x_0 \cos \omega_m t + \frac{F}{m(\omega_m^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_m t) \\ \dot{x}(t) = -\omega_m x_0 \sin \omega_m t + \dot{x}_0 \cos \omega_m t + \frac{F}{m(\omega_m^2 - \omega^2)} (\omega_m \sin \omega_m t - \omega \sin \omega t) \end{cases}$$

Per il caso di forzanti sinusoidale si vede per 10.82

4.3. Risommanza. Mi chiedo in questa sede cosa si verifica nel caso in cui $\omega \rightarrow \omega_m$. Si vede dalle prime delle (4.14)

che il problema risiede nel terzo addendo di ciascuna equazione. Per studiare il limite di tali termini si ricorre al teorema di De l'Hospital:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_m} \frac{F}{m(\omega_m^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_m t) = \frac{F}{m} \lim_{\omega \rightarrow \omega_m} \frac{\frac{d}{d\omega} (\cos \omega t - \cos \omega_m t)}{\frac{d}{d\omega} (\omega_m^2 - \omega^2)} =$$

$$= \frac{F}{m} \lim_{\omega \rightarrow \omega_m} \frac{-t \sin \omega t}{-2\omega} = \frac{F}{m} \frac{t \sin \omega_m t}{2\omega_m} = \boxed{\frac{F t \sin \omega_m t}{2\omega_m m}}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_m} \frac{F}{m(\omega_m^2 - \omega^2)} (\omega_m \sin \omega_m t - \omega \sin \omega t) = \frac{F}{m} \lim_{\omega \rightarrow \omega_m} \frac{\frac{d}{d\omega} (\omega_m \sin \omega_m t - \omega \sin \omega t)}{\frac{d}{d\omega} (\omega_m^2 - \omega^2)} =$$

$$= \frac{F}{m} \lim_{\omega \rightarrow \omega_m} \frac{(+\sin \omega_m t + \omega_m t \cos \omega_m t)}{+2\omega} = \boxed{\frac{F}{m} \frac{\sin \omega_m t + \omega_m t \cos \omega_m t}{2\omega_m}}$$

In definitiva abbiamo trovato la soluzione seguente per $\omega \rightarrow \omega_m$:

$$(4.15.a) \begin{cases} x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_m} \sin \omega_m t + x_0 \cos \omega_m t + \frac{F t \sin \omega_m t}{2\omega_m m} \\ \dot{x}(t) = -\omega_m x_0 \sin \omega_m t + \dot{x}_0 \cos \omega_m t + \frac{F (\sin \omega_m t + \omega_m t \cos \omega_m t)}{2\omega_m m} \end{cases}$$

$$(4.15.b) \begin{cases} x(t) = x_0 \cos \omega_m t + \frac{1}{\omega_m} \left(\dot{x}_0 + \frac{tF}{2m} \right) \sin \omega_m t \\ \dot{x}(t) = \left(\dot{x}_0 + \frac{tF}{2m} \right) \cos \omega_m t + \left(\frac{F}{2\omega_m m} - \omega_m x_0 \right) \sin \omega_m t \end{cases}$$

Per il caso di forzanti sinusoidali si vede la (10.83)

Si vede che nella legge del moto - del primo e del secondo ordine - è presente un termine con ampiezza che cresce linearmente nel tempo.

La circostanza in cui $\omega \rightarrow \omega_m$ è detta CONDIZIONE DI RISONANZA.

Nel caso in cui il sistema fosse sottoposto a una forza costante F , l'equilibrio meccanico (dalla 4.11) porge

$$(4.16) \quad kX_s = F \Rightarrow X_s = F/k$$

che definisce la DEFORMAZIONE STATICA. Si definisce allora il COEFFICIENTE DI AMPLIFICAZIONE DINAMICA il rapporto

$$(4.17) \quad \begin{cases} \gamma = \frac{X}{X_s} \\ X = \frac{F}{m(\omega_m^2 - \omega^2)} \end{cases}$$

Si definisce poi il rapporto

$$(4.18) \quad m = \omega/\omega_m$$

e si ottiene dalla prima delle (4.13) che

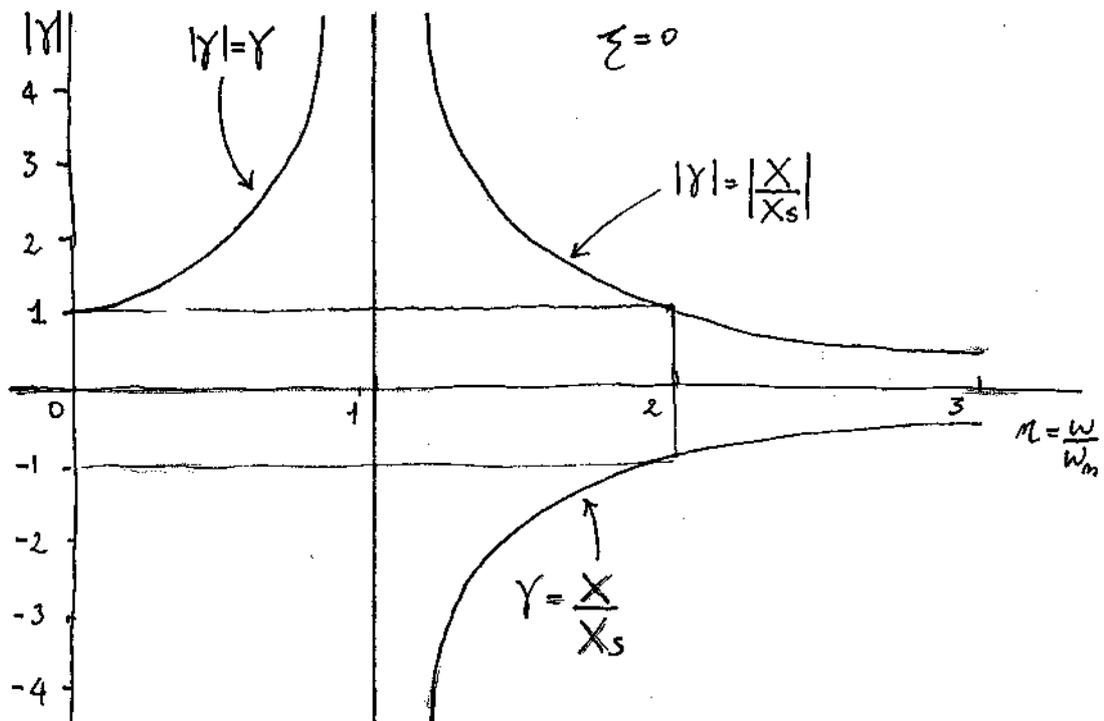
$$(4.19) \quad \gamma = \frac{\cancel{F} \cdot k}{m(\omega_m^2 - \omega^2) \cancel{F}} = \frac{k}{m(\omega_m^2 - \omega^2)} = \frac{\omega_m^2}{\omega_m^2 - \omega^2} = \frac{1}{1 - m^2}$$

Dalle (4.19), (4.18), (4.17) (e seconda equazione) segue

$$X = \frac{F}{m(\omega_m^2 - \omega^2)} = \frac{F}{m\omega_m^2(1 - \omega^2/\omega_m^2)} = \frac{F}{m\omega_m^2(1 - m^2)} \Rightarrow$$

$$(4.20) \quad X = \frac{F}{m\omega_m^2} \gamma$$

Si osserva allora come l'ampiezza del terzo addendo delle (4.12) è proporzionale a $\gamma = X/X_s$ secondo un coefficiente dato dalle costanti fisiche del sistema. È dunque di interesse il grafico della funzione $\gamma = \gamma(m)$, che è riportato nella seguente figura.



Si fanno dunque le seguenti osservazioni:

- (4.21) per $m < 1 \Leftrightarrow \omega < \omega_m$ abbiamo che y cresce più che linearmente;
- (4.22) per $m \approx 1$, con $m < 1$, si ha che y presenta l'asintoto $m = 1$;
- (4.23) per $m \approx 1$, con $m > 1$, si ha che y è ancora asintotica a $m = 1$, ma è negativo;
- (4.24) per $m \gg 1$ si osserva un andamento asintotico verso la retta $y = 0$.

Si osserva che per i casi (4.22), (4.23) valgono le espressioni (4.15.a) della soluzione, dunque il termine crescente della funzione ovvero vale

$$\frac{F}{2\omega_m m} t \sin(\omega_m t)$$

e cresce linearmente nel tempo con una velocità $F/2\omega_m m$ che può essere anche molto modesta.

Capitolo cinque. Vibrazioni forzate e smorzate nei sistemi a un grado di libertà

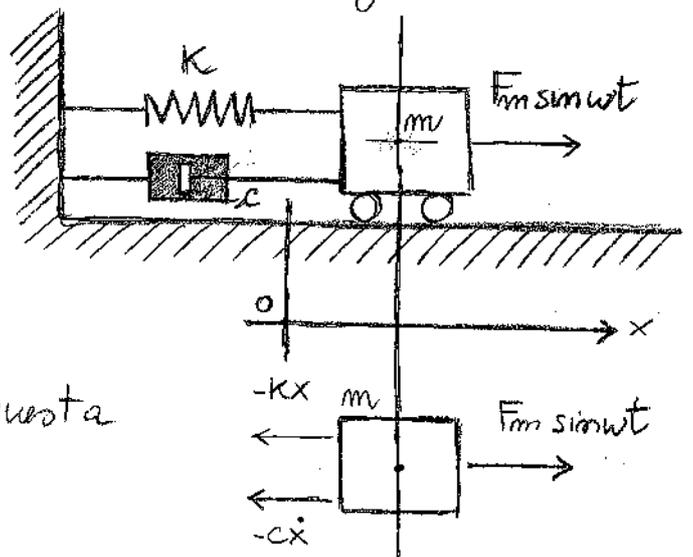
5.1. Equazione newtoniana. Si consideri il sistema molla-molle in figura, in cui sia presente una forza eccitatrice armonica, e uno smorzatore. L'equilibrio meccanico porta

$$-m\ddot{x} - kx - c\dot{x} + F_m \sin \omega t = 0$$

↓

$$(5.1) \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_m \sin \omega t$$

Una soluzione particolare di questa equazione si può scrivere



$$(5.2) \begin{cases} x_2 = X_2 \sin(\omega t - \varphi) \\ \dot{x}_2 = X_2 \omega \cos(\omega t - \varphi) \\ \ddot{x}_2 = -X_2 \omega^2 \sin(\omega t - \varphi) \end{cases}$$

che le (5.2) verificano la (5.1) lo prova nel seguito. Qui invece riassumo i tre integrali generali possibili per la (5.1) in funzione dei valori ζ , utilizzando i risultati del capitolo tre

sulle oscillazioni smorzate, e del capitolo due sulle vibrazioni libere.

$$(5.3) \quad x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \begin{cases} \left[C_1 \cos(\omega_m t) + C_2 \sin(\omega_m t) \right] + \frac{F}{m(\omega_m^2 - \omega^2)} \cos \omega t & (\zeta = 0) \\ e^{-\omega_m \zeta t} \left(C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t) \right) + X_2 \sin(\omega t - \varphi) & (\zeta \in]0, 1[) \\ C_1 e^{-\omega_m t} + C_2 t e^{-\omega_m t} + X_2 \sin(\omega t - \varphi) & (\zeta = 1) \\ e^{-\omega_m \zeta t} \left(C_1 e^{-\omega_m \sqrt{\zeta^2 - 1} t} + C_2 e^{\omega_m \sqrt{\zeta^2 - 1} t} \right) + X_2 \sin(\omega t - \varphi) & (\zeta > 1) \end{cases}$$

Riscrivo e specifico meglio i casi:

$$(5.4) \quad x(t) = \left[\overset{x_1(t)}{C_1 \cos(\omega_m t) + C_2 \sin(\omega_m t)} \right] + \left[\overset{x_2(t)}{\frac{F}{m(\omega_m^2 - \omega^2)} \cos \omega t} \right] \quad \begin{matrix} (\zeta = 0) \\ (\omega \neq \omega_m) \end{matrix}$$

OSCILLAZIONE FORZATA A SMORZAMENTO NULLO

$$(5.5) \quad x(t) = \left[\overset{x_1(t)}{e^{-\omega_m \zeta t} (C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t))} \right] + \left[\overset{x_2(t)}{X_2 \sin(\omega t - \varphi)} \right] \quad (\zeta \in]0, 1[)$$

$$\omega_d = \omega_m \sqrt{1 - \zeta^2}$$

OSCILLAZIONE FORZATA IN MOTO SMORZATO PERIODICO

$$(5.6) \quad x(t) = \left[C_1 e^{-\omega_m t} + C_2 t e^{-\omega_m t} \right] + \left[X_2 \sin(\omega t - \varphi) \right] \quad (\zeta = 1)$$

OSCILLAZIONE FORZATA IN MOTO SMORZATO
APERIODICO

$$(5.7) \quad x(t) = \left[e^{-\omega_m \zeta t} \left(C_1 e^{-\omega_m \sqrt{\zeta^2 - 1} t} + C_2 e^{+\omega_m \sqrt{\zeta^2 - 1} t} \right) \right] + \left[X_2 \sin(\omega t - \varphi) \right] \quad (\zeta > 1)$$

OSCILLAZIONE FORZATA IN MOTO SMORZATO
APERIODICO

Al primo caso (integrale 5.4) in realtà si limita alle circostanze in cui $\omega \neq \omega_m$. Altrimenti - in condizioni di risonanza - la soluzione particolare è differente, secondo quanto esposto nel paragrafo 4.3. Provo a riassumere meglio tutti i possibili casi nella tabella della pagina seguente.

5.2. Riepilogo sulle oscillazioni forzate. Provo a perfezionare e sintetizzare quanto sin qui trovato per le oscillazioni a un grado di libertà.

<p>OSCILLAZIONE FORZATA A SMORZAMENTO NULLO (BATTIMENTI)</p>	$\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}}$
<p>(5.8) $x(t) = \left[\frac{\dot{x}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + \left(x_0 - \frac{F}{m(\omega_m^2 - \omega^2)} \right) \cos(\omega_m t) \right] + \left[\frac{F \cos(\omega t)}{m(\omega_m^2 - \omega^2)} \right]$</p> <p>$\zeta = 0, \omega \neq \omega_m$</p>	$\omega_s = \omega_m$
<p>OSCILLAZIONE FORZATA A SMORZAMENTO NULLO IN RISONANZA</p>	$\sqrt{1 - \zeta^2}$
<p>(5.9) $x(t) = \left[\frac{\dot{x}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + x_0 \cos(\omega_m t) \right] + \left[\frac{Ft \sin(\omega_m t)}{2\omega_m m} \right]$</p> <p>$\zeta = 0, \omega = \omega_m$</p>	$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{k/m}}$
<p>OSCILLAZIONE FORZATA IN MOTO SMORZATO PERIODICO CON $\zeta \in]0, 1[$</p>	$\frac{c}{2\omega_m} = \frac{1}{m} = \frac{c}{2m\omega_m}$
<p>(5.10) $x(t) = \left[e^{-\omega_m \zeta t} \left(C_1 \cos(\omega_s t) + C_2 \sin(\omega_s t) \right) \right] + \left[X_2 \sin(\omega t + \varphi) \right]$</p> <p style="text-align: center;">TRANSITORIO</p> <p>$\omega_s = \omega_m \sqrt{1 - \zeta^2}, \zeta \in]0, 1[$</p>	$\frac{c}{2\omega_m} = \frac{1}{m} = \frac{c}{2m\omega_m}$
<p>OSCILLAZIONE FORZATA IN MOTO SMORZATO APERIODICO CON $\zeta = 1$</p>	$\frac{c}{2m\omega_m}$
<p>(5.11) $x(t) = \left[C_1 e^{-\omega_m t} + C_2 t e^{-\omega_m t} \right] + \left[X_2 \sin(\omega t + \varphi) \right]$</p> <p style="text-align: center;">TRANSITORIO</p> <p>$\zeta = 1$</p>	
<p>OSCILLAZIONE FORZATA IN MOTO SMORZATO APERIODICO CON $\zeta > 1$</p>	
<p>(5.12) $x(t) = \left[e^{-\omega_m \zeta t} \left(C_1 e^{-\omega_m \sqrt{\zeta^2 - 1} t} + C_2 e^{+\omega_m \sqrt{\zeta^2 - 1} t} \right) \right] + \left[X_2 \sin(\omega t + \varphi) \right]$</p> <p style="text-align: center;">TRANSITORIO</p> <p>$\zeta > 1$</p>	

Nelle 5.10, 5.11, 5.12 le costanti C_1, C_2 vanno ricavate impo

mettendo le condizioni iniziali, mentre le costanti X_2, φ della soluzione particolare ipotizzate in 5.2 vanno ricavate imponendo che le stesse soddisfino le equazioni di Newton (5.1).

Nelle medesime soluzioni, e cioè quelle a smorzamento non nullo, si è evidenziate le parti delle soluzioni che tendono al valore nullo, detta TRANSITORIO.

5.3. Procedimento analitico. Voglio ricavare X_2, φ sostituendo le (5.2) nelle (5.1):

$$m(-X_2 \omega^2 \sin(\omega t - \varphi)) + c(X_2 \omega \cos(\omega t - \varphi)) + kX_2 \sin(\omega t - \varphi) = F_m \sin \omega t \iff$$

$$m(-X_2 \omega^2 (\sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi)) + c(X_2 \omega (\cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi)) + kX_2 (\sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi) = F_m \sin \omega t \iff$$

$$\begin{aligned} & \underline{-mX_2 \omega^2 \cos \varphi \sin \omega t + mX_2 \omega^2 \sin \varphi \cos \omega t + cX_2 \omega \cos \varphi \cos \omega t +} \\ & \underline{+ cX_2 \omega \sin \varphi \sin \omega t + kX_2 \cos \varphi \sin \omega t - kX_2 \sin \varphi \cos \omega t} = F_m \sin \omega t \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} X_2 (-m\omega^2 \cos \varphi + c\omega \sin \varphi + k \cos \varphi) \sin \omega t = F_m \sin \omega t \\ X_2 (m\omega^2 \sin \varphi + c\omega \cos \varphi - k \sin \varphi) \cos \omega t = 0 \end{cases}$$

∩ Dunque ho trovato

$$(5.8) \begin{cases} X_2 [c w \sin \varphi + (\kappa - m \omega^2) \cos \varphi] = F_m \\ X_2 [(m \omega^2 - \kappa) \sin \varphi + c w \cos \varphi] = 0 \end{cases} \iff$$

$$(5.9) \begin{cases} X_2 = \frac{F_m}{c w \sin \varphi + (\kappa - m \omega^2) \cos \varphi} \\ \tan \varphi = \frac{c w}{\kappa - m \omega^2} \end{cases}$$

∩ In realtà la prima delle (5.9) non è usata, perché vi compare φ . Allora si quadrano le (5.8) e si sommano, prima divise per m . Dividendo per m si ha

$$(5.10) \begin{cases} X_2 \left[\frac{c w}{m} \sin \varphi + \left(\frac{\kappa}{m} - \omega^2 \right) \cos \varphi \right] = \frac{F_m}{m} \\ X_2 \left[\frac{c}{m} w \cos \varphi - \left(\frac{\kappa}{m} - \omega^2 \right) \sin \varphi \right] = 0 \end{cases}$$

∩ Oppure per le note sostituzioni $\omega_m = \sqrt{\kappa/m}$, $c/m = 2\omega_m \zeta$ e ottengo

$$(5.11) \begin{cases} X_2 [2\omega_m \zeta \omega \sin \varphi + (\omega_m^2 - \omega^2) \cos \varphi] = \frac{F_m}{m} \\ X_2 [2\omega_m \zeta \omega \cos \varphi - (\omega_m^2 - \omega^2) \sin \varphi] = 0 \end{cases}$$

Quadrando e sommando abbiamo

$$\begin{cases} X_2^2 \left[4\omega_m^2 \zeta^2 \omega^2 \sin^2 \varphi + (\omega_m^2 - \omega^2)^2 \cos^2 \varphi + 4\omega_m \zeta \omega (\omega_m^2 - \omega^2) \sin \varphi \cos \varphi \right] = \\ = \frac{F_m^2}{m^2} \\ X_2^2 \left[4\omega_m^2 \zeta^2 \omega^2 \cos^2 \varphi + (\omega_m^2 - \omega^2)^2 \sin^2 \varphi - 4\omega_m \zeta \omega (\omega_m^2 - \omega^2) \sin \varphi \cos \varphi \right] = 0 \end{cases}$$

$$(5.12) \quad X_2^2 \left[4\omega_m^2 \zeta^2 \omega^2 + (\omega_m^2 - \omega^2)^2 \right] = \frac{F_m^2}{m^2}$$

Richiamando ora il rapporto $m = \omega/\omega_m$ definito in (4.18), si ha

$$X_2^2 \omega_m^4 \left(4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_m^2} + (1 - m^2)^2 \right) = \frac{F_m^2}{m^2} \iff X_2^2 \frac{k^2}{m^2} \left(4\zeta^2 m^2 + (1 - m^2)^2 \right) = \frac{F_m^2}{m^2} \iff$$

$$X_2^2 k^2 \left(4\zeta^2 m^2 + (1 - m^2)^2 \right) = F_m^2 \iff X_2^2 = \frac{F_m^2 / k^2}{4\zeta^2 m^2 + (1 - m^2)^2} \implies$$

$$X_2 = \frac{F_m / k}{\sqrt{4\zeta^2 m^2 + (1 - m^2)^2}} = \frac{F_m / k}{\sqrt{4\zeta^2 m^2 + (1 - m^2)^2}}$$

Per la seconda delle (5.9) si ha poi

$$\tan \varphi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \frac{c\omega/m}{\frac{k}{m} - \omega^2} = \frac{c\omega/m}{\omega_m^2 - \omega^2} = \frac{2\omega_m \zeta \omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}} \frac{1}{\omega_m^2} = \frac{2\zeta m}{1 - m^2}$$

In conclusione abbiamo trovato che

$$(5.13) \begin{cases} X_2 = \frac{F_m/k}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2}} \\ \tan \varphi = \frac{2\zeta m}{1-m^2} \end{cases}$$

Pertanto la soluzione particolare del caso con smorzamento e forzante si scrive

$$(5.14) x_2(t) = X_2 \sin(\omega t - \varphi) = \frac{F_m/k}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2}} \sin\left(\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta m}{1-m^2}\right)\right)$$

A questo punto provo a calcolare le costanti C_1, C_2 che compaiono nei casi a smorzamento non nullo.

5.4. Condizioni al contorno per $\zeta \in]0, 1[$. Si consideri l'eq (5.10) e si calcoli la derivata:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left[-w_m \zeta e^{-w_m \zeta t} (C_1 \cos(w_s t) + C_2 \sin(w_s t)) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-w_m \zeta t} (-C_1 w_s \sin(w_s t) + C_2 w_s \cos(w_s t)) \right] + \\ &\quad + X_2 w \cos(\omega t - \varphi) = e^{-w_m \zeta t} \left[-w_m \zeta C_1 \cos(w_s t) + \right. \\ &\quad \left. - w_m \zeta C_2 \sin(w_s t) - C_1 w_s \sin(w_s t) + C_2 w_s \cos(w_s t) \right] + \\ &\quad + X_2 w \cos(\omega t - \varphi) = \end{aligned}$$

$$= e^{-\omega_m \zeta t} \left[(-\omega_m \zeta C_1 + \omega_0 C_2) \cos(\omega_0 t) - (C_1 \omega_0 + \omega_m \zeta C_2) \sin(\omega_0 t) \right] + X_2 \omega \cos(\omega t - \varphi)$$

Imponendo la c.i. sulla posizione si ha

$$x(0) = C_1 - X_2 \sin \varphi = x_0 \Rightarrow C_1 = x_0 + X_2 \sin \varphi$$

Imponendo la c.i. sulla velocità si ha

$$\dot{x}(0) = (-\omega_m \zeta C_1 + \omega_0 C_2) + X_2 \omega \cos \varphi = \dot{x}_0 \Rightarrow$$

$$-\omega_m \zeta (x_0 + X_2 \sin \varphi) + \omega_0 C_2 + X_2 \omega \cos \varphi = \dot{x}_0 \Rightarrow$$

$$-\omega_m \zeta x_0 - \omega_m \zeta X_2 \sin \varphi + \omega_0 C_2 + X_2 \omega \cos \varphi = \dot{x}_0 \Rightarrow$$

$$\omega_0 C_2 = \dot{x}_0 + \omega_m \zeta x_0 + \omega_m \zeta X_2 \sin \varphi - X_2 \omega \cos \varphi \Rightarrow$$

$$\omega_m \sqrt{1 - \zeta^2} C_2 = \dot{x}_0 + \omega_m \zeta x_0 + \omega_m \zeta X_2 \sin \varphi - X_2 \omega \cos \varphi \Rightarrow$$

$$\sqrt{1 - \zeta^2} C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_m} + \zeta x_0 + \zeta X_2 \sin \varphi - X_2 m \cos \varphi \Rightarrow$$

$$\sqrt{1 - \zeta^2} C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_m} + \zeta x_0 + X_2 (\zeta \sin \varphi - m \cos \varphi) \Rightarrow$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_m} + \zeta x_0 + X_2 \sin \varphi (\zeta - m \cot m \varphi)$$

$$\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Dunque abbiamo trovato che

$$(5.15) \quad \begin{cases} C_1 = x_0 + X_2 \sin \varphi \\ C_2 = \frac{\dot{x}_0 + \zeta x_0 + X_2 \sin \varphi \left(\zeta - \frac{m}{\tan \varphi} \right)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \end{cases}$$

Se si considera ora la prima delle (5.9) si ha

$$\begin{aligned} X_2 \sin \varphi &= \frac{F_m \sin \varphi}{c w \sin \varphi + (k - m w^2) \cos \varphi} = \\ &= \frac{F_m}{c w + (k - m w^2) \cot \varphi} \end{aligned}$$

Sostituendo la seconda delle (5.10) si ha poi

$$\begin{aligned} (5.16) \quad X_2 \sin \varphi &= \frac{F_m}{c w + (k - m w^2) \cot \varphi} = \frac{c w F_m}{c^2 w^2 + (k - m w^2)^2} = \\ &= \frac{c w F_m}{c^2 w^2 + m^2 \left(\frac{k}{m} - w^2 \right)^2} = \frac{c w F_m}{c^2 w^2 + m^2 (w_m^2 - w^2)^2} = \frac{c w F_m}{c^2 w^2 + m^2 w_m^4 \left(1 - \frac{w^2}{w_m^2} \right)^2} = \\ &= \frac{c w F_m}{c^2 w^2 + m^2 w_m^4 (1 - m^2)^2} = \frac{c w F_m / w_m^2}{\frac{c^2 w^2}{w_m^2} + m^2 w_m^2 (1 - m^2)^2} = \frac{c w F_m / w_m^2}{c^2 m^2 + m^2 w_m^2 (1 - m^2)^2} = \\ &= \frac{c w F_m / w_m^2}{c^2 m^2 + m^2 \frac{k}{m} (1 - m^2)^2} = \frac{c w F_m / w_m^2}{c^2 m^2 + m k (1 - m^2)^2} = \frac{c m F_m / w_m}{c^2 m^2 + m k (1 - m^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{cm F_m}{c^2 m^2 + mk(1-m^2)^2} \frac{1}{\omega_m} = \frac{\delta m F_m}{m^2 + \frac{mk(1-m^2)^2}{c^2}} \frac{1}{\omega_m c^2} = \frac{m F_m (\omega_m c)}{m^2 + \left(\frac{\sqrt{mk}}{c}\right)^2 \frac{1}{4} (1-m^2)^2} = \\
&= \frac{m F_m (\omega_m c)}{m^2 + \left(\frac{2\sqrt{mk}}{c}\right)^2 \frac{1}{4} (1-m^2)^2} = \frac{m F_m (\omega_m c)}{m^2 + \frac{(1-m^2)^2}{4 \zeta^2}} = \frac{m F_m (\omega_m c)}{4 \zeta^2 m^2 + (1-m^2)^2} 4 \zeta^2 = \\
&= \frac{4 m \zeta^2 F_m}{(4 \zeta^2 m^2 + (1-m^2)^2) \omega_m c}
\end{aligned}$$

Quindi si è trovato che

$$(5.17) \quad \begin{cases} C_1 = x_0 + \frac{4 m \zeta^2 F_m}{(4 \zeta^2 m^2 + (1-m^2)^2) c \omega_m} \\ C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_m} + \zeta x_0 + \frac{4 m \zeta^2 F_m}{(4 \zeta^2 m^2 + (1-m^2)^2) c \omega_m} \left(\zeta - \frac{1-m^2}{2 \zeta} \right) \end{cases}$$

5.5. Condizioni al contorno per $\zeta=1$. Ripeto lo stesso calcolo del caso precedente per $\zeta=1$, ovvero per Eq (5.11). Derivando una volta si ha

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= C_1 (-\omega_m) e^{-\omega_m t} + C_2 (e^{-\omega_m t} - \omega_m t e^{-\omega_m t}) = \\
&= -\omega_m C_1 e^{-\omega_m t} + C_2 e^{-\omega_m t} (1 - \omega_m t) = e^{-\omega_m t} (-\omega_m C_1 + C_2 (1 - \omega_m t))
\end{aligned}$$

Impongo la condizione al contorno per lo spostamento:

$$x(t=0) = C_1 - X_2 \sin \varphi = x_0 \Rightarrow C_1 = x_0 + X_2 \sin \varphi$$

Impongo la condizione al contorno per la velocità:

$$\dot{x}(t=0) = (-\omega_m C_1 + C_2) = \dot{x}_0 \Rightarrow C_2 = \dot{x}_0 + \omega_m C_1 = \dot{x}_0 + \omega_m x_0 + \omega_m X_2 \sin \varphi$$

Dunque, considerando le (5.16), abbiamo che

$$(5.18) \begin{cases} C_1 = x_0 + \frac{4m\zeta^2 F_m}{(4\zeta^2 m^2 + (1-m^2)^2) \omega_m c} \\ C_2 = \dot{x}_0 + \omega_m x_0 + \frac{4m\zeta^2 F_m}{(4\zeta^2 m^2 + (1-m^2)^2) c} \end{cases}$$

5.6. Condizioni al contorno per $\zeta > 1$. Derivo la (5.12):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & -\omega_m \zeta e^{-\omega_m \zeta t} (C_1 e^{-\omega t} + C_2 e^{\omega t}) + e^{-\omega_m \zeta t} (-\omega_m C_1 e^{-\omega t} + \\ & + \omega_m C_2 e^{\omega t}) + X_2 \omega \cos(\omega t - \varphi) = e^{-\omega_m \zeta t} (-\omega_m \zeta C_1 e^{-\omega t} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\omega_m \zeta C_2 e^{\omega_s t}) + e^{-\omega_m \zeta t} \frac{\omega_s}{\omega_m \sqrt{1-\zeta^2}} (-C_1 e^{-\omega_s t} + C_2 e^{\omega_s t}) + \\
& + X_2 \omega \cos(\omega t - \varphi) = e^{-\omega_m \zeta t} \left(-\omega_m \zeta C_1 e^{-\omega_s t} - \omega_m \zeta C_2 e^{\omega_s t} - \right. \\
& \left. - \omega_s C_1 e^{-\omega_s t} + \omega_s C_2 e^{\omega_s t} \right) + e^{-\omega_m \zeta t} \left[-(\omega_m \zeta + \omega_s) C_1 e^{-\omega_s t} + \right. \\
& \left. + C_2 e^{\omega_s t} (\omega_s - \omega_m \zeta) \right] + X_2 \omega \cos(\omega t - \varphi)
\end{aligned}$$

Impongo la condizione iniziale sullo spostamento

$$x(0) = C_1 + C_2 - X_2 \sin \varphi = x_0$$

Impongo la condizione iniziale sulla velocità

$$\dot{x}(0) = -(\omega_m \zeta + \omega_s) C_1 + (\omega_s - \omega_m \zeta) C_2 + X_2 \omega \cos \varphi = \dot{x}_0$$

Dunque abbiamo quanto segue

$$\begin{cases}
C_1 + C_2 - X_2 \sin \varphi = x_0 \Rightarrow C_1 = x_0 - C_2 + X_2 \sin \varphi \\
-(\omega_m \zeta + \omega_s) C_1 + (\omega_s - \omega_m \zeta) C_2 + X_2 \omega \cos \varphi = \dot{x}_0
\end{cases}$$

Sostituendo la prima nella seconda si ha

$$-(\omega_m \xi + \omega_\Delta)(x_0 - C_2 + X_2 \sin \varphi) + (\omega_\Delta - \omega_m \xi) C_2 + X_2 \omega \cos \varphi = \dot{x}_0 \Rightarrow$$

$$-(\omega_m \xi + \omega_\Delta)(x_0 + X_2 \sin \varphi) + (\omega_\Delta + \omega_m \xi) C_2 + (\omega_\Delta - \omega_m \xi) C_2 + X_2 \omega \cos \varphi = \dot{x}_0 \Rightarrow$$

$$-(\omega_m \xi + \omega_\Delta)(x_0 + X_2 \sin \varphi) + 2\omega_\Delta C_2 + X_2 \omega \cos \varphi = \dot{x}_0 \Rightarrow$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0 + (\omega_m \xi + \omega_\Delta)(x_0 + X_2 \sin \varphi) - X_2 \omega \cos \varphi}{2\omega_\Delta} \Rightarrow$$

$$C_1 = x_0 - \frac{\dot{x}_0 + (\omega_m \xi + \omega_\Delta)(x_0 + X_2 \sin \varphi) - X_2 \omega \cos \varphi}{2\omega_\Delta} + X_2 \sin \varphi =$$

$$= x_0 - \frac{\dot{x}_0 + (\omega_m \xi x_0 + \omega_m \xi X_2 \sin \varphi + \omega_\Delta x_0 + \omega_\Delta X_2 \sin \varphi) - X_2 \omega \cos \varphi}{2\omega_\Delta} +$$

$$+ 2\omega_\Delta X_2 \sin \varphi = \frac{x_0 - \dot{x}_0 + \omega_m \xi x_0 + \omega_m \xi X_2 \sin \varphi + \omega_\Delta x_0 + \omega_\Delta X_2 \sin \varphi + 2\omega_\Delta X_2 \sin \varphi - X_2 \omega \cos \varphi}{2\omega_\Delta} =$$

$$x_0 - \frac{\dot{x}_0 + \omega_m \xi x_0 + (\omega_m \xi - \omega_\Delta) X_2 \sin \varphi + \omega_\Delta x_0 - X_2 \omega \cos \varphi}{2\omega_\Delta} =$$

$$\frac{2x_0 \omega_\Delta - \dot{x}_0 - \omega_m \xi x_0 - (\omega_m \xi - \omega_\Delta) X_2 \sin \varphi - \omega_\Delta x_0 + X_2 \omega \cos \varphi}{2\omega_\Delta} =$$

$$\frac{x_0 \omega_\Delta - \dot{x}_0 - \omega_m \xi x_0 - (\omega_m \xi - \omega_\Delta) X_2 \sin \varphi + X_2 \omega \cos \varphi}{2\omega_\Delta} =$$

$$\frac{(\omega_\Delta - \omega_m \xi) x_0 - \dot{x}_0 + (\omega_\Delta - \omega_m \xi) X_2 \sin \varphi + X_2 \omega \cos \varphi}{2\omega_\Delta} =$$

$$\frac{(\omega_\Delta - \omega_m \xi)(x_0 + X_2 \sin \varphi) - \dot{x}_0 + X_2 \omega \cos \varphi}{2\omega_\Delta}$$

Si può provare a calcolare $X_2 \cos \varphi$: Dalle prime delle (5.9) si ha

$$X_2 \cos \varphi = \frac{F_m \cos \varphi}{c \omega \sin \varphi + (k - m \omega^2) \cos \varphi} = \frac{F_m}{c \omega \tan \varphi + (k - m \omega^2)}$$

Sostituendo la seconda delle (5.9) si ha poi

$$\begin{aligned} (5.19) \quad X_2 \cos \varphi &= \frac{F_m}{\frac{c \omega c \omega}{k - m \omega^2} + (k - m \omega^2)} = \frac{F_m}{\frac{c^2 \omega^2}{\frac{k}{m} - \omega^2} \frac{1}{m} + m \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right)} = \\ &= \frac{F_m}{\frac{c^2 \omega^2}{\omega_m^2 - \omega^2} \frac{1}{m} + m (\omega_m^2 - \omega^2)} = \frac{F_m (\omega_m^2 - \omega^2) m}{c \omega^2 + m^2 (\omega_m^2 - \omega^2)^2} = \\ &= \frac{F_m (\omega_m^2 - \omega^2) m v}{c \omega^2 + m^2 \omega_m^2 (1 - m^2)^2} = \frac{\omega_m^2 F_m (1 - m^2) m}{c \omega^2 + m^2 \omega_m^2 (1 - m^2)^2} = \\ &= \frac{F_m (1 - m^2) m}{c m^2 + m^2 (1 - m^2)^2} \end{aligned}$$

Dunque abbiamo trovato che

$$(5.20) \quad \begin{cases} C_1 = \frac{(\omega_0 - \omega_m^2)(x_0 + X_2 \sin \varphi) - \dot{x}_0 + X_2 \omega \cos \varphi}{2 \omega_0} \\ C_2 = \frac{\dot{x}_0 + (\omega_m^2 + \omega_0)(x_0 + X_2 \sin \varphi) - X_2 \omega \cos \varphi}{2 \omega_0} \end{cases}$$

5.7. Secondo riepilogo sulle oscillazioni forzate. Per prima cosa enumero tutte le possibilità di sistemi oscillanti a un grado di libertà:

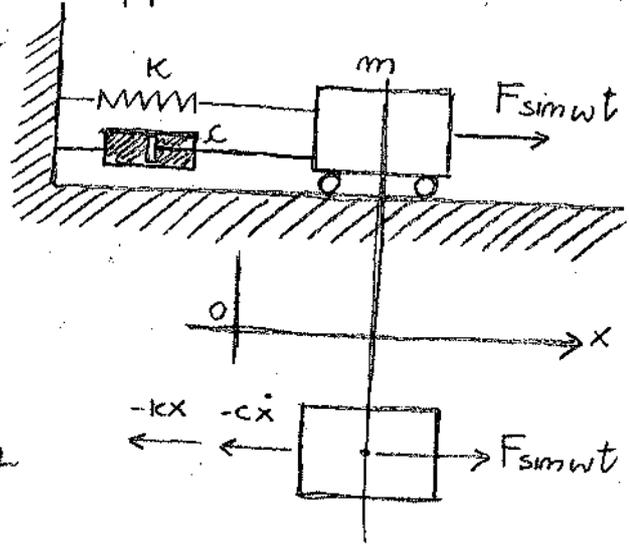
(5.21)	oscillazione libera (forzanti nulle, smorzamento nullo);	
(5.22)	oscillazioni forzate non smorzate con $\omega \neq \omega_m$;	
(5.23)	oscillazione forzate non smorzate con $\omega = \omega_m$;	
(5.24)	oscillazione smorzate non forzate con $\zeta \in]0, 1[$;	
(5.25)	oscillazione smorzate forzate	con $\zeta \in]0, 1[$; $\omega \neq \omega_m$;
(5.26)	oscillazione smorzate forzate	con $\zeta \in]0, 1[$, $\omega = \omega_m$;
(5.27)	oscillazione smorzate non forzate con $\zeta = 1$;	
(5.28)	oscillazione smorzate forzate	con $\zeta = 1$, $\omega \neq \omega_m$;
(5.29)	oscillazione smorzate forzate	con $\zeta = 1$, $\omega = \omega_m$;
(5.30)	oscillazione smorzate non forzate con $\zeta > 1$;	
(5.31)	oscillazione smorzate forzate	con $\zeta > 1$, $\omega \neq \omega_m$;
(5.32)	oscillazione smorzate forzate	con $\zeta > 1$, $\omega = \omega_m$;

Si consideri ora che il caso (5.21) si ottiene sia dal (5.22) che dal (5.23) ove si ponga $F_m = 0$. Inoltre i casi (5.25), (5.26) hanno la stessa espressione matematica, basta porre $\omega = \omega_m$ nel (5.26); stesso dicasi per (5.28), (5.29) e per (5.31), (5.32).

Comunque provo a riportarli tutti nelle tabelle seguenti.

OSCILLAZIONE LIBERA		$\xi = 0, F = 0$	
(5.33) $x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + x_0 \cos(\omega_m t)$			
OSCILLAZIONE FORZATA NON SMORZATA (BATTIMENTI)		$\xi = 0, \omega \neq \omega_m$	
(5.34) $x(t) = \left[\frac{\dot{x}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + \left(x_0 - \frac{F}{m(\omega_m^2 - \omega^2)} \right) \cos(\omega_m t) \right] + \left[\frac{F \cos(\omega t)}{m(\omega_m^2 - \omega^2)} \right]$			
OSCILLAZIONE FORZATA NON SMORZATA IN RISONANZA		$\xi = 0, \omega = \omega_m$	
(5.35) $x(t) = \left[\frac{\dot{x}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + x_0 \cos(\omega_m t) \right] + \left[\frac{F t \sin(\omega_m t)}{2 m \omega_m} \right]$			
OSCILLAZIONE FORZATA SMORZATA		$\xi \in]0, 1[$	
(5.36) $x(t) = \left[e^{-\omega_m \xi t} (C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)) \right] + \left[X_2 \sin(\omega t - \varphi) \right]$			
OSCILLAZIONE FORZATA SMORZATA		$\xi = 1$	
(5.37) $x(t) = \left[e^{-\omega_m t} (C_3 + t C_4) \right] + \left[X_2 \sin(\omega t - \varphi) \right]$			
OSCILLAZIONE FORZATA SMORZATA		$\xi > 1$	
(5.38) $x(t) = \left[e^{-\omega_m \xi t} (C_5 e^{-\omega_0 t} + C_6 e^{\omega_0 t}) \right] + \left[X_2 \sin(\omega t - \varphi) \right]$			
COSTANTI DEL SISTEMA FISICO			
$\omega_m = \sqrt{k/m}$	$\omega_0 = \omega_m \sqrt{1 - \xi^2}$	$\xi = \frac{c}{2\sqrt{k m}} = \frac{c}{2 m \omega_m}$	$\nu = \omega / \omega_m$
AMPIEZZA E FASE DELLA SOLUZIONE A REGIME DEI CASI SMORZATI			
$X_2 = F_0 / (c \omega \sin \varphi + (k - m \omega^2) \cos \varphi) = \frac{F_0 / k}{\sqrt{(1 - m^2)^2 + 4 \xi^2 m^2}}$			
$\tan \varphi = c \omega / (k - m \omega^2) = \frac{2 \xi m}{1 - m^2}$			
$X_2 \sin \varphi = \frac{4 m \xi^2 F}{c \omega_m (4 \xi^2 m^2 + (1 - m^2)^2)}$		$X_2 \cos \varphi = \frac{m (1 - m^2) F}{c m^2 + m^2 (1 - m^2)^2}$	
COSTANTI DEGLI INTEGRALI GENERALI			
$C_1 = x_0 + X_2 \sin \varphi$	$C_3 = x_0 + X_2 \sin \varphi$	$C_5 = \frac{(\omega_0 - \omega_m \xi)(x_0 + X_2 \sin \varphi) - \dot{x}_0 + X_2 \omega \cos \varphi}{2 \omega_0}$	
$C_2 = \frac{\frac{\dot{x}_0}{\omega_m} + \xi x_0 + X_2 \sin \varphi (\xi - \frac{m}{\tan \varphi})}{\sqrt{1 - \xi^2}}$	$C_4 = \dot{x}_0 + \omega_m x_0 + \omega_m X_2 \sin \varphi$	$C_6 = \frac{\dot{x}_0 + (\omega_m \xi + \omega_0)(x_0 + X_2 \sin \varphi) - X_2 \omega \cos \varphi}{2 \omega_0}$	

5.8. Procedimento vettoriale. Consideriamo un sistema forzato e smorzato a un grado di libertà con le convenzioni indicate in figura. Sapremo che esaurito il transitorio la soluzione del problema dinamico porge



$$(5.39) \quad x(t) = X_2 \sin(\omega t - \varphi)$$

derivando la quale si ha

$$(5.40) \quad \dot{x}(t) = \omega X_2 \cos(\omega t - \varphi)$$

$$(5.41) \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 X_2 \sin(\omega t - \varphi)$$

Quindi a regime le forze in gioco sono le seguenti

$$(5.42) \quad \boxed{f_p = F \sin \omega t} \quad \leftarrow \text{forza perturbatrice}$$

$$(5.43) \quad f_e = -kx = -kX_2 \sin(\omega t - \varphi) \quad \leftarrow \text{forza elastica}$$

$$(5.44) \quad f_s = -c\dot{x} = -c\omega X_2 \cos(\omega t - \varphi) \quad \leftarrow \text{forze smorzanti}$$

$$(5.45) \quad f_{im} = -m\ddot{x} = m\omega^2 X_2 \sin(\omega t - \varphi) \quad \leftarrow \text{forza d'inerzia}$$

Si consideri ora che

$$\begin{aligned} \sin(\omega t - \varphi - \pi/2) &= \sin(\omega t - \varphi) \cos(\pi/2) - \cos(\omega t - \varphi) \sin(\pi/2) = \\ &= -\cos(\omega t - \varphi) \Rightarrow \cos(\omega t - \varphi) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\omega t - \varphi)\right) \end{aligned}$$

Dunque abbiamo le seguenti grandezze dinamiche e cinematiche, tutte espresse come funzioni sinusoidali:

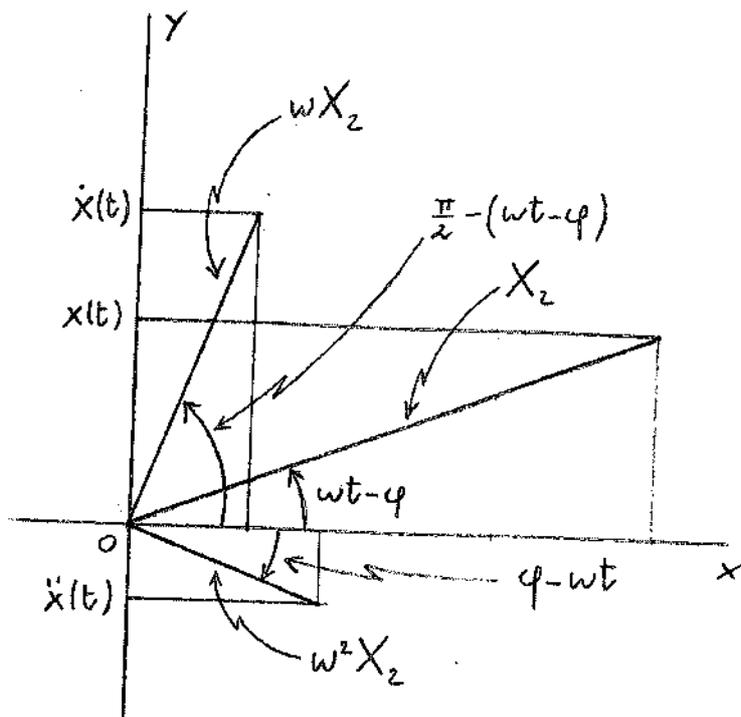
$$(5.46) \begin{cases} x(t) = X_2 \sin(\omega t - \varphi) \\ \dot{x}(t) = \omega X_2 \sin[\pi/2 - (\omega t - \varphi)] \\ \ddot{x}(t) = -\omega^2 X_2 \sin(\omega t - \varphi) = \omega^2 X_2 \sin(\varphi - \omega t) \end{cases}$$

$$(5.47) \begin{cases} f_p = F \sin \omega t \\ f_e = -k X_2 \sin(\omega t - \varphi) = k X_2 \sin(\varphi - \omega t) \\ f_{\text{vis}} = -c \omega X_2 \sin[\pi/2 - (\omega t - \varphi)] = c \omega X_2 \sin[(\omega t - \varphi) - \pi/2] \\ f_{\text{in}} = m \omega^2 X_2 \sin(\omega t - \varphi) \end{cases}$$

Posso adesso rappresentare assieme di queste grandezze come il seno di vettori rotanti. Si considerino ad esempio le grandezze cinematiche (5.46).

Si vede come le grandezze in parole siano le proiezioni sull'asse y dei vettori rotanti indicati, spiccati dal punto O .

GRANDEZZE
CINEMATICHES
DELLA MASSA
FORZATA
SMORZATA



In realtà si può procedere meglio utilizzando le trasformazioni di Steimmetz e i fasori, per i quali si rimanda al manuale di Elettrotecnica. Richiamo qui gli elementi fondamentali della teoria dei fasori:

5.9. Fasori. Assegnata la generica funzione sinusoidale associata ad esse un vettore del piano complesso (fasore) tale che la prima sia il modulo della parte immaginaria della seconda;

$$(5.48) \quad x(t) = X_2 \sin(\omega t - \varphi) \longrightarrow \bar{X} = X_2 e^{j(\omega t - \varphi)} = X_2 [\cos(\omega t - \varphi) + j \sin(\omega t - \varphi)]$$

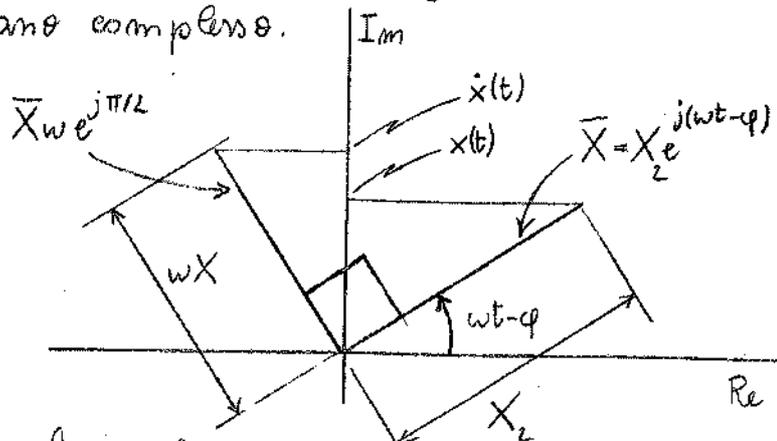
In realtà il vettore non è propriamente il fasore che si usa in elettrotecnica, il quale non ha dipendenza dal tempo.

Si osservi ora che

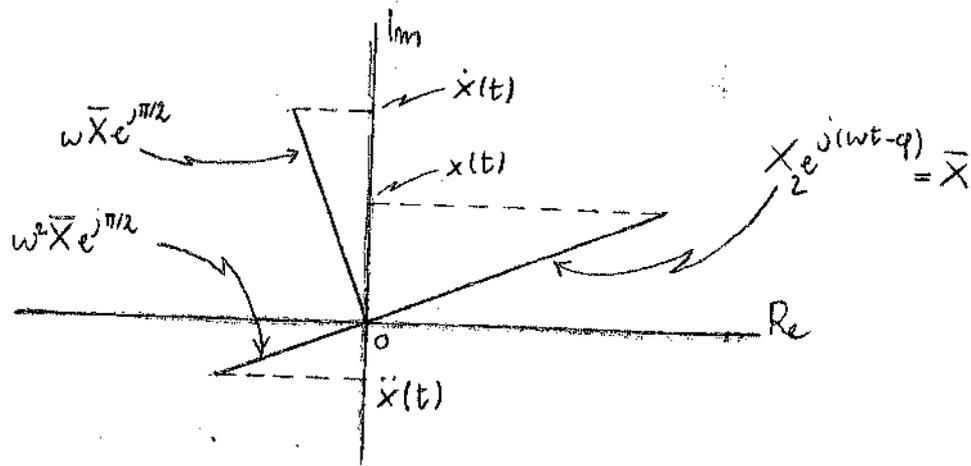
$$\dot{x}(t) = X_2 \omega \cos(\omega t - \varphi) = X_2 \omega [\cos(\omega t - \varphi) \sin \pi/2 + \sin(\omega t - \varphi) \cos \pi/2] = X_2 \omega \sin[(\omega t - \varphi) + \pi/2] \rightarrow X_2 \omega e^{j(\omega t - \varphi) + j\pi/2}$$

Dunque abbiamo che alle operazioni di derivazione corrisponde una operazione di moltiplicazione la quale a sua volta determina un anticipo di fase di $\pi/2$ nel relativo vettore del piano complesso.

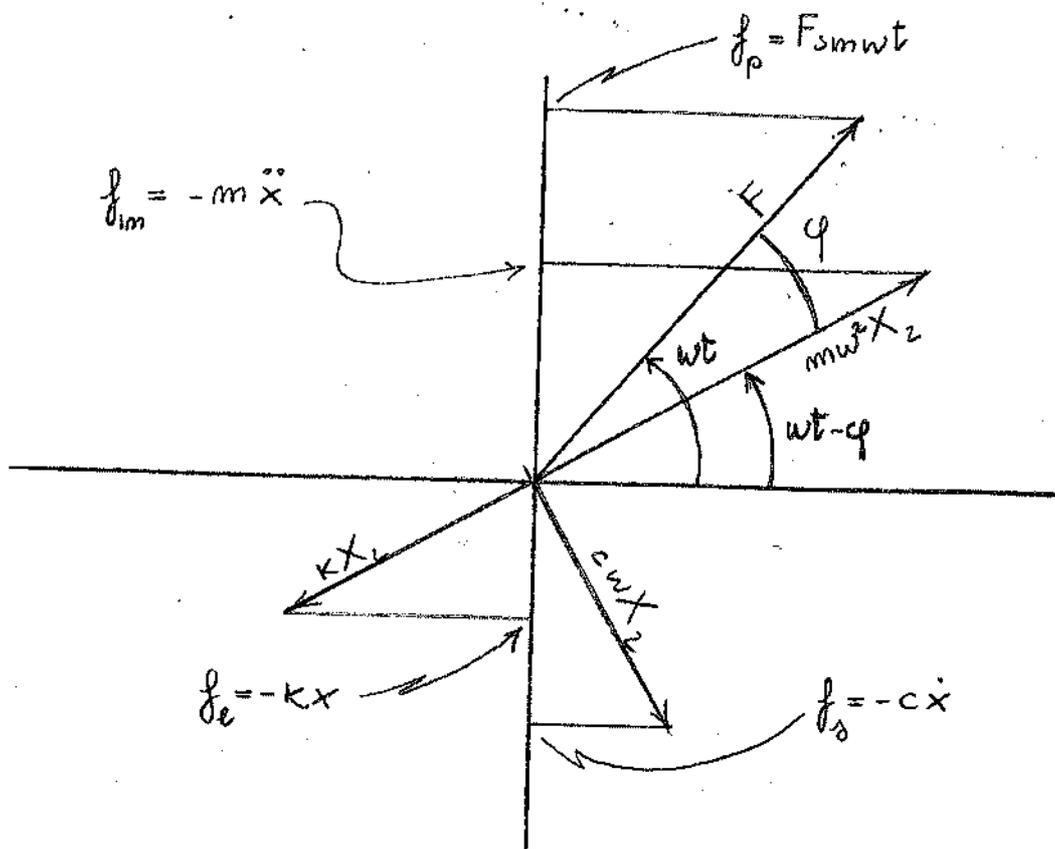
$$(5.49) \begin{cases} x(t) \rightarrow \bar{X} \\ \dot{x}(t) \rightarrow \bar{X} \omega e^{j\pi/2} \end{cases}$$



Vediamo allora quale è la rappresentazione vettoriale delle grandezze cinematiche (5.46) che si ottengono per derivazione successive delle equazioni orarie.



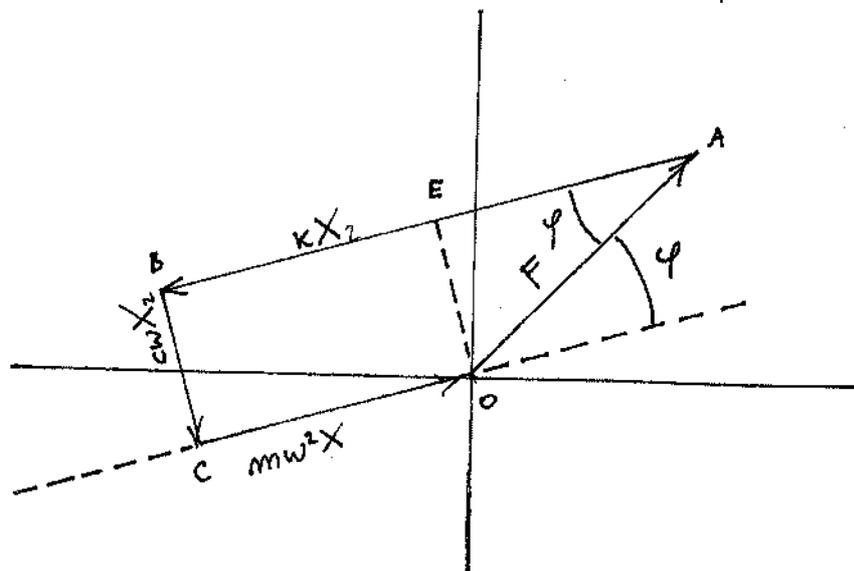
Vediamo invece come rappresentare le grandezze dinamiche in (5.47)



Perché a regime sussiste la relazione

$$(5.50) \quad \vec{f}_p + \vec{f}_e + \vec{f}_s + \vec{f}_{im} = 0$$

le spezzate che si ottiene sommando i rispettivi paroni deve avere proiezione nulla sull'asse delle x .
Vediamo allora come calcolare X_2 φ dalle figure. Com



considerando il triangolo rettangolo OEA abbiamo

$$OA^2 = OE^2 + EA^2 \Rightarrow F^2 = c^2 w^2 X_2^2 + (AB - BE)^2 \Rightarrow$$

$$F^2 = c^2 w^2 X_2^2 + (k X_2 - m w^2 X_2)^2 \Rightarrow F^2 = c^2 w^2 X_2^2 + k^2 X_2^2 + m^2 w^4 X_2^2 -$$

$$- 2 m k w^2 X_2^2 \Rightarrow X_2^2 (c^2 w^2 + k^2 + m^2 w^4 - 2 m k w^2) = F^2 \Rightarrow$$

$$F^2 = X_2^2 k^2 \left(\frac{c^2 w^2}{k^2} + \frac{m^2 w^4}{k^2} - \frac{2 m w^2}{k} + 1 \right) = X_2^2 k^2 \left(\frac{c^2 w^2 + m^2 w^4}{k^2} -$$

$$- \frac{2 m w^2}{k} + 1 \right) = X_2^2 k^2 \left(\frac{c^2 w^2}{k^2} + \frac{m^2 w^4}{k^2} - \frac{2 m w^2}{k} + 1 \right) =$$

$$= X_2^2 k^2 \left(\frac{c^2 w^2}{k^2} + \frac{w^4}{w_m^2} - \frac{2 w^2}{w_m^2} + 1 \right) = X_2^2 k^2 \left(\frac{c^2 w^2}{k^2 m^2} + m^4 - 2 m^2 + 1 \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= X_2^2 K^2 \left(\frac{c^2 \omega^2}{m^2} \frac{m^2}{K^2} + (1-m^2)^2 \right) = X_2^2 K^2 \left(\frac{c^2}{m^2} \frac{\omega^2}{\omega_m^2} + (1-m^2)^2 \right) = \\
&= X_2^2 K^2 \left(\frac{c^2 m^2}{m^2 \omega_m^2} + (1-m^2)^2 \right) = X_2^2 K^2 \left(\frac{c^2 4 m^2}{4 m^2 \omega_m^2} + (1-m^2)^2 \right) = \\
&= X_2^2 K^2 \left(4 \left(\frac{c}{2 m \omega_m} \right)^2 m^2 + (1-m^2)^2 \right) = X_2^2 K^2 \left(4 \zeta^2 m^2 + (1-m^2)^2 \right) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$(5.51) \quad X_2 = \frac{F/K}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4 \zeta^2 m^2}}$$

Si ritiene così la prima delle (5.13). È possibile ottenere dalle figure anche la seconda delle (5.13). Impartisci la

$$\begin{aligned}
\text{tncf} &= \frac{c \omega X_2}{K X_2 - m \omega^2 X_2} = \frac{c \omega}{K - m \omega^2} = \frac{c \omega / K}{1 - \frac{m \omega^2}{K}} = \\
&= \frac{c \omega / K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}} = \frac{c \omega / K}{1 - m^2} = \frac{c \omega m / K}{(1-m^2) m} = \frac{c \omega / \omega_m^2}{(1-m^2) m} = \frac{c m / \omega_m}{(1-m^2) m} = \\
&= \frac{c m}{1-m^2} \frac{c}{\omega_m m} = \frac{m}{1-m^2} \cdot 2 \frac{c}{2 m \omega_m} = \frac{m}{1-m^2} \cdot 2 \zeta = \frac{2 m \zeta}{1-m^2} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$(5.52) \quad \text{tncf} = \frac{2 m \zeta}{1-m^2}$$

5.10. Coefficiente di amplificazione dinamica. Nel caso delle oscillazioni forzate non smorzate avevamo definito il COEFFICIENTE DI SMORZAMENTO γ attraverso

Le prime delle (4.17) secondo la quale $y = Xk/F$, dove X rappresenta l'ampiezza del termine della soluzione legato alle prime della forzante esterna. Ricordo in queste sede infatti che le soluzioni dell'oscillazione forzata in assenza di smorzamento è data dalla (5.34) la quale si scrive anche

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + x_0 \cos(\omega_m t) + \frac{F (\cos \omega t - \cos \omega_m t)}{m(\omega_m^2 - \omega^2)} =$$

$$= \frac{\dot{x}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + x_0 \cos(\omega_m t) + \frac{F}{m} \frac{\cos(\omega t) - \cos(\omega_m t)}{\omega_m^2 - \omega^2}$$

Utilizzando il teorema di De L'Hospital ricaviamo la soluzione in caso di risonanza e dunque si può dire che in presenza di oscillazioni forzate non smorzate si ha la soluzione

$$(5.53) \begin{cases} x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + x_0 \cos(\omega_m t) + \frac{F}{m} \frac{\cos(\omega t) - \cos(\omega_m t)}{\omega_m^2 - \omega^2} & (\omega \neq \omega_m) \\ x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + x_0 \cos(\omega_m t) + \frac{F}{m} \frac{t \sin(\omega_m t)}{2m\omega_m} & (\omega \rightarrow \omega_m) \end{cases}$$

In questo caso abbiamo posto (vedi paragrafo 4.3)

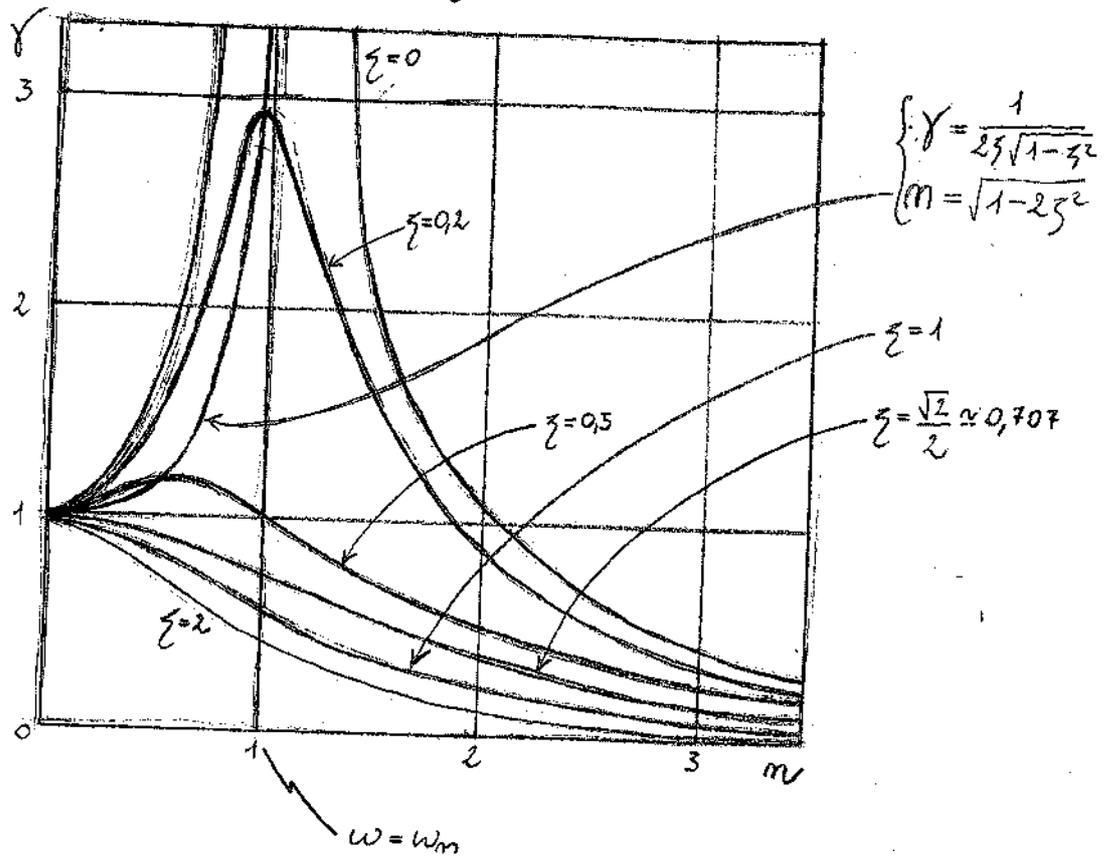
$$(5.54) X = \frac{F}{m(\omega_m^2 - \omega^2)}$$

$$(5.55) \quad \gamma = X_k / F = \frac{1}{1-m^2}$$

Nel caso in cui sia presente smorzamento possiamo porre come coefficiente di amplificazione dinamica il seguente

$$(5.56) \quad \gamma = \frac{X_2 k}{F} = \frac{1}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2}}$$

La definizione è ben posta, infatti per $\zeta=0$ la (5.56) coincide con la (5.55). Ripeto in figura l'andamento di γ per diversi valori di smorzamento ζ .



Il valore di questo diagramma risiede nel fatto che l'ampiezza delle soluzioni è regime si scrive

$$(5.57) \quad X_2 = \gamma \frac{F}{k}$$

Vediamo come si ottiene il diagramma in figura, studiando la funzione $\gamma = \gamma(m)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dm} \left(\frac{1}{\gamma} \right) &= \frac{d}{dm} \sqrt{(1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2} = \frac{1}{2} \left((1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2 \right)^{-1/2} \left(-2(1-m^2)2m + \right. \\ & \left. + 8\zeta^2 m \right) = \frac{1}{2} \left((1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2 \right)^{-1/2} \left(-4m(1-m^2) + 8\zeta^2 m \right) = 0 \iff \\ -4m + 4m^3 + 8\zeta^2 m &= 0 \iff -1 + m^2 + 2\zeta^2 = 0 \iff \end{aligned}$$

$$(5.58) \quad m^2 = 1 - 2\zeta^2 \leftarrow \gamma \text{ è massimo}$$

Dunque le pulsazioni delle forzanti per le quali il coefficiente di amplificazione è massimo è data da

$$(5.59) \quad \omega^2 = \omega_m^2 (1 - 2\zeta^2) \leftarrow \gamma \text{ è massimo}$$

Dunque si nota che

(5.60) "in presenza di smorzamento la massima ampiezza si

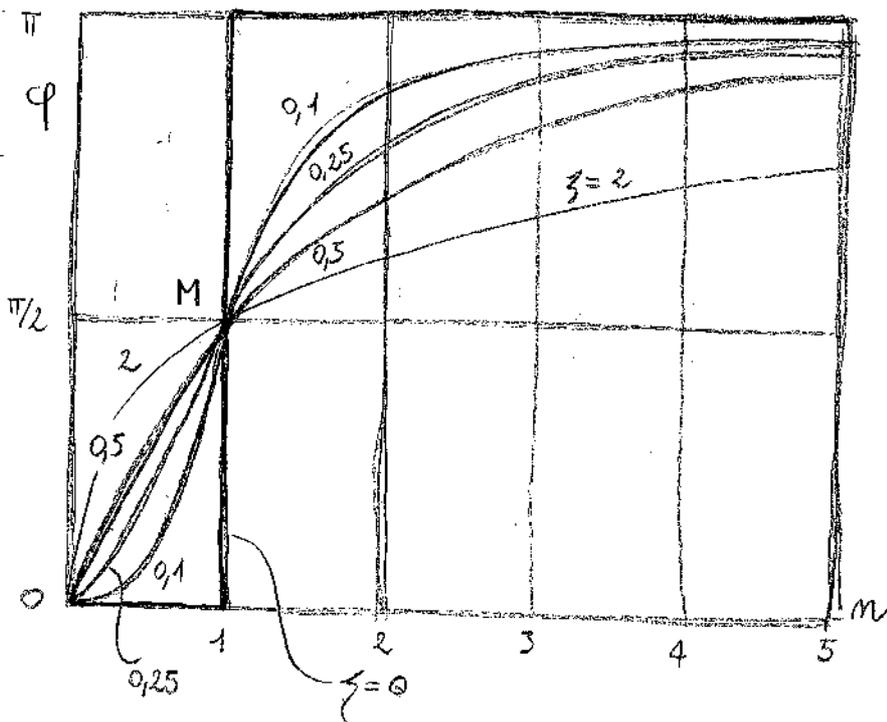
$$110 \quad m = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \text{non}$$

si ha per una pulsazione delle forzanti che sia inferiore rispetto a quella naturale.

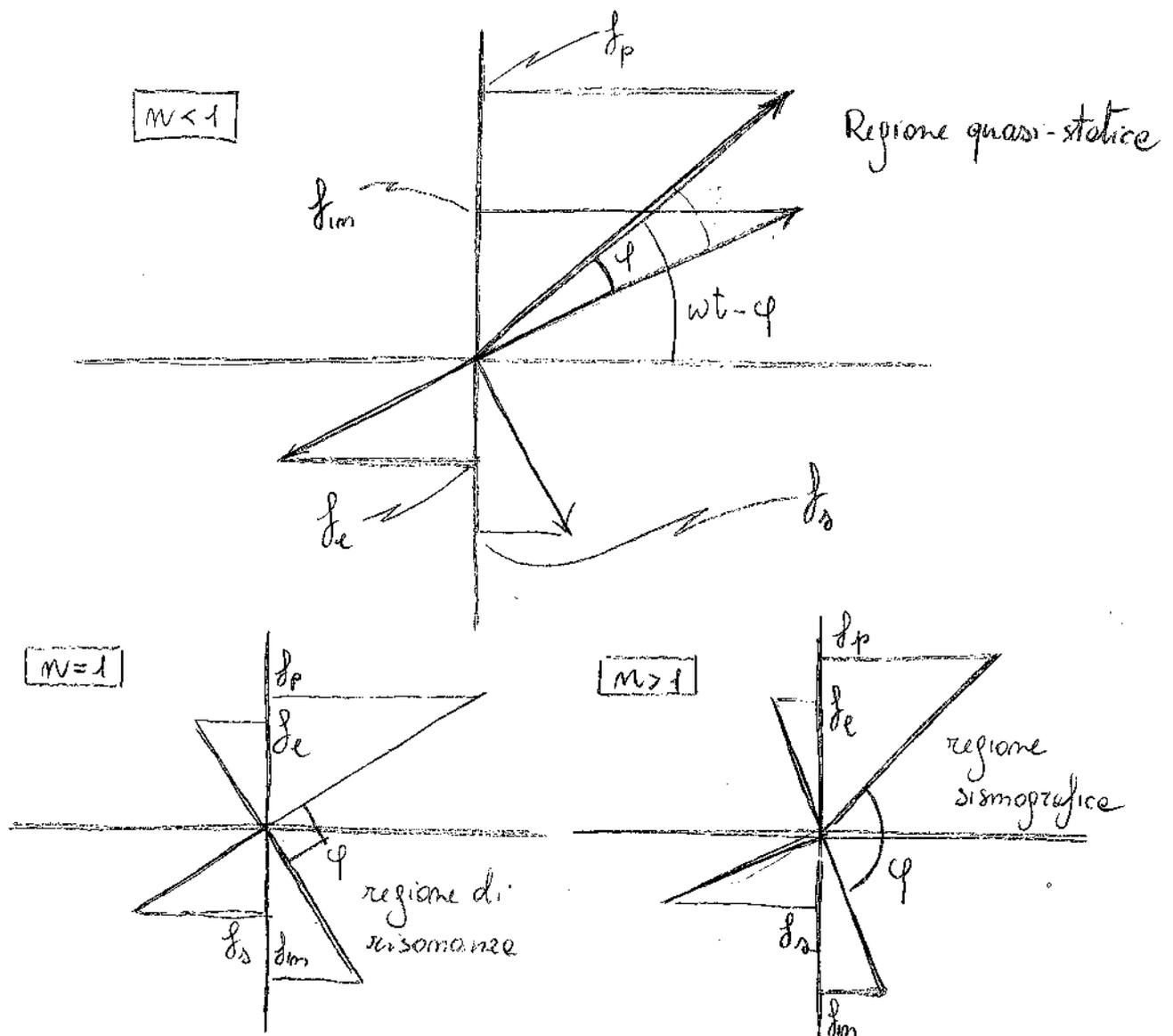
5.11. Sfasamento. Dalla 5.52 è possibile ricavare l'andamento del ritardo di fase

$$(5.61) \varphi = \arctan \frac{2m\xi}{1-m^2}$$

il quale indica se si vuole il ritardo con il quale il sistema reagisce alla forza perturbatrice.



Per $m < 1$, $m = 1$, $m > 1$ abbiamo rispettivamente le seguenti configurazioni per i fasori delle forze F_p, F_c, F_n, F_{im} .



5.12. Regione quasi statica (o sotto critica). Quella che si ha per $m < 1$. In tal caso abbiamo

$$(5.62) \quad \omega < \omega_m$$

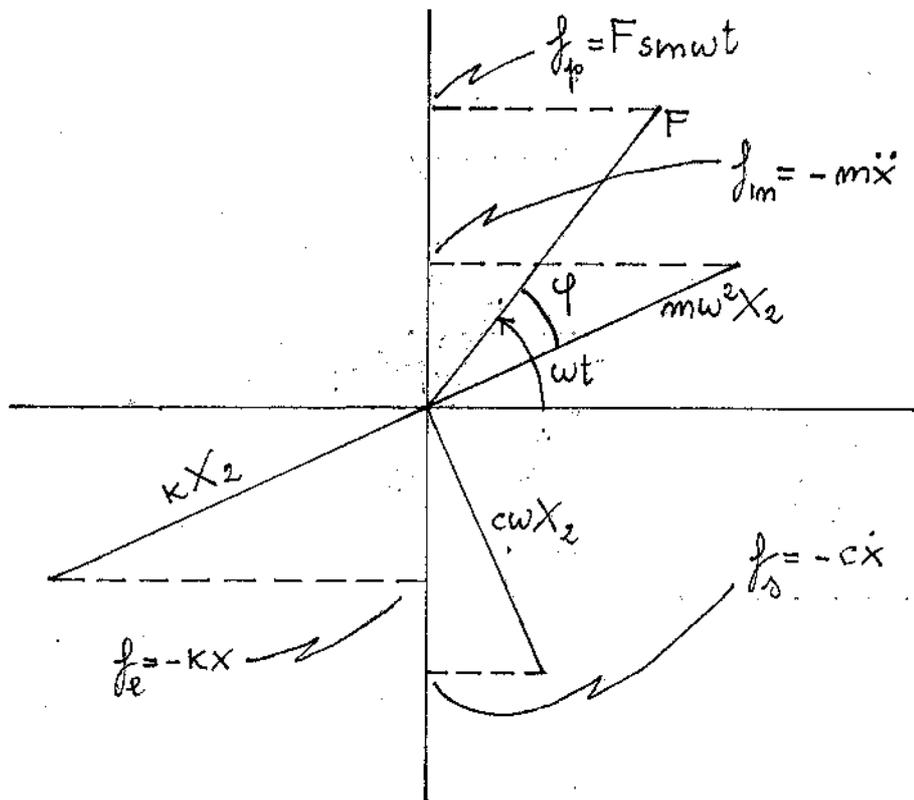
$$(5.63) \quad 0 \leq \varphi < \pi/2$$

Le seconde delle quali si deduce dal diagramma del ritardo e di fase. Dalla (5.62) si deduce che

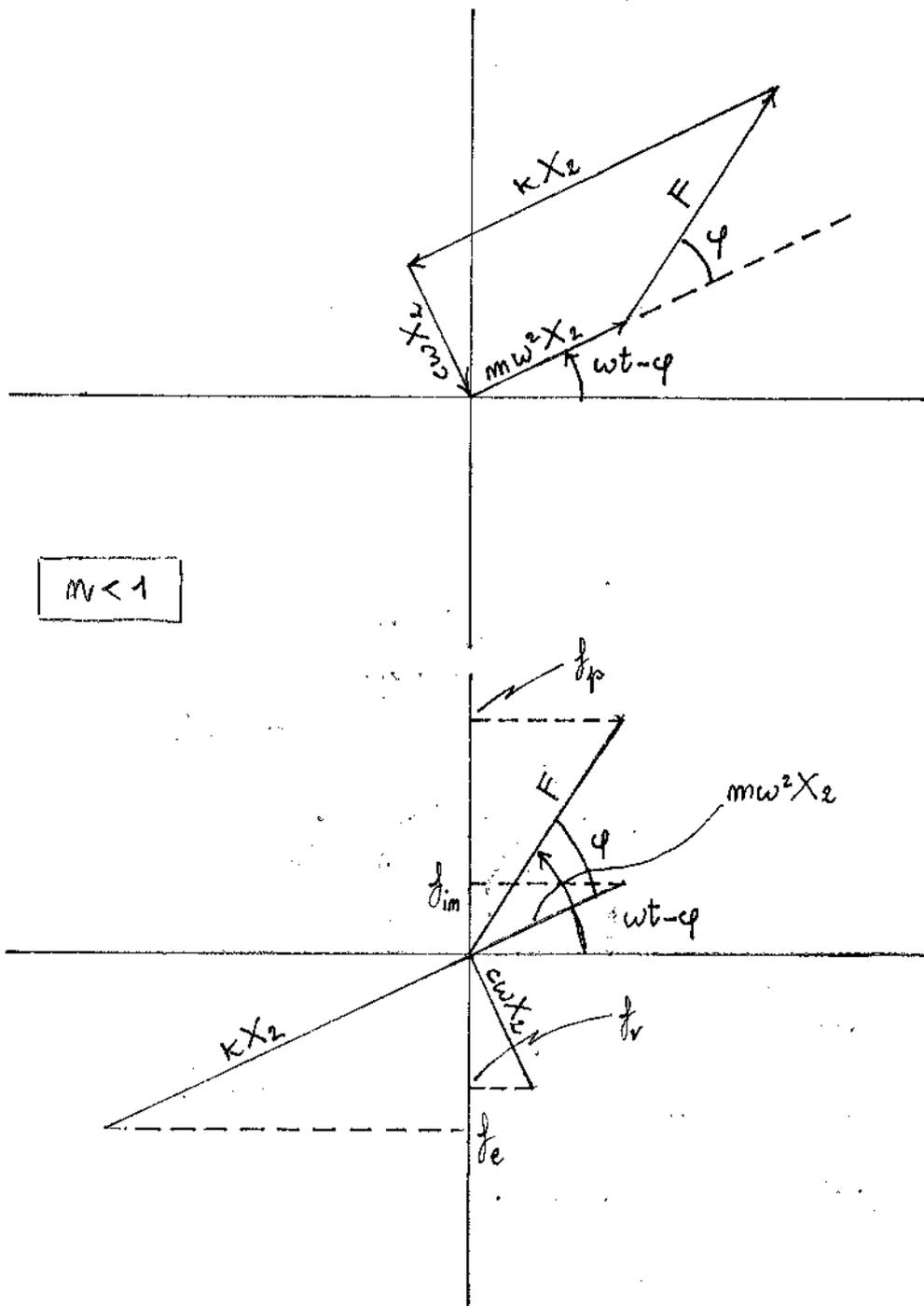
$$\omega < \omega_m \Rightarrow \omega^2 X_2 < \omega_m^2 X_2 \Rightarrow m\omega^2 X_2 < m\omega_m^2 X_2 \Rightarrow$$

$$(5.63) \quad m\omega^2 X_2 < m \frac{k}{m} X_2 = k X_2$$

Questo significa che la forza di inerzia ha un vettore rotante con modulo minore rispetto a quello delle forze elastiche. La rappresentazione qualitativa dei vettori rotanti in questo caso è la seguente:



Nelle pagine successive provo una rappresentazione più accurata in considerazione del fatto che la somma dei vettori deve essere nulla.



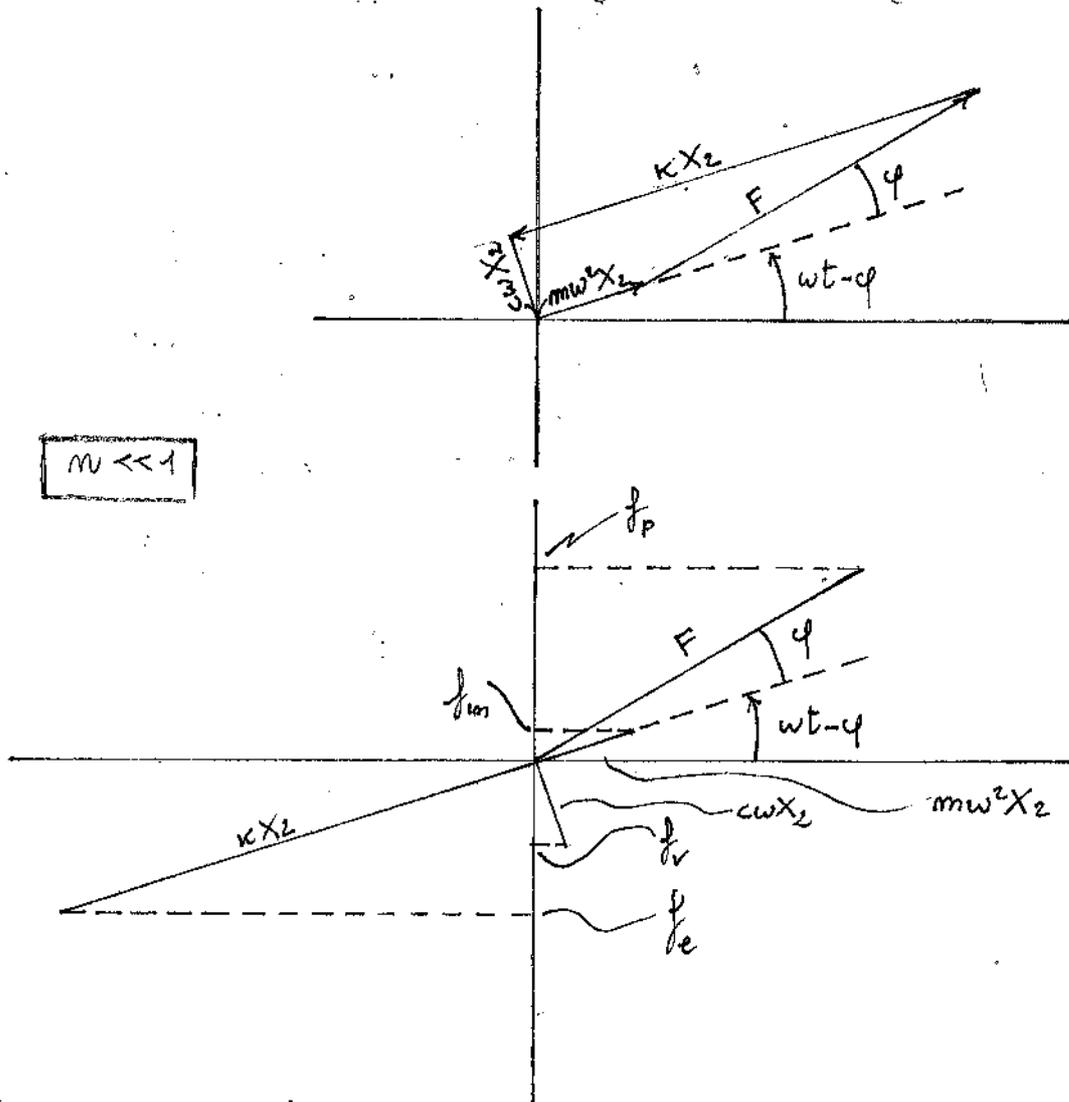
Vediamo ora cosa succede nel caso in cui si abbia un rapporto $m \ll 1$. Dal diagramma di γ si ricava

$$(5.64) \quad \gamma \approx 1 \Leftrightarrow X_2 \approx F/k \Leftrightarrow kX_2 \approx F$$

↳ Dal diagramma di φ si ricava invece

$$(5.65) \quad \varphi \approx 0$$

Con ciò abbiamo che il diagramma delle forze è il seguente

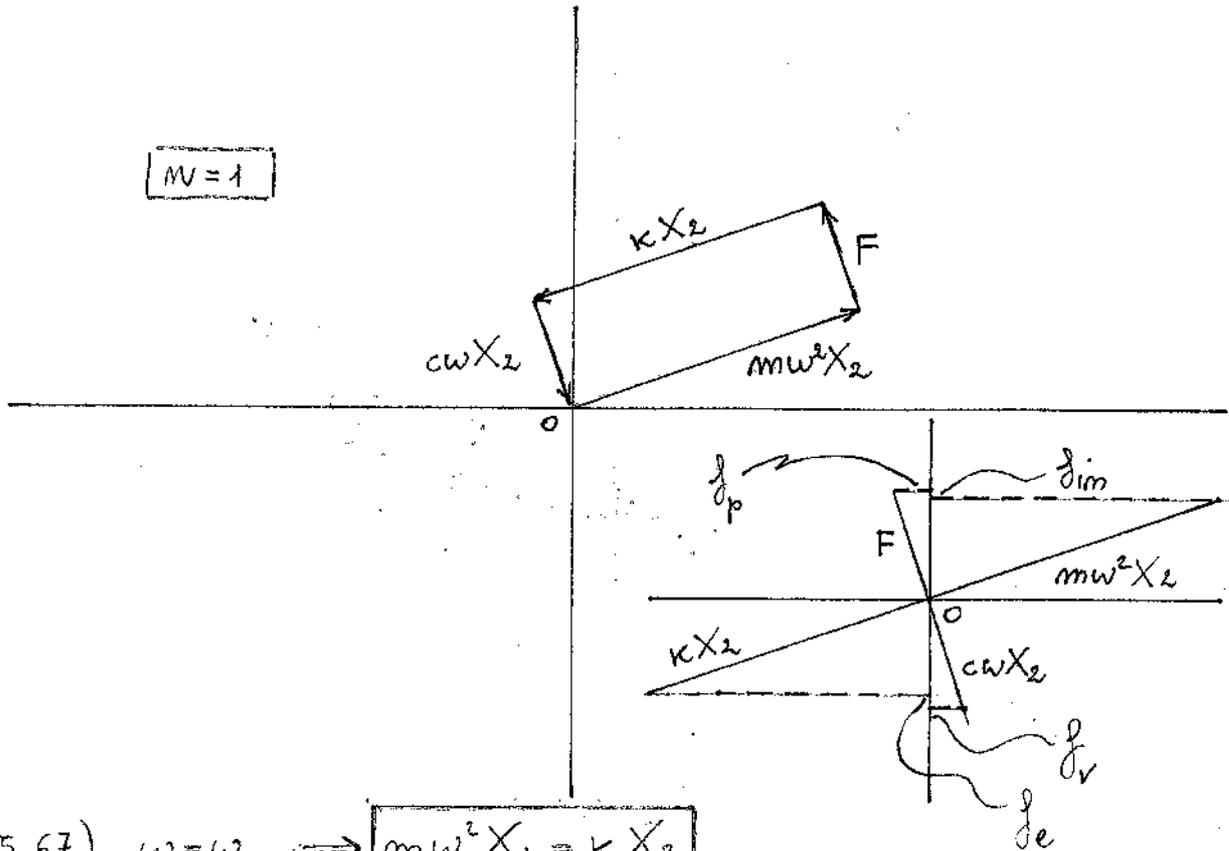


Si osserva allora che nel caso in cui $m \ll 1$ si ha

$$(5.66) \quad \begin{cases} kx_2 \approx F \\ \varphi \approx 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{la forza elastica quasi equilibra la forza perturbatrice}}$$

5.13. Regione di risonanza (o critica). Per $\nu=1$ si ha

$$\boxed{\nu=1}$$



$$(5.67) \quad \omega = \omega_m \Rightarrow \boxed{m\omega^2 X_2 = k X_2}$$

$$(5.68) \quad \varphi = \pi/2$$

$$(5.69) \quad \gamma = 1/2 \zeta \Rightarrow \frac{X_2 k}{F} = \frac{1}{2 \zeta} \Rightarrow \frac{k X_2}{F} = \frac{\sqrt{k m}}{2 c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}} \frac{X_2}{F} = \frac{1}{c} \Rightarrow \omega_m \frac{X_2}{F} = \frac{1}{c} \Rightarrow F = c \omega_m X_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F = c \omega X_2}$$

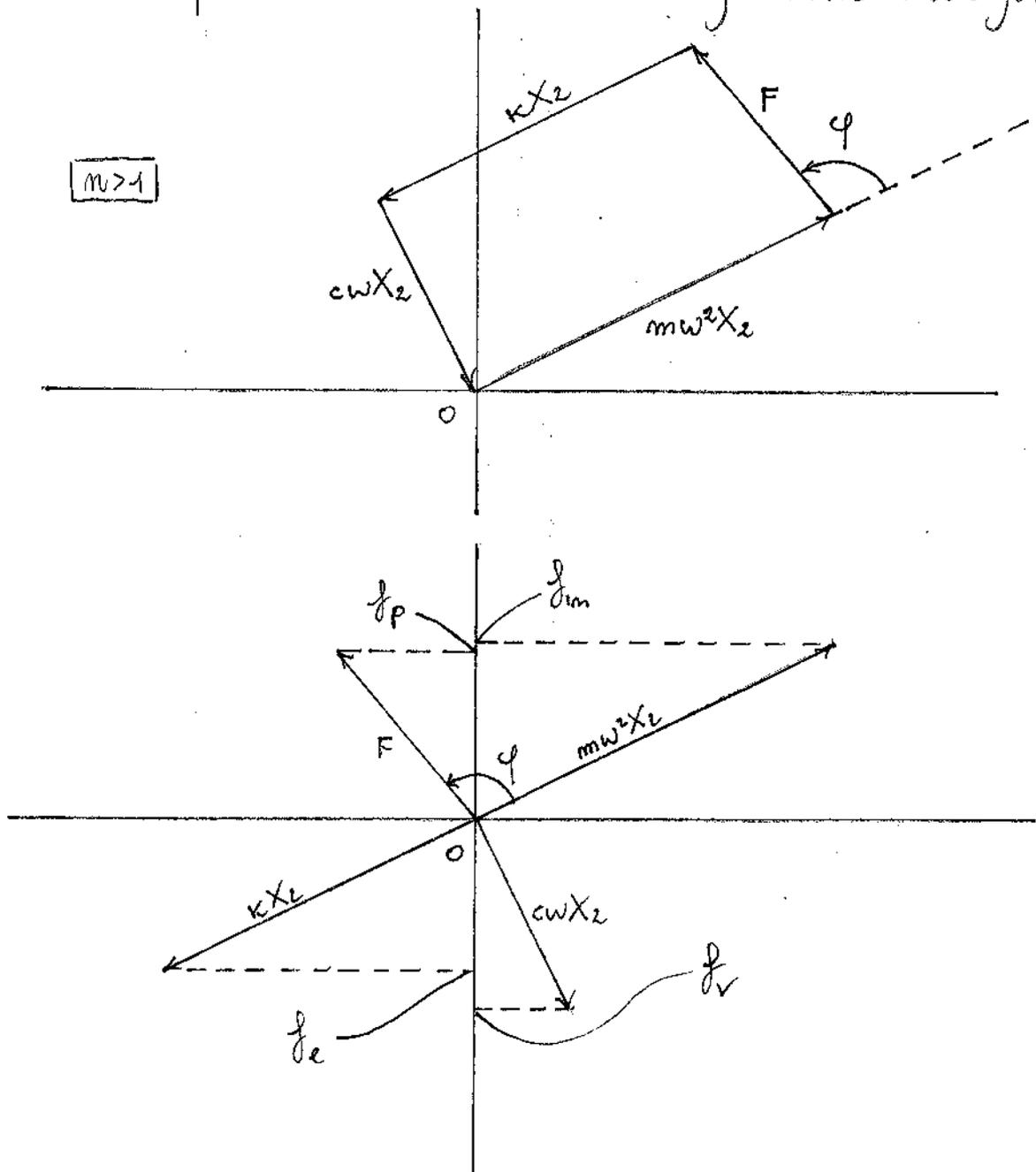
Si vede come in questo caso le forze elastiche bilanciano quelle di inerzia mentre quelle perturbatrici bilanciano quelle viscose;

5.14. Regione sismografica (o iperentica). Per $\nu > 1$ si ha

$$(5.70) \quad \omega > \omega_m \Rightarrow \boxed{m\omega^2 X_2 > k X_2}$$

$$(5.71) \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$$

Procedo dunque ora a tracciare il diagramma delle forze.



Nel caso in cui sia $\omega \gg \omega_m$, abbiamo che

$$(5.72) \quad \omega \gg \omega_m \implies \boxed{m\omega^2 X_2 \gg k X_2}$$

$$(5.73) \quad \varphi \rightarrow \pi$$

$$(5.74) \quad \gamma \ll 1 \implies \boxed{X_2 k \ll F}$$

Si consideri inoltre che dalla definizione di γ si ha

$$\frac{X_2 k}{F} = \gamma \implies \frac{X_2 k}{F} \frac{m\omega^2}{m\omega^2} = \gamma \implies \frac{X_2 k}{F} \frac{m\omega^2}{m\omega^2} = \gamma \implies$$

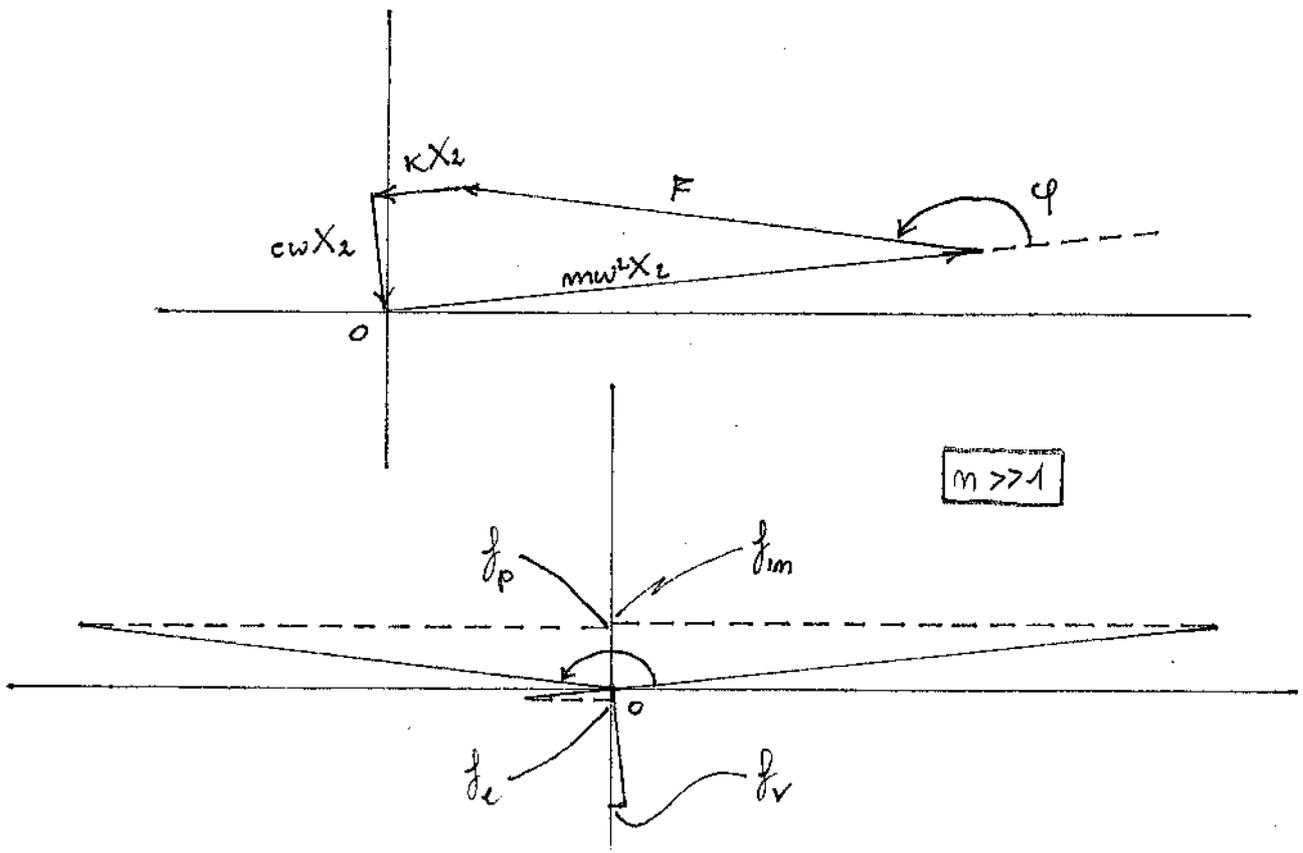
$$\frac{X_2}{F} \frac{\omega_m^2}{\omega^2} m\omega^2 = \gamma \implies \frac{X_2}{F} \frac{1}{m^2} m\omega^2 = \gamma \implies m\omega^2 X_2 = \gamma F m^2 \implies$$

$$\frac{m\omega^2 X_2}{F} = \frac{m^2}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2}} \approx 1 \quad \text{per } m \gg 1$$

Dunque abbiamo anche le relazioni

$$(5.75) \quad m\omega^2 X_2 \approx F$$

Con ciò i diagrammi delle forze sono i seguenti:



In questo caso la forza di inerzia quasi bilancia quella perturbatrice.

5.15. Metodo dei numeri complessi. In campo complesso l'equazione (5.1) si scrive

$$(5.76) \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F\cos\omega t + iF\sin\omega t$$

Per questa equazione propongo a regime una soluzione complessa del tipo

$$(5.77) \quad \bar{x}(t) = \bar{X} e^{i\omega t}$$

dove \bar{X} è un numero complesso. Per le 5.76 abbiamo poi

$$\ddot{X} + \frac{c}{m} \dot{X} + \frac{k}{m} X = \frac{F}{m} e^{i\omega t} \Rightarrow$$

$$\ddot{X} + \frac{2\zeta\omega_m}{2m\omega_m} \dot{X} + \omega_m^2 X = \frac{F}{m} \frac{k}{k} e^{i\omega t} \Rightarrow$$

$$(5.78) \quad \ddot{X} + 2\zeta\omega_m \dot{X} + \omega_m^2 X = X_s \omega_m^2 e^{i\omega t}$$

Derivo ora due volte le soluzioni complesse:

$$(5.79) \quad \frac{d}{dt} \bar{x}(t) = i\omega \bar{X} e^{i\omega t}$$

$$(5.80) \quad \frac{d^2}{dt^2} \bar{x}(t) = -\omega^2 \bar{X} e^{i\omega t}$$

Sostituendo le (5.79), (5.80) nella (5.78) abbiamo

$$-\omega^2 \bar{X} e^{i\omega t} + 2i\zeta\omega_m \omega \bar{X} e^{i\omega t} + \omega_m^2 \bar{X} e^{i\omega t} = X_s \omega_m^2 e^{i\omega t} \Rightarrow$$

$$-\omega^2 \bar{X} + 2i\zeta\omega_m \omega \bar{X} + \omega_m^2 \bar{X} = X_s \omega_m^2 \Rightarrow$$

$$(-\omega^2 + \omega_m^2) + i2\zeta\omega_m \omega \bar{X} = X_s \omega_m^2 \Rightarrow$$

$$\bar{X} = \frac{X_s \omega_m^2}{(-\omega^2 + \omega_m^2) + i2\zeta\omega\omega_m}$$

Moltiplico numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{X_s \omega_m^2 \left((-\omega^2 + \omega_m^2) - i 2\zeta \omega \omega_m \right)}{(-\omega^2 + \omega_m^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 \omega_m^2} = \\ &= \frac{X_s \omega_m^4 \left((-m^2 + 1) - i 2\zeta m \right)}{\omega_m^4 (-m^2 + 1)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 \omega_m^2} = \\ &= \frac{X_s \cancel{\omega_m^4} \left((1 - m^2) - i 2\zeta m \right)}{\cancel{\omega_m^4} \left((1 - m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2 \right)} = \frac{X_s \left((1 - m^2) - i 2\zeta m \right)}{(1 - m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2}\end{aligned}$$

Dunque, sostituendo nelle (5.77) abbiamo la soluzione

$$(5.84) \quad x(t) = X_s \frac{\left((1 - m^2) - i 2\zeta m \right) e^{i\omega t}}{(1 - m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2}$$

Devo ora estrarre la parte reale di questa soluzione. Si ha

$$\begin{aligned}X_s \frac{(1 - m^2) - i 2\zeta m}{(1 - m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2} (\cos \omega t + i \sin \omega t) &= \frac{X_s}{(1 - m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2} \left((1 - m^2) - \right. \\ &\left. - i 2\zeta m \right) (\cos \omega t + i \sin \omega t) = \frac{X_s}{(1 - m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2} \left((1 - m^2) \cos \omega t + i (1 - m^2) \sin \omega t - \right. \\ &\left. - i 2\zeta m \cos \omega t + 2\zeta m \sin \omega t \right) = \frac{X_s}{(1 - m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2} \left[\left((1 - m^2) \cos \omega t + 2\zeta m \sin \omega t \right) + \right.\end{aligned}$$

$$+ i \left((1-m^2) \sin \omega t - 2\zeta m \cos \omega t \right) \Bigg]$$

In definitiva la soluzione reale cercata vale

$$(5.81) \quad x(t) = \frac{X_s}{(1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2} \left[(1-m^2) \cos \omega t + 2\zeta m \sin \omega t \right]$$

Provare a porre le (5.81) nella forma $X \sin(\omega t - \psi)$ imponendo quanto segue

$$\begin{cases} A \sin(\omega t - \psi) = A(\sin \omega t \cos \psi - \cos \omega t \sin \psi) \\ (1-m^2) \cos \omega t + 2\zeta m \sin \omega t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A \cos \psi \sin \omega t = 2\zeta m \sin \omega t \\ -A \sin \psi \cos \omega t = (1-m^2) \cos \omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cos \psi = 2\zeta m \\ -A \sin \psi = (1-m^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A^2 (\sin^2 \psi + \cos^2 \psi) = (1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2 \\ \tan \psi = - \frac{1-m^2}{2\zeta m} \end{cases} \Rightarrow$$

$$(5.82) \quad \begin{cases} A = \sqrt{(1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2} \\ \tan \psi = - \frac{1-m^2}{2\zeta m} \end{cases}$$

~ Sostituendo le (5.82) nelle (5.81) abbiamo

$$x(t) = \frac{X_s}{(1-m^2)^2 + 4m^2\zeta^2} \sqrt{(1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2} \sin(\omega t - \psi) \Rightarrow$$

$$(5.83) \quad x(t) = \frac{X_s}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4m^2\zeta^2}} \sin(\omega t - \psi) = \frac{F/k}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4m^2\zeta^2}} \sin(\omega t - \psi)$$

~ Si consideri ora che

$$\tan \psi = \frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{-\cos(\psi + \pi/2)}{\sin(\psi + \pi/2)} = -\cotan(\psi + \pi/2) \Rightarrow$$

$$-\frac{(1-m^2)}{2\zeta m} = \tan \psi \Rightarrow \frac{1-m^2}{2\zeta m} = \cotan(\psi + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \frac{2\zeta m}{1-m^2} = \frac{\sin(\psi + \pi/2)}{\cos(\psi + \pi/2)} \Rightarrow$$

$$(5.84) \quad \psi + \frac{\pi}{2} = \arctan\left(\frac{2\zeta m}{1-m^2}\right) \Rightarrow \psi = \arctan\left(\frac{2\zeta m}{1-m^2}\right) - \frac{\pi}{2}$$

~ Sostituendo le (5.84) nella (5.83) abbiamo

$$x(t) = \frac{F/k}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4m^2\zeta^2}} \sin\left(\omega t - \arctan\left(\frac{2\zeta m}{1-m^2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$(5.86) \quad x(t) = \frac{F/k}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4m^2\zeta^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{2\zeta m}{1-m^2}\right)\right)$$

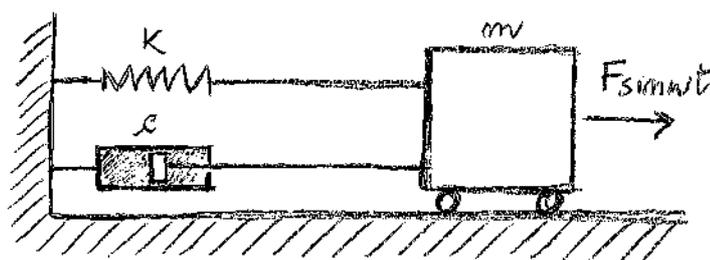
Si osserva che in questo paragrafo abbiamo considerato una forzante $F \cos \omega t$ (vedi 5.76) a differenza di quanto fatto nei paragrafi precedenti, dove le forzanti era espresse dalle formule $F \sin \omega t$. Si può verificare in generale che - a regime - la soluzione si esprime con le stesse funzioni trigonometriche delle forzanti, dunque abbiamo in definitiva

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2\zeta m}{1-m^2}\right)$$

$$(5.87) \begin{cases} x(t) = \frac{F/k}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2}} \cos(\omega t - \varphi) \leftarrow f_p = F \cos \omega t \\ x(t) = \frac{F/k}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2}} \sin(\omega t - \varphi) \leftarrow f_p = F \sin \omega t \end{cases}$$

5.16. Esempio numerico. Si consideri il seguente sistema elastico a un grado di libertà

$$(5.88) \begin{cases} m = 1 \text{ Kg} \\ K = 500 \text{ N/m} \\ c = 10 \text{ Ns/m} \\ F = 20 \text{ N} \\ \omega = 1 \text{ s}^{-1} \end{cases}$$



L'equazione del moto è descritta dalle seconde delle (5.87).

Dai dati in (5.88) si deduce

$$(5.89) \begin{cases} \omega_m = \sqrt{k/m} = \sqrt{\frac{500 \text{ N}}{\text{m}} \frac{1}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{500 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\text{m} \text{ kg}}} = \frac{\sqrt{500}}{\text{s}} = \frac{22,36}{\text{s}} \\ \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\text{s}} \\ m = \omega/\omega_m = \frac{2\pi/\text{s}}{22,36/\text{s}} = 0,281 \\ \zeta = \frac{c}{2m\omega_m} = \frac{10 \text{ N} \cdot \text{s}}{\text{m}} \frac{\text{s}}{2 \text{ kg} \cdot 22,36} = 0,22 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}} \frac{1}{\text{kg}} = 0,22 \end{cases}$$

Sostituiscono le (5.89), (5.88) nella (5.87) si ha

$$x(t) = \frac{F/k}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4m^2\zeta^2}} \sin(\omega t - \varphi) = \frac{(20/500) \text{ Nm/N}}{\sqrt{(1-0,281^2)^2 + 4(0,281)^2(0,22)^2}} \sin(\omega t - \varphi) = \frac{0,04 \text{ m}}{0,929} \sin\left(\frac{2\pi t}{\text{s}} - \varphi\right)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2\zeta m}{1-m^2}\right) = \arctan\left(\frac{2 \cdot 0,22 \cdot 0,281}{1-0,281^2}\right) = \tan^{-1} 0,124 \approx 7,11^\circ$$

Ho trovato dunque

$$(5.90) \quad x(t) = 0,043 \text{ m} \sin\left(\frac{2\pi}{\text{s}} t - 7,11^\circ\right) = 0,043 \text{ m} \sin\left(\frac{2\pi}{\text{s}} t - 0,124\pi\right)$$

Si osserva che ci troviamo in una regione sottomitica; si noti le modestie del ritardo di fase che configura una cond.

zione in cui le forze elastiche quasi bilanciano quelle perturbatrice. Si osserva poi che

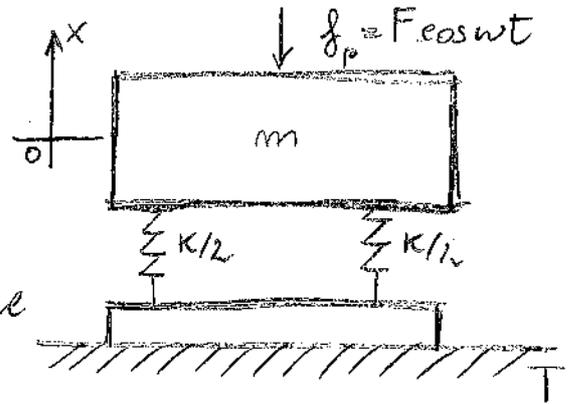
$$(6.91) \begin{cases} X_s = \frac{F}{k} = \frac{20 \text{ N}}{500 \text{ N/m}} = 0,04 \text{ m} \\ X = 0,043 \text{ m} \end{cases}$$

cioè la freccia statica (ovvero l'allungamento che la molla avrebbe se le forze perturbatrice fosse applicate in pulsazioni nulle e a masse fisse) è quasi uguale alla ampiezza delle oscillazioni delle masse.

Capitolo sei: Isolamento dalle vibrazioni

6.1. Assenza di smorzamento. Si consideri il sistema indicato in figura, sottoposto alle forze perturbatrici

$$(6.1) \quad f_p = F \sin \omega t$$



In questo caso vale la 5.34 come soluzione del moto, la quale porge

$$(6.2) \quad x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + \left(x_0 - \frac{F}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} \right) \cos(\omega_n t) + \frac{F \cos \omega t}{m(\omega_n^2 - \omega^2)}$$

Dunque la forza elastica si scrive

$$(6.3) \quad f_e = -kx = -k \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) - \left(x_0 - \frac{F}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} \right) k \cos(\omega_n t) -$$

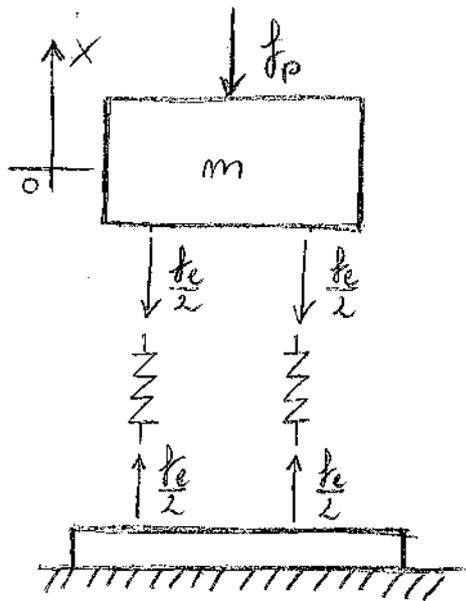
$$\frac{-k F \cos \omega t}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} = -\frac{k \dot{x}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) - x_0 k \cos(\omega_n t) +$$

$$+ \frac{k F \cos(\omega_n t)}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} - \frac{k F \cos \omega t}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} = -\frac{k \dot{x}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) -$$

$$- k x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{k F}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} \left(\cos(\omega_n t) - \cos \omega t \right)$$

Volendo eccedere le forze trasmesse al telaio si consideri

il diagramma in figura. Se indico f_t la forza trasmessa al telaio, allora abbiamo



$$(6.4) \quad f_t = -f_e = -\frac{kX_0}{\omega m} \sin(\omega m t) - kX_0 \cos(\omega m t) + \frac{F}{1-m^2} \cos(\omega t) - \frac{F \cos(\omega t)}{1-m^2}$$

D'altra parte per $\zeta = 0$ e 5.51 page

$$(6.5) \quad X_2 = \frac{F/k}{1-m^2}$$

Dunque si ha

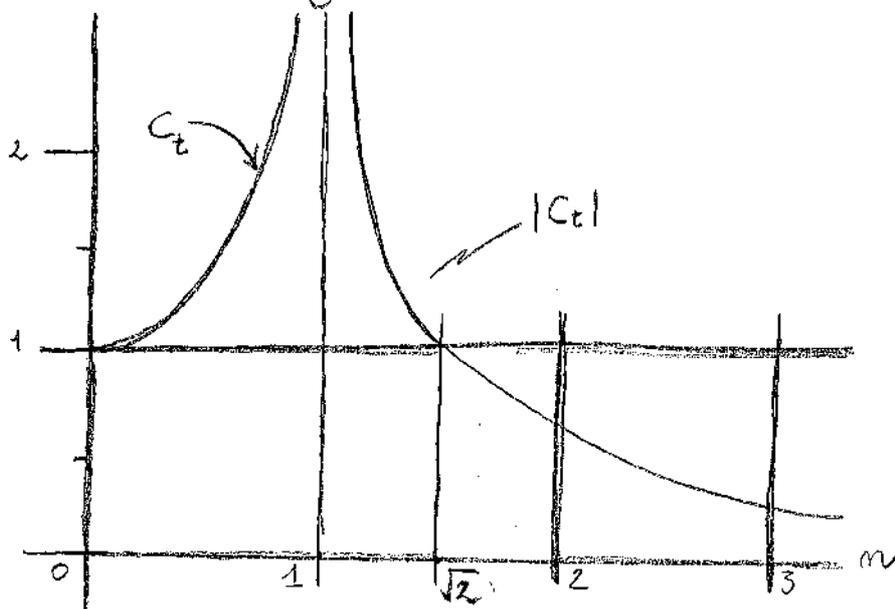
$$(6.6) \quad f_t = -\frac{kX_0}{\omega m} \sin(\omega m t) - kX_0 \cos(\omega m t) + kX_2 (\cos(\omega t) - \cos(\omega t))$$

Si definisce COEFFICIENTE DI TRASMISSIBILITÀ il rapporto fra l'ampiezza della componente di pulsazione ω delle f_t e l'ampiezza delle forze perturbatrici:

$$(6.7) \quad C_t = \frac{kX_2}{F} = \frac{k F/k}{1-m^2} \frac{1}{F} = \frac{1}{1-m^2}$$

Dunque il coefficiente di trasmissibilità coincide con il

coefficiente di amplificazione dinamica in 4.19. L'andamento nei è il seguente,



Considerando l'espressione (6.7) di C_t allora le forze trasmesse (6.6) si scrive

$$f_t = -\frac{K\dot{X}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) - KX_0 \cos(\omega_m t) + KX_2 \cos(\omega_m t) - KX_2 \cos(\omega t) =$$

$$= -\frac{K\dot{X}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) - KX_0 \cos(\omega_m t) + F \frac{KX_2}{F} \cos(\omega_m t) - F \frac{KX_2}{F} \cos(\omega t) =$$

$$= -\frac{K\dot{X}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) - KX_0 \cos(\omega_m t) + FC_t \cos(\omega_m t) - FC_t \cos(\omega t) \Rightarrow$$

$$(6.7) f_t = -\frac{K\dot{X}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) - KX_0 \cos(\omega_m t) + FC_t \cos(\omega_m t) - \int_{op} C_t$$

Si possono allora avere i seguenti casi:

$$(6.8) m=0, \omega \neq 0 \Leftrightarrow K \rightarrow \infty \Leftrightarrow C_t = 1. \text{ In questo caso le forze}$$

elastico è integralmente trasmessa al telaio. Molle rigide.

(6.9) $m \in]0, 1[\iff C_t > 1$. In questo caso le molle amplificano l'ampiezza delle forze trasmesse al telaio. Queste circostanze si verificano quando $\omega \leq \omega_m \iff \omega^2 m \leq \kappa$; dunque per rigidità $\kappa \geq m\omega^2$ l'uso delle molle al fine dell'isolamento delle vibrazioni è controproducente.

(6.10) $m > 1$. Si osservi allora che essendo

$$|C_t| = \frac{1}{m^2 - 1} \geq 1 \iff 1 \geq m^2 - 1 \iff 2 \geq m^2 \iff$$

$$\iff m^2 \leq 2 \iff m \leq \sqrt{2}$$

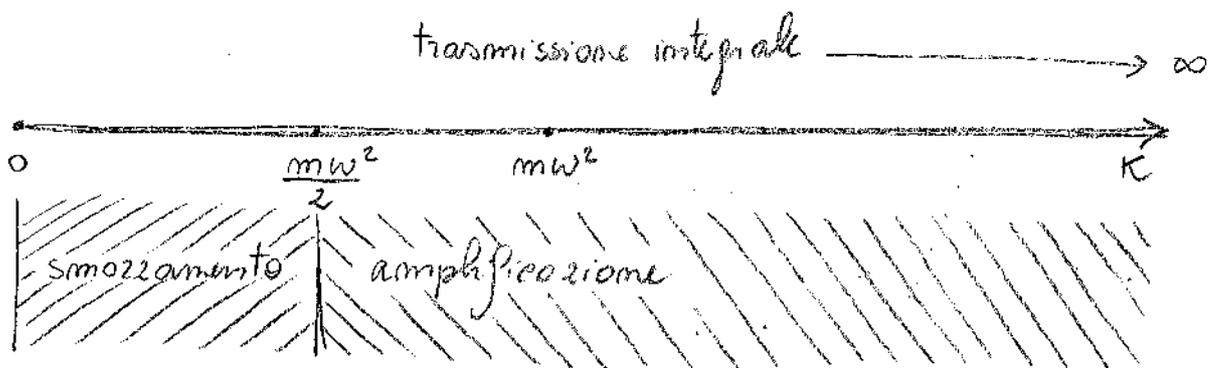
si ha

$$\begin{cases} |C_t| \geq 1 & \text{per } m \in]1, \sqrt{2}] \\ |C_t| < 1 & \text{per } m > \sqrt{2} \end{cases}$$

Dunque per $m > 1$ l'isolamento delle vibrazioni si ha per $m > \sqrt{2}$. Riassumo quanto trovato nelle tabelle seguenti.

TRASMISSIONE DELLE VIBRAZIONI IN ASSENZA DI SMORZAMENTO	
$k \rightarrow \infty$	La forza perturbatrice è trasmessa al telaio integralmente.
$k > m\omega^2$	La forza perturbatrice è trasmessa amplificata al telaio.
$k < \frac{m\omega^2}{2}$	La forza perturbatrice è trasmessa al telaio con ampiezze ridotte.
$\frac{m\omega^2}{2} \leq k < m\omega^2$	La forza perturbatrice è trasmessa al telaio amplificata.

La tabella può essere tradotta anche nel grafico seguente.



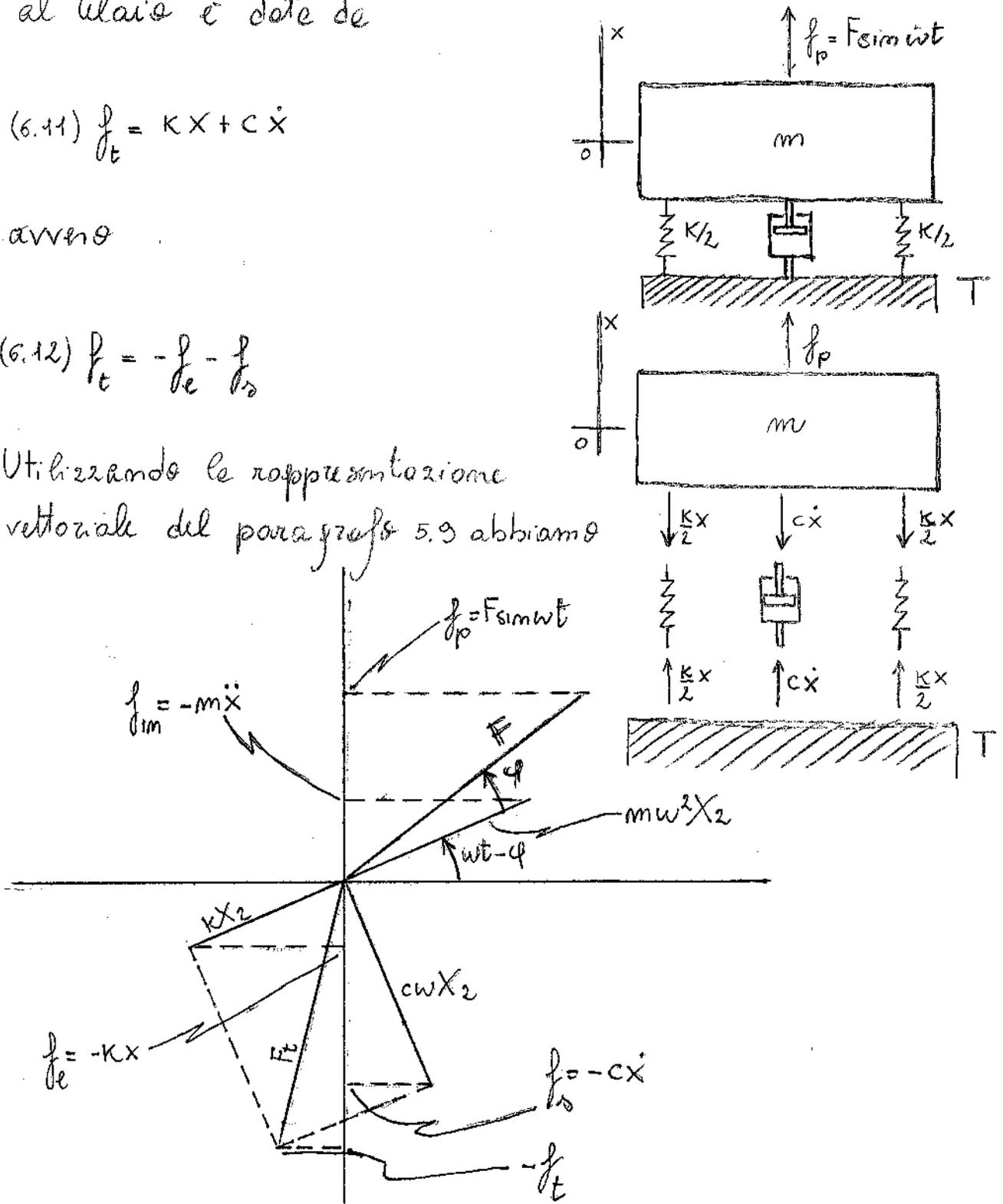
6.2. Presenza di smorzamenti. Introduco un organo di smorzamento caratterizzato da viscosità c . La forza trasmessa al telaio è data da

$$(6.11) \quad f_t = kx + c\dot{x}$$

avendo

$$(6.12) \quad f_t = -f_{el} - f_{vis}$$

Utilizzando la rappresentazione vettoriale del paragrafo 5.9 abbiamo



Dal diagramma si deduce l'ampiezza delle forze trasmesse

al telaio:

$$(6.13) F_t = \sqrt{k^2 X_2^2 + c^2 \omega^2 X_2^2} = X_2 \sqrt{k^2 + c^2 \omega^2}$$

Considerando poi le (5.51) si ha

$$\begin{aligned} F_t &= \frac{F/k}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2}} \sqrt{k^2 + c^2 \omega^2} = \frac{F/k}{\sqrt{(1-m^2)^2 + (2\zeta m)^2}} k \sqrt{1 + \frac{c^2 \omega^2}{k^2}} \\ &= \frac{F}{\sqrt{(1-m^2)^2 + (2\zeta m)^2}} \sqrt{1 + \frac{2}{4m^2} \frac{c^2 \omega^2}{m^2 \omega^2}} = \frac{F}{\sqrt{(1-m^2)^2 + (2\zeta m)^2}} \sqrt{1 + \frac{2}{\zeta^2} \frac{\omega^2}{\omega_m^2}} \end{aligned}$$

Dunque ho trovato

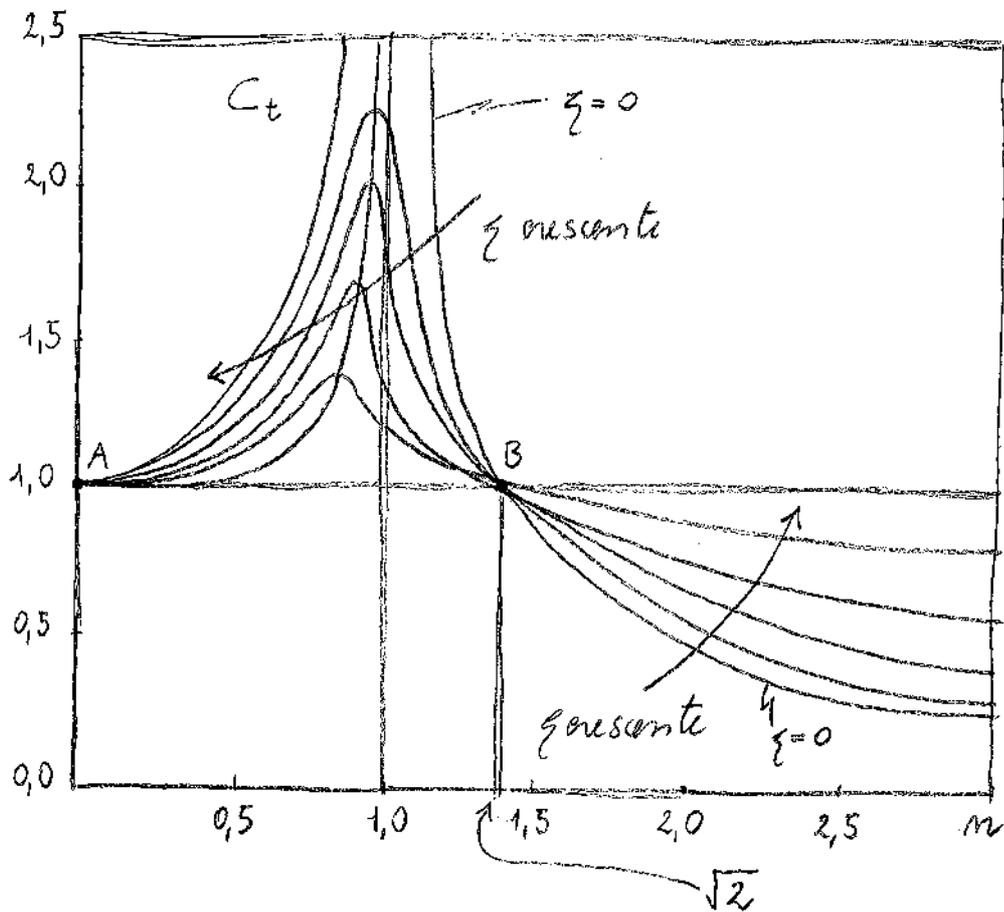
$$(6.14) F_t = F \frac{\sqrt{1 + (2\zeta m)^2}}{\sqrt{(1-m^2)^2 + (2\zeta m)^2}}$$

Ne segue che in questo caso il coefficiente di trasmissibilità si scrive

$$(6.15) C_t = \frac{F_t}{F} = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta m)^2}}{\sqrt{(1-m^2)^2 + (2\zeta m)^2}}$$

Si vede che eventualmente le 6.15 rimpiazzano le 6.7 per $\zeta = 0$. L'andamento in mv di C_t - per diversi valori di ζ - è

riportato nel diagramma seguente.



Dal diagramma si deduce immediatamente che

(6.16) si ha isolamento dalle vibrazioni per $m > \sqrt{2}$ tanto migliore quanto più basso è z .

D'altre parti un valore non nullo di z garantisce che non si cada in condizioni di risonanza in corrispondenza di fluttuazioni di w che portino alle condizioni $w = w_m$.

Vediamo degli esempi numerici. Voglio calcolare il valore di C_t per $m=2$ in corrispondenza dei seguenti valori di ξ : 0, 0.2, 0.5. Si ha

$$C_t(m=2, \xi=0) = \frac{1}{\sqrt{(4-4)^2}} = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

$$C_t(m=2, \xi=0,2) = \frac{\sqrt{1+(2 \cdot 0,2 \cdot 2)^2}}{\sqrt{(4-4)^2 + (2 \cdot 0,2 \cdot 2)^2}} = \frac{\sqrt{1+0,8^2}}{\sqrt{9+0,8^2}} = \frac{\sqrt{1,64}}{\sqrt{9,64}} \approx 0,41$$

$$C_t(m=2, \xi=0,5) = \frac{\sqrt{1+(4 \cdot 0,5)^2}}{\sqrt{9+(4 \cdot 0,5)^2}} = \frac{\sqrt{1+4}}{\sqrt{9+4}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}} \approx 0,62$$

Questi risultati possono essere tabulati come segue:

(6.17)

m	ξ	C_t
2	0.0	0.33
2	0.2	0.41
2	0.5	0.62

Vediamo ora invece di calcolare il luogo dei massimi della funzione $C_t = C_t(m)$. Derivando in m la 6.15 si ha che

$$D C_t = \frac{D \sqrt{1+(2\xi m)^2}}{\sqrt{(4-m^2)^2 + (2\xi m)^2}} + \sqrt{1+(2\xi m)^2} D \left(\frac{1}{\sqrt{(4-m^2)^2 + (2\xi m)^2}} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{2} (1 + (2\zeta m)^2)^{-1/2} \cdot 2 \cdot 2\zeta m \cdot 2\zeta}{\sqrt{(1-m^2)^2 + (2\zeta m)^2}} + \sqrt{1 + (2\zeta m)^2} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{-2(1-m^2)2m + 2\zeta^2 m}{((1-m^2)^2 + (2\zeta m)^2)^{3/2}} = \\
&= \frac{1}{2} \frac{(1 + 4\zeta^2 m^2)^{-1/2} \cdot 4\zeta^2 m}{\sqrt{(1-m^2)^2 + (2\zeta m)^2}} + \sqrt{1 + (2\zeta m)^2} \frac{(1-m^2)2m - 2\zeta m}{((1-m^2)^2 + (2\zeta m)^2)^{3/2}} = \\
&= \frac{4\zeta^2 m}{\sqrt{1 + 4\zeta^2 m^2} \sqrt{(1-m^2)^2 + (2\zeta m)^2}} + \frac{\sqrt{1 + (2\zeta m)^2} \cdot 2m(1-m^2 - \zeta)}{((1-m^2)^2 + (2\zeta m)^2) \sqrt{(1-m^2)^2 + (2\zeta m)^2}}
\end{aligned}$$

Il punto di estremo relativo si ha per

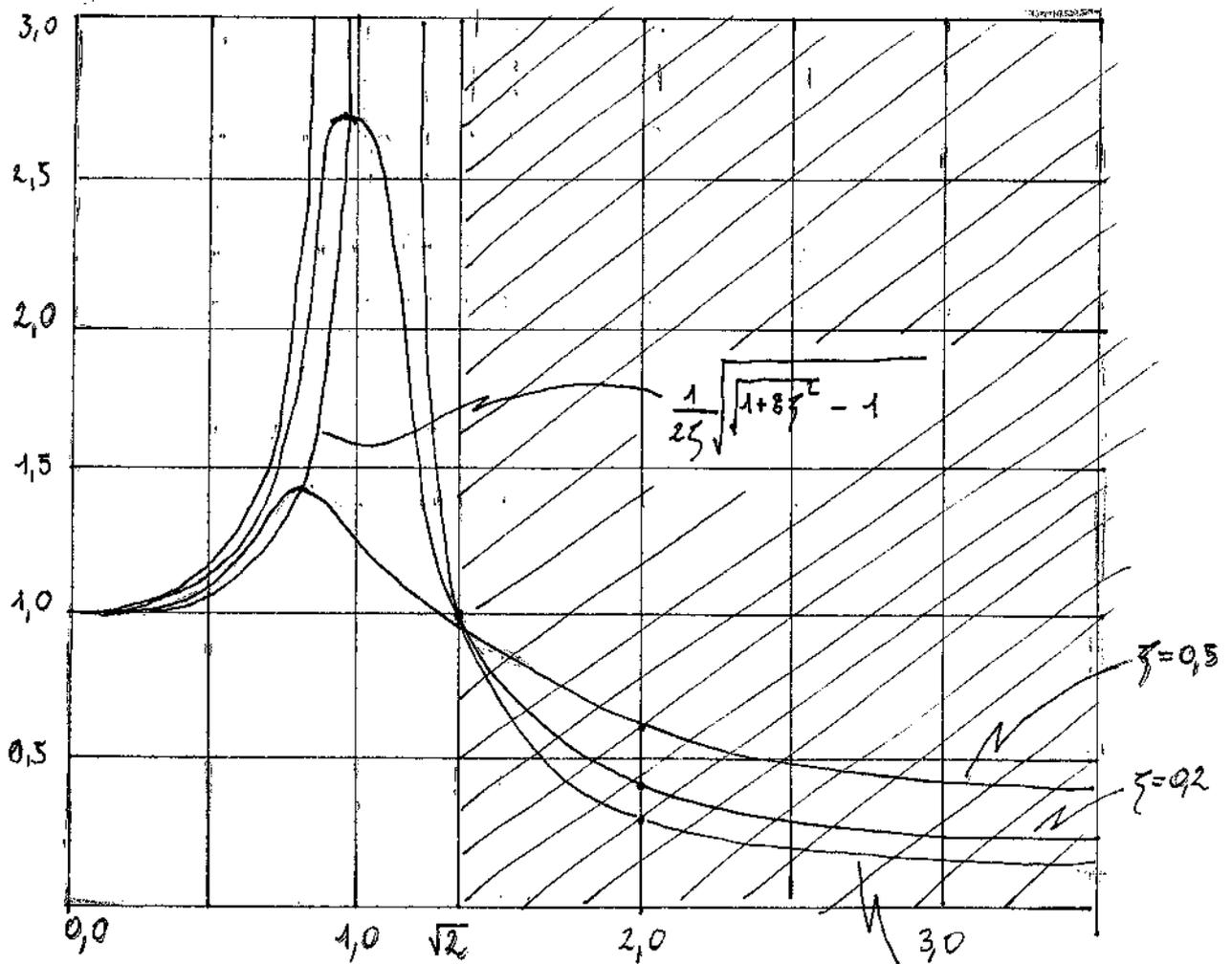
$$D C_t = 0 \iff \frac{2\zeta^2}{\sqrt{1 + 4\zeta^2 m^2}} + \frac{\sqrt{1 + (2\zeta m)^2} (1 - m^2 - \zeta)}{((1 - m^2)^2 + (2\zeta m)^2)} = 0 \iff$$

$$(6.18) \frac{2\zeta^2 [(1 - m^2)^2 + (2\zeta m)^2] + (1 + 4\zeta^2 m^2) (1 - m^2 - \zeta)}{[(1 - m^2)^2 + (2\zeta m)^2] \sqrt{1 + 4\zeta^2 m^2}} = 0$$

Risolvendo la (6.18) si dovrebbe ottenere:

$$(6.19) m_c = \frac{1}{2\zeta} \sqrt{\sqrt{1 + 8\zeta^2} - 1}$$

Prova a tracciare muovamente il grafico di C_t .



Ho fatto riferimento alla tabella seguente: $\zeta=0,0$

(6.20)

ζ	m_c	$\text{MAX } C_t$	$C_t(m=2)$
0,0	1	∞	$\sim 0,33$
0,2	$\sim 0,96$	$\sim 2,73$	$\sim 0,41$
0,5	$\sim 0,85$	$\sim 1,46$	$\sim 0,62$

Le tabelle è ottenute attraverso i seguenti calcoli:

$$m_c(\zeta=0,2) = \frac{1}{0,4} \sqrt{1 + 8 \cdot 0,04} - 1 \cong 0,96$$

$$m_c(\zeta=0,5) = \frac{1}{0,5} \sqrt{1 + 8 \cdot 0,5^2} - 1 \cong 0,85$$

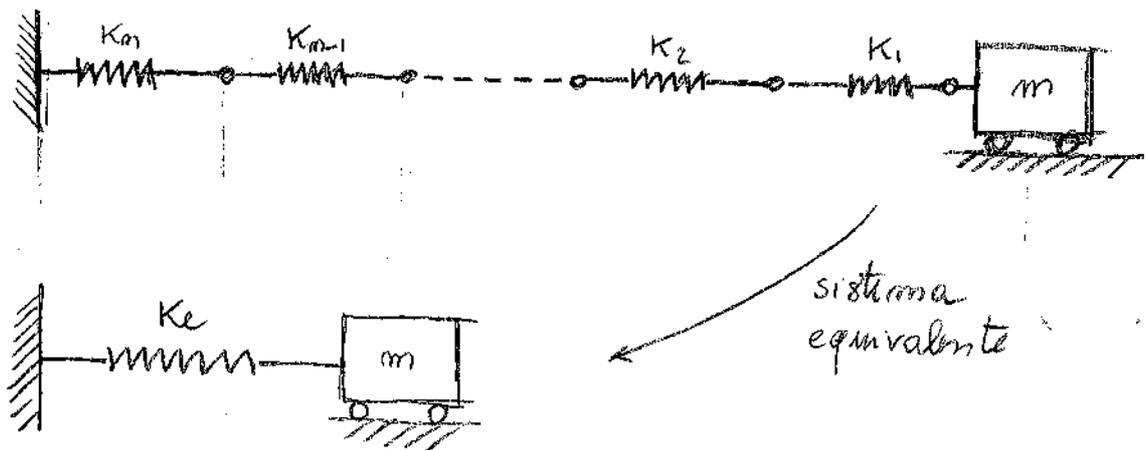
$$C_t(m=0.96, \zeta=0.2) \cong 2,73$$

$$C_t(m=0.85, \zeta=0.5) \cong 1,46$$

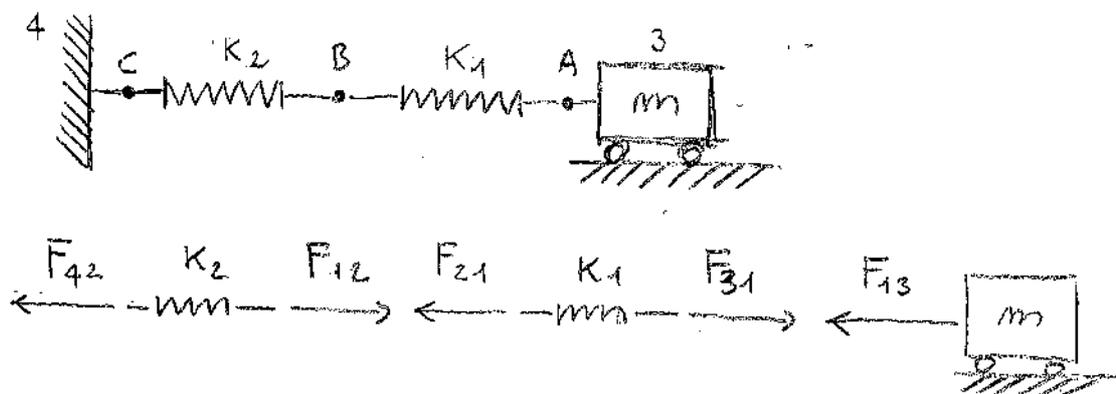
L'area tratteggiata è quella in cui si realizza isolamento delle vibrazioni ($C_t < 1$).

Capitolo sette. Costanti elastiche equivalenti

7.1. Elementi elastici in serie. Una disposizione in serie è quella indicata in figura.



Mi propongo di ricavare l'espressione della costante elastica della molla che sostituisce alle serie permette di avere un sistema equivalente da un punto di vista meccanico. A tale scopo si consideri un sistema con due sole molle.



Indicando x_1 l'elongazione delle molle una e x_2 quella delle molle due, allora si ha:

$$7.1) \begin{cases} F_{12} = -K_2 X_2 \\ F_{31} = -K_1 X_1 \end{cases} \implies \begin{cases} X_2 = -F_{12}/K_2 \\ X_1 = -F_{31}/K_1 \end{cases}$$

Per il sistema equivalente abbiamo per:

$$7.2) F = -K_e X \implies X = -F/K_e$$

Si tenga conto per l'equilibrio meccanico impone $F_{12} = F_{31} = F$ dove l'equivalenza cinematica impone

$$7.3) X = X_1 + X_2$$

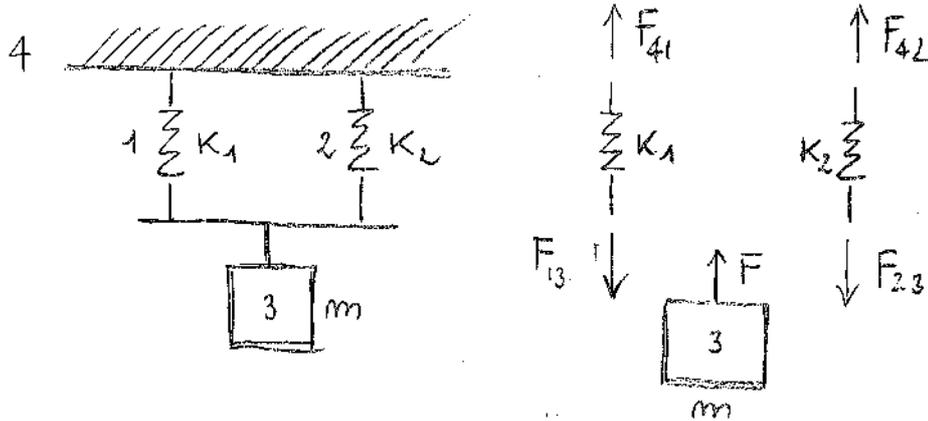
Dunque in conclusione si trova

$$-\frac{F}{K_e} = -\frac{F}{K_2} - \frac{F}{K_1} \iff \frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

Generalizzando si ha

$$7.4) \frac{1}{K_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{K_i}$$

7.2. Elementi elastici in parallelo. Si procede come sopra, considerando due molle in parallelo e imponendo per l'equivalenza meccanica,



In questo caso deve aversi $F_{13} + F_{23} = F$, dunque si ha

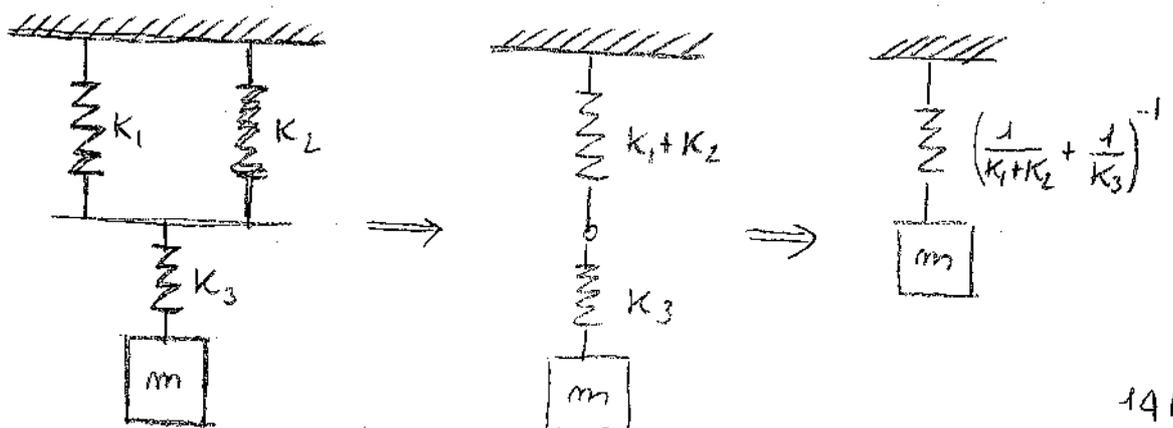
$$7.5) -K_1 x_1 - K_2 x_2 = -K_e x$$

D'altra parte deve aversi anche $x_1 = x_2 = x$, quindi si conclude che in generale vale la formula

$$7.6) K_e = \sum_{i=1}^n K_i$$

7.3. Esempio uno, molle in serie e in parallelo. Si voglia

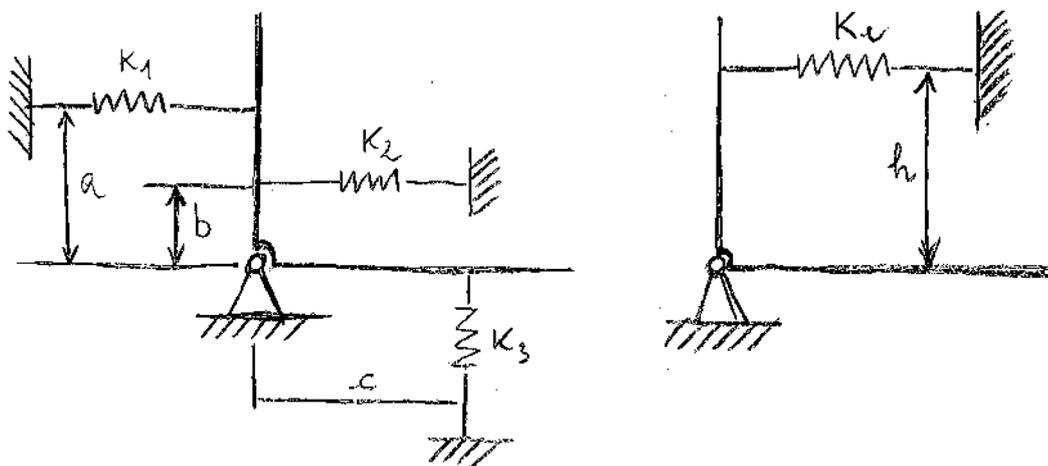
ricavare le costanti elastiche equivalenti per il sistema in figura in cui un parallelo fra due molle è collegato in serie con una terza molla.



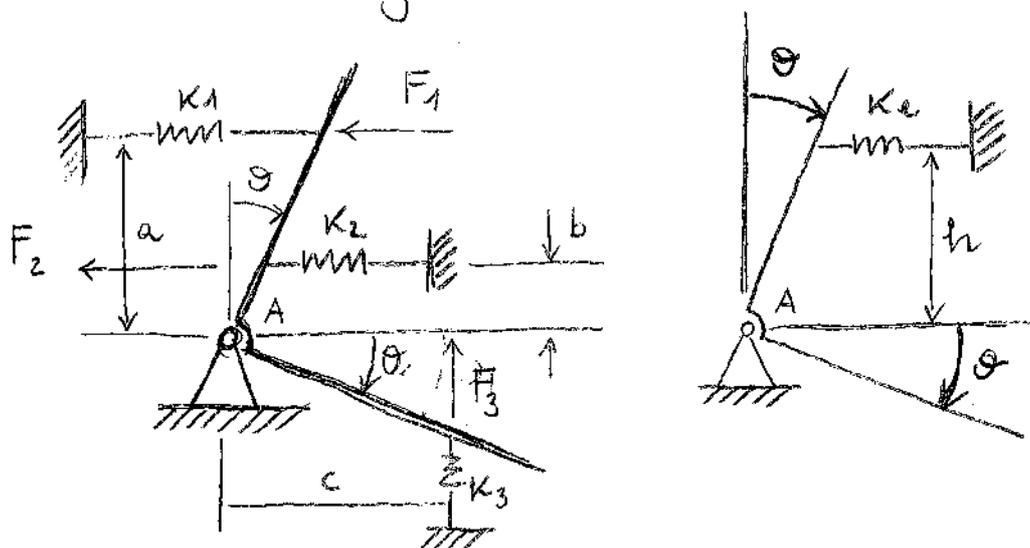
Abbiamo trovato dunque

$$K_e = \left(\frac{1}{K_1 + K_2} + \frac{1}{K_3} \right)^{-1} = \left(\frac{K_3 + K_1 + K_2}{(K_1 + K_2) K_3} \right)^{-1} = \frac{K_1 + K_2}{K_1 + K_2 + K_3} K_3$$

7.4: Esempio due, costanti elastiche equivalenti per geometrie complesse. Si vuole trovare il valore delle costanti elastiche equivalenti da assegnare al sistema a destra affinché esso sia equivalente a quello a sinistra.

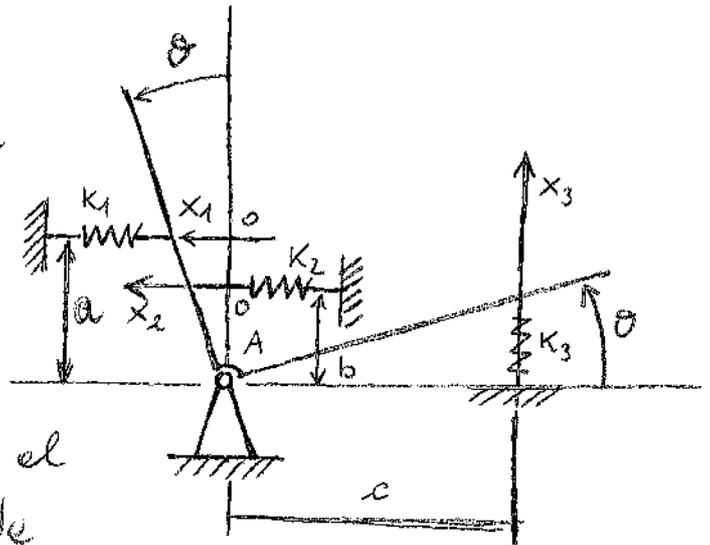


Per il sistema originale ricavare la relazione fra l'angolo di rotazione θ e le forze elastiche.



- Assumendo positive le rotazioni antiorarie e fissando delle asse e dei diametri spostamenti positivi per rotazioni antiorarie si ha

$$7.7) \begin{cases} F_1 = -K_1 X_1 = -k_1 \theta a \\ F_2 = -K_2 X_2 = -k_2 \theta b \\ F_3 = -K_3 X_3 = -k_3 \theta c \end{cases}$$



- Il momento totale rispetto al punto A è dato dunque da

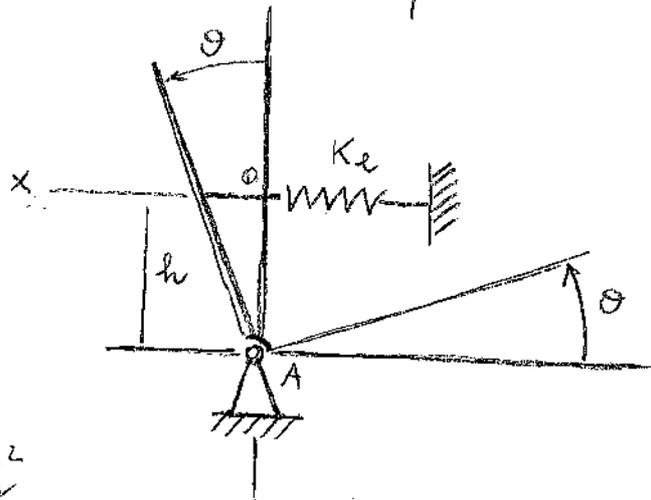
$$7.8) M(A) = F_1 a + F_2 b + F_3 c = -k_1 \theta a^2 - k_2 \theta b^2 - k_3 \theta c^2 = -(k_1 a^2 + k_2 b^2 + k_3 c^2) \theta$$

Procedo analogamente per il meccanismo equivalente:

$$7.9) F = -K_e X = -k_e \theta h$$

Il momento rispetto A è dato da

$$7.10) M(A) = -Fh = -k_e \theta h^2$$



Confrontando le 7.8, 7.10 abbiamo

$$7.11) \quad k_e h^2 = k_1 a^2 + k_2 b^2 + k_3 c^2 \Rightarrow k_e = \frac{k_1 a^2 + k_2 b^2 + k_3 c^2}{h^2}$$

Un metodo alternativo per il calcolo della costante elastica equivalente è quello di imporre che il lavoro di deformazione degli elementi elastici sia lo stesso nei due sistemi.

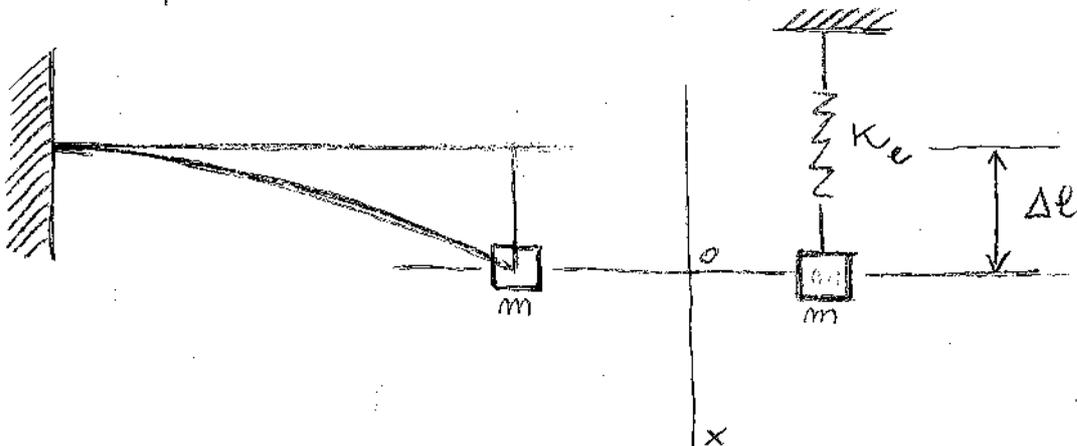
$$\begin{cases} L = \frac{1}{2} F_1 x_1 + \frac{1}{2} F_2 x_2 + \frac{1}{2} F_3 x_3 = \frac{1}{2} (k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2) \\ L_e = \frac{1}{2} F x = \frac{1}{2} k_e x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 = k_e x^2 \Rightarrow k_1 a^2 + k_2 b^2 + k_3 c^2 = k_e h^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_e = \frac{k_1 a^2 + k_2 b^2 + k_3 c^2}{h^2}$$

Sopra si è usato il teorema di Clapeyron.

7.5. Esempio tre, massa su trave incastriata. Si chiede anche qui la costante elastica equivalente.



Per ricavare la cost. el. eq. in questo caso si può provare a equagionare la flessione statica del sistema trave-massa e quelle del sistema molla-massa.

Per la trave caricata di punto si ha

$$7.12) \Delta l = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{mg l^3}{3EI}$$

essendo $P = mg$ le forze peso esercitate dalle masse, E il modulo di Young e I il momento di inerzia delle sezioni rispetto all'asse uscente dal foglio.

Per il sistema massa-molle otteniamo invece

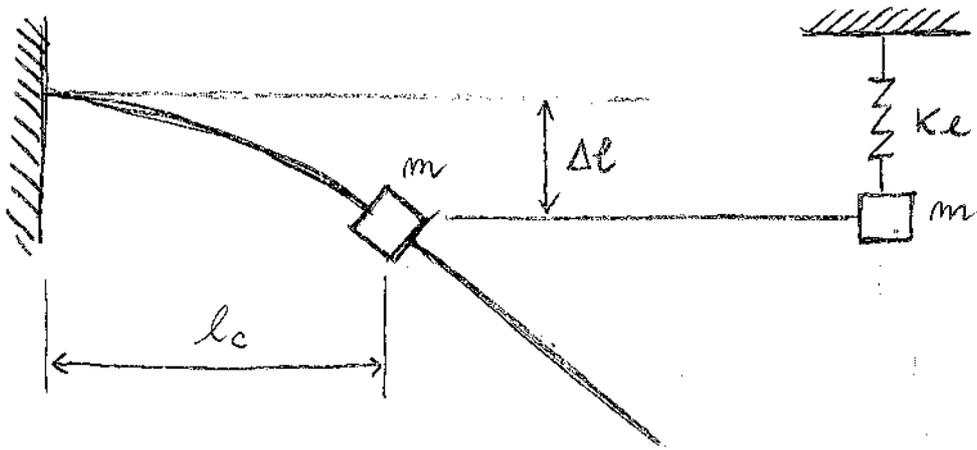
$$7.13) mg = K_e \Delta l \Rightarrow \Delta l = mg / K_e$$

Dunque confrontando le 7.12, 7.13 si ha

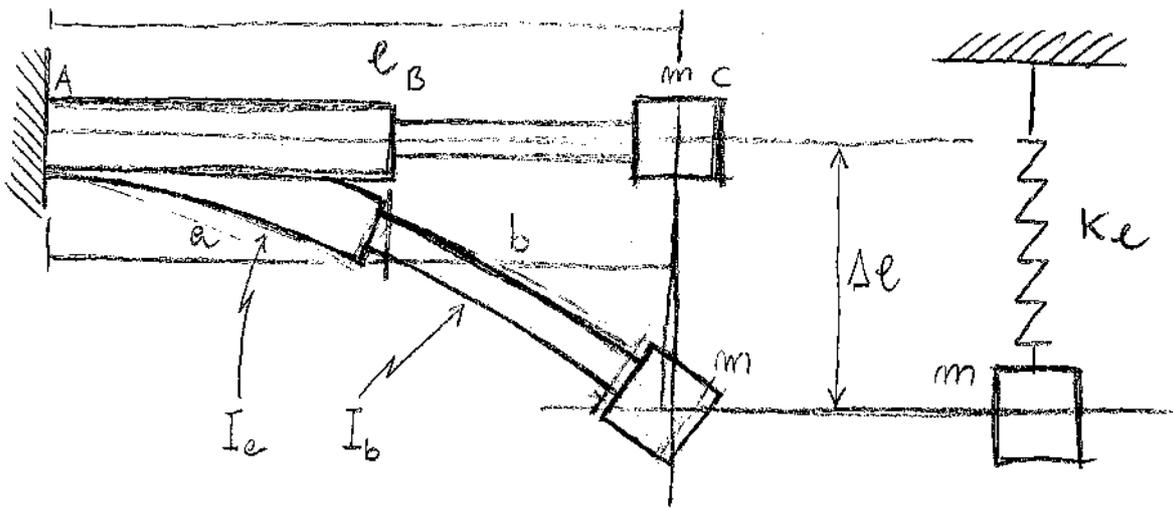
$$7.14) \frac{mg l^3}{3EI} = \frac{mg}{K_e} \Rightarrow K_e = \frac{3EI}{l^3}$$

Nel caso più generale in cui le masse sia disposte in un punto generico della trave, ad una distanza l_c dall'incastro, allora si ha analogamente

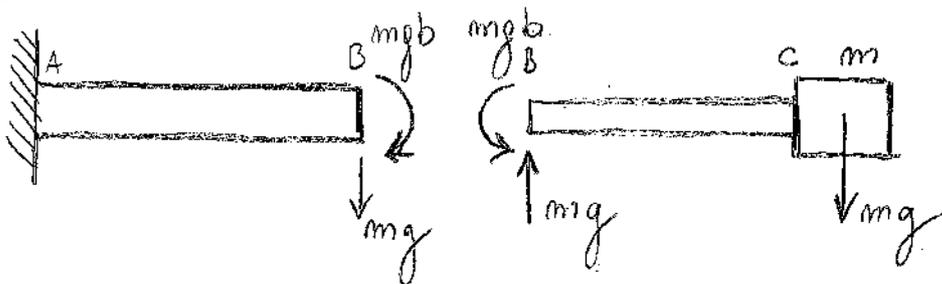
$$7.15) K_e = \frac{3EI}{l_c^3}$$



7.6. Esempio quarto, masse su trave incastata a geometrie variabile. Anche in questo caso si chiede di individuare le costanti elastiche equivalenti del sistema massa-molla.



Volendo procedere anche qui come nel precedente caso si deve ricavare lo spostamento di c dovuto all'azione delle forze peso applicate alle masse m.



Per lo spostamento del tratto AB ai risultati della Meccanica dei Solidi: poniamo

$$7.16) \quad \Delta l_B = \frac{mga^3}{3EI_a} + \frac{mgb a^2}{2EI_a}$$

Per la rotazione delle sezione in B si ha per:

$$7.17) \quad \varphi_B = \frac{mga^2}{2EI_a} + \frac{mgb a}{EI_a}$$

Per lo spostamento del punto c dovuto alle masse m si ha

$$7.18) \quad \Delta l_c' = \frac{mgb^3}{3EI_b}$$

Lo spostamento complessivo di c è dunque dato da

$$\begin{aligned} \Delta l_c &= \Delta l_B + \varphi_B b + \Delta l_c' = \frac{mga^3}{3EI_e} + \frac{mgb e^2}{2EI_e} + \\ &+ \frac{mga^2 b}{2EI_e} + \frac{mgb e^2}{EI_e} + \frac{mgb^3}{3EI_b} = \frac{mga}{E} \left(\frac{a^3}{3I_e} + \frac{be^2}{2I_e} \right) + \\ &+ \frac{a^3}{2I_e} + \frac{be^2}{I_e} + \frac{b^3}{3I_b} = \frac{mga}{E} \left(\frac{a^3}{3I_e} + \frac{a^3}{2I_e} + \frac{be^2}{2I_e} + \frac{ba^2}{I_e} + \right. \\ &+ \left. \frac{b^3}{3I_b} \right) = \frac{mga}{E} \left(\frac{2+3}{6} a^3 + \frac{1+2}{2} b e^2 + \frac{b^3}{3I_b} \right) = \\ &= \frac{mga}{E} \left(\frac{5}{6} \frac{a^3}{I_e} + \frac{3}{2} \frac{be^2}{I_e} + \frac{b^3}{3I_b} \right) = \frac{mga}{3E} \left(\frac{a^3 + 3eb(e+b)}{I_e} + \frac{b^3}{I_b} \right) = \end{aligned}$$

Dovendo per essere

$$7.19) \quad k_e = \frac{mg}{\Delta l_c} \Rightarrow \Delta l_c = \frac{mg}{k_e}$$

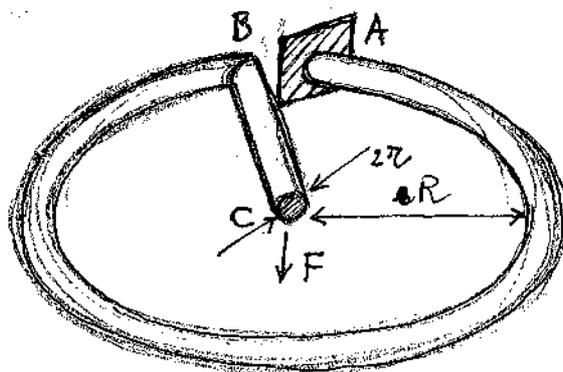
si conclude che

$$\frac{mg}{k_e} = \frac{mg}{3E} \left(\frac{a^3 l_b + 3eb(e+b)l_b + l_e b^3}{l_e l_b} \right) \Rightarrow$$

$$k_e = \frac{E}{\frac{5}{6} \frac{a^3}{I_e} + \frac{3}{2} \frac{e l_e}{I_e} + \frac{1}{3} \frac{b^3}{I_b}} \frac{E}{\frac{5 l_b^3 I_b + 9 b e^2 I_b + l_b^3 I_e}{6 I_a I_b}}$$

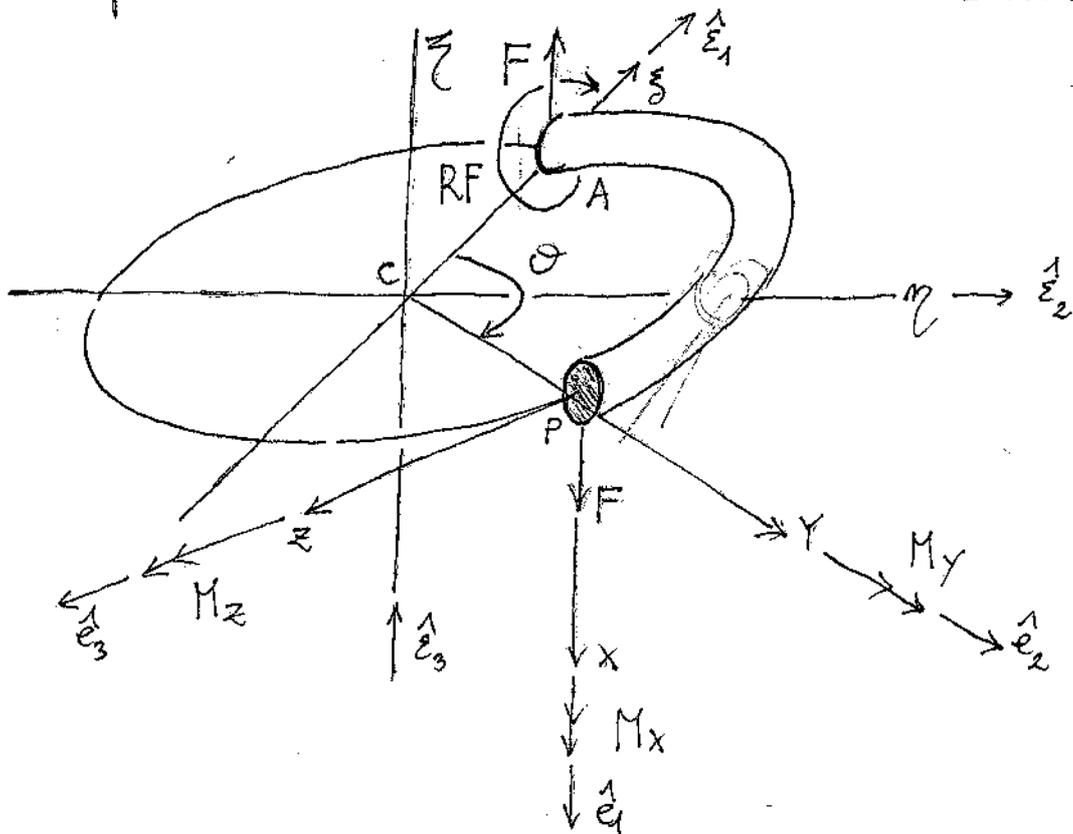
$$7.20) \quad k_e = \frac{3 E l_e l_b}{a^3 l_b + 3 e b (e+b) l_b + b^3 l_e}$$

7.7. Esercizio cinque, anello flessibile. Anche in questo caso si chiede di calcolare la costante elastica equivalente.



La sezione del tendine abbia raggio r, mentre l'anello abbia

raggio R . Imponendo l'equilibrio meccanico all'anello possiamo ricavare la reazione vincolare in A.



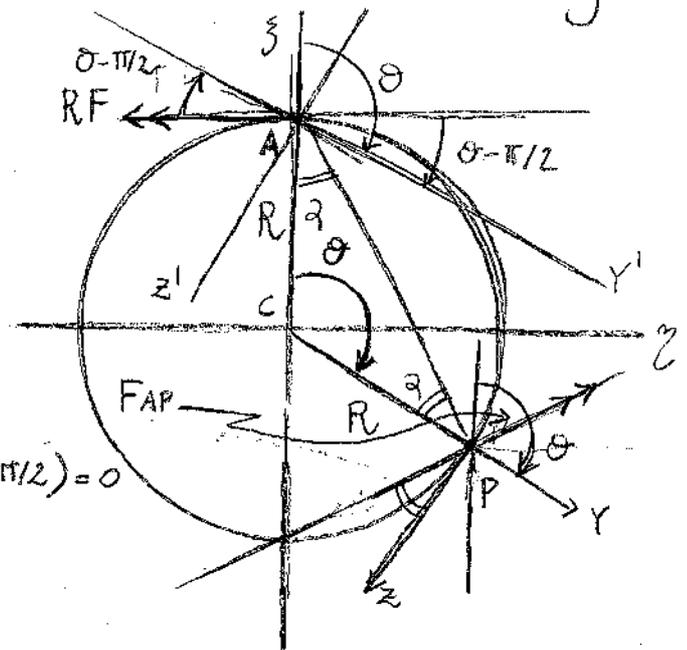
Ricavo i valori di M_x, M_y, M_z per il tratto AB, imponendo l'equilibrio meccanico al elemento individuato dal valore θ dell'angolo.

7.21 $\pi - \theta = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi - \theta}{2}$

$$\begin{cases} M_x(\theta) = 0 \\ M_y(\theta) + F\bar{A}P \sin \alpha(\theta) - RF \cos(\theta - \pi/2) = 0 \\ M_z(\theta) + F\bar{A}P \cos \alpha(\theta) + RF \sin(\theta - \pi/2) = 0 \end{cases}$$

↓

7.23
$$\begin{cases} M_x(\theta) = 0 \\ M_y(\theta) = -F\bar{A}P \sin \alpha(\theta) + RF \cos(\theta - \pi/2) \\ M_z(\theta) = +F\bar{A}P \cos \alpha(\theta) - RF \sin(\theta - \pi/2) \end{cases}$$



Il valore di \bar{AP} può essere calcolato utilizzando il teorema del coseno:

$$7.24) \bar{AP} = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \theta} = \sqrt{2R^2 - 2R^2 \cos \theta} = \sqrt{2R^2(1 - \cos \theta)} = R\sqrt{2(1 - \cos \theta)}$$

Sostituendo le 7.24, 7.21 nelle 7.23 si ha che

$$7.25) \begin{cases} M_x(\theta) = 0 \\ M_y(\theta) = -FR\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos \theta} \sin\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) + RF \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ M_z(\theta) = +FR\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos \theta} \cos\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) - RF \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Si considera che

$$7.26) \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin \pi \cos \frac{\theta}{2} - \cos \pi \sin \frac{\theta}{2}}{2} = \cos \frac{\theta}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\cos \pi \cos \frac{\theta}{2} + \sin \pi \sin \frac{\theta}{2}}{2} = \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin \theta \cos \frac{\pi}{2} - \cos \theta \sin \frac{\pi}{2}}{2} = -\cos \theta \\ \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos \theta \cos \frac{\pi}{2} + \sin \theta \sin \frac{\pi}{2}}{2} = \sin \theta \end{cases}$$

Sostituendo le 7.26 nelle 7.25 si ha

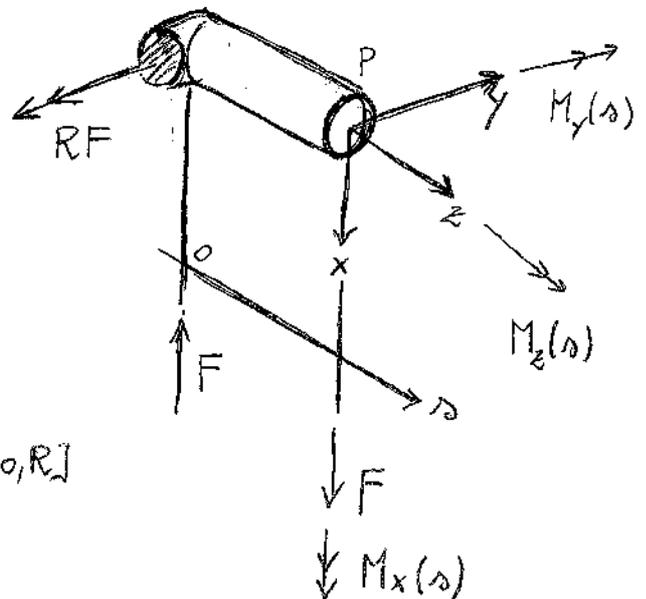
$$7.27) \begin{cases} M_x(\theta) = 0 \\ M_y(\theta) = -RF\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos \theta} \cos \frac{\theta}{2} + RF \sin \theta \\ M_z(\theta) = +RF\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos \theta} \sin \frac{\theta}{2} + RF \cos \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Per il tratto BC: immenso una asse s da B a C e procedo analogamente ricavando le caratteristiche di sollecitazione.

$$\begin{cases} M_x(s) = 0 \\ M_y(s) - RF + sF = 0 \\ M_z(s) = 0 \end{cases}$$

↓

$$\textcircled{7.28} \begin{cases} M_x(s) = 0 \\ M_y(s) = RF - sF = (R-s)F \quad s \in [0, R] \\ M_z(s) = 0 \end{cases}$$



Per ricavare lo spostamento verticale di C utilizzo il PLV ammettendo come deformazione quella reale e come sollecitazione quella reale. Il lavoro virtuale esterno vale

$$\textcircled{7.29} L_{ve} = F \Delta l$$

Quello interno relativo al tratto AB vale

$$\textcircled{7.30} L_{vi}^{AB} = \int_0^{2\pi} \frac{M_y^2(\theta)}{EI_y} R d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{M_z^2(\theta)}{GJ_t} R d\theta$$

Quello interno relativo al tratto BC vale

$$\textcircled{7.31} L_{vi}^{BC} = \int_0^R \frac{M_y^2(s)}{EI_y} ds$$

Si consideri ora che per $\theta \in [0, 2\pi]$ $\sin \frac{\theta}{2} \geq 0$ e dunque

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \implies 1 - \cos \theta = \sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

Pertanto le 7.27 si scrivono

$$\begin{cases} M_x(\theta) = 0 \\ M_y(\theta) = -RF \sqrt{2} \sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + RF \sin \theta \\ M_z(\theta) = +RF \sqrt{2} \sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + RF \cos \theta \end{cases} \implies$$

$$\begin{aligned} \implies \begin{cases} M_x(\theta) = 0 \\ M_y(\theta) = -RF \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + RF \sin \theta = -RF \sin \theta + RF \sin \theta \\ M_z(\theta) = +RF \cdot 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + RF \cos \theta = +RF(1 - \cos \theta) + RF \cos \theta \end{cases} \implies \\ \begin{cases} M_x(\theta) = 0 \\ M_y(\theta) = 0 \\ M_z(\theta) = RF \end{cases} \end{aligned}$$

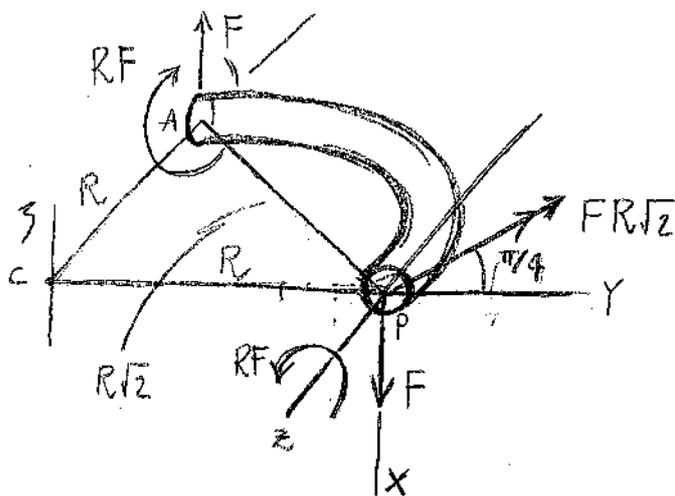
7.32

$$\begin{cases} M_x(\theta) = 0 \\ M_y(\theta) = 0 \\ M_z(\theta) = RF \end{cases}$$

Verifichiamo le 7.32 per $\theta = \pi/2$. Si ha

$$\begin{cases} M_x(\pi/2) = 0 \\ M_y(\pi/2) = 0 \\ M_z(\pi/2) = RF \end{cases}$$

Il bilancio alle rotazioni



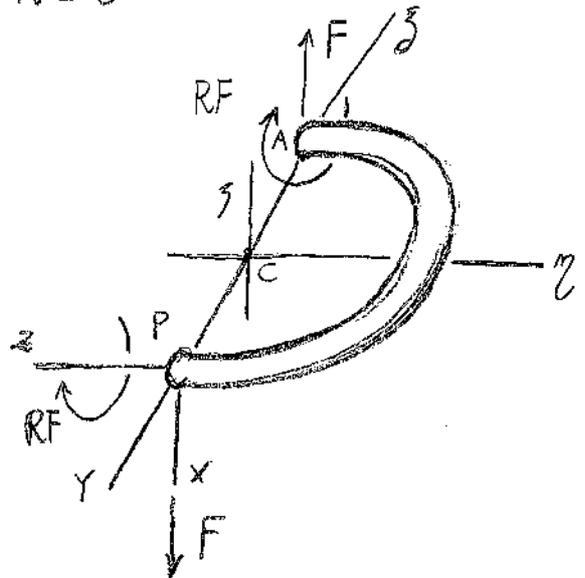
nel punto P si scrive

$$\begin{cases} M_x(\pi/2) = 0 \\ M_y(\pi/2) + FR\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - RF = FR - RF = 0 \\ M_z(\pi/2) - FR\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = RF - FR = 0 \end{cases}$$

Verifichiamo le 7.32 per $\theta = \pi$. Si ha

$$\begin{cases} M_x(\pi) = 0 \\ M_y(\pi) = 0 \\ M_z(\pi) = RF \end{cases}$$

Il bilancino alla rotazione per



$$\begin{cases} M_x(\pi) = 0 \\ M_y(\pi) = 0 \\ M_z(\pi) - \varepsilon RF + RF = RF - \varepsilon RF + RF = 0 \end{cases}$$

Assumendo dunque le 7.32 il 7.30 si scrive

$$7.33) L_{vi}^{AB} = \int_0^{2\pi} \frac{R^2 F^2 R d\theta}{G J_t} = \frac{R^3 F^2}{G J_t} 2\pi$$

Si ricorda poi che per sezioni circolari si ha $J_t = I_x = \pi R^4/2$, dunque le 7.33 si scrive

$$7.34) L_{vi}^{AB} = \frac{R^3 F^2 2\pi/2}{G \pi R^4} = \frac{4 F^2 R^3}{G \pi R^4}$$

Per il tratto BC si ha invece

$$\begin{aligned}
 \text{7.35) } L_{vi}^{BC} &= \int_0^R \frac{(R-s)^2 F^2}{EI_y} ds = \int_{-R}^0 \frac{F^2}{EI_y} (s-R)^2 d(s-R) = \\
 &= \frac{F^2}{EI_y} \frac{(s-R)^3}{3} \Big|_{-R}^0 = \frac{F^2}{3EI_y} \left((-R)^3 - (-R-R)^3 \right) = \\
 &= \frac{F^2}{3EI_y} \left(-R^3 + 2R^3 \right) = \frac{F^2 R^3}{3EI_y} = \frac{F^2 R^3}{3E\pi r^4} = \boxed{\frac{4F^2 R^3}{3E\pi r^4}}
 \end{aligned}$$

Dunque l'applicazione del PLV porge

$$\cancel{F} \Delta e = \frac{4F^2 R^3}{G r^4} + \frac{4F^2 R^3}{3E\pi r^4} \Rightarrow$$

$$\text{7.36) } \Delta e = \frac{4FR^3}{G r^4} + \frac{4FR^3}{3E\pi r^4} = \frac{4FR^3}{r^4} \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{3\pi E} \right)$$

Per ricavare la costante elastica equivalente si considera una molla alle cui estremità sia imposta una forza F e si imponga che la sua elongazione statica sia Δe :

$$k_e \Delta e = F \Rightarrow k_e = \frac{F}{\Delta e} = \frac{\cancel{F}}{\frac{4\cancel{F}R^3}{r^4} \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{3\pi E} \right)} = \frac{r^4}{4R^3 \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{3\pi E} \right)}$$

Dunque ho trovato

$$\text{7.37) } k_e = \frac{r^4}{4R^3 \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{3\pi E} \right)}$$

Si consideri poi ele' dallo Tema Elastico si ha

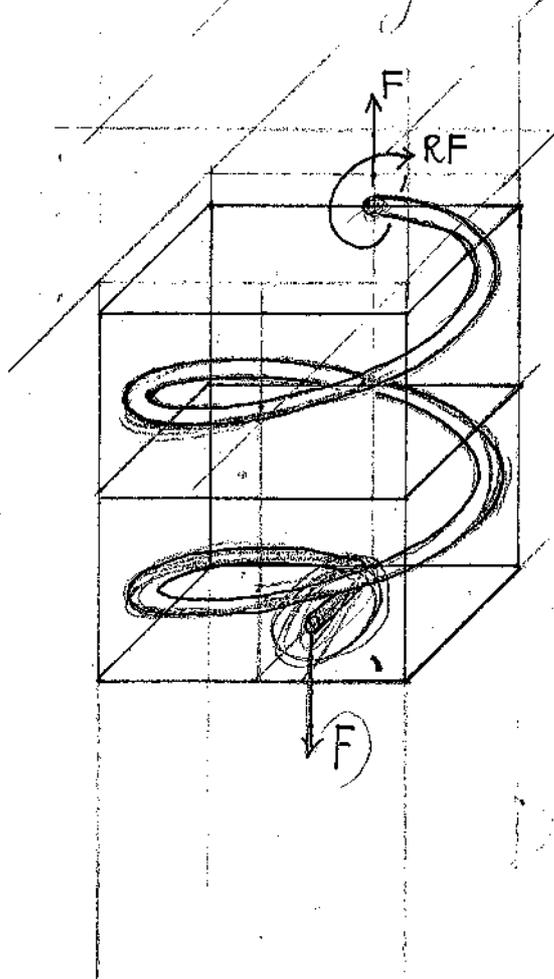
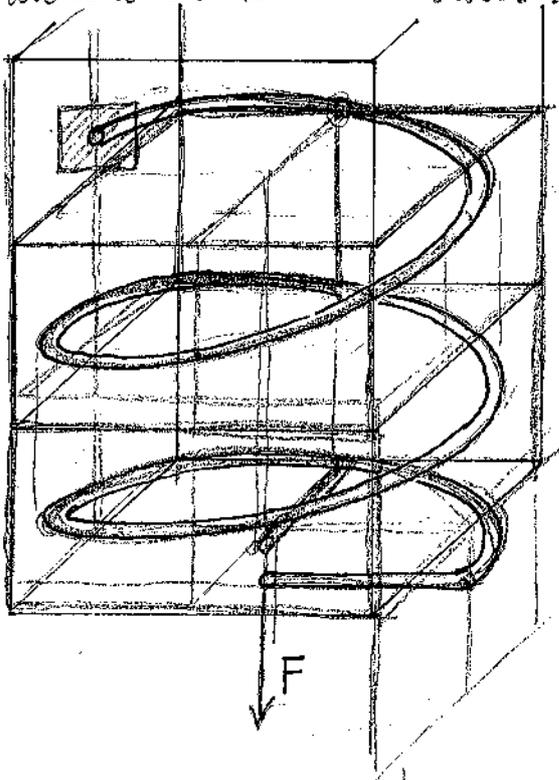
$$\begin{cases} E = 2(1+\nu)G \\ \nu \in [0, 1/2] \end{cases} \Rightarrow E \geq 2G \Rightarrow 3\pi E \geq 5\pi G \approx 18,84G$$

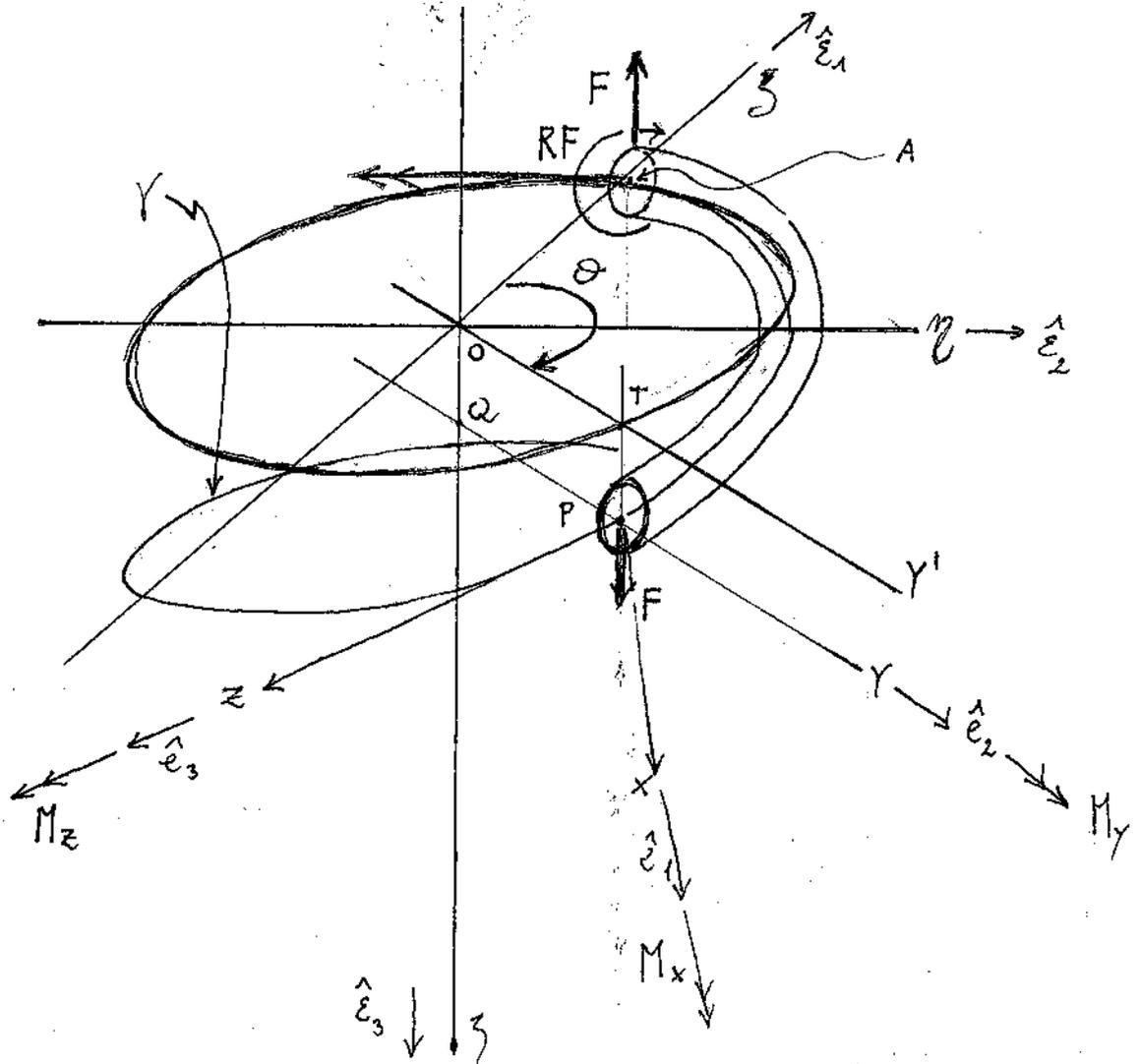
Dunque si potrebbe in prima approssimazione scrivere

$$\frac{1}{G} + \frac{1}{3\pi E} \approx \frac{1}{G} + \frac{1}{19G} = \frac{1}{G} \left(1 + \frac{1}{19} \right) \approx \frac{1}{G} \Rightarrow$$

$$7.38) \quad k_e \approx \frac{7^4 G}{4R^3}$$

7.8. Esempio sei, molla elicoidale. Si chiede il calcolo della costante elastica equivalente di una molla elicoidale costituita da n spire e caricata da una forza F parallela all'asse della molla stessa.



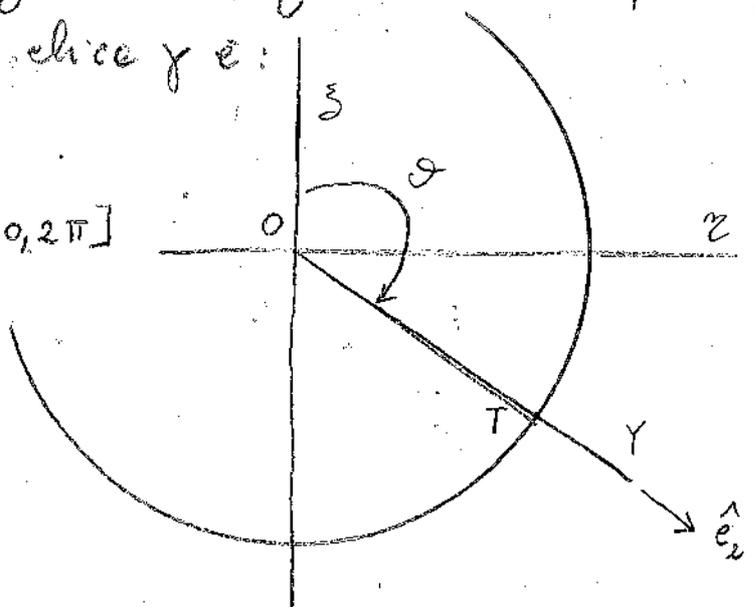


Ammesso che l'elica definita dall'axe geometrico della molla abbia passo p , allora si ha

$$7.39) \quad \zeta(2\pi) = -p \Rightarrow \zeta(\theta) = -p \frac{\theta}{2\pi}$$

D'altra parte si ha anche $\zeta = R \cos \theta$, $\eta = R \sin \theta$. Dunque l'equazione parametrica della elica γ è:

$$7.40) \quad \begin{cases} \zeta = R \cos \theta \\ \eta = R \sin \theta \\ \zeta = +\frac{p}{2\pi} \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$



Ricavo l'espressione di $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ rispetto alla base $\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3$. Il vettore tangente alla curva γ nel punto P si scrive

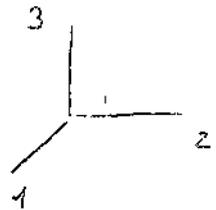
$$\vec{T} = \frac{d\delta}{d\theta} \hat{E}_1 + \frac{d\rho}{d\theta} \hat{E}_2 + \frac{d\phi}{d\theta} \hat{E}_3 = -R \sin\theta \hat{E}_1 + R \cos\theta \hat{E}_2 + \frac{p}{2\pi} \hat{E}_3$$

Daunque il vettore \hat{e}_3 si scrive

$$\hat{e}_3 = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|} = \frac{-R \sin\theta}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \hat{E}_1 + \frac{R \cos\theta}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \hat{E}_2 + \frac{p/2\pi}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \hat{E}_3$$

Il vettore \hat{e}_2 si scrive invece

$$\hat{e}_2 = \cos\theta \hat{E}_1 + \sin\theta \hat{E}_2$$



Il vettore \hat{e}_1 si ottiene considerando che $\hat{e}_1 = \hat{e}_2 \times \hat{e}_3$. Daunque

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \frac{(\cos\theta \hat{E}_1 + \sin\theta \hat{E}_2) \times (-R \sin\theta \hat{E}_1 + R \cos\theta \hat{E}_2 + p/2\pi \hat{E}_3)}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{E}_1 & \hat{E}_2 & \hat{E}_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -R \sin\theta & R \cos\theta & p/2\pi \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \\ &= \left(\frac{p \sin\theta}{2\pi} \hat{E}_1 - \frac{p \cos\theta}{2\pi} \hat{E}_2 + R \hat{E}_3 \right) \frac{1}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \end{aligned}$$

Quindi riannunciando abbiamo trovato

$$7.41 \quad \begin{cases} \hat{e}_1 = \frac{p \sin \theta}{2\pi \sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \hat{\varepsilon}_1 - \frac{p \cos \theta}{2\pi \sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \hat{\varepsilon}_2 + R \frac{\hat{\varepsilon}_3}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \\ \hat{e}_2 = \cos \theta \hat{\varepsilon}_1 + \sin \theta \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{e}_3 = \frac{-R \sin \theta}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \hat{\varepsilon}_1 + \frac{R \cos \theta}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \hat{\varepsilon}_2 + \frac{p/2\pi}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \hat{\varepsilon}_3 \end{cases}$$

Come verifica delle 7.41 provo che $\hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2$:

$$\begin{aligned} \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 &= \begin{vmatrix} \hat{\varepsilon}_1 & \hat{\varepsilon}_2 & \hat{\varepsilon}_3 \\ \frac{-R \sin \theta}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} & \frac{R \cos \theta}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} & \frac{p/2\pi}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \\ \frac{p \sin \theta}{2\pi \sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} & \frac{-p \cos \theta}{2\pi \sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} & R \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{R^2 \cos \theta}{R^2 + p^2/4\pi^2} + \frac{p^2 \cos \theta / 2\pi}{2\pi (R^2 + p^2/4\pi^2)} \right) \hat{\varepsilon}_1 + \left(\frac{+R^2 \sin \theta}{R^2 + p^2/4\pi^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{p^2 \sin \theta / 2\pi}{2\pi (R^2 + p^2/4\pi^2)} \right) \hat{\varepsilon}_2 + \left(\frac{R p \sin \theta \cos \theta}{2\pi (R^2 + p^2/4\pi^2)} - \frac{R p \sin \theta \cos \theta}{2\pi (R^2 + p^2/4\pi^2)} \right) \hat{\varepsilon}_3 = \\ &= \left(\frac{R^2 \cos \theta \cdot 2\pi + p^2 \cos \theta / 2\pi}{2\pi (R^2 + p^2/4\pi^2)} \right) \hat{\varepsilon}_1 + \left(\frac{2\pi R^2 \sin \theta + p^2 \sin \theta / 2\pi}{2\pi (R^2 + p^2/4\pi^2)} \right) \hat{\varepsilon}_2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{2\pi \cos\theta (R^2 + \cancel{p^2/4\pi^2})}{2\pi(R^2 + \cancel{p^2/4\pi^2})} \hat{\varepsilon}_1 + \frac{2\pi \sin\theta (R^2 + \cancel{p^2/4\pi^2})}{2\pi(R^2 + \cancel{p^2/4\pi^2})} \hat{\varepsilon}_2 =$$

$$= \cos\theta \hat{\varepsilon}_1 + \sin\theta \hat{\varepsilon}_2 \quad \text{OK!}$$

Impongo l'equilibrio dei momenti nel punto P.

$$M_x \hat{\varepsilon}_1 + M_y \hat{\varepsilon}_2 + M_z \hat{\varepsilon}_3 - RF \hat{\varepsilon}_2 + \vec{F} \times \vec{AP} = 0$$

Ricavo \vec{AP} e quindi $\vec{F} \times \vec{AP}$:

$$\vec{AP} = \vec{AO} + \vec{OP} = \vec{AO} + \vec{OT} + \vec{TP} = -R \hat{\varepsilon}_1 + R \hat{\varepsilon}_2 + z \hat{\varepsilon}_3 =$$

$$= -R \hat{\varepsilon}_1 + R(\cos\theta \hat{\varepsilon}_1 + \sin\theta \hat{\varepsilon}_2) + \frac{p\theta}{2\pi} \hat{\varepsilon}_3 =$$

$$= (-R + R \cos\theta) \hat{\varepsilon}_1 + R \sin\theta \hat{\varepsilon}_2 + \frac{p\theta}{2\pi} \hat{\varepsilon}_3 \implies$$

$$\vec{F} \times \vec{AP} = -F \hat{\varepsilon}_3 \times \vec{AP} = -F \hat{\varepsilon}_3 \times \left[(-R + R \cos\theta) \hat{\varepsilon}_1 + R \sin\theta \hat{\varepsilon}_2 + \frac{p\theta}{2\pi} \hat{\varepsilon}_3 \right] =$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\varepsilon}_1 & \hat{\varepsilon}_2 & \hat{\varepsilon}_3 \\ 0 & 0 & -F \\ R(-1+\cos\theta) & R \sin\theta & p\theta/2\pi \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} FR \sin\theta \\ -FR(-1+\cos\theta) \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= FR \sin\theta \hat{\varepsilon}_1 - FR(-1+\cos\theta) \hat{\varepsilon}_2 = FR \sin\theta \hat{\varepsilon}_1 + FR(1-\cos\theta) \hat{\varepsilon}_2$$

Il bilancio dei momenti allora si scrive

$$\frac{\rho M_x \sin \theta}{2\pi \sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \hat{\varepsilon}_1 - \frac{\rho M_x \cos \theta}{2\pi \sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \hat{\varepsilon}_2 + \frac{R M_x \hat{\varepsilon}_3}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} +$$

$$+ M_y \cos \theta \hat{\varepsilon}_1 + M_y \sin \theta \hat{\varepsilon}_2 =$$

$$- \frac{R M_z \sin \theta}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \hat{\varepsilon}_1 + \frac{R M_z \cos \theta}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \hat{\varepsilon}_2 + \frac{(\rho/2\pi) M_z}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \hat{\varepsilon}_3 =$$

$$- R F \hat{\varepsilon}_2 + F R \sin \theta \hat{\varepsilon}_1 + F R (1 - \cos \theta) \hat{\varepsilon}_2 =$$

$$= \left(\frac{\rho \sin \theta M_x}{2\pi \sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} + M_y \cos \theta - \frac{R M_z \sin \theta}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} + F R \sin \theta \right) \hat{\varepsilon}_1 +$$

$$+ \left(- \frac{\rho \cos \theta M_x}{2\pi \sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} + M_y \sin \theta + \frac{R M_z \cos \theta}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} - R F + R F - R F \cos \theta \right) \hat{\varepsilon}_2 +$$

$$+ \left(\frac{R M_x}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} + \frac{(\rho/2\pi) M_z}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \right) \hat{\varepsilon}_3 = 0 \Rightarrow$$

$$7.42 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho \sin \theta}{2\pi \sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} M_x + \cos \theta M_y - \frac{R \sin \theta}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} M_z + F R \sin \theta = 0 \\ - \frac{\rho \cos \theta}{2\pi \sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} M_x + \sin \theta M_y + \frac{R \cos \theta}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} M_z - F R \cos \theta = 0 \\ \frac{R M_x}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} + \frac{\rho}{2\pi} \frac{M_z}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} = 0 \end{array} \right.$$

Dalle tre equazioni si ha

$$7.43) M_x = - \frac{P}{2\pi R} M_z$$

Sostituendo la 7.43 nelle altre due equazioni delle 7.42 si trova che

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{p \sin \theta}{2\pi \sqrt{R^2 + P^2/4\pi^2}} \left(- \frac{P}{2\pi R} \right) M_z + \cos \theta M_y + \frac{R \sin \theta}{\sqrt{R^2 + P^2/4\pi^2}} M_z + \\ + FR \sin \theta = 0 \\ \\ \frac{-p \cos \theta}{2\pi \sqrt{R^2 + P^2/4\pi^2}} \left(- \frac{P}{2\pi R} \right) M_z + \sin \theta M_y + \frac{R \cos \theta}{\sqrt{R^2 + P^2/4\pi^2}} M_z - \\ - FR \cos \theta = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta M_y - \left(\frac{p^2 \sin \theta}{4\pi^2 R \sqrt{R^2 + P^2/4\pi^2}} + \frac{R \sin \theta}{\sqrt{R^2 + P^2/4\pi^2}} \right) M_z + FR \sin \theta = 0 \\ \sin \theta M_y + \left(\frac{p^2 \cos \theta}{4\pi^2 R \sqrt{R^2 + P^2/4\pi^2}} + \frac{R \cos \theta}{\sqrt{R^2 + P^2/4\pi^2}} \right) M_z - FR \cos \theta = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta M_y - \left(\frac{p^2 \sin \theta + 4\pi^2 R^2 \sin \theta}{4\pi^2 R \sqrt{R^2 + P^2/4\pi^2}} \right) M_z + FR \sin \theta = 0 \\ \sin \theta M_y + \left(\frac{p^2 \cos \theta + 4\pi^2 R^2 \cos \theta}{4\pi^2 R \sqrt{R^2 + P^2/4\pi^2}} \right) M_z - FR \cos \theta = 0 \end{array} \right. \implies$$

$$\left\{ \begin{aligned} \cos \theta M_y - \frac{(p^2 + 4\pi^2 R^2) \sin \theta M_z + FR \sin \theta}{4\pi^2 R \sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} + R^2}} &= 0 \\ \sin \theta M_y + \frac{(p^2 + 4\pi^2 R^2) \cos \theta M_z - FR \cos \theta}{4\pi^2 R \sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} + R^2}} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \cos \theta M_y - \frac{4\pi^2 \left(\frac{p^2}{4\pi^2} + R^2 \right) \sin \theta M_z + FR \sin \theta}{4\pi^2 R \sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} + R^2}} &= 0 \\ \sin \theta M_y + \frac{4\pi^2 \left(\frac{p^2}{4\pi^2} + R^2 \right) \cos \theta M_z - FR \cos \theta}{4\pi^2 R \sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} + R^2}} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \cos \theta M_y - \sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} + R^2} \frac{\sin \theta M_z}{R} + FR \sin \theta &= 0 \\ \sin \theta M_y + \sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} + R^2} \frac{\cos \theta M_z}{R} - FR \cos \theta &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \cos \theta M_y &= \left(\sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} + R^2} \frac{M_z}{R} - FR \right) \sin \theta \\ \sin \theta M_y &= \left(-\sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} + R^2} \frac{M_z}{R} + FR \right) \cos \theta \end{aligned} \right.$$

Quadrando e sommando abbiamo

$$M_y^2 = \left(\sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} + R^2} \frac{M_z}{R} - FR \right)^2$$

Perché l'equilibrio meccanico presenta una ed una sola soluzione deve risultare $M_y = 0$ e dunque si ha

$$7.44 \quad \begin{cases} M_z = \frac{FR^2}{\sqrt{\frac{P^2}{4\pi^2} + R^2}} \\ M_y = 0 \\ M_x = \left(-\frac{P}{2\pi R} \right) \frac{FR^2}{\sqrt{\frac{P^2}{4\pi^2} + R^2}} \end{cases}$$

SI TROVA ANCHE (VEDI PAG 437)

CHE:

$$\begin{cases} T_x = F \cos \alpha \\ T_y = 0 \\ N = F \sin \alpha \end{cases}$$

Volendo ricavare lo spostamento Δl dell'estremo libero della molla utilizzo il PLV assumendo come deformazione virtuale quella reale e come sollecitazioni quelle reali. Altra il lavoro virtuale esterno vale

$$7.45 \quad L_{ve} = F \Delta l$$

mentre il lavoro virtuale interno relativo alla giunione spira si scrive

$$\begin{aligned} L_{vi} &= \int_Y \frac{M_x^2}{EI_x} dy + \int_Y \frac{M_z^2}{GJ_t} dy = \int_0^{2\pi} \frac{M_x^2}{EI_x} \sqrt{\frac{R^2 + P^2}{4\pi^2}} d\theta + \\ &+ \int_0^{2\pi} \frac{M_z^2}{GJ_z} \sqrt{\frac{R^2 + P^2}{4\pi^2}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{P^2}{4\pi^2 R^2} \frac{F^2 R^4}{(R^2 + P^2/4\pi^2)} \frac{\cancel{R^2 + P^2/4\pi^2}}{EI_x} d\theta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{2\pi} \frac{F^2 R^4}{\left(\frac{p^2}{4\pi^2} + R^2\right) G I_z} \frac{1}{\sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} + R^2}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{p^2 F^2 R^2}{4\pi^2 \sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} + R^2} E I_x} d\theta + \\
& + \int_0^{2\pi} \frac{F^2 R^4}{G I_z \sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} + R^2}} d\theta = \frac{p^2 F^2 R^2 \cancel{2\pi}}{2 \cancel{4\pi^2} \sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} + R^2} E I_x} + \frac{F^2 R^4 2\pi}{G I_z \sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} + R^2}} = \\
& = \frac{p^2 F^2 R^2}{2\pi E \pi^2 r^4 \sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} + R^2}} + \frac{2\pi F^2 R^4}{G \pi r^4 \sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} + R^2}} = \\
& = \frac{F^2 R^2}{\sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} + R^2}} \left(\frac{p^2}{\pi^2 E r^4} + \frac{2R^2}{G r^4} \right) = \frac{F^2 R^2}{\frac{r^4}{2} \sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} + R^2}} \left(\frac{p^2}{\pi^2 E} + \frac{2R^2}{G} \right)
\end{aligned}$$

Per il tratto rettilineo vale quanto trovato in 7.35, ovvero

$$L_{vl}^n = \frac{4F^2 R^3}{3E \pi r^4}$$

Dunque il PLV porge

$$7.46) \quad \cancel{F} \Delta \ell = \frac{2F^2 R^2 m}{r^4 \sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} + R^2}} \left(\frac{p^2}{\pi^2 E} + \frac{2R^2}{G} \right) + \frac{4F^2 R^3}{3E \pi r^4}$$

Si consideri ora che detta è l'inclinazione dell'elica, deve avervi la relazione

$$7.47) \quad \frac{p}{2\pi R} = t \tan \alpha \Leftrightarrow \left[\frac{p^2}{4\pi^2 R^2} = 4R^2 t^2 \tan^2 \alpha \right] \Leftrightarrow \frac{p^2}{4\pi^2} = R^2 t^2 \tan^2 \alpha$$

Sostituendo le 7.47 nelle 7.46 abbiamo

$$\Delta l = \frac{2FR^2 m}{r^4 \sqrt{R^2 \tan^2 \alpha + R^2}} \left(\frac{4R^2 t^2 \tan^2 \alpha}{E} + \frac{2R^2}{G} \right) + \frac{4FR^3}{3E\pi r^4} =$$

$$= \frac{4FR^3 m}{r^4 \sqrt{t^2 \tan^2 \alpha + 1}} \left(\frac{2t^2 \tan^2 \alpha}{E} + \frac{1}{G} \right) + \frac{4FR^3}{3E\pi r^4} =$$

$$= \frac{4FR^3 m}{r^4 \cdot 1/\cos^2 \alpha} \left(\frac{2 \sin^2 \alpha}{E \cos^2 \alpha} + \frac{1}{G} \right) + \frac{4FR^3}{3E\pi r^4} =$$

$$= \frac{4 \cos^2 \alpha FR^3 m}{r^4} \left(\frac{2 \sin^2 \alpha}{E \cos^2 \alpha} + \frac{1}{G} \right) + \frac{4FR^3}{3E\pi r^4} =$$

$$= \frac{4 \cos^2 \alpha (FR^3) m}{r^4 \cos^2 \alpha} \left(\frac{2 \sin^2 \alpha}{E} + \frac{\cos^2 \alpha}{G} \right) + \frac{4(FR^3)}{3E\pi r^4} \Rightarrow$$

$$7.48) \quad \Delta l = \frac{4FR^3}{r^4} \left[m \left(\frac{2 \sin^2 \alpha}{E} + \frac{\cos^2 \alpha}{G} \right) + \frac{1}{3E\pi} \right]$$

Dovendo per cui $F = k_e \Delta l \Rightarrow \Delta l = F/k_e$, allora segue

$$\frac{F}{k_e} = \frac{4FR^3}{r^4} \left[m \left(\frac{2 \sin^2 \alpha}{E} + \frac{\cos^2 \alpha}{G} \right) + \frac{1}{3E\pi} \right] \Rightarrow$$

$$7.49) \quad k_e = \frac{r^4}{4R^3 \left[m \left(\frac{2 \sin^2 \alpha}{E} + \frac{\cos^2 \alpha}{G} \right) + \frac{1}{3E\pi} \right]}$$

Nel caso di un numero elevato di spire e di un modesto angolo α la 7.49 può essere approssimata delle seguenti

$$(7.50) \quad K_e = \frac{\pi^4 G}{4R^3 m}$$

Vediamo ora una applicazione numerica, utilizzando i seguenti dati

$$(7.51) \quad \begin{cases} n = 10 \\ r = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ G = 8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \\ R = 25 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ \alpha = 5^\circ = 8,72 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \end{cases}$$

La formula 7.50 porge

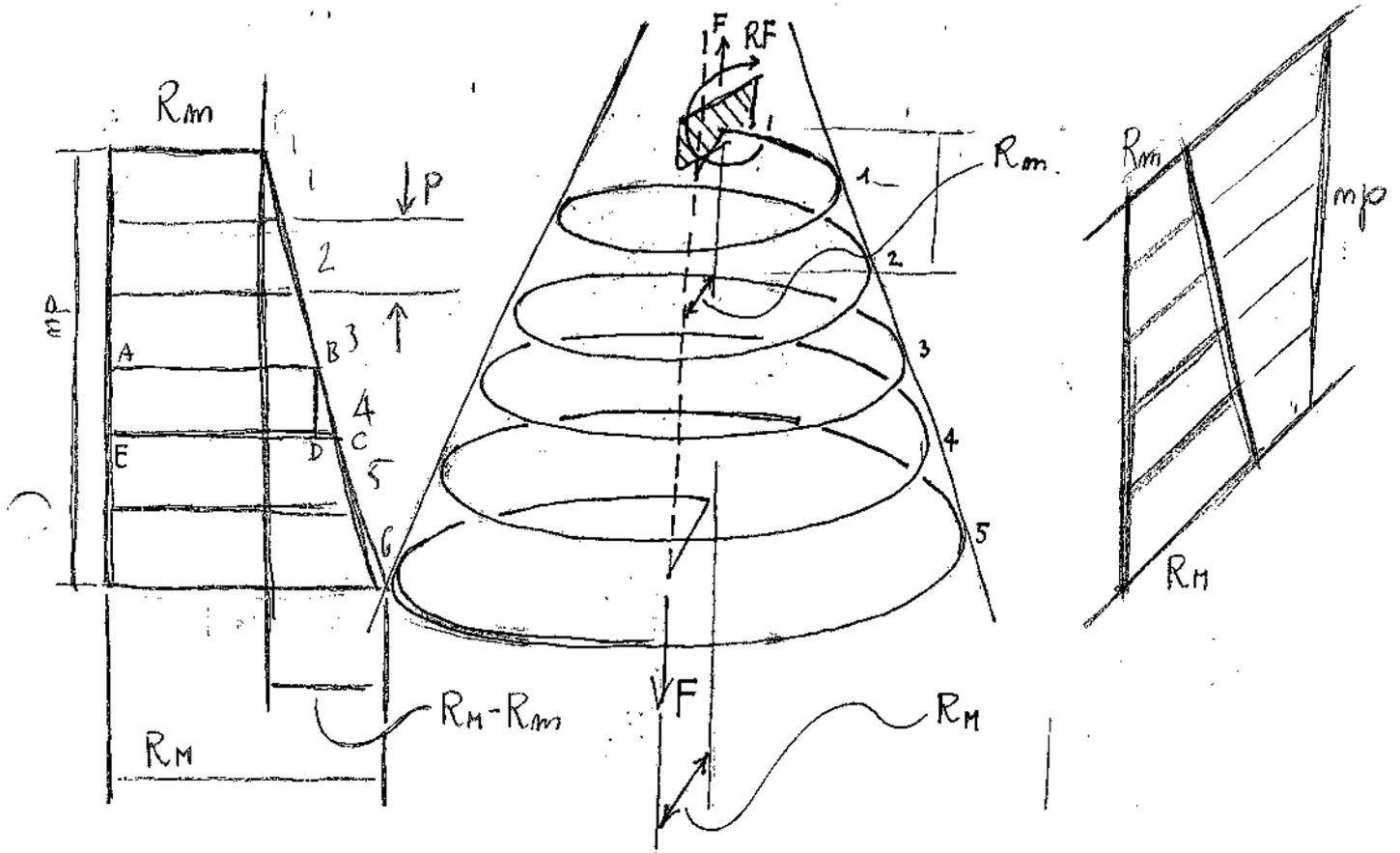
$$K_e = 10,368 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

mentre la 7.49 fornisce

$$K_e = 10,339 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

7.9. Esempio sette, molla conica. In questo caso il raggio delle spire cresce da un minimo di R_m a un massimo

di R_m attraverso m spire. Con considerazioni geometriche



si deduce che

$$7.52) \frac{DC}{p} = \frac{R_M - R_m}{mp} \Rightarrow DC = \frac{R_M - R_m}{m}$$

Detto dunque R_i il raggio di portanza delle spire i -me si ha le seguenti successioni

$$R_1 = R_m$$

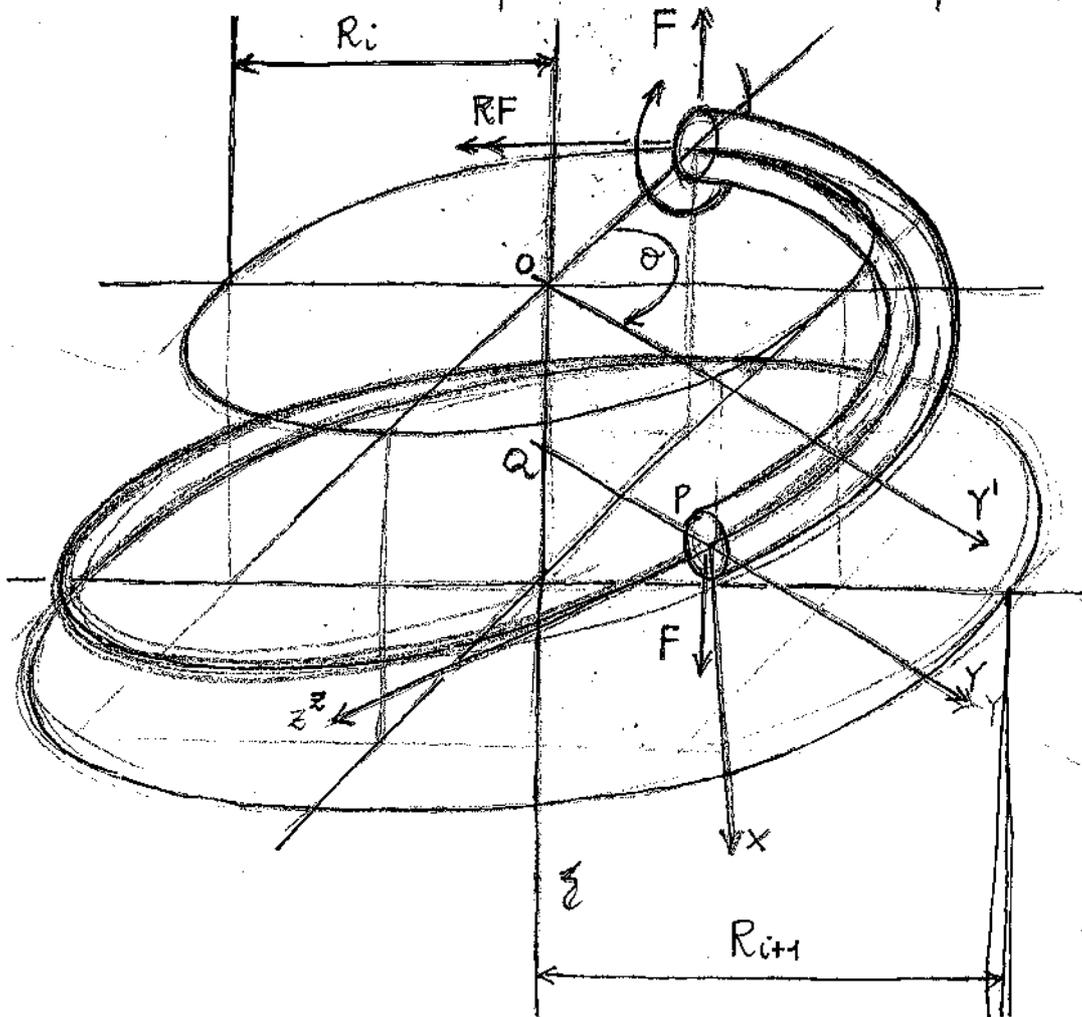
$$R_2 = R_m + \frac{R_M - R_m}{m}$$

$$R_3 = R_m + \frac{R_M - R_m}{m} + \frac{R_M - R_m}{m} = R_m + 2 \frac{R_M - R_m}{m}$$

...

$$7.53) R_i = R_m + (i-1) \frac{R_H - R_m}{m}$$

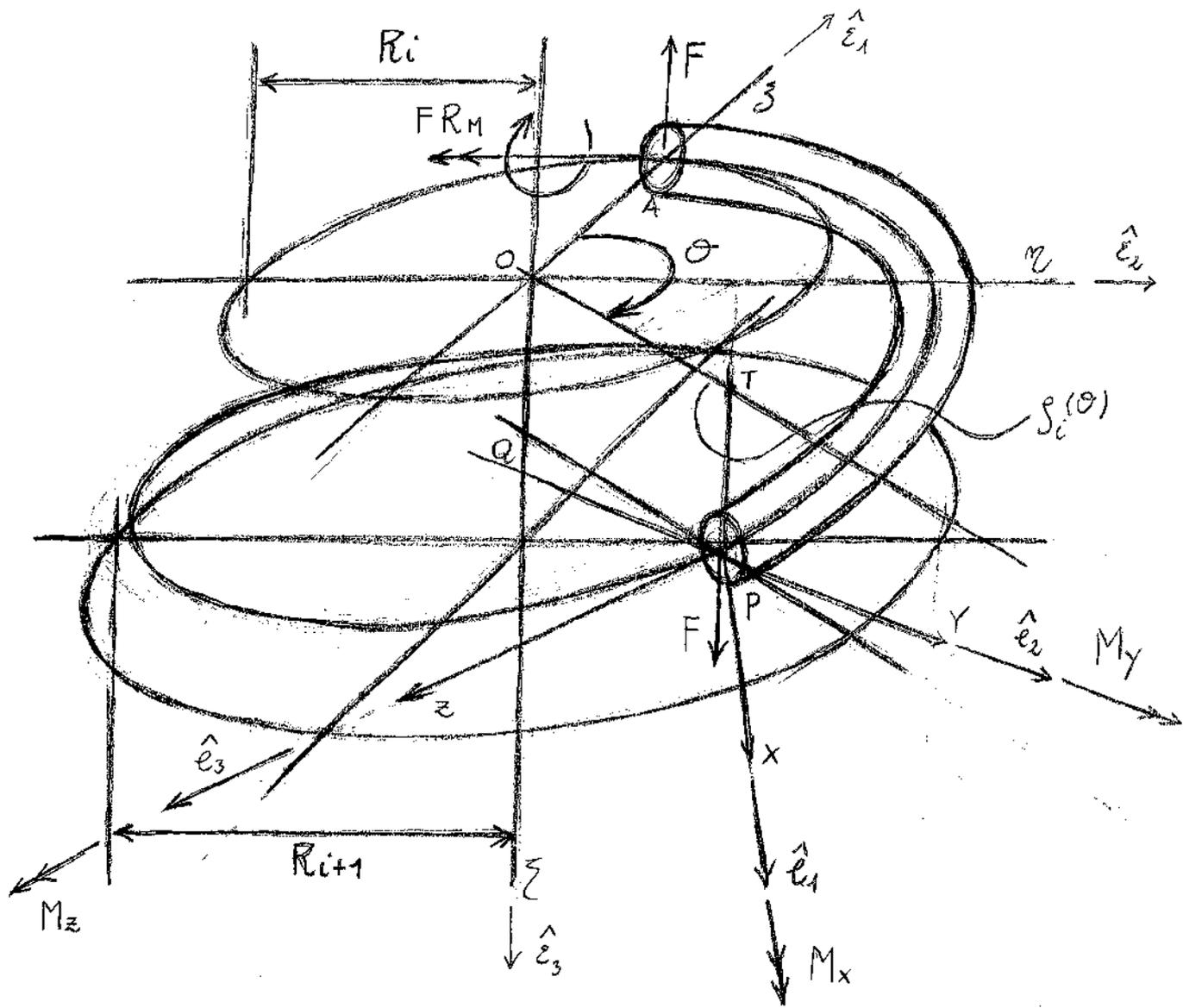
Consideriamo ora la spirale i -ma della spirale.



Ricavo il valore di QP che indichero $g_i(\theta)$:

$$7.54) QP(\theta) = R_i + (i-1) \frac{R_H - R_m}{m} \frac{\theta}{2\pi} \doteq g_i(\theta)$$

L'equazione dell'axe geometrico del solido si scrive



$$7.55 \quad \begin{cases} z = f_c(\theta) \cos \theta & \theta \in [0, 2\pi] \\ \eta = f_c(\theta) \sin \theta \\ \xi = \frac{p}{2\pi} \sigma \end{cases}$$

Ricavo l'espressione dei vettori $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ rispetto alla base $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$. Calcolo il vettore tangente alle curve:

$$7.56 \quad \vec{v} = \frac{dz}{d\theta} \hat{e}_1 + \frac{d\eta}{d\theta} \hat{e}_2 + \frac{d\xi}{d\theta} \hat{e}_3$$

Per le derivate si ha

$$\begin{aligned}
 \frac{d\zeta}{d\theta} &= \frac{d\rho_i}{d\theta} \cos\theta - \rho_i \sin\theta = (i-1) \frac{R_H - R_m}{2\pi m} \cos\theta - \\
 &\quad - \left[R_i + (i-1) \frac{R_H - R_m}{m} \frac{\theta}{2\pi} \right] \sin\theta \\
 7.57) \quad \frac{d\eta}{d\theta} &= \frac{d\rho_i}{d\theta} \sin\theta + \rho_i \cos\theta = (i-1) \frac{R_H - R_m}{2\pi m} \sin\theta + \\
 &\quad + \left[R_i + (i-1) \frac{R_H - R_m}{2\pi m} \theta \right] \cos\theta \\
 \frac{d\xi}{d\theta} &= \frac{p}{2\pi}
 \end{aligned}$$

Ponga per la definizione seguente

$$7.58) \quad |\tau| = |\vec{\tau}| = \sqrt{\left(\frac{d\zeta}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)^2}$$

Dunque il vettore \hat{e}_3 si scrive:

$$7.59) \quad \hat{e}_3 = \frac{d\zeta}{d\theta} \frac{1}{\tau} \hat{e}_1 + \frac{d\eta}{d\theta} \frac{1}{\tau} \hat{e}_2 + \frac{d\xi}{d\theta} \frac{1}{\tau} \hat{e}_3$$

mentre il vettore \hat{e}_2 si scrive

$$7.60) \quad \hat{e}_2 = \cos\theta \hat{e}_1 + \sin\theta \hat{e}_2$$

Verifico che $\hat{e}_3 \perp \hat{e}_2$:

$$\begin{aligned} \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 &= (i-1) \frac{R_H - R_m}{2\pi m} \cos^2 \vartheta - \left[R_i + (i-1) \frac{R_H - R_m}{2\pi m} \vartheta \right] \sin \vartheta \cos \vartheta + \\ &+ (i-1) \frac{R_H - R_m}{2\pi m} \sin^2 \vartheta + \left[R_i + (i-1) \frac{R_H - R_m}{2\pi m} \vartheta \right] \sin \vartheta \cos \vartheta = \\ &= (i-1) \frac{R_H - R_m}{2\pi m} \end{aligned}$$

Il vettore indicato come \hat{e}_2 dunque non va bene. Prova a ricavare τ e faccio un tentativo di riparametrizzazione delle curve.

$$\begin{aligned} v^2 &= (i-1)^2 \left(\frac{R_H - R_m}{2\pi m} \right)^2 + \left[R_i + (i-1) \frac{R_H - R_m}{2\pi m} \vartheta \right]^2 + \frac{p^2}{4\pi^2} = \\ &= (i-1)^2 \left(\frac{R_H - R_m}{2\pi m} \right)^2 + R_i^2 + (i-1)^2 \left(\frac{R_H - R_m}{2\pi m} \right)^2 \vartheta^2 + \\ &+ 2 R_i (i-1) \frac{R_H - R_m}{2\pi m} \vartheta + \frac{p^2}{4\pi^2} = (i-1)^2 \left(\frac{R_H - R_m}{2\pi m} \right)^2 (1 + \vartheta^2) + \\ &+ R_m^2 + (i-1)^2 \left(\frac{R_H - R_m}{m} \right)^2 + 2 R_m (i-1) \left(\frac{R_H - R_m}{m} \right) + \\ &+ 2 R_i (i-1) \frac{R_H - R_m}{2\pi m} \vartheta + \frac{p^2}{4\pi^2} \end{aligned}$$

Per semplificare le tre ttezioni faccio la seguente posizione:

$$(7.61) \quad (i-1) \frac{R_H - R_m}{m} \triangleq f_i$$

de cui si ricave

$$\begin{aligned} \rho_i(\theta) &= R_m + (i-1) \frac{R_H - R_m}{m} + (i-1) \frac{R_H - R_m}{m} \frac{\theta}{2\pi} = \\ &= R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) (i-1) \frac{R_H - R_m}{m} = R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i. \end{aligned}$$

Quindi l'equazione delle curve si scrive

$$\begin{cases} x = \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i\right) \cos \theta \\ y = \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i\right) \sin \theta \\ z = \frac{p}{2\pi} \theta \end{cases} \quad (7.62)$$

Calcolo le derivate

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = \frac{f_i}{2\pi} \cos \theta - \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i\right) \sin \theta \\ \frac{dy}{d\theta} = \frac{f_i}{2\pi} \sin \theta + \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i\right) \cos \theta \\ \frac{dz}{d\theta} = \frac{p}{2\pi} \end{cases} \quad (7.63)$$

Calcolo il modulo del vettore tangente:

$$(7.6A) \quad v^2 = \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = \frac{f_i^2}{4\pi^2} \cos^2 \theta + \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i\right)^2 \sin^2 \theta +$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{f_i}{\pi} \sin\theta \cos\theta \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) \frac{f_i}{d_i} \right) + \frac{f_i^2}{4\pi^2} \sin^2\theta + \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) \frac{f_i}{d_i} \right)^2 \cos^2\theta + \\
 & + \frac{f_i}{\pi} \sin\theta \cos\theta \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) \frac{f_i}{d_i} \right) = \frac{f_i^2}{4\pi^2} + \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) \frac{f_i}{d_i} \right)^2
 \end{aligned}$$

Il vettore \hat{e}_3 si scrive

$$(7.66) \quad \hat{e}_3 = \left(\frac{d^3}{d\theta} \hat{e}_1 + \frac{d^2}{d\theta} \hat{e}_2 + \frac{d^1}{d\theta} \hat{e}_3 \right) \frac{1}{v}$$

Il vettore \hat{e}_2 è l'opposto del vettore normale. Lo ricaviamo:

$$(7.66) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \hat{e}_1}{d\theta^2} = -\frac{f_i}{\pi} \sin\theta - \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) \frac{f_i}{d_i} \right) \cos\theta \\ \frac{d^2 \hat{e}_2}{d\theta^2} = \frac{f_i}{\pi} \cos\theta - \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) \frac{f_i}{d_i} \right) \sin\theta \\ \frac{d^2 \hat{e}_3}{d\theta^2} = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo il modulo del vettore normale:

$$\begin{aligned}
 v^2 &= \frac{d^2 \hat{e}_1}{d\theta^2} + \frac{d^2 \hat{e}_2}{d\theta^2} + \frac{d^2 \hat{e}_3}{d\theta^2} = \frac{f_i^2}{\pi^2} \sin^2\theta + \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) \frac{f_i}{d_i} \right)^2 \cos^2\theta + \\
 & + \frac{2 f_i}{\pi} \sin\theta \cos\theta \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) \frac{f_i}{d_i} \right) + \frac{f_i^2}{\pi^2} \cos^2\theta + \\
 & + \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) \frac{f_i}{d_i} \right)^2 \sin^2\theta - \frac{2 f_i}{\pi} \sin\theta \cos\theta \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) \frac{f_i}{d_i} \right) = \\
 & = \frac{f_i^2}{\pi^2} + \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) \frac{f_i}{d_i} \right)^2
 \end{aligned}$$

Il vettore \hat{e}_2 è dato da

$$7.67) \quad \hat{e}_2 = -\left(\frac{d^2\zeta}{d\theta^2} \hat{e}_1 + \frac{d^2\eta}{d\theta^2} \hat{e}_2\right) \frac{1}{\nu}$$

Verifico che $\hat{e}_2 \perp \hat{e}_3$:

$$\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = -\left(\frac{d^2\zeta}{d\theta^2} \frac{d\zeta}{d\theta} + \frac{d^2\eta}{d\theta^2} \frac{d\eta}{d\theta}\right) \frac{1}{\nu^2}$$

$$\frac{d\zeta}{d\theta} \frac{d^2\zeta}{d\theta^2} = \left[\frac{f_i}{2\pi} \cos\theta - \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i\right) \sin\theta \right] \left[\frac{f_i}{\pi} \sin\theta + \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i\right) \cos\theta \right] = \frac{f_i^2}{2\pi^2} \sin\theta \cos\theta - \frac{f_i}{2\pi} \cos^2\theta \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i\right)$$

$$+ \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i \left[\left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i\right) \sin\theta \frac{f_i}{\pi} \sin\theta + \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i\right)^2 \sin\theta \cos\theta \right]$$

$$+ \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i\right)^2 \sin\theta \cos\theta = \frac{f_i^2}{2\pi^2} \sin\theta \cos\theta + \frac{f_i}{2\pi} \cos^2\theta \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i\right)$$

$$+ \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i \left[\frac{f_i}{\pi} \sin^2\theta \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i\right) + \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i\right)^2 \sin\theta \cos\theta \right]$$

$$\frac{d\eta}{d\theta} \frac{d^2\eta}{d\theta^2} = \left[\frac{f_i}{2\pi} \sin\theta + \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i\right) \cos\theta \right] \left[\frac{f_i}{\pi} \cos\theta - \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i\right) \sin\theta \right]$$

$$+ \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i \left[\frac{f_i^2}{2\pi^2} \sin\theta \cos\theta - \frac{f_i}{2\pi} \sin^2\theta \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i\right) + \frac{f_i}{\pi} \cos^2\theta \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i\right) + \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i\right)^2 \sin\theta \cos\theta \right]$$

$$+ \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i \left[\frac{f_i}{\pi} \cos^2\theta \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i\right) + \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i\right)^2 \sin\theta \cos\theta \right]$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 \xi}{d\theta^2} \frac{d\xi}{d\theta} + \frac{d^2 \eta}{d\theta^2} \frac{d\eta}{d\theta} = \frac{f_i^2}{2\pi^2} \sin\theta \cos\theta + \frac{f_i^2}{2\pi^2} \sin\theta \cos\theta - \frac{f_i}{2\pi} \left(R_m + \right. \\
& \left. + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i \right) + \frac{f_i}{\pi} \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i \right) + \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i \right)^2 \sin\theta \cos\theta - \\
& - \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i \right)^2 \sin\theta \cos\theta = 0
\end{aligned}$$

Ricavo \hat{e}_1

$$\begin{aligned}
\hat{e}_1 &= \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = -\frac{1}{\nu} \left(\frac{d^2 \xi}{d\theta^2} \hat{e}_1 + \frac{d^2 \eta}{d\theta^2} \hat{e}_2 \right) \times \frac{1}{\nu} \left(\frac{d\xi}{d\theta} \hat{e}_1 + \frac{d\eta}{d\theta} \hat{e}_2 + \right. \\
& \left. + \frac{d\xi}{d\theta} \hat{e}_3 \right) = -\frac{1}{\nu^2} \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \xi'' & \eta'' & 0 \\ \xi' & \eta' & \xi' \end{vmatrix} = -\frac{1}{\nu^2} \left[\eta'' \xi' \hat{e}_1 - \xi'' \eta' \hat{e}_2 + \right. \\
& \left. + (\xi'' \eta' - \xi' \eta'') \hat{e}_3 \right]
\end{aligned}$$

Impongo il bilancio meccanico dei momenti sulla snione in A,

$$7.68) M_x \hat{e}_1 + M_y \hat{e}_2 + M_z \hat{e}_3 = FR_H \hat{e}_2 + \vec{F} \times \vec{AP} = 0$$

Ricavo \vec{AP} e $\vec{F} \times \vec{AP}$:

$$\begin{aligned}
\vec{AP} &= \vec{AO} + \vec{OT} + \vec{TP} = -R_i \hat{e}_1 + \xi \hat{e}_1 + \eta \hat{e}_2 + \frac{p}{2\pi} \theta \hat{e}_3 = \\
&= (-R_i + \xi) \hat{e}_1 + \eta \hat{e}_2 + \frac{p\theta}{2\pi} \hat{e}_3 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7.69 \quad \vec{F} \times \vec{AP} &= -F \hat{\varepsilon}_3 \times \left[(-R_i + \beta) \hat{\varepsilon}_1 + \eta \hat{\varepsilon}_2 + \frac{\rho \theta}{2\pi} \hat{\varepsilon}_3 \right] = \\
 &= -F \begin{vmatrix} \hat{\varepsilon}_1 & \hat{\varepsilon}_2 & \hat{\varepsilon}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -R_i + \beta & \eta & \frac{\rho \theta}{2\pi} \end{vmatrix} = -F \left(-\eta \hat{\varepsilon}_1 - (-R_i + \beta) \hat{\varepsilon}_2 \right) = \\
 &= F \left(\eta \hat{\varepsilon}_1 + (R_i + \beta) \hat{\varepsilon}_2 \right)
 \end{aligned}$$

Dunque il bilancio meccanico si scrive

$$\begin{aligned}
 & -\frac{M_x}{\ell} \left(\eta'' \zeta' \hat{\varepsilon}_1 - \beta'' \zeta' \hat{\varepsilon}_2 + (\beta'' \zeta' - \beta' \zeta'') \hat{\varepsilon}_3 \right) + \frac{M_y}{\ell} \left(\beta'' \hat{\varepsilon}_1 + \eta'' \hat{\varepsilon}_2 \right) + \\
 & + \frac{M_z}{\ell} \left(\beta' \hat{\varepsilon}_1 + \eta' \hat{\varepsilon}_2 + \beta \hat{\varepsilon}_3 \right) + F \left(\eta \hat{\varepsilon}_1 + (R_i + \beta) \hat{\varepsilon}_2 \right) = \\
 & \left(-\frac{M_x}{\ell} \eta'' \zeta' - \frac{M_y}{\ell} \beta'' + \frac{M_z}{\ell} \beta' + F \eta \right) \hat{\varepsilon}_1 + \left(\frac{M_x}{\ell} \beta'' \zeta' - \frac{M_y}{\ell} \eta'' + \frac{M_z}{\ell} \eta' + \right. \\
 & \left. + F(R_i + \beta) \right) \hat{\varepsilon}_2 + \left(-\frac{M_x}{\ell} (\beta'' \zeta' - \beta' \zeta'') + \frac{M_z}{\ell} \beta \right) \hat{\varepsilon}_3 = 0 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 -\frac{M_x}{\ell} \eta'' \zeta' - \frac{M_y}{\ell} \beta'' + \frac{M_z}{\ell} \beta' + \eta F = 0 \\
 \frac{M_x}{\ell} \beta'' \zeta' - \frac{M_y}{\ell} \eta'' + \frac{M_z}{\ell} \eta' + F(R_i + \beta) = 0 \Rightarrow \\
 -\frac{M_x}{\ell} (\beta'' \zeta' - \beta' \zeta'') + \frac{M_z}{\ell} \beta = 0
 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_z = M_x \frac{\delta''\eta' - \delta'\eta''}{\nu\zeta'} \\ -\frac{M_x}{\nu} \eta''\zeta' - \frac{M_y}{\nu} \delta'' + M_x \frac{\delta''\eta' - \delta'\eta''}{\nu\delta\zeta} \delta' + \eta F = 0 \\ \frac{M_x}{\nu} \delta''\zeta' - \frac{M_y}{\nu} \eta'' + M_x \frac{\delta''\eta' - \delta'\eta''}{\nu\delta\zeta} \eta' + F(R_i + \delta) = 0 \end{cases}$$

Considero la 2° e la 3° equazione

$$\begin{cases} \frac{M_y}{\nu} = \left(-\frac{M_x}{\nu} \eta''\zeta' + M_x \frac{\delta''\eta' - \delta'\eta''}{\nu\delta\zeta} \delta' + \eta F \right) \frac{1}{\delta''} \\ \frac{M_y}{\nu} = \left(\frac{M_x}{\nu} \delta''\zeta' + M_x \frac{\delta''\eta' - \delta'\eta''}{\nu\delta\zeta} \eta' + F(R_i + \delta) \right) \frac{1}{\eta''} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & -M_x \frac{\eta''(\zeta')}{\nu\delta\zeta''} + M_x \frac{\delta''\eta' - \delta'\eta''}{\nu\delta\zeta''} \delta' + \frac{\eta F}{\delta''} = M_x \frac{\delta''\zeta'}{\nu\delta\eta''} + \\ & + M_x \frac{\delta''\eta' - \delta'\eta''}{\nu\delta\eta''} \eta' + F \frac{R_i + \delta}{\eta''} \Rightarrow -\frac{M_x}{\nu} \zeta' \left(\frac{\eta''}{\delta''} + \frac{\delta''}{\eta''} \right) + \\ & + \frac{M_x}{\nu} \frac{\delta''\eta' - \delta'\eta''}{\delta\zeta} \left(\frac{\delta'}{\delta''} - \frac{\eta'}{\eta''} \right) + F \left(\frac{\eta}{\delta''} - \frac{R_i + \delta}{\eta''} \right) = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{M_x}{\nu} \left[-\zeta' \left(\frac{\eta''}{\delta''} + \frac{\delta''}{\eta''} \right) + \frac{\delta''\eta' - \delta'\eta''}{\delta} \frac{\delta'\eta'' - \delta'\eta'}{\delta''\eta''} \right] + F \left(\frac{\eta}{\delta''} - \frac{R_i + \delta}{\eta''} \right) = 0 \Rightarrow \\ & -\frac{M_x}{\nu} \left[\zeta' \left(\frac{\eta''}{\delta''} + \frac{\delta''}{\eta''} \right) + \frac{(\delta''\eta' - \delta'\eta'')^2}{\delta''\eta''\delta} \right] + F \left(\frac{\eta}{\delta''} - \frac{R_i + \delta}{\eta''} \right) = 0 \Rightarrow \\ & -\frac{M_x}{\nu} \left[\zeta' \frac{\eta''^2 + \delta''^2}{\delta''\eta''} + \frac{(\delta''\eta' - \delta'\eta'')^2}{\delta''\eta''\delta} \right] + F \frac{\eta\eta'' - (R_i + \delta)\delta''}{\delta''\eta''} = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$-\frac{M_x}{\tau \nu} \left(\xi' \nu^2 + \frac{(\xi'' \eta' - \xi' \eta'')^2}{\xi} \right) + F(\eta \eta'' - (R_i + \xi) \xi'') = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{M_x}{\tau \nu} \left(\xi' \nu^2 + \frac{(\xi'' \eta' - \xi' \eta'')^2}{\xi} \right) = F(\eta \eta'' - (R_i + \xi) \xi'') \Rightarrow$$

$$M_x \frac{\xi \xi' \nu^2 + (\xi'' \eta' - \xi' \eta'')^2}{\xi \tau \nu} = F(\eta \eta'' - (R_i + \xi) \xi'') \Rightarrow$$

$$7.70) \quad M_x = \frac{F \xi \tau \nu (\eta \eta'' - (R_i + \xi) \xi'')}{\xi \xi' \nu^2 + (\xi'' \eta' - \xi' \eta'')^2}$$

$$\frac{M_y}{\nu} = \left(-\frac{M_x}{\tau \nu} \eta'' \xi' + M_x \frac{\xi'' \eta' - \xi' \eta''}{\tau \nu \xi} \xi' + \eta F \right) \frac{1}{\xi''} =$$

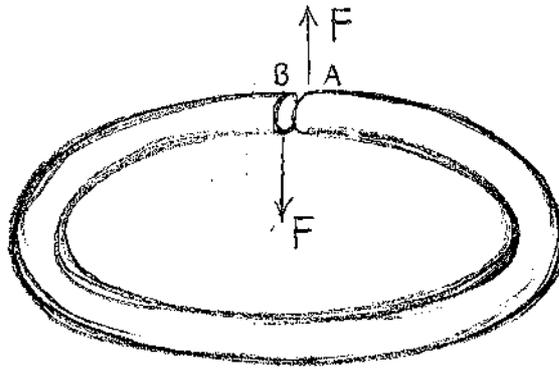
$$= \frac{M_x}{\tau \nu \xi''} \left(-\eta'' \xi' + \frac{\xi'' \eta' - \xi' \eta''}{\xi} \xi' \right) + \frac{\eta F}{\xi''} = \frac{M_x}{\tau \nu \xi''} \left(-\eta'' \xi' + (\xi'' \eta' - \xi' \eta'') \xi' \right) +$$

$$+ \frac{\eta F}{\xi''} = \frac{M_x}{\tau \nu \xi'' \xi} \left(-\eta'' \xi' \xi + \xi'' \eta' \xi' - \xi' \xi' \eta'' \right) + \frac{\eta F}{\xi''}$$

Intervengo perché i calcoli sono troppo complessi.

7.10 Esempio otto, anello a rosetta. Riconsideriamo il sistema dell'esempio 7.7 e eliminiamo il tratto rettilineo, applicando la forza F in B . In questo caso non si ha più in A il momento torcente.

Pertanto le 7.27 si scrivono



7.71

$$\begin{cases} M_x(\theta) = 0 \\ M_y(\theta) = -RF\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta} \cos\theta/2 \\ M_z(\theta) = RF\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta} \sin\theta/2 \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Considerando che $\sqrt{1-\cos\theta} = \sqrt{2} \sin\theta/2$ per $\theta/2 \in [0, \pi]$, allora

$$\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta} = 2 \sin\theta/2 \Rightarrow \sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta} \cos\theta/2 = 2 \sin\theta/2 \cos\theta/2 = \sin\theta$$

$$\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta} \sin\theta/2 = (2 \sin\theta/2 \sin\theta/2) = 2 \sin^2\theta/2$$

Quindi le 7.71 in termini di θ

7.72

$$\begin{cases} M_x(\theta) = 0 \\ M_y(\theta) = -RF \sin\theta \\ M_z(\theta) = RF 2 \sin^2\theta/2 \end{cases}$$

Calcolo il lavoro virtuale interno

7.73

$$L_{vi} = \int_0^{2\pi} \frac{M_y^2}{EI_y} R d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{M_z^2}{GJ_t} R d\theta = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{R}{Ely} R^2 F^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{R^3 F^2}{Ely} \left. \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{2} \right|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{R^3 F^2}{Ely} \left(\frac{2\pi - \sin 2\pi \cos 2\pi}{2} - \frac{0 - \sin 0 \cos 0}{2} \right) = \frac{R^3 F^2 \pi}{Ely}$$

$$I_2 = \frac{R}{GJ_t} R^2 F^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 \theta}{2} d\theta = \frac{R^3 F^2}{GJ_t} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \cos \theta)^2}{2} d\theta = \frac{R^3 F^2}{GJ_t} \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \theta -$$

$$- 2 \cos \theta) d\theta = \frac{R^3 F^2}{GJ_t} \left(2\pi + \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta - 2 \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \right) = \frac{R^3 F^2}{GJ_t} \left(2\pi +$$

$$+ \frac{\theta + \sin \theta \cos \theta}{2} \Big|_0^{2\pi} - 2 \sin \theta \Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{R^3 F^2}{GJ_t} (2\pi + \pi) = \frac{3\pi R^3 F^2}{GJ_t}$$

Quindi il lavoro virtuale interno vale

$$L_{vi} = \frac{R^3 F^2 \pi}{Ely} + 3 \frac{R^3 F^2 \pi}{GJ_t} = R^3 F^2 \pi \left(\frac{1}{Ely} + \frac{3}{GJ_t} \right)$$

Applicando il PLV si ha

$$L_{ve} = F \Delta l \Rightarrow \Delta l = R^3 F \pi \left(\frac{1}{Ely} + \frac{3}{GJ_t} \right)$$

Per la costante elastica equivalente si ha

$$F = k_e \Delta l \Rightarrow \boxed{k_e = \frac{F}{\Delta l} = \frac{1}{R^3 \pi \left(\frac{1}{Ely} + \frac{3}{GJ_t} \right)}} \Rightarrow$$

$$7.75 \quad k_e = \frac{Ely}{R^3 \pi \left(1 + \frac{3Ely}{GJ_t} \right)}$$

Consideriamo ora un esempio numerico con i dati seguenti:

$$\begin{cases} R = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ r = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ E = \frac{206 \text{ N}}{\text{mm}^2} = 206 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \\ G = 0,385 E = 79,31 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 \end{cases}$$

Per i momenti di inerzia si trova

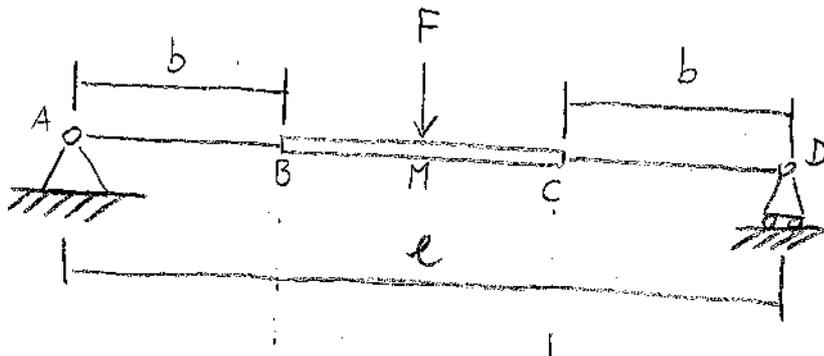
$$I_y = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi (5 \cdot 10^{-3} \text{ m})^4}{4} = 4,9 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4$$

$$J_z = I_z = \frac{\pi r^4}{2} = 9,81 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4$$

Dunque le costanti elastiche si scrive

$$K_e = \frac{206 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 4,9 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4}{(5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^3 \pi \left(1 + \frac{3 \cdot 206 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 4,9 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4}{79,31 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 9,81 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4} \right)} = 52,49 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

7.11
 Esempio nove, trave appoggiata con tratto rinforzato. Si chiede le costanti elastiche equivalenti.

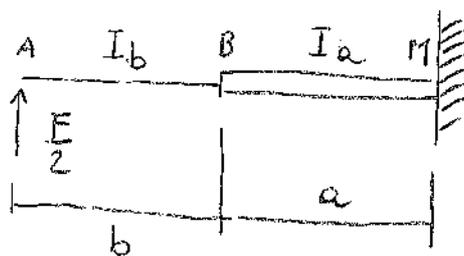
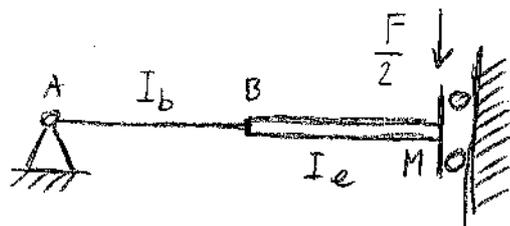


Sistema simmetrico per carico e struttura. Considero l'emistru_{tu}ra introducendo un incastro mobile in mezzo.

Utilizzando quanto ottenuto nell'esempio quattro e considerando che in questo caso si ha

$$a = \frac{l - 2b}{2}$$

segue che



$$7.76) \quad K_e = \frac{6EI_a I_b}{5\left(\frac{l-2b}{2}\right)^3 I_b + 3b\left(\frac{l-2b}{2}\right)^2 I_b + 2b^3 I_e}$$

Provo a ricavare la 7.76 con il PLV considerando l'emistru_{tu}ra

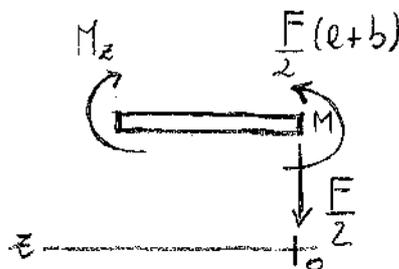
$$M_z = \frac{F}{2}(e+b) - z \frac{F}{2} = \frac{F}{2}(a+b-z)$$

$$L_{vir} = \int_0^a \frac{M_z^2}{EI_e} dz + \int_0^b \frac{M_z^2}{EI_b} dz =$$

$$= \frac{F^2}{4EI_e} \int_0^e (a+b-z)^2 dz + \frac{F^2}{4EI_b} \int_0^b (a+b-z)^2 dz =$$

$$= -\frac{F^2}{4EI_e} \int_0^e (e+b-z)^2 d(e+b-z) - \frac{F^2}{4EI_b} \int_0^b (e+b-z)^2 d(e+b-z) =$$

$$= -\frac{F^2}{4EI_e} \frac{(a+b-z)^3}{3} \Big|_0^e - \frac{F^2}{4EI_b} \frac{(a+b-z)^3}{3} \Big|_0^b = -\frac{F^2}{12EI_e} [b^3 - (a+b)^3] -$$



$$\begin{aligned}
 -\frac{F^2}{12El_b} [a^3 - (a+b)^3] &= -\frac{F^2}{12E} \left\{ \frac{b^3 - (e+b)^3}{le} + \frac{a^3 - (e+b)^3}{lb} \right\} = \\
 &= -\frac{F^2}{12E} \left(\frac{\cancel{b^3} - (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + \cancel{b^3})}{le} + \frac{\cancel{e^3} - (a^3 + 3\cancel{e}^2b + 3eb^2 + \cancel{b^3})}{lb} \right) = \\
 &= +\frac{F^2}{12E} \left(\frac{a^3 + 3e^2b + 3eb^2}{le} + \frac{3e^2b + 3eb^2 + b^3}{lb} \right)
 \end{aligned}$$

$$L_{ve} = \frac{F}{2} \Delta l$$

$$\frac{F}{2} \Delta l = \frac{F^2}{6E} \left(\frac{a^3 + 3e^2b + 3eb^2}{le} + \frac{3e^2b + 3eb^2 + b^3}{lb} \right) \Rightarrow$$

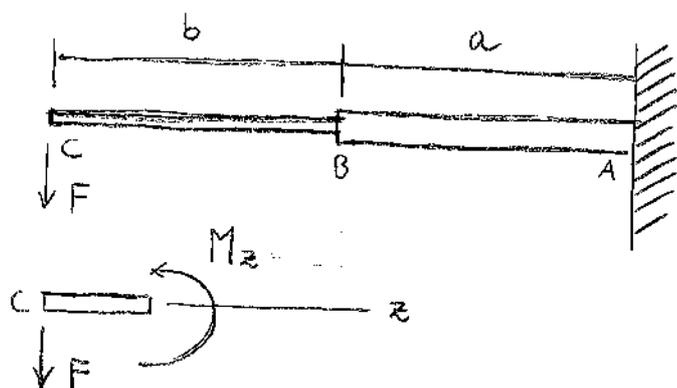
$$\Delta l = \frac{F}{6E} \left(\frac{(a^3 + 3a^2b + 3eb^2)lb + (3e^2b + 3eb^2 + b^3)le}{lelb} \right) \Rightarrow$$

$$\Delta l k_e = F \Rightarrow k_e = \frac{F}{\Delta l} = \frac{6E le lb}{a^3 lb + 3(a^2b + ab^2)(le + lb) + b^3 le} =$$

$$= \frac{6E le lb}{a^3 lb + 3ab(a+b)(le + lb) + b^3 le}$$

Questo risultato non è in accordo con quello dell'esempio quattro. Dunque riprovo a fare i calcoli.

$$M_z = -zF$$



Il lavoro virtuale intorno a δu

$$\int_0^b \frac{M_z^2}{El_b} dz + \int_b^{b+e} \frac{M_z^2}{El_e} dz = \frac{1}{El_b} \int_0^b z^2 F^2 dz + \frac{1}{El_e} \int_b^{b+e} z^2 F^2 dz =$$

$$= \frac{F^2}{El_b} \left. \frac{z^3}{3} \right|_0^b + \frac{F^2}{El_e} \left. \frac{z^3}{3} \right|_b^{b+e} = \frac{F^2}{El_b} \frac{b^3}{3} + \frac{F^2}{El_e} \frac{(b+e)^3 - b^3}{3} =$$

$$= \frac{F^2}{3E} \left(\frac{b^3}{l_b} + \frac{(b+e)^3 - b^3}{l_e} \right)$$

Il minimo del lav. virtuale porta

$$F \Delta l = \frac{F^2}{3E} \left(\frac{b^3}{l_b} + \frac{(b+e)^3 - b^3}{l_e} \right)$$

Essendo $K_e \Delta l = F \Rightarrow \Delta l = F/K_e$ in l_e

$$\frac{F}{K_e} = \frac{F}{3E} \left(\frac{b^3}{l_b} + \frac{(b+e)^3 - b^3}{l_e} \right) \Rightarrow K_e = \frac{3E}{\frac{b^3}{l_b} + \frac{(b+e)^3 - b^3}{l_e}} =$$

$$= \frac{3El_e l_b}{b^3 l_e + (b^3 + 3e^2 b + 3ab^2 + e^3 - b^3) l_b} = \frac{3El_e l_b}{b^3 l_e + 3e b l_b + e^3 l_b} \Rightarrow$$

$$\text{7.77} \quad K_e = \frac{3El_e l_b}{b^3 l_e + 3e b l_b + e^3 l_b}$$

Prova a confermare la 7.77 con le formule su trova e stalo.

$$\Delta l_c = \Delta l_B' + \Delta l_B'' + \varphi_B' b + \varphi_B'' b + \Delta l_c' = \frac{Fa^3}{3Ee} + \frac{Fa^2b}{2Ee} + \frac{Fa^2b}{2Ee} +$$

$$\Delta l_B' = \frac{Fa^3}{3Ee}$$

$$\Delta l_B'' = \frac{Fba^2}{2Ee}$$

$$\varphi_B' = \frac{F}{2Ee} a^2$$

$$\varphi_B'' = \frac{Fba}{Ee}$$

$$\Delta l_c' = \frac{Fb^3}{3Eb}$$

$$+ \frac{Fab^2}{Ee} + \frac{Fb^3}{3Eb} = \left(\frac{Fe^3}{3Ee} + \frac{Fa^2b}{Ee} + \frac{Fab^2}{Ee} + \frac{Fb^3}{3Eb} \right) =$$

$$= \frac{F}{3E} \left(\frac{a^3}{e} + \frac{3a^2b}{e} + \frac{3eb^2}{e} + \frac{b^3}{b} \right) =$$

$$= \frac{F}{3E} \left(\frac{a^3 + 3ab(e+b)}{e} + \frac{b^3}{b} \right) =$$

$$= \frac{F}{3E} \left(\frac{a^3/b + 3eb(e+b)/b + e b^3}{e b} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{F}{K_e} = \frac{F}{3E} \left(\frac{a^3/b + 3eb(e+b)/b + e b^3}{e b} \right) \Rightarrow$$

$$7.78) K_e = \frac{3Ee b}{a^3/b + 3eb(e+b)/b + b^3/e}$$

Volendo applicare ora queste formule alle trave appoggiate si consideri che in questo caso si ha

$$2a + 2b = l \Rightarrow a + b = \frac{l}{2} \Rightarrow a = \frac{l}{2} - b \Rightarrow$$

$$K_e = \frac{3Ee b}{\left(\frac{l}{2} - b \right)^3 / b + 3 \left(\frac{l}{2} - b \right) b \left(\frac{l}{2} - b + b \right) / b + b^3 / e}$$

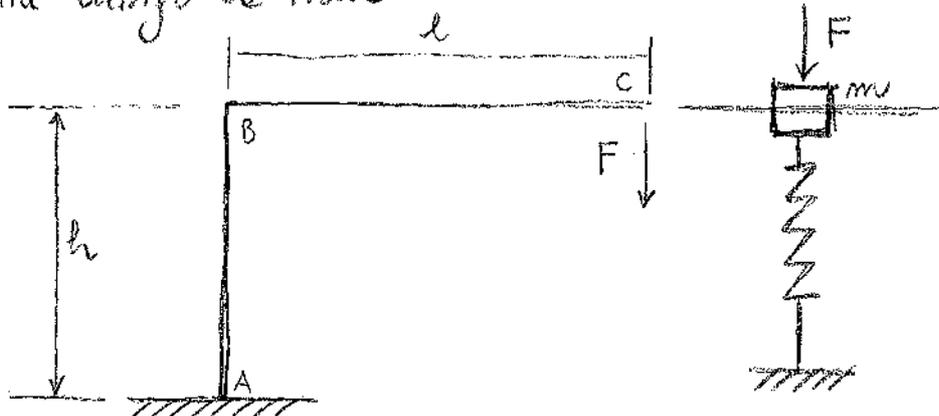
$$= \frac{3Ee b}{\left(\frac{l}{2} - b \right) / b \left[\left(\frac{l}{2} - b \right)^2 + 3b \frac{l}{2} \right] + b^3 / e}$$

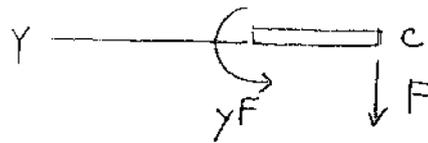
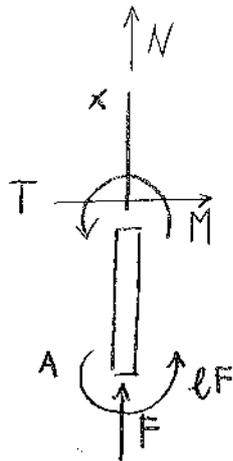
$$\begin{aligned}
&= \frac{3E I_e l_b}{\left(\frac{l}{2} - b\right) l_b \left(\frac{l^2}{4} + b^2 - lb + 3b \frac{l}{2}\right) + b^3 l_e} \\
&= \frac{3E I_e l_b}{\left(\frac{l}{2} - b\right) l_b \left(\frac{l^2}{4} + b^2 + \frac{3bl}{2} - \frac{2lb}{2}\right) + b^3 l_e} = \frac{3E I_e l_b}{\left(\frac{l}{2} - b\right) l_b \left(\frac{l^2}{4} + b^2 + \frac{lb}{2}\right) + b^3 l_e} \\
&= \frac{3E I_e l_b}{l_b \left(\frac{l^3}{8} + \frac{lb^2}{2} + \frac{l^2 b}{4} - \frac{bl^2}{4} - b^3 - \frac{lb^2}{2}\right) + b^3 l_e} = \frac{3E I_e l_b}{l_b \left(\frac{l^2}{8} + \frac{lb}{4} - \frac{lb}{4}\right) + b^3 (l_e - l_b)} \\
&= \frac{3E I_e l_b}{\frac{l^3}{8} l_b + b^3 (l_e - l_b)} = \frac{24 E I_e l_b}{l^3 l_b + 8 b^3 (l_e - l_b)}
\end{aligned}$$

Si consideri ora che queste è la costante elastica delle emistrutture, e che le due emistrutture costituiscono un parallelo di sistemi elastici, quindi la costante elastica complessiva vale

$$7.79 \quad K_e = \frac{48 E I_e l_b}{l^3 l_b + 8 b^3 (l_e - l_b)}$$

7.12. Esempio dieci, telaio ad L. Ricavo le caratteristiche di sollecitazione lungo le trave.





$$\begin{cases} M(x) = -lF \\ M(y) = yF \end{cases}$$

Applico il PLV assumendo come deformazione quella reale e come spostamento quello reale.

$$L_{ve} = F \delta_c$$

$$L_{vi} = \int_0^h \frac{l^2 F^2}{EI} dx + \int_0^l \frac{y^2 F^2}{EI} dy = \frac{l^2 F^2}{EI} h + \frac{y^3 F^2}{3EI} \Big|_0^l = \frac{l^2 F^2}{EI} h + \frac{l^3 F^2}{3EI} = \frac{F^2 l^2}{EI} \left(h + \frac{l}{3} \right)$$

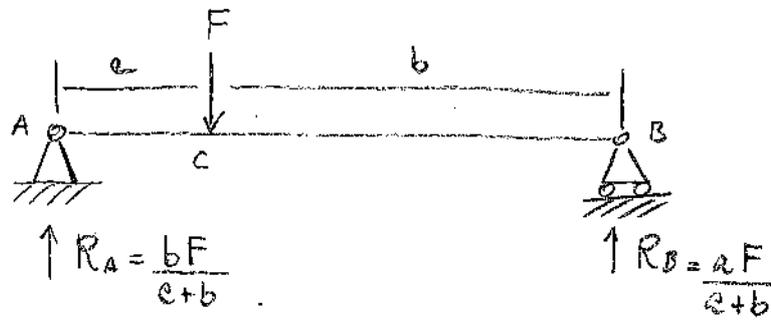
$$F \delta_c = \frac{F^2 l^2}{EI} \left(h + \frac{l}{3} \right) \Rightarrow \delta_c = \frac{F l^2}{EI} \left(h + \frac{l}{3} \right)$$

$$\delta_c k_e = F \Rightarrow k_e = \frac{F}{\delta_c} = \frac{EI}{F l^2} \frac{1}{\left(h + \frac{l}{3} \right)} = \frac{EI}{l^2 \left(h + \frac{l}{3} \right)} = \frac{3EI}{(3h+l)l^2}$$

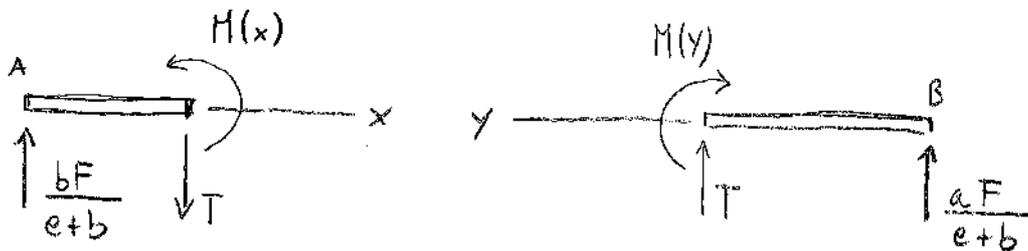
$$7.80) k_e = \frac{3EI}{(3h+l)l^2}$$

7.13. Esempio undici; trave appoggiata. Calcolo il momento flettente lungo l'asse geometrico. Prima cerco le reazioni:

$$\begin{cases} R_A + R_B = F \\ R_A e - R_B b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A = F - R_B \\ F_A e - R_B b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A = F - aF/(e+b) \\ R_B = aF/(e+b) \end{cases} \Rightarrow$$



$$\begin{cases} R_A = \frac{F(e+b) - eF}{e+b} = \frac{aF + bF - eF}{e+b} = \frac{bF}{e+b} \\ R_B = \frac{aF}{e+b} \end{cases}$$



$$\begin{cases} M(x) = \frac{bF}{e+b} x \\ M(y) = \frac{aF}{e+b} y \end{cases} \Rightarrow L_{vi} = \int_0^e \frac{M(x)^2}{EI} dx + \int_0^b \frac{M(y)^2}{EI} dy = \frac{b^2 F^2}{EI e^2} \int_0^e x^2 dx +$$

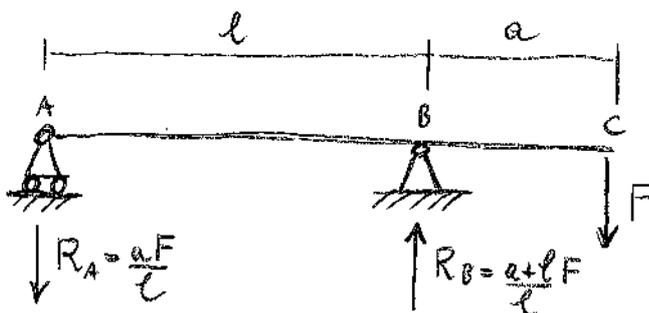
$$+ \frac{a^2 F^2}{EI e^2} \int_0^b y^2 dy = \frac{b^2 F^2}{EI e^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^e + \frac{a^2 F^2}{EI e^2} \frac{y^3}{3} \Big|_0^b = \frac{b^2 F a^3}{3EI e^2} + \frac{a^2 F b^3}{3EI e^2} =$$

$$= \frac{F^2 a^2 b^2}{3EI e^2} (a + b) = \frac{F^2 a^2 b^2}{3EI e}$$

$$L_{ve} = F \Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{F a^2 b^2}{3EI e} \Rightarrow \frac{F}{k_e} = \frac{F a^2 b^2}{3EI e} \Rightarrow$$

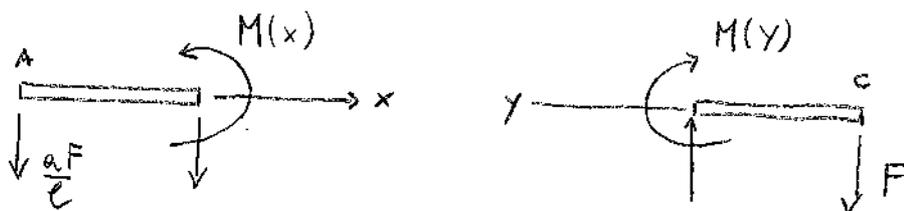
$$(7.81) \quad k_e = \frac{3EI e}{a^2 b^2}$$

7.14. Trave appoggiata con sbalzo. Ricavo le reazioni vincolari.



$$\begin{cases} -R_A + R_B - F = 0 \\ lR_A = aF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A = aF/l \\ R_B = R_A + F = \frac{aF}{l} + F = \frac{a+l}{l}F \end{cases}$$

Ricavo il momento flettente



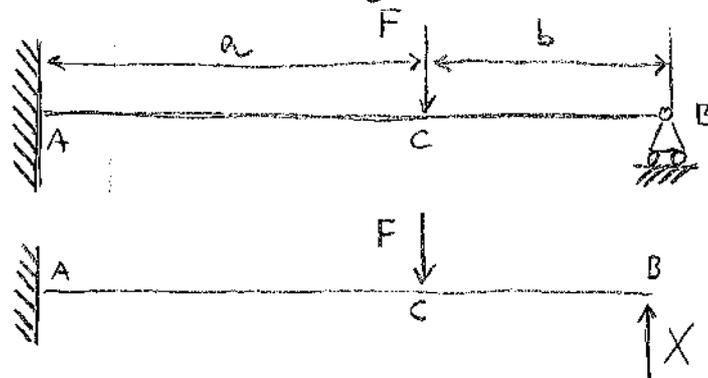
$$\begin{cases} M(x) = -\frac{aF}{l}x \\ M(y) = -Fy \end{cases} \Rightarrow L_{vi} = \int_0^l \frac{a^2 F^2 x^2}{l^2 EI} dx + \int_0^a \frac{F^2 y^2}{EI} dy =$$

$$= \frac{a^2 F^2}{l^2 EI} \frac{x^3}{3} \Big|_0^l + \frac{F^2}{EI} \frac{y^3}{3} \Big|_0^a = \frac{a^2 F^2 l^3}{l^2 EI \cdot 3} + \frac{F^2 a^3}{3EI} = \frac{a^2 F^2}{3EI} (l+a)$$

$$L_{vi} = F \Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{a^2 F}{3EI} (l+a) \Rightarrow \frac{F}{k_e} = \frac{a^2 F}{3EI} (l+a) \Rightarrow$$

$$7.82) k_e = \frac{3EI}{a^2(l+a)}$$

7.15. Esempio dodici; trave di incastro e appoggio. Per trovare le reazioni vincolari mi riconduco a un sistema isostatico e impongo la congruenza con i vincoli:



Lo spostamento di B si scrive

$$\delta_B = \frac{Fa^3}{3EI} + \frac{Fa^2b}{2EI} - \frac{X(l+b)^3}{3EI}$$

Imponendone l'annullamento si ha

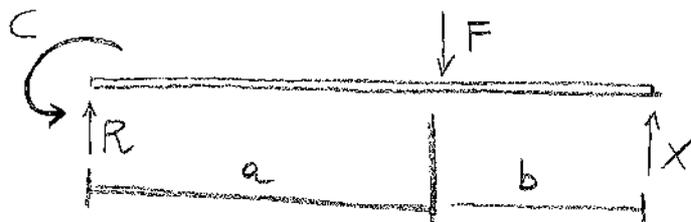
$$\begin{aligned} \frac{Fa^3}{3EI} + \frac{Fa^2b}{2EI} &= \frac{Xl^3}{3EI} \Rightarrow X = \frac{3}{l^3} \left(\frac{Fa^3}{3} + \frac{Fa^2b}{2} \right) = \frac{3Fa^2}{l^3} \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} \right) = \\ &= \frac{3a^2F}{l^3} \frac{2a+3b}{2} = \frac{a^2F}{l^3} \frac{2l+b}{2} = \frac{2l+b}{2l^3} a^2F \end{aligned}$$

Ricavo le altre reazioni vincolari:

$$\begin{cases} R+X=F \\ C=aF-lX \end{cases} \Rightarrow$$

$$R = F - X$$

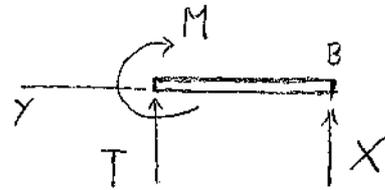
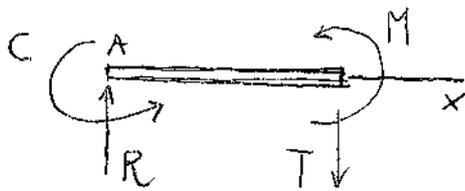
$$C = aF - \frac{2l+b}{2l^3} a^2F = aF - \frac{2l+b}{2l^2} a^2F = aF \left(1 - \frac{2l+b}{2l^2} a \right) =$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{aF}{2l^2} (2l^2 - 2el - ab) = \frac{aF}{2l^2} (2l^2 - 2a^2 - 2ab - eb) = \\
 &= \frac{aF}{2l^2} (2l^2 - 2a^2 - 3ab) = \frac{eF}{2l^2} (2e^2 + 4eb + 2b^2 - 2a^2 - 3eb) = \\
 &= \frac{aF}{2l^2} (ab + 2b^2) = \frac{aFb}{2l^2} (a + 2b) = \frac{abF}{2l^2} (l + b)
 \end{aligned}$$

$$R = F - X = F - \frac{2l+b}{2l^3} a^2 F = F \left(\frac{2l^3 - (2l+b)a^2}{2l^3} \right) = \frac{3a^2 + 2b^2 + 6ebb}{2l^3} F$$

Ricavo ora il momento flettente.



$$\begin{cases} M(x) = Rx - C \\ M(y) = Xy \end{cases}$$

Applico il PLV.

$$\begin{aligned}
 L_{vi} &= \int_0^e \frac{M^2}{EI} dx + \int_0^b \frac{M^2}{EI} dy = \int_0^e \frac{(Rx - C)^2}{EI} dx + \int_0^b \frac{X^2 y^2}{EI} dy = \\
 &= \int_0^e \frac{R^2 x^2 + C^2 - 2RxC}{EI} dx + \int_0^b \frac{X^2 y^2}{EI} dy = \\
 &= \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{R^2 x^3}{3} + xC^2 - \frac{2RxC^2}{2} \right) \Big|_0^e + \left(\frac{X^2 y^3}{3} \right) \Big|_0^b \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{R^2 e^3}{3} + eC^2 - \frac{2RRe^2}{2} + \right. \\
 &\left. + \frac{X^2 b^3}{3} \right] = \frac{1}{EI} \left(\frac{(F-X)^2 a^3}{3} + a(aF - lX)^2 - R a^2 (eF - lX) + \frac{X^2 b^3}{3} \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3EI} \left(a^3(F-X)^2 + 3e(aF-lX)^2 - 3Re^2(aF-lX) + X^2b^3 \right) = \\
&= \frac{1}{3EI} \left(a^3(F-X)^2 + (eF-lX)3a(aF-lX-aR) + X^2b^3 \right) = \\
&= \frac{1}{3EI} \left(a^3F^2 + a^3X^2 - 2FXe^3 + (3a^2F-3alX)(aF-lX-a(F-X)) + \right. \\
&\quad \left. + X^2b^3 \right) = \frac{1}{3EI} \left(a^3F^2 + a^3X^2 - 2FXe^3 + (3e^2F-3elX)(aF-lX-eF+eX) + \right. \\
&\quad \left. + X^2b^3 \right) = \frac{1}{3EI} \left(a^3F^2 + e^3X^2 - 2FXe^3 + (3e^2F-3elX)(-eX-bX+eX) + \right. \\
&\quad \left. + X^2b^3 \right) = \frac{1}{3EI} \left(a^3F^2 + a^3X^2 - 2FXa^3 - 3a(aF-lX)bX + X^2b^3 \right) = \\
&= \frac{1}{3EI} \left(a^3F^2 + e^3X^2 - 2FXe^3 - 3a(abFX - lbX^2) + X^2b^3 \right) = \\
&= \frac{1}{3EI} \left(a^3F^2 + e^3X^2 - 2FXe^3 - 3a^2bFX + 3albX^2 + X^2b^3 \right) = \\
&= \frac{1}{3EI} \left(a^3F^2 + (a^3 + 3ab^2 + b^3)X^2 - 2a^3FX - 3e^2bFX \right) = \\
&= \frac{1}{3EI} \left(a^3F^2 - 2a^3FX - 3e^2bFX + (a^3 + 3a^2b + 3eb^2 + b^3)X^2 \right) = \\
&= \frac{1}{3EI} \left(a^3F^2 - 2a^3FX - 3e^2bFX + l^3X^2 \right) = \\
&= \frac{1}{3EI} \left(a^3F^2 - \frac{2a^3F}{2l^3} \frac{2l+b}{2l^3} a^2F - \frac{3e^2bF}{2l^3} \frac{2l+b}{2l^3} a^2F + \frac{l^3(2l+b)^2 a^4 F^2}{4l^3} \right) = \\
&= \frac{F^2}{3EI} \left(a^3 - \frac{a^5(2l+b)}{l^3} - \frac{3a^4b}{2l^3} \frac{2l+b}{2l^3} + \frac{a^4(2l+b)^2}{4l^3} \right) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{F^2}{3EI} \frac{4a^3 l^3 + 4a^5(2l+b) - 6a^4 b(2l+b) + a^4(2l+b)^2}{4l^3} =$$

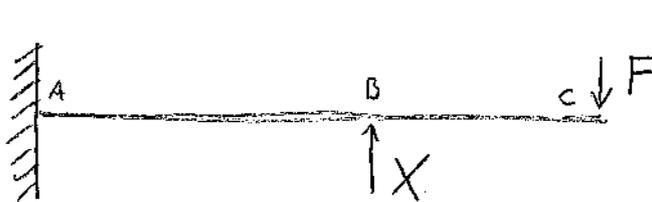
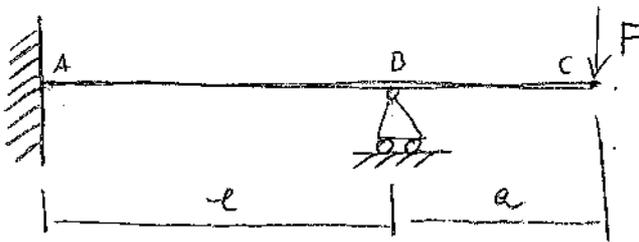
$$= \frac{F^2}{12l^3 EI} \left(\cancel{4e^6} + \cancel{12a^5 b} + \cancel{12a^4 b^2} + 4a^3 b^3 - \cancel{8a^6} - \cancel{12a^5 b} - \cancel{12a^4 b^2} - \cancel{18a^4 b^2} + \right.$$

$$\left. + \cancel{4e^6} + \cancel{3e^4 b^2} + \cancel{12a^5 b} \right) = \frac{F^2}{12l^3 EI} (3e^4 b^2 + 4e^3 b^3) = \frac{F^2 a^3 b^2}{12l^3 EI} (3e + 4b)$$

$$L_{ve} = F \Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{F a^3 b^2}{12l^3 EI} (3e + 4b) \Rightarrow \frac{F}{K_e} = \frac{F a^3 b^2}{12l^3 EI} (3e + 4b) \Rightarrow$$

$$7.83 \quad K_e = \frac{12l^3 EI}{a^3 b^2 (3e + 4b)}$$

7.18. Esempio unidirezionale; trovare incastriete su carrullo con sbaleto.

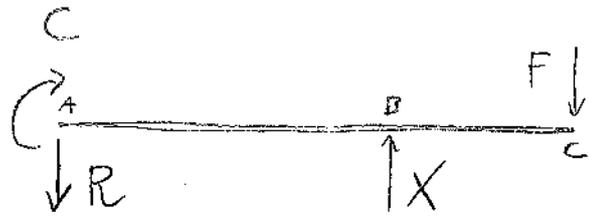


$$y(B) = \frac{-Xl^3}{3EI} + \frac{F}{6EI} (-l^3 + 3(l+a)l^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{-Xl^3}{3EI} + \frac{F}{2EI} (-l^3 + 3l^3 + 3el^2) = 0 \Rightarrow$$

$$-Xl^3 + \frac{F}{2} (2l^3 + 3el^2) = 0 \Rightarrow Xl^3 = \frac{Fl^2}{2} (2l + 3e) \Rightarrow$$

$$X = \frac{F}{2l} (2l + 3e)$$

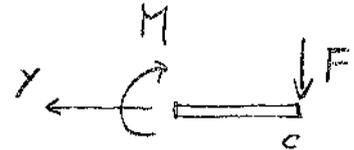
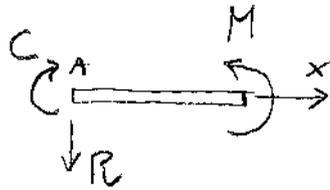


$$\begin{cases} R + F - X = 0 \\ -C + X \cdot l - F(a + l) = 0 \end{cases}$$

↓

$$\begin{cases} R = X - F \\ C = Xl - F(a + l) = \frac{F}{2} (2l + 3a) - \frac{2F}{2} (e + l) = \frac{F}{2} (2l + 3e - 2a - 2l) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = \frac{2F}{2} \\ R = 3aF/2l \\ X = \frac{F}{2l} (2l + 3a) \end{cases}$$



$$\begin{cases} M(x) = C - R_x = \frac{aF}{2} - \frac{3aF}{2l}x = \frac{aF}{2} \left(1 - \frac{3x}{l}\right) = \frac{aF}{2l} (l - 3x) \\ M(y) = -Fy \end{cases}$$

$$L_{vi} = \int_0^l \frac{M^2(x)}{EI} dx + \int_0^e \frac{M^2(y)}{EI} dy = \frac{I_1}{EI} + \frac{I_2}{EI}$$

$$I_1 = \int_0^l M^2(x) dx = \int_0^l (C - R_x)^2 dx = \frac{a^2 F^2}{4l^2} \int_0^l (l - 3x)^2 dx =$$

$$= \frac{a^2 F^2}{4l^2} \frac{(-1)}{3} \int_0^l (l - 3x)^2 d(l - 3x) = -\frac{a^2 F^2}{12l^2} \left. \frac{(l - 3x)^3}{3} \right|_0^l =$$

$$= -\frac{a^2 F^2}{36l^2} \left((l - 3l)^3 - (l)^3 \right) = -\frac{a^2 F^2}{36l^2} (-8l^3 - l^3) = \frac{a^2 F^2 8l^3}{4 \cdot 36l^2} = \frac{a^2 l F^2}{4}$$

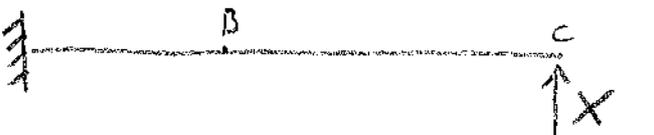
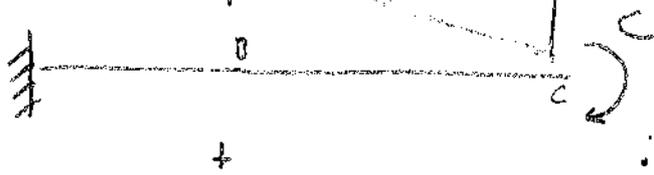
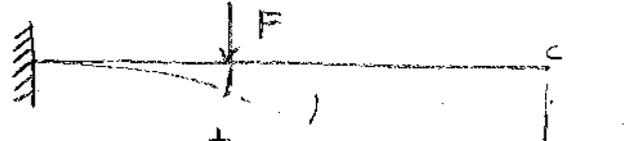
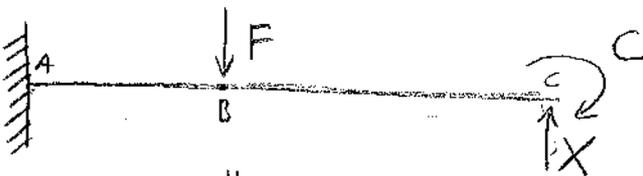
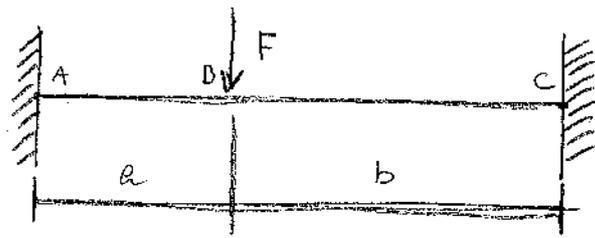
$$I_2 = \int_0^e F^2 y^2 dy = \frac{F^2 y^3}{3} \Big|_0^e = \frac{F^2 e^3}{3}$$

$$L_{vi} = \frac{1}{EI} \left(\frac{a^4 F^2}{4} + \frac{a^3 F^2 e}{3} \right) = \frac{a^2 F^2}{EI} \left(\frac{l}{4} + \frac{e}{3} \right)$$

$$L_{ve} = F \Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{a^2 F}{EI} \left(\frac{l}{4} + \frac{e}{3} \right) \Rightarrow \frac{F}{k_e} = \frac{a^2 F}{EI} \left(\frac{l}{4} + \frac{e}{3} \right) \Rightarrow$$

$$k_e = \frac{EI}{a^2 \left(\frac{3l+4e}{12} \right)} = \frac{12EI}{a^2(3l+4e)}$$

7.17. Trave a doppio incastro.



$$\begin{cases} y(c) = \frac{Fa^3}{3EI} + \frac{Fa^2b}{2EI} + \frac{Cl^2}{2EI} - \frac{Xl^3}{3EI} = 0 \\ \varphi(c) = -\frac{Fa^2}{2EI} - \frac{Cl}{EI} + \frac{Xl^2}{2EI} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{Fe^3}{3} + \frac{Fa^2b}{2} + \frac{Cl^2}{2} = \frac{Xl^3}{3} \\ \frac{Fe^2}{2} + Cl = \frac{Xl^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Xl^2 = \frac{3}{l} \left(\frac{Fe^3}{3} + \frac{Fa^2b}{2} + \frac{Cl^2}{2} \right) \\ \therefore Xl^2 = 2 \left(\frac{Fe^2}{2} + Cl \right) \end{cases}$$

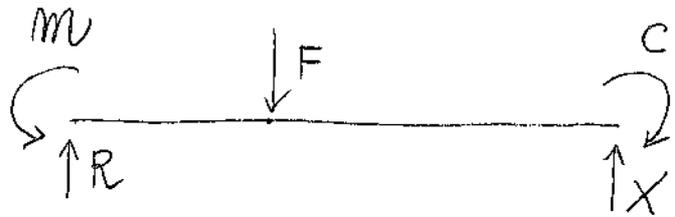
$$\frac{1}{l} \left(\frac{2Fe^3}{2} + \frac{3Fa^2b}{2} + \frac{3Cl^2}{2} \right) = Fa^2 + 2Cl \Rightarrow$$

$$2Fe^3 + 3Fe^2b + 3Ce^2 = 2le^2F + 4l^2C \Rightarrow$$

$$2Fe^3 + 3Fe^2b - 2a^2F - 2a^2bF = l^2C \Rightarrow \left(\frac{Fa^2b}{l^2} = C \right)$$

$$Xl^2 = Fe^2 + 2 \frac{Fa^2b}{l^2} \cdot l = \frac{Fa^2l + 2Fa^2b}{l} = \frac{Fa^2}{l}(l + 2b) \Rightarrow$$

$$X = \frac{Fe^2(l + 2b)}{l^3}$$



$$\begin{cases} R + X = F \\ M - eR + bX - C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = F - X \\ M = aR - bX + C \end{cases} \Rightarrow$$

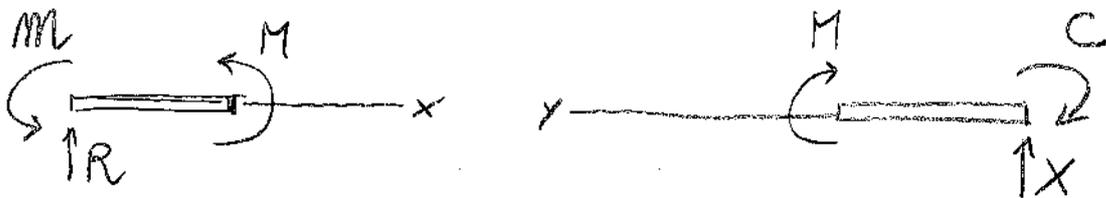
$$R = \frac{Fl^3 - Fe^2(l + 2b)}{l^3} = \frac{F}{l^3} (a^3 + 3eb + 3eb^2 + b^3 - a^3 - 2e^2b) =$$

$$= \frac{Fb^2(3e + b)}{l^3}$$

$$M = \frac{Feb^2(3e + b)}{l^3} - \frac{Fa^2b(l + 2b)}{l^3} + \frac{Fa^2bl}{l^3}$$

$$= \frac{Feb}{l^3} (3ab + b^2 - a^2 - 2ab + a^2 + eb) = \frac{Feb^2}{l^3} (b + a) =$$

$$= \frac{Fab^2}{l^2}$$



$$\begin{cases} M(x) = Rx - M \\ M(y) = Xy - C \end{cases}$$

$$L_{vi} = \int_0^e \frac{M(x)}{EI} dx + \int_0^b \frac{M(y)}{EI} dy = \frac{I_1}{EI} + \frac{I_2}{EI}$$

$$I_1 = \int_0^e (Rx^2 + M^2 - 2RMx) dx = \left(\frac{R^2 x^3}{3} + M^2 x - \frac{2RMx^2}{2} \right)_0^e =$$

$$= \frac{R^2 e^3}{3} + M^2 a - MRa^2 = \frac{(F^2 b^4)(3e+b)a^3}{3e^6} + \frac{(F^2 a^3)b^4}{e^4} -$$

$$- \frac{(Fab^2)(Fb^3)(3e+b)a^2}{e^2 e^3} = \frac{F^2 b^4 a^3}{e^4} \left(\frac{(3e+b)^2}{3e^2} + 1 - \right.$$

$$\left. - \frac{3a+b}{e} \right) = \frac{F^2 b^4 a^3}{e^4} \left(\frac{9e^2 + b^2 + 6eb}{3e^2} + \frac{3e^2 + 6eb + 3b^2}{3e^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{(9e+3b)(e+b)}{3e^2} \right) = \frac{F^2 b^4 a^3}{e^4} \frac{12e^2 + 12eb + 4b^2 - (9e^2 + 9eb + 3eb + 3b^2)}{3e^2} =$$

$$= \frac{F^2 a^3 b^4}{3e^6} (3e^2 + b^2)$$

$$I_2 = \int_0^b (X^2 y^2 + C^2 - 2XCy) dy = \left(\frac{X^2 y^3}{3} + C^2 y - \frac{2XCy^2}{2} \right)_0^b =$$

$$= \frac{X^2 b^3}{3} + C^2 b - XCb^2 = \frac{(F^2 a^4)(a+3b)^2 b^3}{3e^6} + \frac{(F^2 a^3)b^3}{e^4} -$$

$$- \frac{(F^2 a^4)b^3(e+3b)}{e^5} = \frac{F^2 a^4 b^3}{e^4} \left(\frac{a^2 + 9b^2 + 6eb}{3e^2} + \frac{3e^2 + 6eb + 3b^2}{3e^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{e+3b}{e} \right) = \frac{4e^2 + 12b^2 + 12eb - (3e+3b)(e+3b)}{3e^6} \frac{F^2 a^4 b^3}{e^4} =$$

$$= \frac{4e^2 + 12b^2 + 12eb - (3e^2 + 9eb + 3eb + 9b^2)}{3e^6} F^2 a^4 b^3 =$$

$$= \frac{a^2 + 3b^2}{3e^6} F^2 a^4 b^3$$

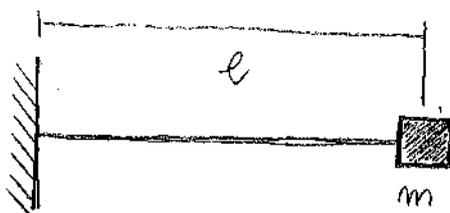
$$L_{vi} = \frac{F^2 a^3 b^3}{3l^3 EI}$$

$$L_{ve} = F \Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{F e^3 b^3}{3l^3 EI} \Rightarrow \cancel{F} = \frac{\cancel{F} e^3 b^3}{K_e} \Rightarrow$$

$$\textcircled{7.84} \quad K_e = \frac{3l^3 EI}{a^3 b^3}$$

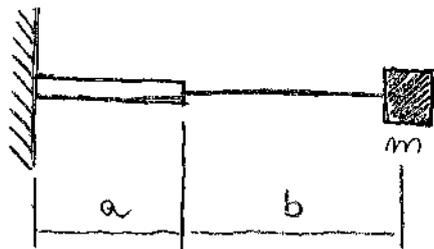
Capitolo 8. Applicazioni sulle oscillazioni libere

8.1. Vibrazioni flessionali. Per le travi illustrate nel capitolo precedente in cui le vibrazioni avvengono nel piano di flessione si parla di vibrazioni flessionali. Per esse è possibile ricavare la pulsazione naturale secondo le 2.3.b che ricorda: $\omega_m = \sqrt{K/m}$. Si costruisce le tabelle seguenti



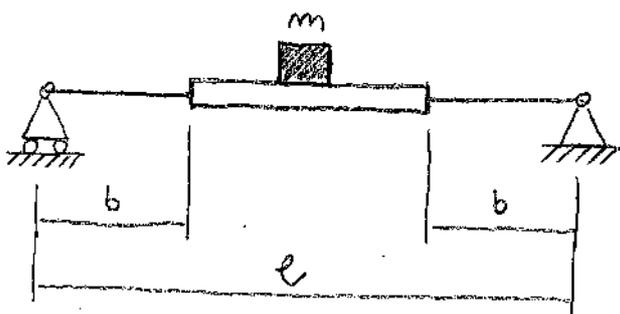
$$K = 3EI/l^3$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{3EI}{ml^3}}$$



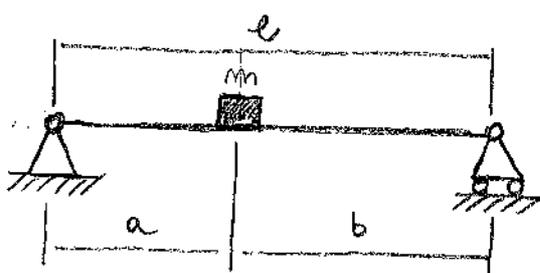
$$K = \frac{3EIab}{a^3b + 3ab^2 + b^3a}$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{3EIelb}{m(a^3b + 3ab^2 + b^3a)}}$$



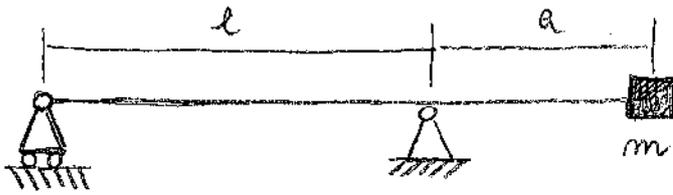
$$K = \frac{48EIab}{l^3b + 8b^3(l-a)}$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{48EIelb}{m(l^3b + 8b^3(l-a))}}$$



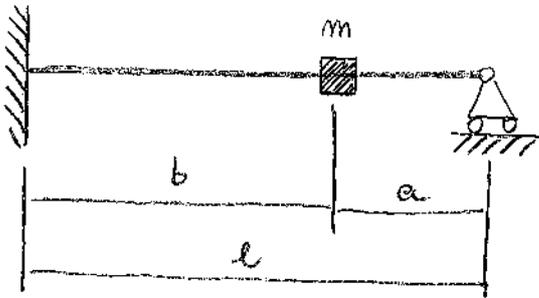
$$K = \frac{3EI\ell}{a^2b^2}$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{3EI\ell}{ma^2b^2}}$$



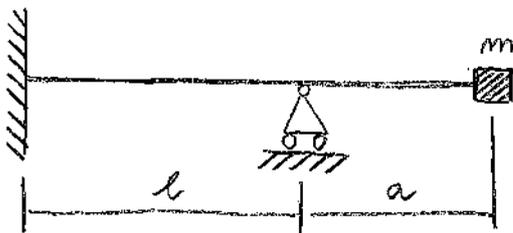
$$K = \frac{3EI}{a^2(l+a)}$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{3EI}{ma^2(l+a)}}$$



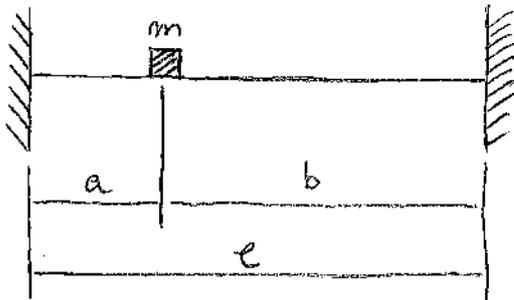
$$K = \frac{12l^3EI}{a^3b^2(3a+4b)}$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{12l^3EI}{ma^3b^2(3a+4b)}}$$



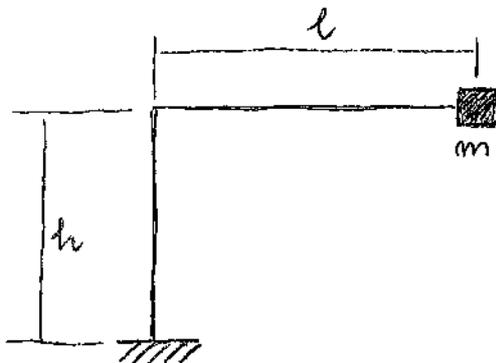
$$K = \frac{12EI}{a^2(3l+4a)}$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{12EI}{a^2m(3l+4a)}}$$



$$K = \frac{3l^3EI}{a^3b^3}$$

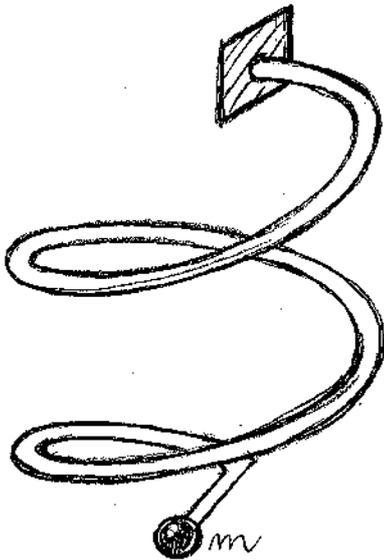
$$\omega_m = \sqrt{\frac{3l^3EI}{ma^3b^3}}$$



$$K = \frac{3EI}{(3h+l)l^2}$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{3EI}{m(3h+l)l^2}}$$

8.2. Pulsazione naturale della molla elicoidale. Utilizzando le formule semplificate 7.50 ottenuta per le molle elicoidali, si ricava le pulsazione naturale seguente:



$$k = \frac{\tau^4 G}{4R^3 m}$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{\tau^4 G}{4R^3 m m}}$$

8.3. Pulsazione naturale della molla conica. Riprendo i calcoli del par. 7.8 e assumo che sia p molto piccolo ponendo $p=0$. In tal caso si ha $\xi = \xi' = \xi'' = 0$ e dunque

$$\hat{e}_1 = -\frac{1}{\tau \nu} (\xi'' \eta' - \xi' \eta'') \hat{e}_3$$

$$\hat{e}_2 = -\frac{1}{\nu} (\xi'' \hat{e}_1 + \eta'' \hat{e}_2)$$

$$\hat{e}_3 = \frac{1}{\tau} (\xi' \hat{e}_1 + \eta' \hat{e}_2)$$

$$\tau = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}$$

$$\nu = \sqrt{\xi''^2 + \eta''^2}$$

$$\vec{F} \times \vec{AP} = F (\eta \hat{e}_1 + (Ri + \xi) \hat{e}_2)$$

Dunque il bilancio dei momenti in P porge

$$M_x \hat{e}_1 + M_y \hat{e}_2 + M_z \hat{e}_3 + \vec{F} \times \vec{AP} - FR_H \hat{e}_2 = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{M_x}{L} (\zeta'' \eta' - \zeta' \eta'') \hat{e}_3 + \frac{M_y}{L} (\zeta'' \hat{e}_1 + \eta'' \hat{e}_2) + \frac{M_z}{L} (\zeta' \hat{e}_1 + \eta' \hat{e}_2) +$$

$$+ F(\eta \hat{e}_1 + (R_i + \zeta) \hat{e}_2) - FR_H \hat{e}_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\left(-\frac{M_y}{L} \zeta'' + \frac{M_z}{L} \zeta' + F\eta\right) \hat{e}_1 + \left(-\frac{M_y}{L} \eta'' + \frac{M_z}{L} \eta' + F(R_i + \zeta) - FR_H\right) \hat{e}_2 -$$

$$-\frac{M_x}{L} (\zeta'' \eta' - \zeta' \eta'') \hat{e}_3 = 0$$

$$\begin{cases} -\frac{M_y}{L} \zeta'' + \frac{M_z}{L} \zeta' + F\eta = 0 \\ -\frac{M_y}{L} \eta'' + \frac{M_z}{L} \eta' + F(R_i + \zeta) - FR_H = 0 \\ -\frac{M_x}{L} (\zeta'' \eta' - \zeta' \eta'') = 0 \Rightarrow M_x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{M_y}{L} = \left(\frac{M_z \zeta'}{L} + F\eta\right) \frac{1}{\zeta''} \\ \frac{M_y}{L} = \left(\frac{M_z \eta'}{L} + F(R_i + \zeta - R_H)\right) \frac{1}{\eta''} \end{cases}$$

$$\left(\frac{M_z \zeta'}{L} + F\eta\right) \eta'' = \left(\frac{M_z \eta'}{L} + F(R_i + \zeta - R_H)\right) \zeta'' \Rightarrow$$

$$\frac{M_z \delta' \eta''}{\tau} - \frac{M_z \eta' \delta''}{\tau} = F(R_i \delta'' + \delta \delta'' - R_H \delta'' - \eta \eta'') \Rightarrow$$

$$M_z \frac{\delta' \eta'' - \eta' \delta''}{\tau} = F(R_i \delta'' + \delta \delta'' - R_H \delta'' - \eta \eta'') \Rightarrow$$

$$M_z = \frac{\tau F(R_i \delta'' + \delta \delta'' - R_H \delta'' - \eta \eta'')}{\delta' \eta'' - \eta' \delta''} \Rightarrow$$

$$\frac{M_y}{\delta''} = \left(\frac{F \delta' (R_i \delta'' + \delta \delta'' - R_H \delta'' - \eta \eta'')}{\delta' \eta'' - \eta' \delta''} + F \eta \right) \frac{1}{\delta''} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{\tau F}{\delta''} \left(\frac{\delta' (R_i \delta'' + \delta \delta'' - R_H \delta'' - \eta \eta'')}{\delta' \eta'' - \eta' \delta''} + \eta \right) = \\ &= \frac{\tau F}{\delta''} \left(\frac{\cancel{\delta \delta' \delta''} - \eta \delta' \eta'' + R_i \delta' \delta'' - R_H \delta' \delta'' + \eta \delta' \eta'' - \eta \eta' \delta''}{\delta' \eta'' - \eta' \delta''} \right) = \\ &= \frac{\tau F}{\delta''} \frac{\delta \delta' \delta'' - \eta \eta' \delta'' + (R_i - R_H) \delta' \delta''}{\delta' \eta'' - \eta' \delta''} = \frac{\tau F (\delta \delta' - \eta \eta' + (R_i - R_H) \delta')}{\delta' \eta'' - \eta' \delta''} \end{aligned}$$

Dunque ho trovato

$$\begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = \tau F \frac{(\delta \delta' - \eta \eta') + (R_i - R_H) \delta'}{\delta' \eta'' - \eta' \delta''} \\ M_z = \tau F \frac{(\delta \delta'' - \eta \eta'') + (R_i - R_H) \delta''}{\delta' \eta'' - \eta' \delta''} \end{cases}$$

$$\xi' \eta'' = \left[\frac{f_i}{2\pi} \cos \theta - \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi} \right) f_i \right) \sin \theta \right] \left[\frac{f_i}{\pi} \cos \theta - \right. \\ \left. - \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi} \right) f_i \right) \sin \theta \right] = \frac{f_i^2 \cos^2 \theta}{2\pi^2} - \frac{f_i}{2\pi} \cos \theta \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi} \right) f_i \right) \sin \theta -$$

$$- \frac{2f_i}{2\pi} \sin \theta \cos \theta \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi} \right) f_i \right) + \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi} \right) f_i \right)^2 \sin^2 \theta =$$

$$= \frac{f_i^2}{2\pi^2} \cos^2 \theta - \frac{3f_i}{2\pi} \sin \theta \cos \theta \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi} \right) f_i \right) + \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi} \right) f_i \right)^2 \sin^2 \theta$$

$$\eta' \xi'' = \left[\frac{f_i}{2\pi} \sin \theta + \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi} \right) f_i \right) \cos \theta \right] \left[-\frac{f_i}{\pi} \sin \theta - \right. \\ \left. - \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi} \right) f_i \right) \cos \theta \right] = -\frac{f_i^2 \sin^2 \theta}{2\pi^2} - \frac{f_i}{2\pi} \sin \theta \cos \theta \left(R_m + \right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi} \right) f_i \right) - \frac{2f_i}{2\pi} \sin \theta \cos \theta \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi} \right) f_i \right) - \left(R_m + \right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi} \right) f_i \right)^2 \cos^2 \theta = \left(-\frac{f_i^2 \sin^2 \theta}{2\pi^2} - \frac{3f_i}{2\pi} \sin \theta \cos \theta \left(R_m + \right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi} \right) f_i \right) - \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi} \right) f_i \right)^2 \cos^2 \theta$$

$$\xi' \eta'' - \eta' \xi'' = \frac{f_i^2}{2\pi^2} + \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi} \right) f_i \right)^2$$

$$\xi \xi' = \left(\frac{f_i}{2\pi} \right) \cos^2 \theta - \left(\right)^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\eta \eta' = \left(\quad \right) \frac{f_i}{2\pi} \sin^2 \theta + \left(\quad \right)^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\begin{aligned} 3\zeta' - 2\eta \eta' &= \left(\quad \right) \frac{f_i}{2\pi} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2 \left(\quad \right)^2 \sin \theta \cos \theta = \\ &= \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i \right) \frac{f_i}{2\pi} \cos 2\theta - \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i \right)^2 \sin 2\theta \end{aligned}$$

$$3\zeta'' = -\frac{f_i}{\pi} \left(\quad \right) \sin \theta \cos \theta - \left(\quad \right)^2 \cos 2\theta$$

$$\eta \eta'' = \left(\frac{f_i}{\pi} \left(\quad \right) \sin \theta \cos \theta - \left(\quad \right)^2 \sin^2 \theta \right)$$

$$3\zeta'' - 2\eta \eta'' = -\frac{2f_i}{\pi} \left(\quad \right) \sin \theta \cos \theta - \left(\quad \right)^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) =$$

$$= -\frac{f_i}{\pi} \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i \right) \sin 2\theta - \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i \right)^2 \cos 2\theta$$

$$v^2 = \zeta'^2 + \eta'^2 = \frac{f_i^2}{4\pi^2} \cos^2 \theta + \left(\quad \right)^2 \sin^2 \theta - \frac{f_i}{\pi} \left(\quad \right) \sin \theta \cos \theta +$$

$$+ \frac{f_i^2}{4\pi^2} \sin^2 \theta + \left(\quad \right)^2 \cos^2 \theta + \frac{f_i}{\pi} \left(\quad \right) \sin \theta \cos \theta =$$

$$= \frac{f_i^2}{4\pi^2} + \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i \right)^2$$

$$v^2 = \frac{f_i^2}{\pi^2} + \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i \right)^2$$

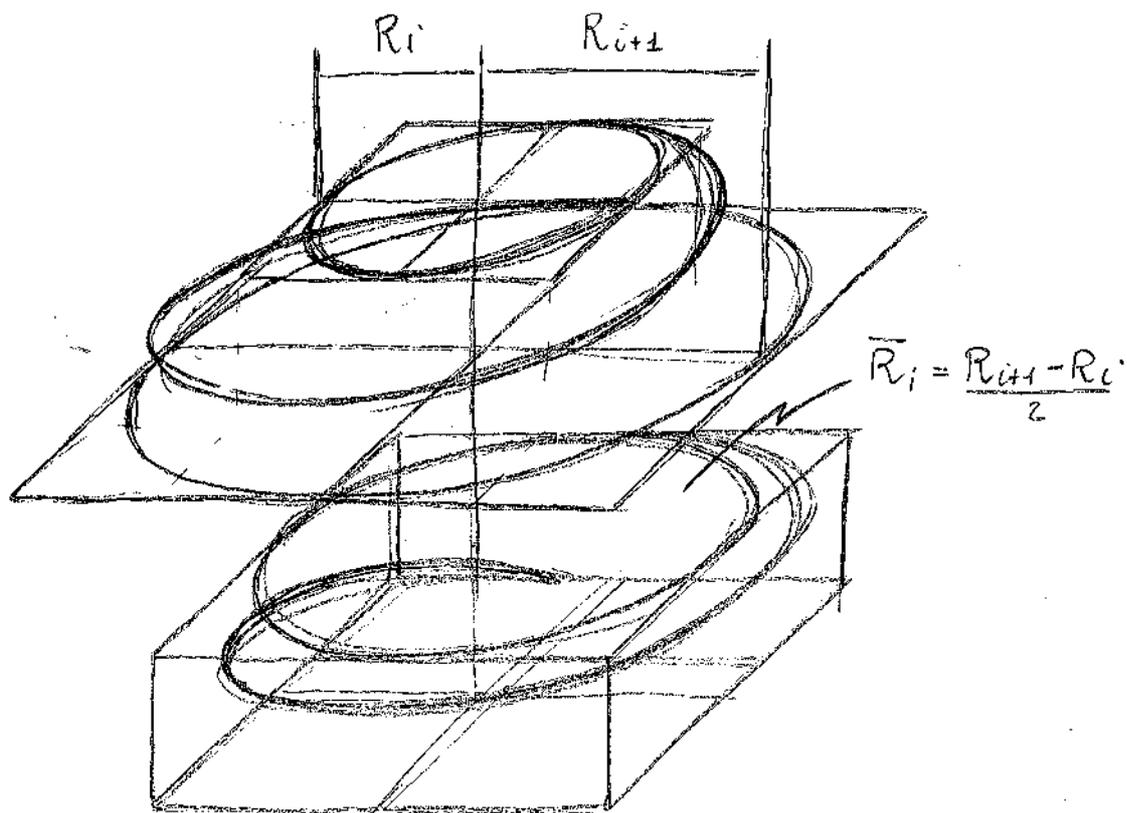
Quindi abbiamo i momenti seguenti:

$$\begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = \nu F \frac{\xi \zeta' - \eta \eta' + (R_i - R_m) \zeta'}{\xi' \eta'' - \eta' \zeta''} \\ M_z = \tau F \frac{\xi \zeta'' - \eta \eta'' + (R_i - R_m) \zeta''}{\xi' \eta'' - \eta' \zeta''} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nu = \sqrt{\frac{f_i^2}{\pi^2} + \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i \right)^2} \\ \tau = \sqrt{\frac{f_i^2}{4\pi^2} + \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i \right)^2} \\ \xi \zeta' - \eta \eta' = \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i \right) \left[\frac{f_i}{2\pi} \cos 2\theta - \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i \right) \sin 2\theta \right] \\ \xi \zeta'' - \eta \eta'' = - \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i \right) \left[\frac{f_i}{\pi} \sin 2\theta + \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i \right) \cos 2\theta \right] \\ \xi' \eta'' - \eta' \zeta'' = \frac{f_i^2}{2\pi^2} + \left(R_m + \left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right) f_i \right)^2 \\ f_i = (i-1) \frac{R_M - R_m}{n} \end{cases}$$

Anche così le molle è difficile da risolvere. Allora approssimo le molle coniche con una serie di molle cilindriche a raggio crescente.

Sostituisco le spire i-ma con una spire cilindriche di raggio



$$\bar{R}_i = \frac{R_{i+1} + R_i}{2}$$

Dunque la costante elastica associate all'ime spira per la 7.49 vale

$$K_i = \frac{z^4}{4\bar{R}_i^3 \left(\frac{2 \sin^2 \alpha}{E} + \frac{\cos^2 \alpha}{G} \right)}$$

Considerando che le n spire sono in serie abbiamo che la costante elastica complessiva è data da

$$\frac{1}{K} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{K_i} = \sum_{i=1}^m \frac{4\bar{R}_i^3 \left(\frac{2 \sin^2 \alpha}{E} + \frac{\cos^2 \alpha}{G} \right)}{z^4} = \frac{4 \left(\frac{2 \sin^2 \alpha}{E} + \frac{\cos^2 \alpha}{G} \right)}{z^4} \sum_{i=1}^m \bar{R}_i^3$$

Ma essendo pari

$$\begin{cases} R_i = R_m + (i-1) \frac{R_M - R_m}{m} \\ R_{i+1} = R_m + i \frac{R_M - R_m}{m} \end{cases} \Rightarrow$$

$$R_{i+1} + R_i = R_m + i \frac{R_M - R_m}{m} + R_m + (i-1) \frac{R_M - R_m}{m} =$$

$$= 2R_m + (2i-1) \frac{R_M - R_m}{m} \Rightarrow$$

$$\bar{R}_i = R_m + (2i-1) \frac{R_M - R_m}{2m}$$

Quindi si ha che

$$\left(\frac{1}{K_c} = \frac{4}{r^4} \left(\frac{2 \sin^2 \alpha}{E} + \frac{\cos^2 \alpha}{G} \right) \sum_1^m \left(R_m + (2i-1) \frac{R_M - R_m}{2m} \right)^3 \right)$$

$$\sum_1^m \left(R_m^3 + 3 R_m^2 (2i-1) \lambda + 3 R_m (2i-1)^2 \lambda^2 + (2i-1)^3 \lambda^3 \right) =$$

$$= m R_m^3 + 3 R_m^2 \lambda \sum_1^m (2i-1) + 3 R_m \lambda^2 \sum_1^m (2i-1)^2 + \lambda^3 \sum_1^m (2i-1)^3 *$$

$$\sum_1^m (2i-1) = 2 \sum_1^m i - m = 2 \frac{1+m}{2} m - m = m + m^2 - m = m^2$$

$$\sum_1^m (2i-1)^2 = \sum_1^{2m-1} k^2 = \frac{(2m-1) \cdot 2m \cdot (4m-1)}{6} = \frac{(2m-1)(4m-1)m}{3}$$

$$\sum_1^m (2i-1)^3 = \sum_1^{2m-1} k^3 = \frac{(2m-1)^2 \cdot 4m^2}{4} = (2m-1)^2 m^2$$

$$\begin{aligned}
* &= m R_m^3 + 3 R_m^2 \lambda m^2 + 3 R_m \lambda^2 \frac{(2m-1)(4m-1)m}{3} + \lambda^3 (2m-1)^2 m^2 = \\
&= m R_m^3 + 3 R_m^2 \frac{R_M - R_m}{2\lambda} m^2 + 3 R_m \frac{(R_M - R_m)^2}{4m^2} \frac{(2m-1)(4m-1)m}{3} + \\
&+ \frac{(R_M - R_m)^3 (2m-1)^2 m^2}{8m^2} = m R_m^3 + 3m R_m^2 \frac{R_M - R_m}{2} + \\
&+ \frac{R_m (R_M - R_m)^2 (2m-1)(4m-1)}{4m} + \frac{(R_M - R_m)^3 (2m-1)^2}{8m} = \\
&= (8m^2 R_m^3 + 12m^2 R_m^2 (R_M - R_m) + 2 R_m (R_M - R_m)^2 (2m-1)(4m-1) + \\
&+ (R_M - R_m)^3 (2m-1)^2) \frac{1}{8m} = \left\{ 4m^2 R_m^2 (2R_m + 3R_M - 3R_m) + \right. \\
&+ (2m-1)(R_M - R_m)^2 [2R_m(4m-1) + (R_M - R_m)(2m-1)] \left. \right\} \frac{1}{8m} = \\
&= \left[4m^2 R_m^2 (3R_M - R_m) + (2m-1)(R_M - R_m)^2 (8m R_m + 2R_m + \right. \\
&+ 2mR_M - R_M - 2mR_m + R_m) \left. \right] \frac{1}{8m} = \left[4m^2 R_m^2 (3R_M - R_m) + \right. \\
&+ (2m-1)(R_M - R_m)^2 (6m R_m - R_m + (2m-1)R_M) \left. \right] \frac{1}{8m} = \\
&= \left\{ 4m^2 R_m^2 (3R_M - R_m) + (2m-1)(R_M - R_m)^2 [(6m-1)R_m + (2m-1)R_M] \right\} \frac{1}{8m}
\end{aligned}$$

Ho ottenuto dunque la costante elastica

$$\frac{1}{K_e} = \frac{\lambda \left(\frac{2 \sin^2 \alpha}{E} + \frac{\cos^2 \alpha}{G} \right)}{\pi^2 R_m} \Rightarrow$$

$$8.1) \quad K_e = \frac{2mz^4}{\left(\frac{2\sin^2\alpha}{E} + \frac{\cos^2\alpha}{G}\right) \left\{ 4m^2R_m^2(3R_H - R_m) + (2m-1)(R_H - R_m)^2 [(6m-1)R_m + (2m-1)R_H] \right\}}$$

Per $R_m = R_H$ si ha in particolare

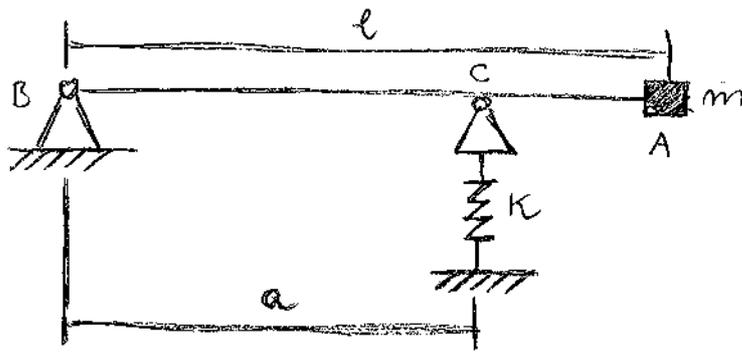
$$K_e = \frac{2mz^4}{\left(\frac{2\sin^2\alpha}{E} + \frac{\cos^2\alpha}{G}\right) 4m^2R^2 R} = \frac{z^4}{\left(\frac{2\sin^2\alpha}{E} + \frac{\cos^2\alpha}{G}\right) 4mR^3}$$

che restituisce la 7.49 a meno del contributo del tratto rettilineo che nelle 8.1 non è stato considerato. Assumendo poi trascurabile la piroletenza α della molla si ha le formule

$$8.2) \quad K_e = \frac{2mz^4 G}{4m^2R_m^2(3R_H - R_m) + (2m-1)(R_H - R_m)^2 [(6m-1)R_m + (2m-1)R_H]}$$

La pulsazione si ottiene con la formula $\omega_m = \sqrt{K_e/m}$.

8.4. Trave con molla. In questo caso l'elemento elastico trasformante è associato a un vincolo elastico. Per ricavare la costante elastica del sistema e quindi la sua pulsazione naturale ricavo lo spostamento verticale in A.



Assumo inizialmente che le trave sia rigida. Impongo l'equilibrio del momento rispetto al polo B,

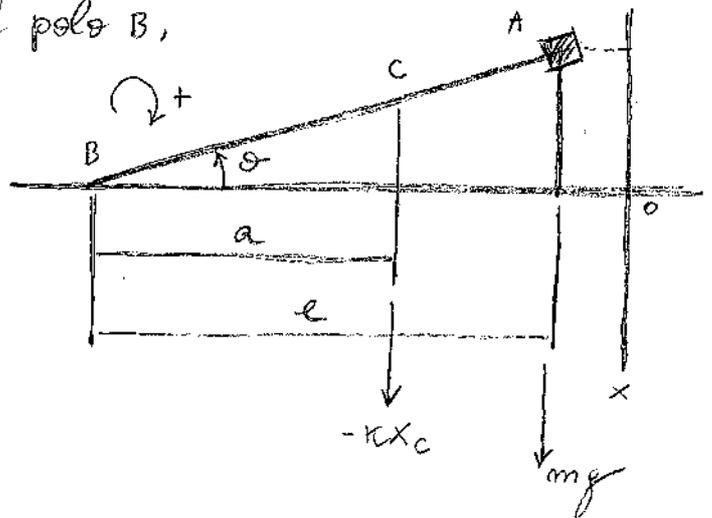
$$+(-Kx_c a) + mgl + (-m\ddot{x}l) = 0$$

↓

$$-Kax_c + mgl - m\ddot{x}l = 0$$

↓

$$-Ka a \theta + mgl - m\ddot{\theta}l^2 = 0$$

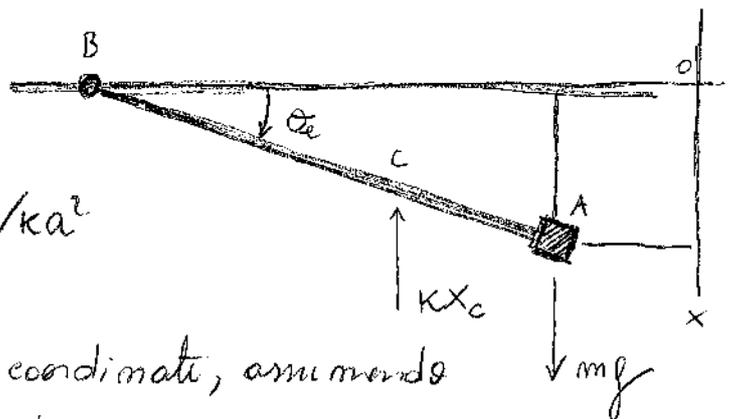


Si consideri ora la configurazione di equilibrio statico.

$$-mgl + Kx_c e = 0 \Rightarrow$$

$$mgl = Kx_c e \Rightarrow$$

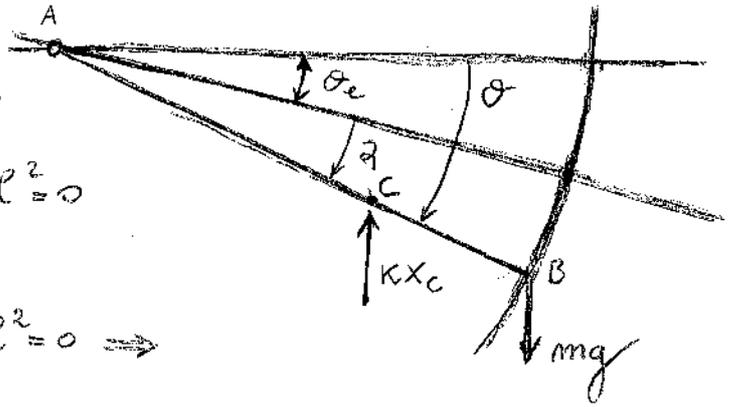
$$mgl = K\theta_e^2 a^2 \Rightarrow \theta_e = mgl / Ka^2$$



Effettuo ora un cambio di coordinate, assumendo θ_e come origine della coordinata angolare:

$$\theta_e + \alpha = \theta \Rightarrow \ddot{\alpha} = \ddot{\theta}$$

$$\begin{aligned}
 & -ka^2(\theta_e + z) + mgl - m\ddot{z}l^2 = 0 \\
 & -ka^2\left(\frac{mgl}{ka^2} + z\right) + mgl - m\ddot{z}l^2 = 0 \\
 & -mgl - ka^2z + mgl - m\ddot{z}l^2 = 0 \Rightarrow
 \end{aligned}$$



$$ka^2z + m\ddot{z}l^2 = 0 \Rightarrow \ddot{z} + \frac{ka^2}{ml^2}z = 0$$

Polinomio caratteristico: $\lambda^2 + \frac{ka^2}{ml^2} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i \frac{a}{l} \sqrt{\frac{k}{m}}$

Integrale generale: $A \cos \frac{a}{l} \sqrt{\frac{k}{m}} t + B \sin \frac{a}{l} \sqrt{\frac{k}{m}} t$.

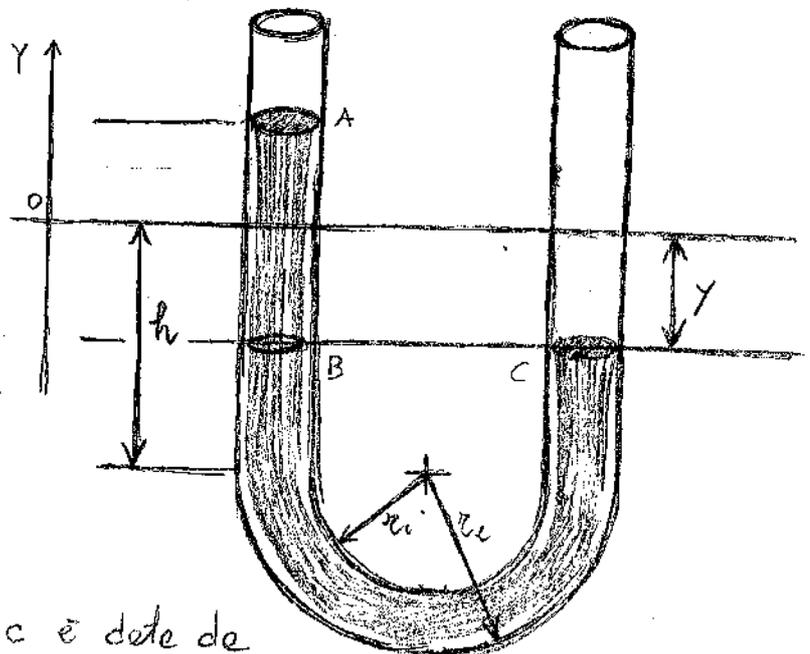
Periodo naturale: $\omega_m = \frac{a}{l} \sqrt{\frac{k}{m}}$

8.5. Tubo a U. La massa totale di fluido è data da

$$\begin{aligned}
 & 2h S \rho + \frac{r_i + r_e}{2} \pi S \rho = \\
 & = \left(2h + \frac{r_i + r_e}{2}\right) S \rho
 \end{aligned}$$

La massa nel tratto BC è data da

$$\left(2h + \frac{r_i + r_e}{2}\right) S \rho - 2|y| S \rho$$



Ricavo il baricentro delle
configurazioni di equilibrio.

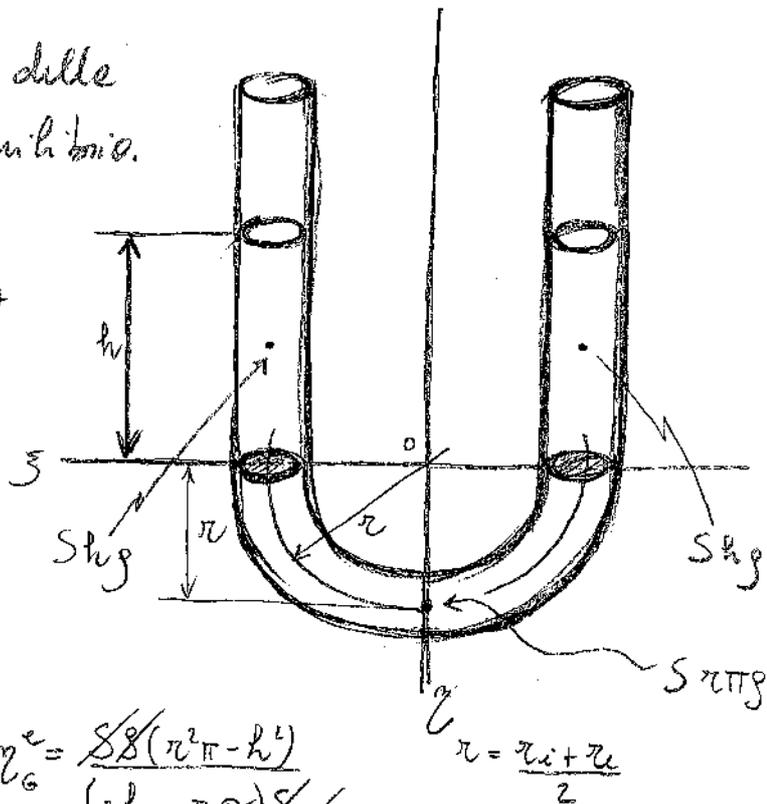
$$M \eta_G^e = -\frac{h}{2} S h \rho - \frac{h}{2} S h \rho +$$

$$+ S r \pi \rho r \Rightarrow$$

$$M \eta_G^e = -h^2 S \rho + r^2 S \pi \rho =$$

$$= S \rho (r^2 \pi - h^2) \Rightarrow \eta_G^e = \frac{S \rho (r^2 \pi - h^2)}{(2h + r \pi) S \rho}$$

$$\eta_G^e = \frac{r^2 \pi - h^2}{2h + r \pi}$$



Ricavo ora il baricentro della generica configurazione perturbata.

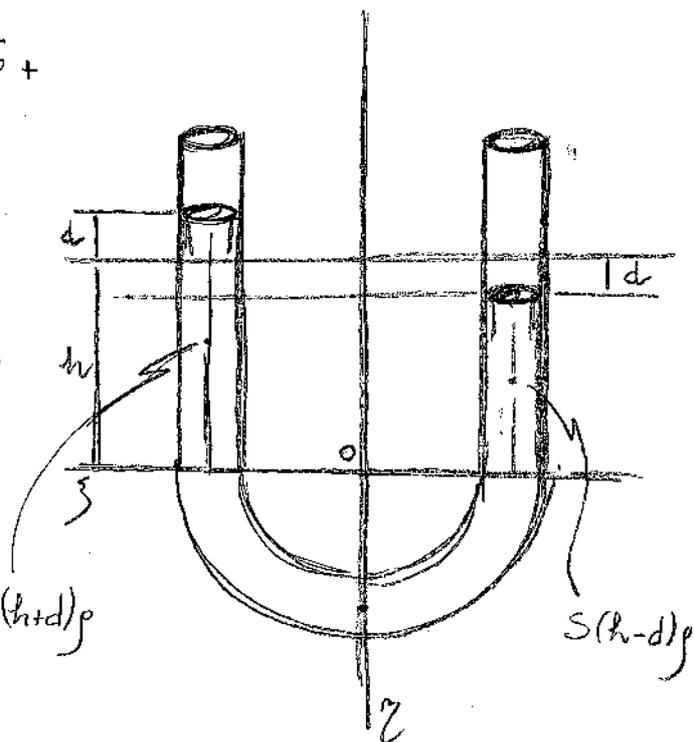
$$M \eta_G = -\frac{S(h+d)^2}{2} \rho - \frac{S(h-d)^2}{2} \rho +$$

$$+ (S r \pi \rho r =$$

$$= -\frac{S \rho}{2} \left(\frac{h^2 + d^2}{2} + 2hd + \frac{h^2 + d^2}{2} -$$

$$- 2hd - 2r^2 \pi \right) =$$

$$= -\frac{S \rho}{2} (2h^2 + 2d^2 - 2r^2 \pi) \Rightarrow \eta_G = \frac{S(h+d)\rho}{2}$$



$$\eta_G = \frac{\pi r^2 - h^2 - d^2}{(2h + 2\pi) S_g} \quad S_g = \frac{\pi r^2 - h^2 - d^2}{2h + 2\pi}$$

Assunte come nulla l'energia potenziale gravitazionale delle configurazioni di equilibrio, l'energia potenziale gravitazionale del sistema vale

$$U = -Mg(\eta_G - \eta_G^e) = -Mg \left(\frac{\pi r^2 - h^2 - d^2}{2h + 2\pi} - \frac{\pi r^2 - h^2}{2h + 2\pi} \right) =$$

$$= -\cancel{(2h + 2\pi)} S_g g \frac{-d^2}{\cancel{2h + 2\pi}} = d^2 S_g g$$

Ricavo ora l'energia cinetica del sistema:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{d}^2 = \frac{1}{2} (2h + 2\pi) S_g \dot{d}^2 = \frac{2h + 2\pi}{2} S_g \dot{d}^2$$

L'energia meccanica complessiva vale dunque

$$E = T + U = \left(S_g g d^2 + \frac{2h + 2\pi}{2} S_g \dot{d}^2 \right) = S_g \left(g d^2 + \frac{2h + 2\pi}{2} \dot{d}^2 \right)$$

Derivando e imponendo la condizione si ha

$$S_g \left(g d + \frac{2h + 2\pi}{2} 2 \dot{d} \ddot{d} \right) = 0 \iff$$

$$\boxed{2g d + (2h + 2\pi) \dot{d} = 0}$$

Polinomio caratteristico:

$$2g + (2h + 2\pi)\lambda^2 = 0 \implies \lambda = \pm i \sqrt{\frac{2g}{2h + 2\pi}}$$

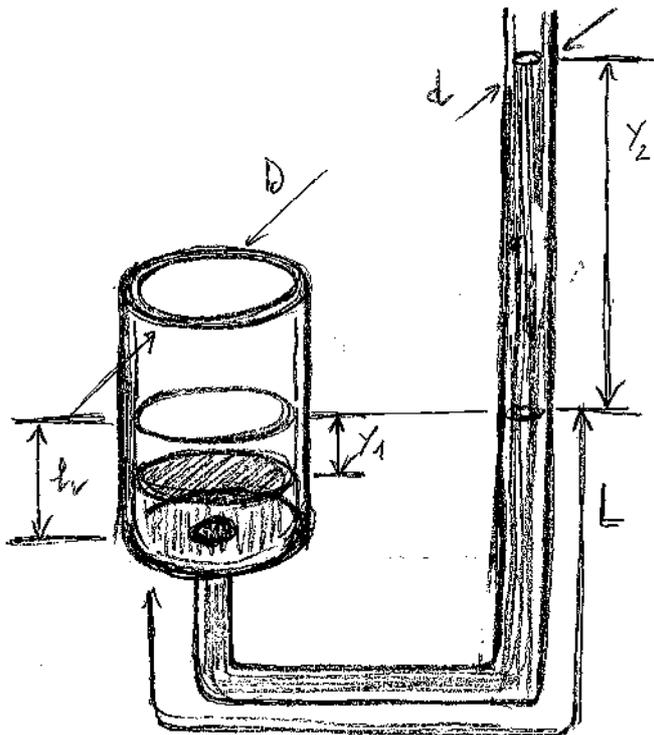
Integrale generale:

$$d = A \cos \sqrt{\frac{2g}{2h + 2\pi}} t + B \sin \sqrt{\frac{2g}{2h + 2\pi}} t$$

La pulsazione naturale si scrive dunque

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{2h + 2\pi}}$$

8.6. Serbatoio. Si può procedere come nel caso precedente, oppure semplicemente ricavando le costanti elastiche equivalenti.



$$\gamma_1 \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 g = \gamma_2 \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 g \implies$$

$$\gamma_1 \frac{D^2}{4} = \gamma_2 \frac{d^2}{4} \implies \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{d^2}{D^2}$$

$$P = \gamma \rho \gamma_1 \left(\frac{\pi D^2}{4}\right) y_1 + \gamma \rho \gamma_2 \left(\frac{\pi d^2}{4}\right) y_2 =$$

$$= \gamma \rho \frac{\pi}{4} (\gamma_1 D^2 + \gamma_2 d^2)$$

$$K = \frac{P}{\gamma_1} = \frac{\gamma \rho \frac{\pi}{4} (\gamma_1 D^2 + \gamma_2 d^2)}{\gamma_1}$$

Dunque la costante elastica equivalente si scrive

$$K = \rho \rho \frac{\pi}{4} \left(D^2 + \frac{Y_2 d^2}{Y_1} \right) = \rho \rho \frac{\pi}{4} \left(D^2 + \frac{D^2 d^2}{d^2} \right) = \rho \rho \frac{\pi}{2} D^2$$

La massa del sistema si scrive

$$\rho \frac{D^2}{4} \pi h + \rho \frac{d^2}{4} \pi L = \rho \frac{d^2}{4} \pi (L + h)$$

Dunque si conclude che

$$\omega_m = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{\rho \rho \frac{\pi}{2} D^2}{\rho \frac{d^2}{4} \pi (L+h)}} = \sqrt{\frac{2 D^2 \rho}{(L+h) d^2}}$$

6.7. Corrucci. Si assume puro rotolamento. Calcolo l'energia

potenziale elastica:

$$\varphi = \frac{R-r}{r} \theta$$

$$(R-r)\dot{\theta} = r\dot{\varphi}$$

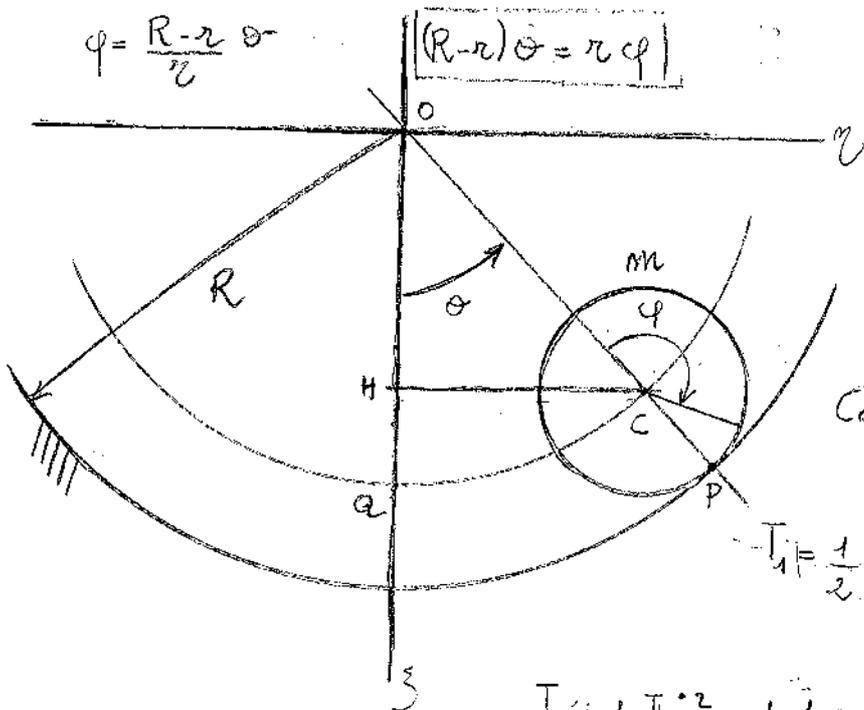
$$U = + mg(R-r) -$$

$$- mg(R-r) \cos \theta$$

Calcolo l'energia cinetica:

$$T_1 = \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{R-r}{r} \right)^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{4} m \frac{r^2}{r^2} (R-r)^2 \dot{\theta}^2$$



$$\circ \quad = \frac{1}{4} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{2}{4} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2$$

Energia totale:

$$E = U + T = -mg(R-r)\cos\theta - mg(R-r) + \frac{3}{4} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2 \Rightarrow$$

$$\circ \quad \frac{dE}{dt} = +mg(R-r)\dot{\theta}\sin\theta + \frac{3}{2} m (R-r)^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$+g(R-r)\sin\theta + \frac{3}{2} (R-r)^2 \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow 2g\sin\theta = -3(R-r)\ddot{\theta} \Rightarrow$$

$$\textcircled{8.3} \quad \ddot{\theta} + \frac{2g\sin\theta}{3(R-r)} = 0$$

Questa equazione è analoga alla 2.61, ricavata per il pendolo semplice, purché si ponga in essa $2g/3(R-r)$ al posto di g/l . Ma allora vale la 2.95 secondo la quale

$$\textcircled{8.4} \quad T \cong 4 \sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}} \left(\frac{\pi}{2} + 0,3926K^2 + 0,2208K^4 + 0,1533K^6 + 0,1174K^8 \right)$$

Volendo invece limitarsi alle piccole oscillazioni si ha

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R-r)} \theta = 0 \Rightarrow \theta = A \cos \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}} t + B \sin \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}} t$$

↓

$$\omega_m = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$$

Volemo adattare il CRITERIO DI RAYLEIGH abbiamo

$$mg(R-r)(1 - \cos\theta_{MAX}) = \frac{3}{4} m (R-r)^2 \dot{\theta}_{MAX}^2$$

$$\theta = A \cos(\omega_m t + \varphi) \Rightarrow \theta_{MAX} = A$$

$$\dot{\theta} = -A \omega_m \sin(\omega_m t + \varphi) \Rightarrow \dot{\theta}_{MAX} = A \omega_m \Rightarrow \dot{\theta}_{MAX}^2 = A^2 \omega_m^2$$

$$g(1 - \cos A) = \frac{3}{4} (R-r) A^2 \omega_m^2 \Rightarrow \omega_m = \sqrt{\frac{4}{3} g \frac{(1 - \cos A)}{R-r} \frac{1}{A^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_m = \frac{2}{A} \sqrt{g \frac{(1 - \cos A)}{3(R-r)}}$$

In caso di piccole oscillazioni si ha:

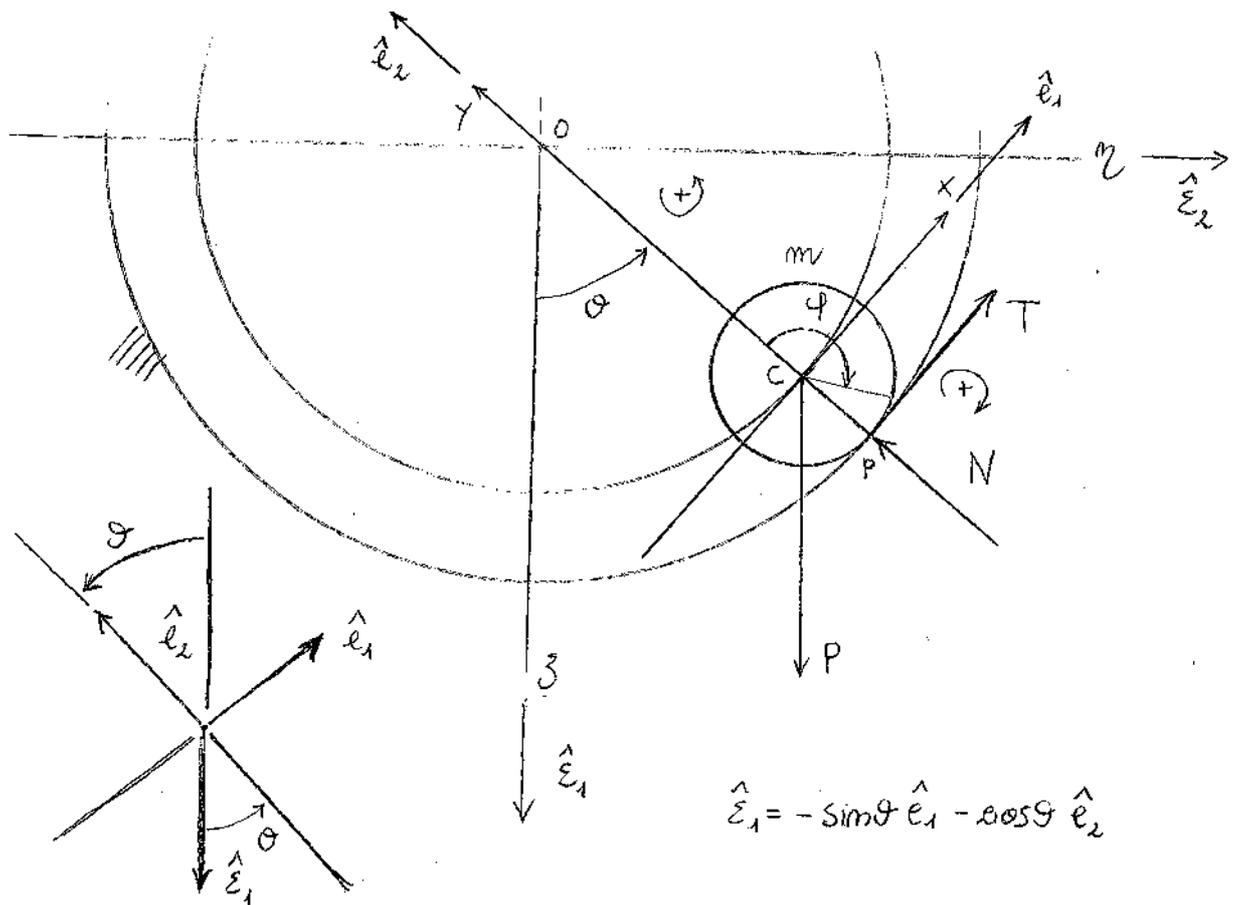
$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{1 - \cos A}{A^2} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\sin A}{2A} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\cos A}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\omega_m^2 = \frac{4}{A^2} g \frac{(1 - \cos A)}{3(R-r)} \rightarrow \frac{2g}{3(R-r)} \Rightarrow \omega_m = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}$$

Risolve scrivendo il sistema fondamentale della dinamica.
L'equilibrio delle forze poggia

$$-m \vec{a}_c + \vec{N} + \vec{T} + \vec{P} = 0 \Rightarrow -m (\ddot{\theta} R \hat{e}_1 + \dot{\theta}^2 R \hat{e}_2) + N \hat{e}_2 + T \hat{e}_1 + P \hat{e}_1 = 0$$

$$\Rightarrow -m (\ddot{\theta} R \hat{e}_1 + \dot{\theta}^2 R \hat{e}_2) + N \hat{e}_2 + T \hat{e}_1 - P \sin \theta \hat{e}_1 - P \cos \theta \hat{e}_2 = 0 \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \begin{cases} -m\ddot{\theta}R + T - P\sin\theta = 0 \\ -m\ddot{\theta}^2R + N - P\cos\theta = 0 \end{cases}$$

L'equilibrio dei momenti porta

$$-I\ddot{\phi} \hat{e}_3 + \vec{T} \times \vec{PC} = 0 \Rightarrow I\ddot{\phi} + Tr = 0 \Rightarrow T = -I\ddot{\phi}/r$$

Dunque abbiamo

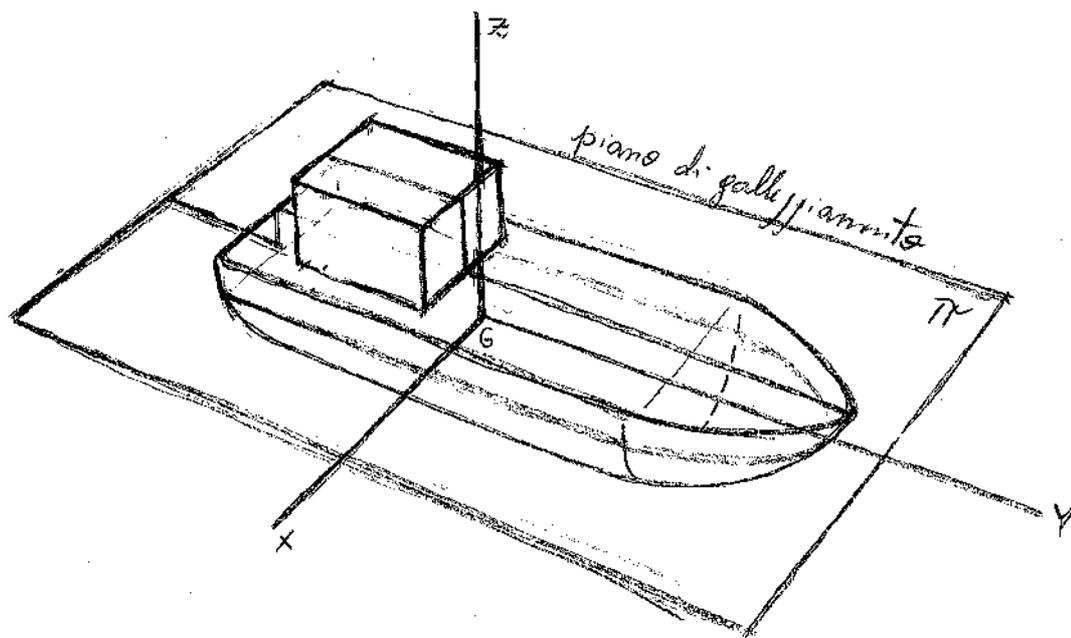
$$-m\ddot{\theta}R - \frac{I\ddot{\phi}}{r} - P\sin\theta = 0 \Rightarrow -m\ddot{\theta}R - m \frac{r_1}{2R} \frac{R-r}{R} \ddot{\theta} -$$

$$-P\sin\theta = 0 \Rightarrow +m\ddot{\theta} \left(R + \frac{R-r}{2} \right) + P\sin\theta = 0 \Rightarrow$$

$$m \ddot{\theta} \left(\frac{3R-z}{2} \right) + m g \sin \theta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} \frac{3R-z}{2} + g \sin \theta = 0}$$

Ritorniamo così la 8.3.

8.9. Rollio di una imbarcazione. Sia G il baricentro della

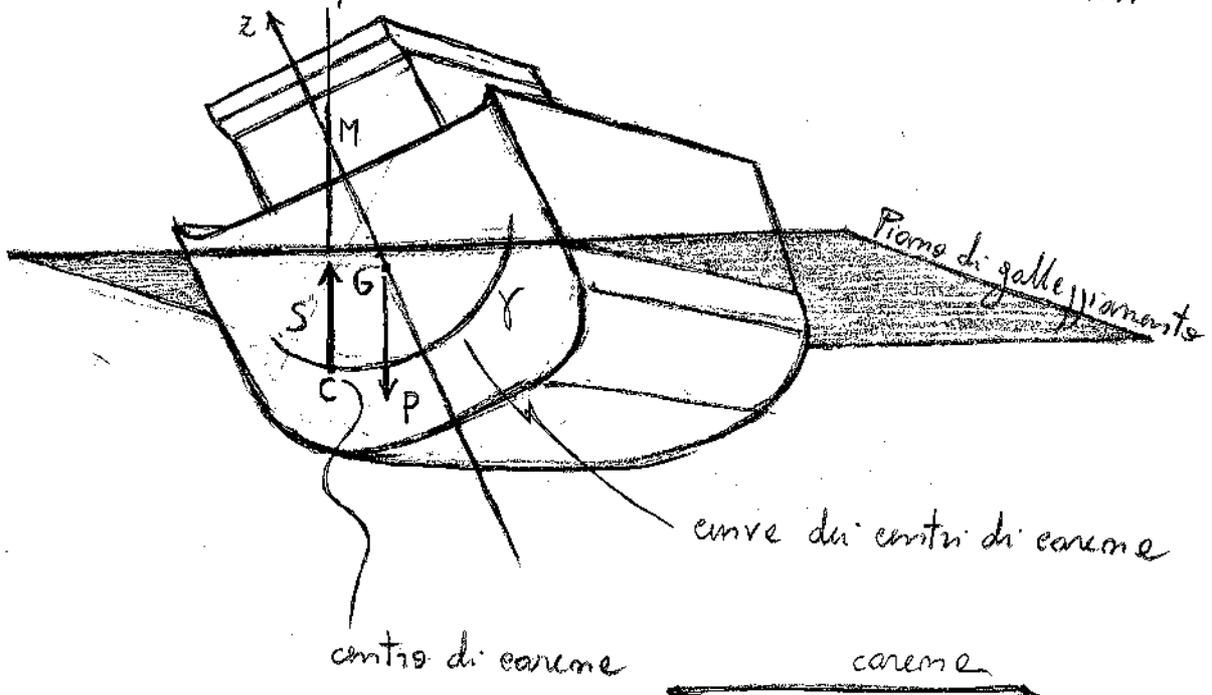


imbarcazione e il piano yz sia il piano di simmetria della nave. Sia inoltre π il piano di galleggiamento, e si assuma $y \parallel \pi$. Si definisce allora ROLLIO l'oscillazione dell'imbarcazione intorno all'asse y . Si ipotizza che

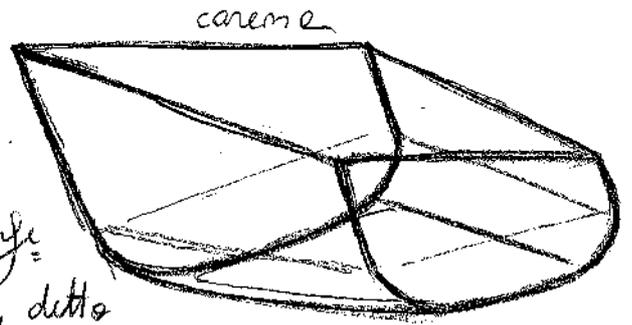
- 8.5) l'acqua sia calma;
- 8.6) la posizione neutrale sia quella in cui z è verticale;
- 8.7) le oscillazioni non superino i $20^\circ \div 30^\circ$.

Si definisce CARENA la figura solida individuata dalle

parte dello scafo che si trova sotto il piano di galleggiamento. Il centro di massa del volume d'acqua occupata dalle carene prende il nome di CENTRO DI CARENA.



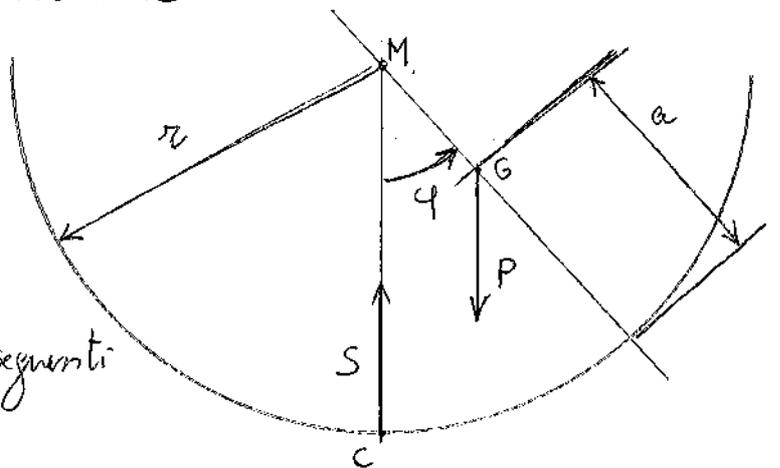
Nella ipotesi 8.7 la curva dei centri di carena γ è una circonferenza con centro nel punto M , detto METACENTRO. Resta individuata la COPPIA DI STABILITÀ



8.8) $P \cdot HG \sin \varphi = P(r-a) \sin \varphi$

Si considerano le definizioni seguenti

8.9) $P(r-a)$: COEFFICIENTE DI STABILITÀ INIZIALE



8.10 $r-a$: ALTEZZA METACENTRICA

8.11 $P r \sin \varphi$: COPPIA DI STABILITÀ DI FORMA

8.12 $P a \sin \varphi$: COPPIA DI STABILITÀ DI PESO

L'equilibrio alle rotazioni parte allora

$$8.13 \quad -P(r-a) \sin \varphi - I_y \ddot{\varphi} = 0$$

essendo I_y il momento di inerzia della nave rispetto y .
Nella ipotesi 8.7 si può porre $\varphi \approx \sin \varphi$ e dunque si ha

$$P(r-a) \varphi + I_y \ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{P(r-a)}{I_y} \varphi = 0 \Rightarrow$$

$$8.14 \quad \varphi = A \cos \sqrt{\frac{P(r-a)}{I_y}} t + B \sin \sqrt{\frac{P(r-a)}{I_y}} t$$

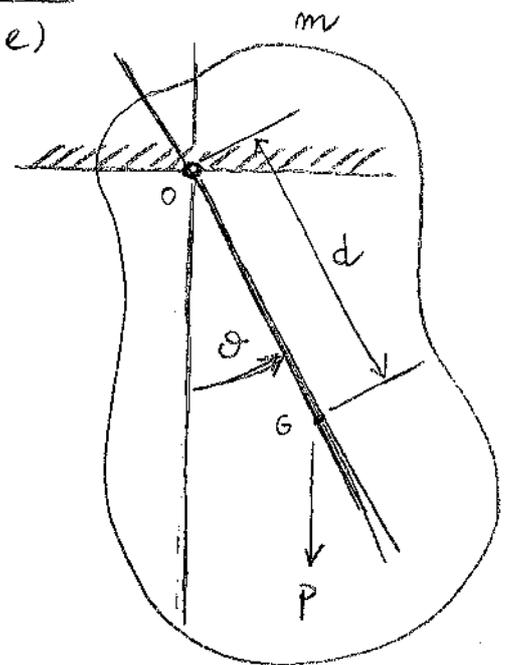
$$8.15 \quad \omega_n = \sqrt{\frac{P(r-a)}{I_y}} \iff T = 2\pi \sqrt{\frac{I_y}{P(r-a)}}$$

8.10. Pendolo composto. L'equilibrio dei momenti rispetto al polo O parte

$$-P d \sin \vartheta - I_c \ddot{\vartheta} = 0 \Rightarrow$$

$$8.16 \quad \ddot{\vartheta} + \frac{P d}{I_c} \sin \vartheta = 0$$

Questa equazione è formalmente analoga alle 2.61 ottenute per il



pendolo semplice dove si ponga Pd/I al posto di g/l . Dunque si hanno gli stessi sviluppi analitici; in particolare le 8.16 può essere abbassate di grado, ottenendo

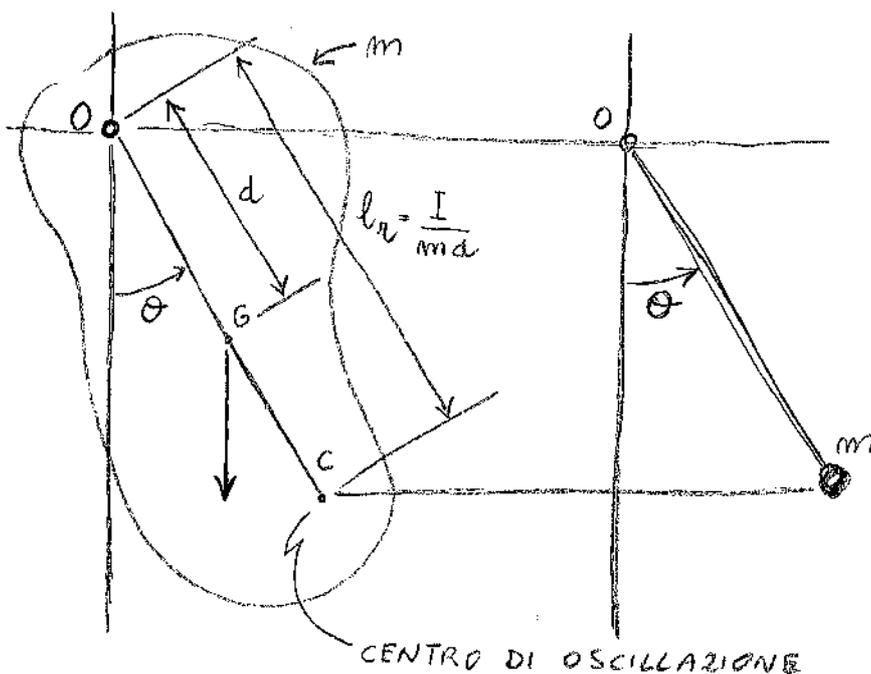
$$8.17) \quad \dot{\theta}^2 - 2 \frac{Pd}{I_z} \cos\theta = C$$

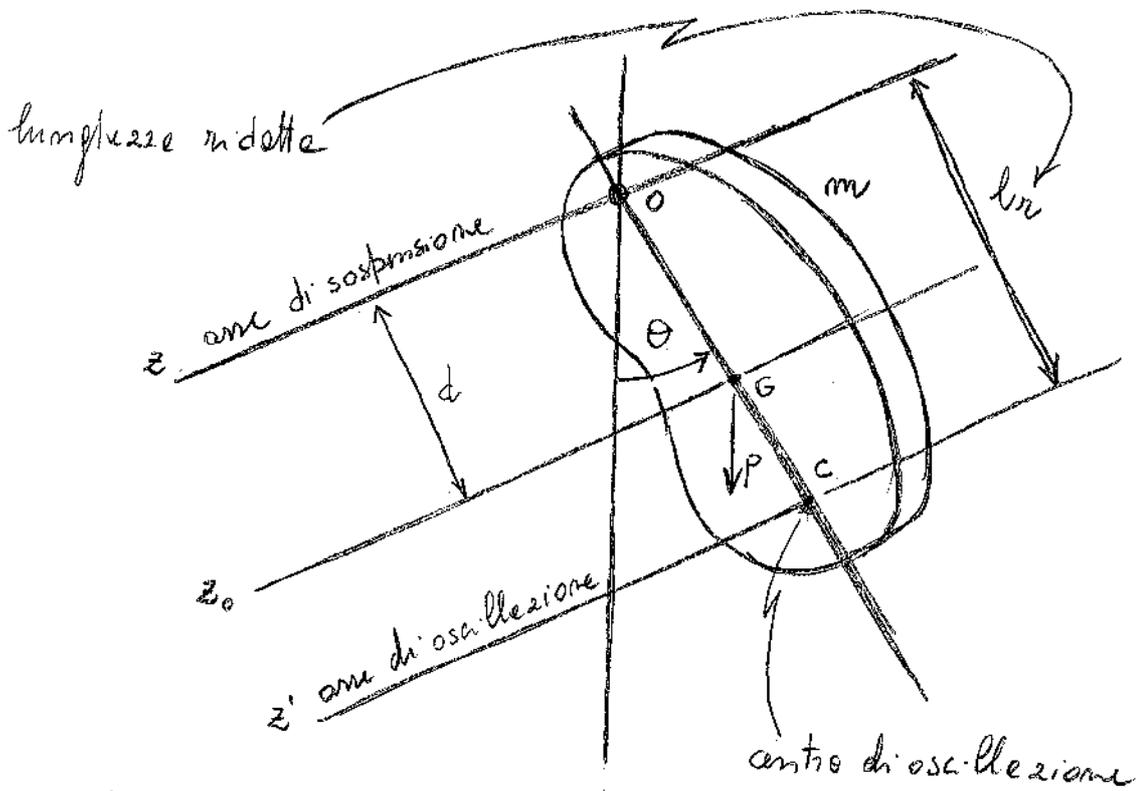
È assumendo velocità iniziale nulle si ottiene il periodo

$$8.18) \quad T \approx 4 \sqrt{\frac{I_z}{mgd}} \left(\frac{\pi}{2} + 0,3926K^2 + 0,2208K^4 + 0,1533K^6 + 0,1174K^8 \right)$$

Si può definire un pendolo semplice equivalente al pendolo composto aggiungendo definendone il braccio l_r come segue

$$8.19) \quad \frac{mgd}{I_z} = \frac{g}{l_r} \Rightarrow \frac{md}{I_z} = \frac{1}{l_r} \Rightarrow \boxed{l_r = \frac{I_z}{md}} \quad \text{LUNGHEZZA RIDOTTA}$$





Si consideri ora che per il teorema di Huygens si ha

$$I_z = I_{z_0} + md^2 \Rightarrow l_0 = \frac{I_z}{md} = \frac{I_{z_0}}{md} + d > d$$

Quindi $l_0 > d$. Si consideri ora di utilizzare il centro di oscillazione come incernieratura del pendolo. In tal caso si devono fare nelle 8.18 le sostituzioni seguenti:

$$\begin{cases} I_z \rightarrow I_{z'} = I_{z_0} + m(l_0 - d)^2 = I_{z_0} + m(I_{z_0}/md)^2 = I_{z_0} + \frac{I_{z_0}^2}{md^2} \\ d \rightarrow l_0 - d \end{cases}$$

Pertanto il radicando in 8.18 si scrive

$$\sqrt{\frac{I_{z'}}{mg(l_0 - d)}} = \sqrt{\frac{I_{z_0} + I_{z_0}^2/md^2}{mg(l_0 - d)}} = \sqrt{\frac{I_{z_0} + I_{z_0}^2/md^2}{mg I_{z_0}/md}}$$

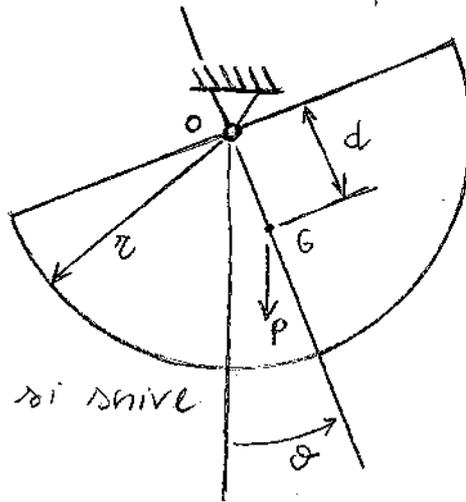
$$= \sqrt{\frac{1 + I_{z0}/md^2}{mg/md}} = \sqrt{\frac{md^2 + I_{z0}}{md^2 mg}} = \sqrt{\frac{I_{z0} + md^2}{mgd}} = \sqrt{\frac{I_z}{mgd}}$$

Quindi si conclude che il periodo delle oscillazioni non cambia se esse avvengono attorno all'asse di sospensione oppure attorno all'asse di oscillazione. Questa proprietà del pendolo composto pare sotto il nome di TEOREMA DI HUYGENS.

8.11. Pendolo a semicerchio. Si deve adattare la teoria del pendolo composto al seguente pendolo. In questo caso si ha

$$d = \frac{2r}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{4r}{3\pi}$$

$$I_z = \frac{r^2}{2} \frac{\pi}{8} \frac{m}{\pi r^2} r^2 = \frac{mr^2}{2}$$



Dunque l'equazione 8.16 si scrive

$$\ddot{\theta} + \frac{mg \frac{4r/3\pi}{2} \sin \theta}{\frac{mr^2}{2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g \frac{8/3\pi}{r} \sin \theta}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{8.20 \quad \ddot{\theta} + \frac{8}{3\pi} g \sin \theta = 0}$$

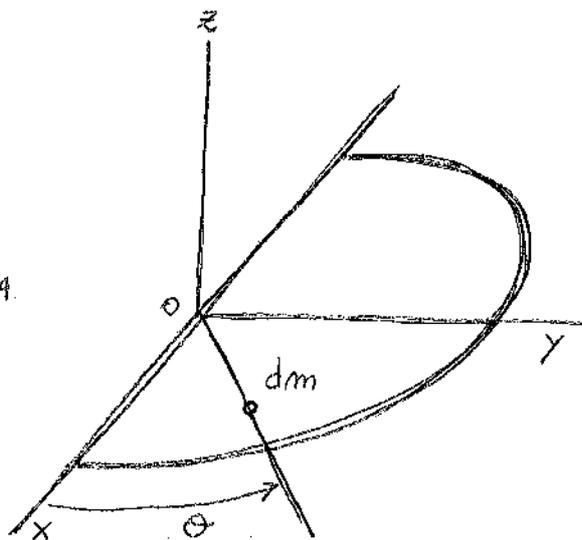
Verifico l'espressione di I_z calcolando direttamente I_z :

$$\bar{I}_z = \int_0^\pi \int_0^r \rho (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) \rho dr d\theta =$$

$$= \rho \int_0^\pi \int_0^r r^3 dr d\theta = \frac{\rho \pi r^4}{4} \Big|_0^r = \frac{\rho \pi r^4}{4}$$

$$m = \frac{\rho \pi r^2}{2}$$

$$\bar{I}_z = \frac{\rho \pi r^2}{2} \frac{r^2}{2} = \left(m \frac{r^2}{2} \right)$$



da 8.18 segue dunque in questo caso

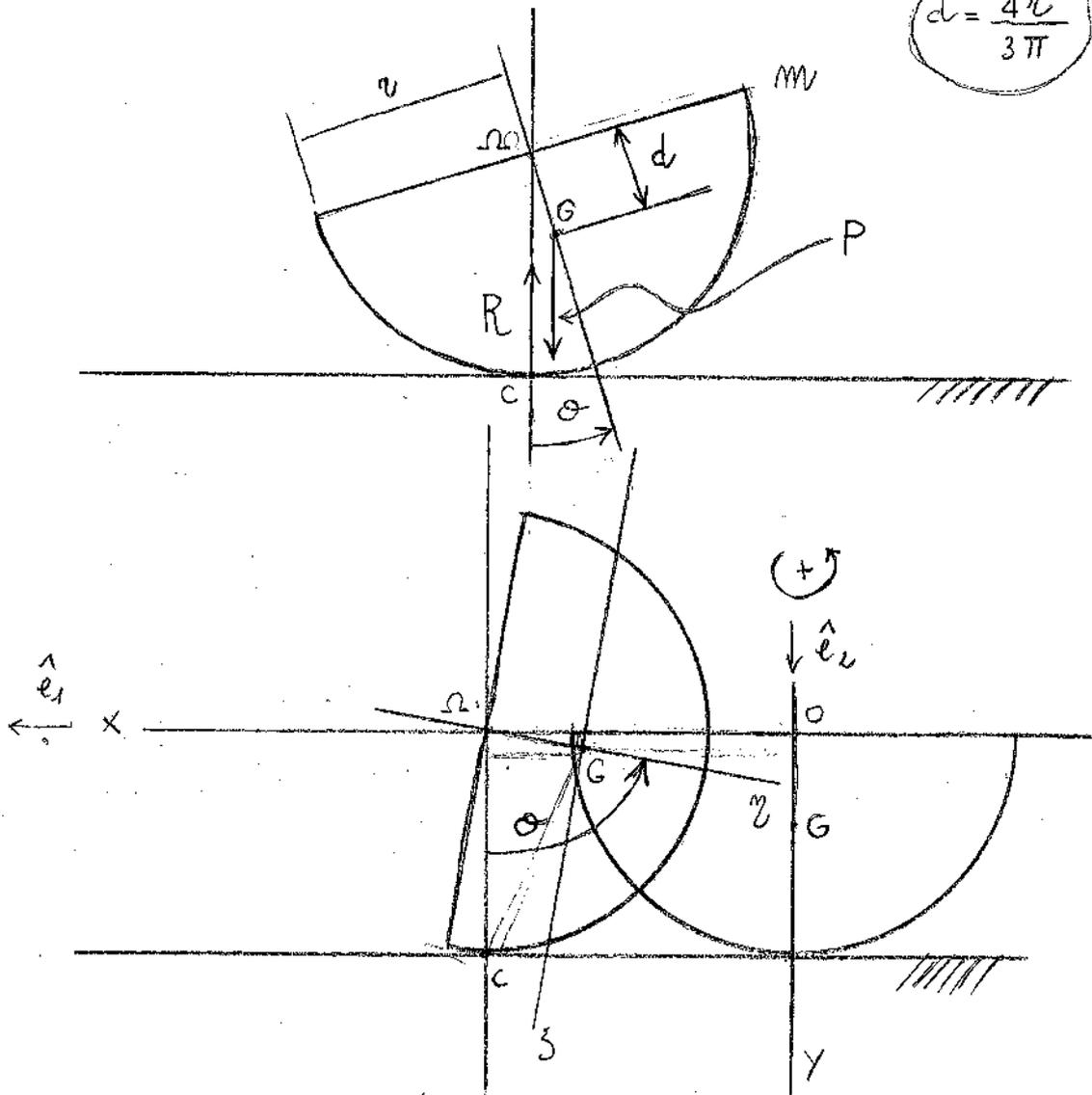
$$8.21 \quad \begin{cases} T \approx 2 \sqrt{\frac{3\pi r}{2g}} \left(\frac{\pi}{2} + 0,3926 K^2 + 0,2208 K^3 + 0,1533 K^4 + 0,1174 K^5 \right) \\ K = \sin \theta_0 / 2 \end{cases}$$

Per le piccole oscillazioni si conclude che

$$8.22 \quad T = \pi \sqrt{\frac{3\pi r}{2g}} \quad \omega_m = \frac{2\pi}{T} = 2 \sqrt{\frac{2g}{3\pi r}}$$

8.12. Domdolo semicircolare. Si assume un molo di puro rotolamento fra la piastra e il piano orizzontale. Ricavo le coordinate del baricentro.

$$d = \frac{4r}{3\pi}$$



$$\vec{OG} = \vec{OC} + \vec{CG} = r \hat{e}_1 + (-\sin\theta d \hat{e}_1 + \cos\theta d \hat{e}_2) = (r - d \sin\theta) \hat{e}_1 + d \cos\theta \hat{e}_2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_G = r - d \sin\theta \\ y_G = d \cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_G = \dot{\theta} r - d \dot{\theta} \cos\theta = \dot{\theta} (r - d \cos\theta) \\ \dot{y}_G = -d \dot{\theta} \sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_G = \ddot{\theta} r - d \ddot{\theta} \cos\theta + d \dot{\theta}^2 \sin\theta = \ddot{\theta} (r - d \cos\theta) + d \dot{\theta}^2 \sin\theta \\ \ddot{y}_G = -d (\ddot{\theta} \sin\theta + \dot{\theta}^2 \cos\theta) = -d \ddot{\theta} \sin\theta - d \dot{\theta}^2 \cos\theta \end{cases}$$

La sollecitazione di inerzia si scrive dunque

$$\vec{F}^{im} = -m\vec{a}_G = -m \left\{ \left[\ddot{\theta}(r-d\cos\theta) + d\dot{\theta}^2\sin\theta \right] \hat{e}_1 - d(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \hat{e}_2 \right\} =$$

$$\vec{M}^{im}_G = -\ddot{\theta} I_G \hat{k}$$

$$I_G = m \frac{L}{\pi r^2} \left(\frac{r^4 \pi}{2} - \frac{4r^4}{9\pi} \right) = \frac{2m}{\pi r^2} \left(\frac{\pi r^4}{4} - \frac{8r^4}{9\pi} \right) = \frac{2m r^2}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{8}{9\pi} \right)$$

L'equilibrio meccanico perge

$$\begin{cases} \vec{F}^e + \vec{F}^{im} = 0 \\ \vec{M}^e_G + \vec{M}^{im}_G = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \underline{mg \hat{e}_2 - R \hat{e}_2} + \underline{-m \left[\ddot{\theta}(r-d\cos\theta) + d\dot{\theta}^2\sin\theta \right] \hat{e}_1} + \\ + m d (\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \hat{e}_2 = 0 \\ -R d \sin\theta - \ddot{\theta} I_G = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(r-d\cos\theta) + d\dot{\theta}^2\sin\theta = 0 \\ mg - R + m d (\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = 0 \\ R d \sin\theta + \ddot{\theta} I_G = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$R = mg + md(\ddot{\theta} \sin\theta + \dot{\theta}^2 \cos\theta) = m[g + d(\ddot{\theta} \sin\theta + \dot{\theta}^2 \cos\theta)]$$

$$8.23 \quad \ddot{\theta} = -\frac{\ddot{\theta}(r - d \cos\theta)}{d \sin\theta} = \frac{\ddot{\theta}(d \cos\theta - r)}{d \sin\theta}$$

$$md \sin\theta \left[g + d \left(\ddot{\theta} \sin\theta + \frac{\ddot{\theta}(d \cos\theta - r)}{d \sin\theta} \cos\theta \right) \right] + \ddot{\theta} I_G = 0$$

$$md \sin\theta \left[g + d \ddot{\theta} \left(\frac{d \sin^2\theta + d \cos^2\theta - r \cos\theta}{d \sin\theta} \right) \right] + \ddot{\theta} I_G = 0 \Rightarrow$$

$$md \cancel{\sin\theta} \frac{g d \sin\theta + d \ddot{\theta} (d - r \cos\theta)}{\cancel{d \sin\theta}} + \ddot{\theta} I_G = 0 \Rightarrow$$

$$mg d \sin\theta + md \ddot{\theta} (d - r \cos\theta) + \ddot{\theta} I_G = 0 \Rightarrow$$

$$mdg \sin\theta + [md(d - r \cos\theta) + I_G] \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$8.24 \quad \ddot{\theta} + \frac{mg d \sin\theta}{md(d - r \cos\theta) + I_G} = 0$$

Verifichiamo la 8.23 con il criterio energetico:

$$V = mg(r - d \cos\theta) + c$$

$$V(\theta=0) = mg(r - d) + c = 0 \Rightarrow c = mg(d - r) \Rightarrow$$

$$V = mg(r - d \cos\theta) + mg(d - r) = mg\cancel{r} - mg d \cos\theta + mgd - mg\cancel{r} =$$

$$= mgd(1 - \cos\theta) \Rightarrow \frac{dV}{dt} = mgd \sin\theta \dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2$$

$$v_G^2 = \dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 = \dot{\theta}^2 (r - d \cos\theta)^2 + d^2 \dot{\theta}^2 \sin^2\theta = \dot{\theta}^2 (r^2 + d^2 \cos^2\theta - 2rd \cos\theta) + d^2 \dot{\theta}^2 \sin^2\theta = \dot{\theta}^2 (r^2 + d^2 - 2rd \cos\theta)$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 (r^2 + d^2 - 2rd \cos\theta) + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} m \dot{\theta} (r^2 + d^2 - 2rd \cos\theta) \ddot{\theta} + \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 (2rd \dot{\theta} \sin\theta) +$$

$$+ \frac{1}{2} I_G \dot{\theta} \ddot{\theta} = m \dot{\theta} \ddot{\theta} (r^2 + d^2 - 2rd \cos\theta) + mrd \dot{\theta}^3 \sin\theta +$$

$$+ I_G \dot{\theta} \ddot{\theta} \Rightarrow$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow \underline{m \dot{\theta} \ddot{\theta} (r^2 + d^2 - 2rd \cos\theta)} + mrd \dot{\theta}^3 \sin\theta +$$

$$+ I_G \dot{\theta} \ddot{\theta} + mgd \sin\theta \dot{\theta} = 0 \Rightarrow [m(r^2 + d^2 - 2rd \cos\theta) +$$

$$+ I_G] \ddot{\theta} + mrd \dot{\theta}^3 \sin\theta + mgd \sin\theta = 0$$

Sostituendo la seconda delle 8.23 si ricave

$$[m(r^2 + d^2 - 2rd \cos\theta) + I_G] \ddot{\theta} + \frac{mrd \dot{\theta}^3 \sin\theta}{\dot{\theta} \sin\theta} \ddot{\theta} (d \cos\theta - r) +$$

$$+ mgd \sin\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\left[m(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta) + I_G + m r (d \cos \theta - r) \right] \ddot{\theta} + mgd \sin \theta = 0 \Rightarrow$$

$$(\cancel{m r^2} + m d^2 - 2 m r d \cos \theta + I_G + m r d \cos \theta - \cancel{m r^2}) \ddot{\theta} + mgd \sin \theta = 0 \Rightarrow$$

$$(m d^2 - m r d \cos \theta + I_G) \ddot{\theta} + mgd \sin \theta = 0 \Rightarrow$$

$$8.25) \quad \ddot{\theta} + \frac{mgd \sin \theta}{m d^2 - m r d \cos \theta + I_G} = 0$$

Si ritrova le 8.24. Provò ad abbassare di grado le 8.25 come fatto per le 2.64:

$$\dot{\theta} = z(\theta) \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dz}{d\theta} z \Rightarrow \frac{dz}{d\theta} z + \frac{mgd \sin \theta}{m d^2 - m r d \cos \theta + I_G} = 0$$

$$\Rightarrow z dz = - \frac{mgd \sin \theta d\theta}{m d^2 - m r d \cos \theta + I_G} \Rightarrow$$

$$\frac{z^2}{2} = - mgd \int \frac{\sin \theta d\theta}{m d^2 - m r d \cos \theta + I_G} = + mgd \int \frac{d \cos \theta}{m d^2 - m r d \cos \theta + I_G} =$$

$$= - \frac{mgd}{m r d} \int \frac{d(m d^2 - m r d \cos \theta + I_G)}{m d^2 - m r d \cos \theta + I_G} = - \frac{g}{r} \ln(m d^2 - m r d \cos \theta + I_G)$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = - \frac{g}{r} \ln(m d^2 - m r d \cos \theta + I_G) + C \Rightarrow$$

$$\dot{\theta}^2 = - \frac{2g}{r} \ln(m d^2 - m r d \cos \theta + I_G) + C$$

Estraggo la radice, ^{e considero il segno meno} limitandomi così alla parte di moto in cui $\dot{\theta} < 0$. Si ha

$$\dot{\theta} = -\sqrt{c - \frac{2g}{r} \ln(m d^2 - m r d \cos \theta + I_G)}$$

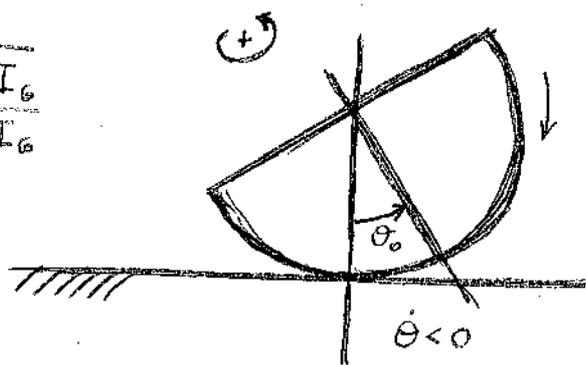
Supponiamo anche qui che il pendolo abbia velocità nulle nell'istante iniziale.

$$\dot{\theta}(0) = -\sqrt{c - \frac{2g}{r} \ln(m d^2 - m r d \cos \theta_0 + I_G)} = 0 \Rightarrow$$

$$c = \frac{2g}{r} \ln(m d^2 - m r d \cos \theta_0 + I_G) \Rightarrow$$

$$8.26 \quad \dot{\theta} = -\sqrt{\frac{2g}{r} \ln \frac{m d^2 - m r d \cos \theta_0 + I_G}{m d^2 - m r d \cos \theta + I_G}}$$

Provo ad integrare:



$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{2g}{r} \ln \frac{m d^2 - m r d \cos \theta_0 + I_G}{m d^2 - m r d \cos \theta + I_G}} \Rightarrow$$

$$8.27 \quad \frac{-\sqrt{r/2g} \, d\theta}{\sqrt{\ln \frac{m d^2 - m r d \cos \theta_0 + I_G}{m d^2 - m r d \cos \theta + I_G}}} = dt$$

Provo una sostituzione

$$s = \ln(md^2 - mrd \cos \theta + I_G) \Rightarrow ds = \frac{-mrd \sin \theta}{md^2 - mrd \cos \theta + I_G} d\theta \Rightarrow$$

↓

$$e^s = md^2 - mrd \cos \theta + I_G \Rightarrow e^s - md^2 - I_G = -mrd \cos \theta \Rightarrow$$

$$mrd \cos \theta = md^2 + I_G - e^s \Rightarrow \cos \theta = \frac{md^2 + I_G - e^s}{mrd} \Rightarrow$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{md^2 + I_G - e^s}{mrd}\right) \Rightarrow d\theta = - \frac{-e^s / mrd}{\sqrt{1 - \left(\frac{md^2 + I_G - e^s}{mrd}\right)^2}} =$$

$$= \frac{e^s}{mrd \sqrt{1 - \left(\frac{md^2 + I_G - e^s}{mrd}\right)^2}}$$

Sostituendo nella 8.27 si ha

$$8.28 \quad \frac{-\sqrt{r/2g} e^s ds}{mrd \sqrt{1 - \left(\frac{md^2 + I_G - e^s}{mrd}\right)^2}} \int \ln(md^2 - mrd \cos \theta + I_G) - s$$

$$mrd \sqrt{1 - \left(\frac{md^2 + I_G - e^s}{mrd}\right)^2} \int \ln(md^2 - mrd \cos \theta + I_G) - s$$

Mi pare arduo proseguire, dunque mi fermo qui. Naturalmente la 8.27 può essere integrata per via numerica.

Vediamo ora cosa succede utilizzando l'approssimazione delle PICCOLE OSCILLAZIONI:

$$\begin{cases} \sin \theta \approx \theta \\ \cos \theta \approx 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$8.29) \quad \ddot{\theta} + \frac{mgd\theta}{md^2 - mrd + I_0} = 0$$

Sostituendo poi l'espressione di I_0 e di d abbiamo

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd\theta}{md^2 - mrd + \frac{2mr^2}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{8}{3\pi} \right)} = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g \frac{4r}{3\pi} \theta}{\frac{16r^2}{9\pi^2} - \frac{r4r}{3\pi} + \frac{2r^2}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{8}{3\pi} \right)} = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g4\theta/3}{\frac{16r}{3\pi} - \frac{4r}{3} + \frac{2r}{\pi} \frac{9\pi^2 - 32}{36\pi}} = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} + \frac{4g\theta}{\frac{16r}{3\pi} - 4r + \frac{r(9\pi^2 - 32)}{6\pi}} = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} + \frac{4g\theta 6\pi}{32r - 24\pi r + r(9\pi^2 - 32)} = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} + \frac{24g\theta\pi}{r(32 - 24\pi + 9\pi^2 - 32)} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{24g\theta\pi}{r\pi(9\pi - 24)} = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} + \frac{24g\theta\pi}{32\pi(3\pi - 8)} = 0 \Rightarrow$$

$$8.30) \quad \ddot{\theta} + \frac{8g\pi\theta}{2\pi(3\pi-8)} = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{8g}{\pi(3\pi-8)}\theta = 0}$$

L'integrale generale di queste equazioni si scrive

$$8.31) \quad \theta = A \cos\left(\sqrt{\frac{8g}{\pi(3\pi-8)}} t + \varphi\right)$$

Dunque la pulsazione naturale e il periodo sono

$$8.32) \quad \omega_m = 2\sqrt{\frac{2g}{\pi(3\pi-8)}} \approx 2,3695\sqrt{\frac{g}{\pi}}$$

$$8.33) \quad T = \frac{2\pi}{2\sqrt{\frac{2g}{\pi(3\pi-8)}}} = \pi\sqrt{\frac{\pi(3\pi-8)}{2g}} \approx 2,6516\sqrt{\frac{\pi}{g}}$$

Prova ora a verificare quanto ottenuto, attraverso il CRITERIO DI RAYLEIGH 2.40. Assumendo un moto armonico del tipo $\theta = A \cos(\omega_m t + \varphi)$ e l'ipotesi delle piccole oscillazioni allora:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} = -A \sin(\omega_m t + \varphi) \omega_m = -A \omega_m \sin(\omega_m t + \varphi) \\ \ddot{\theta} = -A \omega_m^2 \cos(\omega_m t + \varphi) \\ \theta = A \cos(\omega_m t + \varphi) \\ \sin \theta \approx \theta \\ \cos \theta \approx 1 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
T &= \left(\frac{1}{2}\right) m \left(A^2 \omega_m^2 \sin^2(\omega_m t + \varphi) \right) (r^2 + d^2 - 2rd) + \\
&+ \left(\frac{1}{2}\right) I_G \left(A^2 \omega_m^2 \sin^2(\omega_m t + \varphi) \right) = \frac{1}{2} A^2 \omega_m^2 \sin^2(\omega_m t + \varphi) \left[m(r^2 + d^2 - 2rd) + I_G \right] \\
&= \frac{1}{2} A^2 \omega_m^2 \sin^2(\omega_m t + \varphi) \left[m(r-d)^2 + \right. \\
&+ \left. \frac{2m r^2}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{8}{9\pi} \right) \right] = \frac{1}{2} A^2 \omega_m^2 \sin^2(\omega_m t + \varphi) \left[m \left(r - \frac{4r}{3\pi} \right)^2 + \right. \\
&+ \left. \frac{2(m r^2)}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{8}{9\pi} \right) \right] = \frac{1}{2} A^2 \omega_m^2 \sin^2(\omega_m t + \varphi) m r^2 \left[\left(1 - \frac{4}{3\pi} \right)^2 + \right. \\
&+ \left. \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{8}{9\pi} \right) \right] = \frac{1}{2} A^2 \omega_m^2 \sin^2(\omega_m t + \varphi) m r^2 \left(1 + \frac{16}{9\pi^2} - \frac{8}{3\pi} + \right. \\
&+ \left. \frac{2\pi}{2\pi} - \frac{16}{9\pi^2} \right) = \frac{1}{2} A^2 m r^2 \omega_m^2 \sin^2(\omega_m t + \varphi) \left(1 - \frac{8}{3\pi} + \frac{1}{2} \right) = \\
&= \frac{1}{2} A^2 m r^2 \omega_m^2 \sin^2(\omega_m t + \varphi) \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \right) = \\
&= \left(\frac{3}{4} - \frac{8}{3\pi} \right) A^2 m r^2 \omega_m^2 \sin^2(\omega_m t + \varphi) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$8.34) \quad T_{\text{MAX}} = \left(\frac{3}{4} - \frac{8}{3\pi} \right) A^2 m r^2 \omega_m^2$$

$$\begin{cases} U = mgd(1 - \cos\theta) \\ \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$U = mgd \left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2} \right) = \left(mgd \right) \frac{\theta^2}{2} = \frac{mgd}{2} A^2 \cos^2(\omega_m t + \varphi) \Rightarrow$$

$$8.35) V_{MAX} = \frac{mgdA^2}{2}$$

Donque il criterio citato page

$$\left(\frac{3}{4} - \frac{4}{3\pi}\right) A^2 m \pi^2 \omega_m^2 = \frac{mgdA^2}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{3\pi}\right) \pi^2 \omega_m^2 = \frac{g \cancel{A^2} \cancel{A^2}}{3\pi} \frac{1}{\cancel{A^2}} \Rightarrow$$

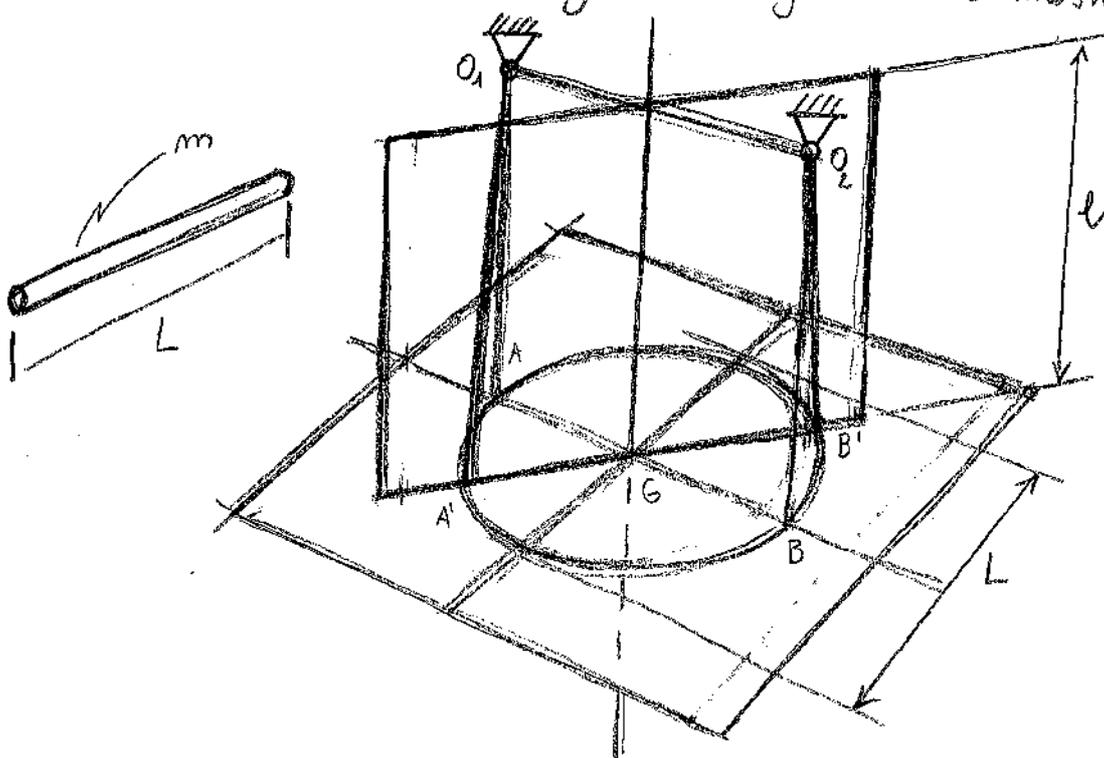
$$\frac{3\pi - 16}{4 \cancel{3\pi}} \pi^2 \omega_m^2 = \frac{2g}{\cancel{3\pi}} \Rightarrow \frac{3\pi - 16}{4} \pi \omega_m^2 = 2g \Rightarrow$$

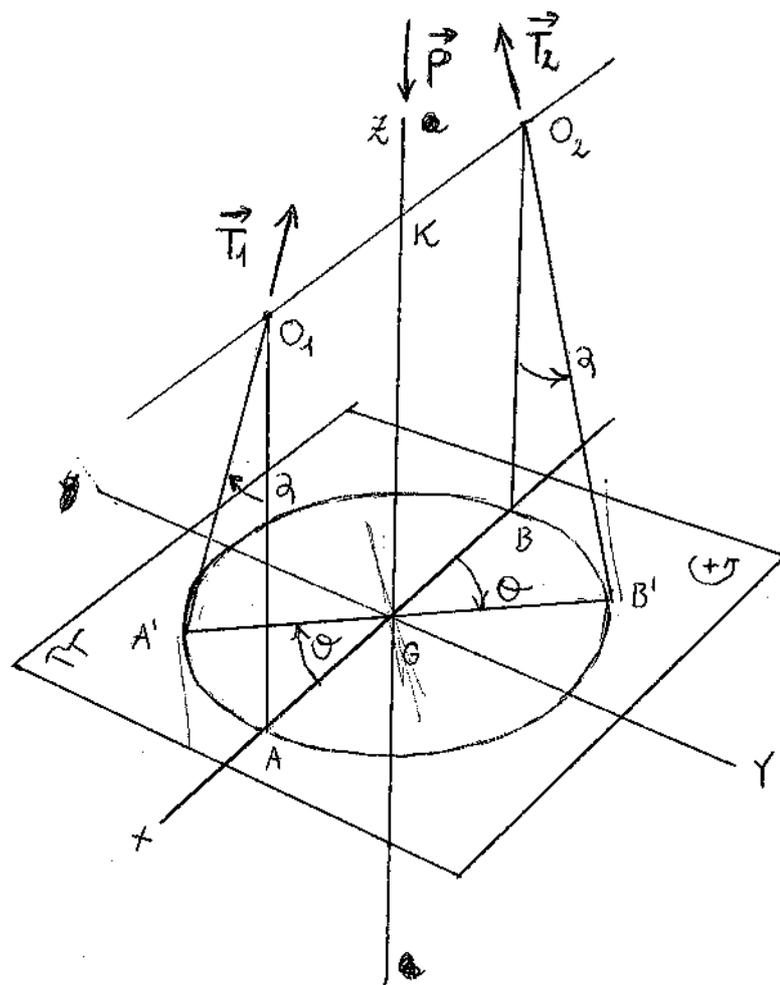
$$\omega_m^2 = \frac{8g}{(3\pi - 16)\pi} \Rightarrow$$

$$8.36) \omega_m = 2 \sqrt{\frac{2g}{(3\pi - 16)\pi}} \approx 0,807 \sqrt{\frac{g}{\pi}}$$

Si ottiene un risultato diverso dal 8.33, ma non so spiegare.

8.13. Barra con sospensione bifilare. I fili sono inestensibili.





Si assume che le oscillazioni siano piccole, tanto che si possa assumere - in prima approssimazione - che la barra resti nel piano xy . Sulle barre agiscono le forze reattive \vec{T}_1, \vec{T}_2 e le forze peso \vec{P} , oltre al momento iniziale $\vec{M}_{(G)}^{\text{im}} = -I_G (\ddot{\theta}) \hat{e}_3 = -I_G \ddot{\theta} \hat{e}_3$. Provo a scrivere il sistema della dinamica.

$$\vec{T}_1 = T_1 \frac{\vec{A'O}_1}{|A'O_1|}$$

$$\begin{aligned} \vec{A'O}_1 &= \vec{AG} + \vec{GO}_1 = -\vec{GA'} + \vec{GO}_1 = -\left(\frac{L}{2} \cos\theta \hat{e}_1 + \frac{L}{2} \sin\theta \hat{e}_2\right) + \\ &+ \left(\frac{L}{2} \hat{e}_1 + l \hat{e}_3\right) = \left(-\frac{L}{2} \cos\theta + \frac{L}{2}\right) \hat{e}_1 - \frac{L}{2} \sin\theta \hat{e}_2 + l \hat{e}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\vec{A}'O_1| &= \sqrt{\left[\frac{L}{2}(-\cos\theta + 1)\right]^2 + \frac{L^2}{4}\sin^2\theta + l^2} = \\
 &= \sqrt{\frac{L^2}{4}(\cos^2\theta + 1 - 2\cos\theta) + \frac{L^2}{4}\sin^2\theta + l^2} = \\
 &= \sqrt{\frac{L^2}{4}\sin^2\theta + \frac{L^2}{4}\cos^2\theta + \frac{L^2}{4} - 2\frac{L^2}{4}\cos\theta + l^2} = \\
 &= \sqrt{\frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{2}\cos\theta + l^2} = \sqrt{\frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{2}\cos\theta + l^2} \triangleq a
 \end{aligned}$$

$$\vec{T}_2 = \frac{T_2 \vec{B}'O_2}{|\vec{B}'O_2|}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{B}'O_2 &= \vec{B}'G + \vec{GO}_2 = -\vec{GB}' + \vec{GO}_2 = -\left(-\frac{L}{2}\cos\theta \hat{e}_1 - \frac{L}{2}\sin\theta \hat{e}_2\right) + \left(-\frac{L}{2}\hat{e}_1 + l\hat{e}_3\right) = \\
 &= \frac{L}{2}\cos\theta \hat{e}_1 - \frac{L}{2}\hat{e}_1 + \frac{L}{2}\sin\theta \hat{e}_2 + l\hat{e}_3 = \frac{L}{2}(\cos\theta - 1)\hat{e}_1 + \frac{L}{2}\sin\theta \hat{e}_2 + \\
 &+ l\hat{e}_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\vec{B}'O_2| &= \sqrt{\frac{L^2}{4}(\cos^2\theta + 1 - 2\cos\theta) + \frac{L^2}{4}\sin^2\theta + l^2} = \sqrt{\frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{4} - 2\frac{L^2}{4}\cos\theta + l^2} = \\
 &= \sqrt{\frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{2}\cos\theta + l^2} = a
 \end{aligned}$$

La prima equazione del sistema delle dinamiche si scrive come segue:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P} = 0 \Rightarrow \frac{T_1}{a} \left[\frac{L}{2}(-\cos\theta + 1)\hat{e}_1 - \frac{L}{2}\sin\theta \hat{e}_2 + l\hat{e}_3 \right] +$$

$$+ \frac{T_2}{a} \left[\frac{L}{2} (\cos\theta - 1) \hat{e}_1 + \frac{L}{2} \sin\theta \hat{e}_2 + l \hat{e}_3 \right] - P \hat{e}_3 = 0 \Rightarrow$$

$$T_1 \left[L(1 - \cos\theta) \hat{e}_1 - L \sin\theta \hat{e}_2 + 2l \hat{e}_3 \right] + T_2 \left[-L(1 - \cos\theta) \hat{e}_1 + \right. \\ \left. + L \sin\theta \hat{e}_2 + 2l \hat{e}_3 \right] - 2aP \hat{e}_3 = 0 \Rightarrow \underline{LT_1(1 - \cos\theta) \hat{e}_1} - \underline{LT_1 \sin\theta \hat{e}_2} + \\ + \underline{2lT_1 \hat{e}_3} - \underline{LT_2(1 - \cos\theta) \hat{e}_1} + \underline{LT_2 \sin\theta \hat{e}_2} + \underline{2lT_2 \hat{e}_3} - 2aP \hat{e}_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cancel{LT_1(1 - \cos\theta)} - \cancel{LT_2(1 - \cos\theta)} = 0 \\ \cancel{-LT_1 \sin\theta} + \cancel{LT_2 \sin\theta} = 0 \\ 2lT_1 + 2lT_2 - 2aP = 0 \end{cases} \Rightarrow T_1 = T_2 \triangleq T$$

$$2lT + 2lT - 2aP = 0 \Rightarrow 4lT = 2aP \Rightarrow T = \frac{aP}{2l}$$

$$8.37 \begin{cases} \vec{T}_1 = \frac{P}{2l} \left[\frac{L}{2} (1 - \cos\theta) \hat{e}_1 - \frac{L}{2} \sin\theta \hat{e}_2 + l \hat{e}_3 \right] \\ \vec{T}_2 = \frac{P}{2l} \left[-\frac{L}{2} (1 - \cos\theta) \hat{e}_1 + \frac{L}{2} \sin\theta \hat{e}_2 + l \hat{e}_3 \right] \end{cases}$$

Ricavo ora il momento della sollecitazione effettive, rispetto il polo G:

$$\vec{M}^e(G) = \vec{T}_1 \times \vec{A}'G + \vec{T}_2 \times \vec{B}'G$$

$$\vec{T}_1 \times \vec{A}'G = \frac{P}{2l} \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \frac{L}{2}(1 - \cos\theta) & -\frac{L}{2} \sin\theta & l \\ -\frac{L}{2} \cos\theta & -\frac{L}{2} \sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{P}{2l} \left\{ + \frac{lL}{2} \sin\theta \hat{e}_1 - \frac{lL}{2} \cos\theta \hat{e}_2 + \left[-\frac{L}{2}(1-\cos\theta) \frac{l}{2} \sin\theta - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{l}{2} \sin\theta \frac{l}{2} \cos\theta \right] \hat{e}_3 \right\} = \frac{P}{2l} \left\{ + \frac{lL}{2} \sin\theta \hat{e}_1 - \frac{lL}{2} \cos\theta \hat{e}_2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{L^2}{4} (-\sin\theta + \cancel{\sin\theta \cos\theta} - \cancel{\sin\theta \cos\theta}) \hat{e}_3 \right\} = \frac{P}{2l} \left(\frac{lL}{2} \sin\theta \hat{e}_1 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{lL}{2} \cos\theta \hat{e}_2 - \sin\theta \frac{L^2}{4} \hat{e}_3 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{T}_2 \times \vec{B}'G &= \frac{P}{2l} \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -\frac{L}{2}(1-\cos\theta) & \frac{l}{2} \sin\theta & l \\ \frac{l}{2} \cos\theta & \frac{l}{2} \sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \frac{P}{2l} \left\{ -\frac{lL}{2} \sin\theta \hat{e}_1 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{lL}{2} \cos\theta \hat{e}_2 + \left[-\frac{L^2}{4} \sin\theta (1-\cos\theta) - \frac{L^2}{4} \sin\theta \cos\theta \right] \hat{e}_3 \right\} = \\
 &= \frac{P}{2l} \left[-\frac{lL}{2} \sin\theta \hat{e}_1 + \frac{lL}{2} \cos\theta \hat{e}_2 + \frac{L^2}{4} (-\sin\theta + \cancel{\sin\theta \cos\theta} - \cancel{\sin\theta \cos\theta}) \hat{e}_3 \right] = \\
 &= \frac{P}{2l} \left(-\frac{lL}{2} \sin\theta \hat{e}_1 + \frac{lL}{2} \cos\theta \hat{e}_2 - \frac{L^2}{4} \sin\theta \hat{e}_3 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{M}^e(G) &= \frac{P}{2l} \left(\cancel{\frac{lL}{2} \sin\theta \hat{e}_1} - \cancel{\frac{lL}{2} \cos\theta \hat{e}_2} - \sin\theta \frac{L^2}{4} \hat{e}_3 - \cancel{\frac{lL}{2} \sin\theta \hat{e}_1} + \right. \\
 &\quad \left. + \cancel{\frac{lL}{2} \cos\theta \hat{e}_2} - \frac{L^2}{4} \sin\theta \hat{e}_3 \right) = \frac{P}{2l} \left(-\sin\theta \frac{L^2}{4} \hat{e}_3 \right) = -\sin\theta \frac{PL^2}{4l} \hat{e}_3 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$8.38 \quad \vec{M}^e(G) = -\sin\theta \frac{PL^2}{4l} \hat{e}_3$$

Dunque il bilancio dei momenti perge

$$\vec{M}^e(G) + \vec{M}^{im}(G) = 0 \Rightarrow -\sin\theta \frac{PL^2}{4l} - I_G \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$(8.39) \quad \sin\theta \frac{PL^2}{4l} + I_G \ddot{\theta} = 0$$

Nella ipotesi delle piccole oscillazioni si ha

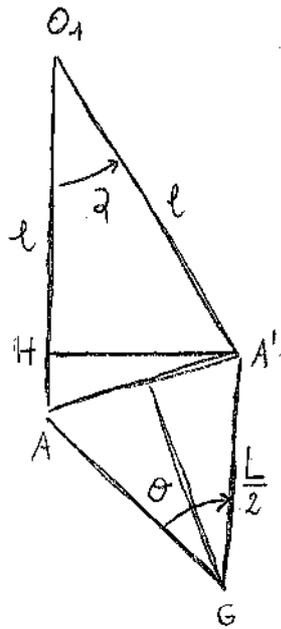
$$\begin{cases} \frac{PL^2}{4l} \theta + I_G \ddot{\theta} = 0 \\ I_G = \frac{L^3}{12} \frac{m}{L} = \frac{mL^2}{12} \end{cases} \Rightarrow \frac{PL^2}{4l} \theta + \frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{PL^2}{l} \theta + \frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} = 0}$$

$$(8.40) \quad \frac{mg}{l} \theta + \frac{mg}{3} \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{3g}{l} \theta = 0}$$

Dunque per pulsazione e periodo si ha quanto segue

$$(8.41) \quad \begin{cases} \omega_m = \sqrt{\frac{3g}{l}} \\ T = \frac{2\pi}{\omega_m} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{3g}} \end{cases}$$

Prova a risolvere con il metodo energetico. Ricavo la relazione fra α e θ e dunque l'innalzamento del piano di rotazione π .



$$\begin{cases} \overline{AA'}^2 = l^2 + l^2 - 2l^2 \cos \alpha = 2l^2(1 - \cos \alpha) \\ \overline{AA'}^2 = \frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{4} - 2\frac{L^2}{4} \cos \theta = \frac{L^2}{4}(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

⇓

$$l^2(1 - \cos \alpha) = \frac{L^2}{4}(1 - \cos \theta) \Rightarrow$$

$$4l^2(1 - \cos \alpha) = L^2(1 - \cos \theta) \Rightarrow$$

$$4l^2\left(x - x + \frac{\alpha^2}{2}\right) = L^2\left(x - x + \frac{\theta^2}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{4l^2\alpha^2}{2} = \frac{L^2\theta^2}{2} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{L^2\theta^2}{4l^2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{L\theta}{2l}}$$

$$\overline{AH} = l - l \cos \alpha = l(1 - \cos \alpha) \approx l\left(x - x + \frac{\alpha^2}{2}\right) = \frac{l\alpha^2}{2} = \frac{l}{2} \frac{L^2\theta^2}{4l^2} = \frac{L^2\theta^2}{8l}$$

Per l'energia potenziale si ha dunque

$$U(\theta) = mg \overline{AH}(\theta) = \left(mg \frac{L^2\theta^2}{8l} \right) \Rightarrow \frac{dU}{d\theta} = \frac{mgL^2}{4l} \theta \dot{\theta} = \frac{mgL^2\theta\dot{\theta}}{4l}$$

Per l'energia cinetica si ha

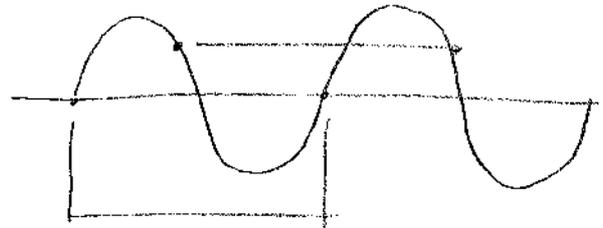
$$\mathcal{T}(\theta) = \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \frac{mL^2}{12} \dot{\theta}^2 = \frac{mL^2}{24} \dot{\theta}^2 \Rightarrow \frac{d\mathcal{T}}{d\theta} = \frac{mL^2}{24} 2\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta}}{12}$$

La conservazione della energia meccanica porge:

$$\frac{mgL^2\theta\dot{\theta}}{4l} + \frac{mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta}}{12} = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + 3g\frac{\theta}{l} = 0}$$

Volemmo infine applicare il CRITERIO DI RAYLEIGH 2.40, si assume un moto armonico del tipo

$$\begin{cases} \vartheta = A \cos(\omega_m t + \varphi) \\ \dot{\vartheta} = -A \omega_m \sin(\omega_m t + \varphi) \\ \ddot{\vartheta} = -A \omega_m^2 \cos(\omega_m t + \varphi) \end{cases}$$



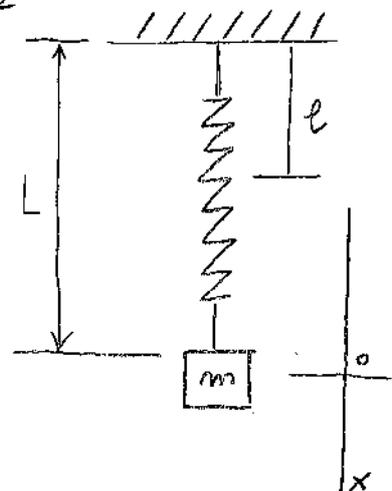
si ha

$$\begin{cases} U = \frac{mgL^2}{8l} A^2 \cos^2(\omega_m t + \varphi) \Rightarrow U_{MAX} = \frac{mgL^2 A^2}{8l} \\ T = \frac{mL^2}{24} A^2 \omega_m^2 \sin^2(\omega_m t + \varphi) \rightarrow T_{MAX} = \frac{mL^2 A^2 \omega_m^2}{24} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{mgL^2 A^2}{8l} = \frac{mL^2 A^2 \omega_m^2}{24} \Rightarrow \omega_m^2 = 3g/l \Rightarrow \boxed{\omega_m = \sqrt{3g/l}}$$

8.14. Molla pesante. La molla ha un peso complessivo m_e .

In corrispondenza delle sezioni a distanza l dal telaio si abbia uno spostamento s in corrispondenza di uno spostamento x delle masse m . Si ha



$$\frac{l+s}{l} = \frac{L+x}{L} \Rightarrow l+s = \frac{lL+xL}{L} \Rightarrow \cancel{l} + Ls = \cancel{l} + xL \Rightarrow$$

$$8.42) \quad s = xL/L$$

Considero ora un tratto dl delle molle, a distanza l dal telaio. Ne calcolo l'energia cinetica:

$$d\mathcal{T}_e = \frac{1}{2} \left(\frac{m_e dl}{L} \right) \left(\frac{\dot{x} l}{L} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m_e \dot{x}^2 l^2 dl}{L^3}$$

Dunque l'e.c. complessive delle molle è

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_e &= \int_0^L d\mathcal{T}_e = \frac{1}{2} \frac{m_e \dot{x}^2}{L^3} \int_0^L l^2 dl = \frac{1}{2} \frac{m_e \dot{x}^2 l^3}{3} \Big|_0^L = \frac{1}{2} \frac{m_e \dot{x}^2 L^3}{3} = \\ &= \frac{1}{6} m_e \dot{x}^2 \end{aligned}$$

L'energia cinetica complessive del sistema vale

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{6} m_e \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \dot{x}^2 \left(m + \frac{m_e}{3} \right)$$

Quella potenziale vale

$$V = \frac{1}{2} k x^2$$

Impongo la conservazione dell'energia meccanica:

$$E = T + U = \frac{1}{2} \dot{x}^2 \left(m + \frac{m_e}{3} \right) + \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \cancel{\dot{x}} \ddot{x} \left(m + \frac{m_e}{3} \right) + \frac{1}{2} k \cancel{x} \dot{x} = 0 \Rightarrow$$

$$8.43 \quad \ddot{x} \left(m + \frac{m_e}{3} \right) + kx = 0 \iff \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m + \frac{m_e}{3}} x = 0}$$

Si deduce dunque che

$$8.44 \quad \omega_m = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_e}{3}}}$$

Si può ottenere lo stesso risultato anche utilizzando il CRITERIO DI RAYLEIGH presumendo un moto di tipo armonico.

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega_m t + \varphi) \\ \dot{x} = -A \omega_m \sin(\omega_m t + \varphi) \\ \ddot{x} = -A \omega_m^2 \cos(\omega_m t + \varphi) \end{cases}$$

\Downarrow

$$\begin{cases} T_{\text{MAX}} = \frac{1}{2} A^2 \omega_m^2 \left(m + \frac{m_e}{3} \right) \\ U_{\text{MAX}} = \frac{1}{2} k A^2 \end{cases}$$

\Downarrow

$$\frac{1}{2} A^2 \omega_m^2 \left(m + \frac{m_e}{3} \right) = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow \omega_m^2 = \frac{k}{m + \frac{m_e}{3}} \Rightarrow \boxed{\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_e}{3}}}}$$

8.15. Pendolo composto a barre. La barra abbia lunghezza L e massa m . Utilizzando la 8.16 e considerando che in questo caso si ha

$$d = L/2$$

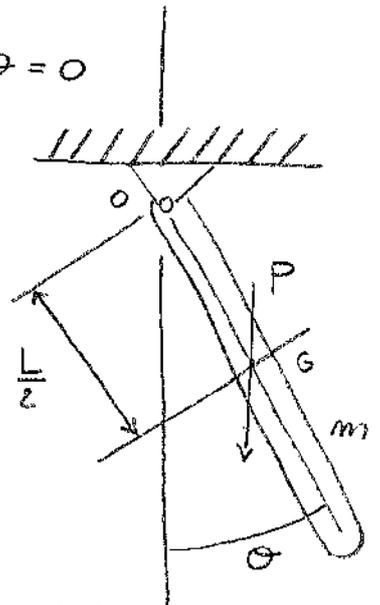
$$I_0 = \frac{L^2}{12} \frac{m}{L} + m \frac{L^2}{4} = \frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{4} = \frac{mL^2}{4} \left(\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{mL^2}{3}$$

allora si ha

$$\ddot{\theta} + \frac{mg \Delta/2}{mL^2} 3 \sin \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{3g}{2L} \sin \theta = 0$$

Per le piccole oscillazioni si ha

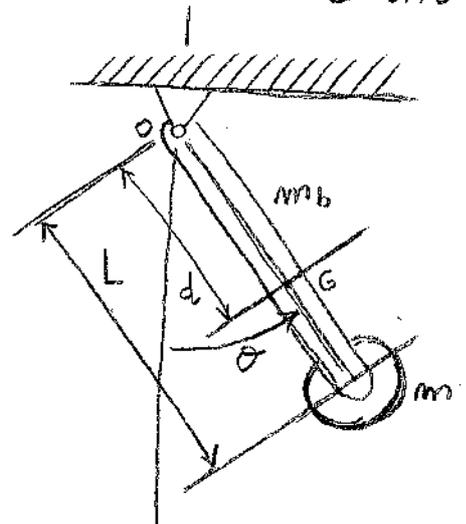
$$8.45) \quad \ddot{\theta} + \frac{3g}{2L} \theta = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_m = \sqrt{\frac{3g}{2L}}}$$



8.16. Pendolo composto a barre con massa. Per utilizzare la 8.16 occorre calcolare d e I_0 .

$$\begin{cases} d = \frac{m_b \frac{L}{2} + mL}{m + m_b} = \frac{m_b + m}{m_b + m} L \\ I_0 = \frac{m_b L^2}{3} + mL^2 = \left(\frac{m_b}{3} + m \right) L^2 \end{cases}$$

↓



$$\ddot{\theta} + \frac{(m+m_b)g \left(m + \frac{m_b}{2}\right) \sin \theta}{\frac{m+m_b}{3} \left(m + \frac{m_b}{3}\right) L^2} = 0 \implies$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\left(m + \frac{m_b}{2}\right) g \sin \theta}{\left(m + \frac{m_b}{3}\right) L} = 0 \implies$$

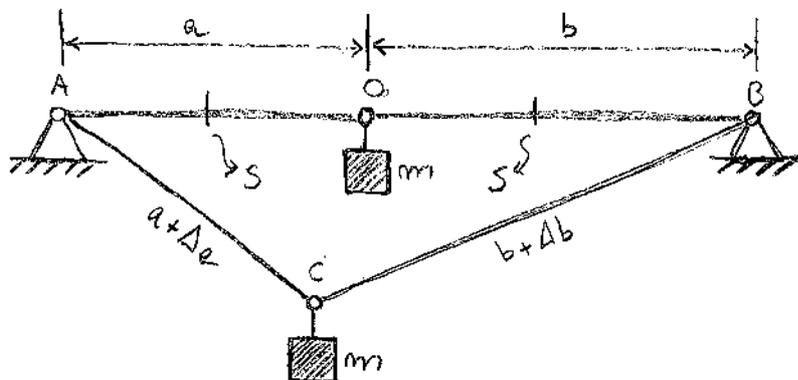
$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{3(2m + m_b)g \sin \theta}{2(3m + m_b)L} = 0}$$

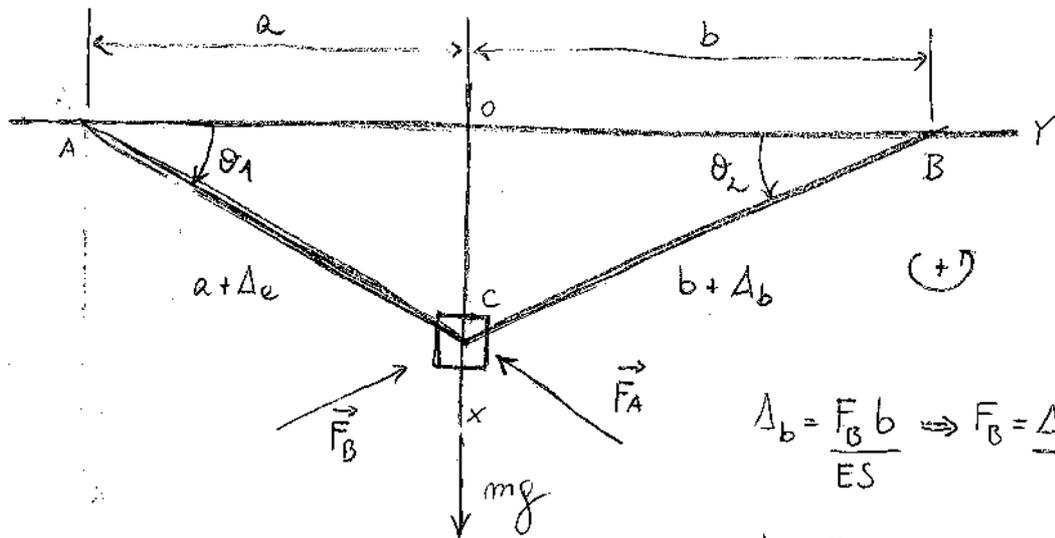
Per piccole oscillazioni si ha

$$8.46 \quad \ddot{\theta} + \frac{3(2m + m_b)g}{2(3m + m_b)L} \theta = 0$$

$$8.47 \quad \omega_m = \sqrt{\frac{3(2m + m_b)}{2(3m + m_b)}}$$

8.18. Massa fra due cerniere. Le due aste sono estensibili, con rigidità alla compressione ES , essendo E il modulo di Young e S la sezione trasversale.





$$\Delta_b = \frac{F_B b}{ES} \Rightarrow F_B = \frac{\Delta_b ES}{b}$$

$$\Delta_e = \frac{F_A a}{ES} \Rightarrow F_A = \frac{\Delta_e ES}{a}$$

Equilibrio meccanico della massa m :

$$\begin{cases} mg \hat{e}_1 + F_A \sin \theta_1 \hat{e}_1 - F_B \sin \theta_2 \hat{e}_1 - m \ddot{x} \hat{e}_1 = 0 \\ -F_A \cos \theta_1 \hat{e}_2 + F_B \cos \theta_2 \hat{e}_2 - m \ddot{y} \hat{e}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\textcircled{8.48} \begin{cases} mg + \frac{\Delta_e ES}{a} \sin \theta_1 - \frac{\Delta_b ES}{b} \sin \theta_2 - m \ddot{x} = 0 \\ -\frac{\Delta_e ES}{a} \cos \theta_1 + \frac{\Delta_b ES}{b} \cos \theta_2 - m \ddot{y} = 0 \end{cases}$$

Si consideri ora che dalle figure si deduce

$$\begin{cases} -(a + \Delta_e) \sin \theta_1 = x \\ (b + \Delta_b) \sin \theta_2 = x \end{cases} \Rightarrow -(a + \Delta_e) \sin \theta_1 = (b + \Delta_b) \sin \theta_2$$

D'altro parte $a + \Delta_e \approx a$, $b + \Delta_b \approx b$, $\sin \theta_1 \approx \theta_1$, $\sin \theta_2 \approx \theta_2$. Dunque

$$-a \theta_1 = b \theta_2 \Rightarrow \boxed{\theta_1 = -\frac{b \theta_2}{a}}$$

Sostituendo nelle prime delle 8.48 e ammettendo l'approssimazione delle piccole oscillazioni, si ha

$$mg + \frac{\Delta_a ES}{a} \theta_1 - \frac{\Delta_b ES}{b} \theta_2 - m\ddot{x} = 0 \Rightarrow$$

$$mg + \frac{\Delta_a ES}{a} \left(-\frac{b}{a} \theta_2\right) - \frac{\Delta_b ES}{b} \theta_2 - m\ddot{x} = 0 \Rightarrow$$

$$mg - \frac{\Delta_a ES b}{a^2} \theta_2 - \frac{\Delta_b ES}{b} \theta_2 - m\ddot{x} = 0 \Rightarrow$$

$$mg - \left(\frac{\Delta_a ES b}{a^2} + \frac{\Delta_b ES}{b}\right) \theta_2 - m\ddot{x} = 0 \Rightarrow$$

$$mg - ES \left(\frac{\Delta_a b}{a^2} + \frac{\Delta_b}{b}\right) \theta_2 - m\ddot{x} = 0$$

D'altra parte $x = (b + \Delta_b) \sin \theta_2 \approx b \theta_2$, dunque si ha

$$(8.49) \quad mg - ES \frac{(\Delta_a b^2 + \Delta_b a^2)}{a^2 b^2} x - m\ddot{x} = 0$$

Assunto nullo lo spostamento orizzontale della mano, allora la 2^a equazione delle 8.48 porta

$$-\frac{\Delta_a ES}{a} \cos \theta_1 + \frac{\Delta_b ES}{b} \cos \theta_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta_a}{a} \cos \theta_1 = \frac{\Delta_b}{b} \cos \theta_2}$$

Per piccole oscillazioni si ha

$$8.50) \frac{\Delta_e}{a} = \frac{\Delta_b}{b}$$

Dalle figure si deduce che

$$8.51) \begin{cases} (a + \Delta_e) \sin \theta_1 = -x \\ (a + \Delta_e) \cos \theta_1 = a \end{cases} \Rightarrow (a + \Delta_e)^2 = x^2 + a^2 \Rightarrow \cancel{a^2} + 2a\Delta_e + \Delta_e^2 =$$

$$= x^2 + \cancel{a^2} \Rightarrow \Delta_e^2 + 2a\Delta_e - x^2 = 0 \Rightarrow \Delta_e = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 + 4x^2}}{2} =$$

$$= -a \pm \sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow \Delta_e = \sqrt{a^2 + x^2} - a$$

Sostituendo nella 8.50 si ha

$$8.52) \begin{cases} \Delta_e = \sqrt{a^2 + x^2} - a \\ \Delta_b = (\sqrt{a^2 + x^2} - a)b/a \end{cases}$$

Sostituendo in 8.49 si ha

$$mg - ES \frac{(\sqrt{a^2 + x^2} - a)b^2 + (\sqrt{a^2 + x^2} - a)abx}{a^2b^2} - m\ddot{x} = 0 \Rightarrow$$

$$mg - ES (\sqrt{a^2 + x^2} - a) \frac{b^2 + abx}{a^2b^2} - m\ddot{x} = 0 \Rightarrow$$

$$8.53) \boxed{mg - ES (\sqrt{a^2 + x^2} - a) \frac{b + ax}{a^2b} - m\ddot{x} = 0}$$

Oppro una semplificazione nella 8.51:

$$\Delta_e + 2\Delta_e a - x^2 = 0 \Rightarrow \Delta_e = \frac{x^2}{2a}$$

Considerando la 8.50 si ha

$$8.54 \begin{cases} \Delta_e = x^2/2e \\ \Delta_b = \frac{x^2 b}{2a^2} \end{cases}$$

Sostituendo la 8.54 nella 8.49 si ha

$$mg - \frac{ES}{2^2 b^2} \left(\frac{x^2 b^2}{2e} + \frac{x^2 b}{2} \right) x - m\ddot{x} = 0 \Rightarrow$$

$$mg - \frac{ESb}{2^2 b^2} \left(\frac{x^2 b + x^2 a}{2a} \right) x - m\ddot{x} = 0 \Rightarrow$$

$$8.55 \quad \boxed{mg - \frac{ESl}{2a^3 b} x^3 - m\ddot{x} = 0}$$

Entomando di usare la 8.50 si consideri che

$$\begin{cases} (b + \Delta_b) \cos \theta_2 = b \\ (b + \Delta_b) \sin \theta_2 = x \end{cases} \Rightarrow (b + \Delta_b)^2 = x^2 + b^2 \Rightarrow \cancel{b^2} + 2b\Delta_b + \Delta_b^2 = x^2 + \cancel{b^2}$$

$$+ \cancel{b^2} \Rightarrow 2b\Delta_b = x^2 \Rightarrow \Delta_b = x^2/2b \Rightarrow$$

$$8.56 \begin{cases} \Delta_e = x^2/2e \\ \Delta_b = x^2/2b \end{cases}$$

○ Sostituendo le 8.56 nelle 8.49 si ha

$$mg - ES \frac{x^2 b^2}{2a} + \frac{x^2 a^2}{2b} - m\ddot{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\textcircled{8.57} \quad mg - ES \frac{b^3 + a^3}{2a^3 b^3} x^3 - m\ddot{x} = 0$$

trascurando il peso delle masse si ha

$$\textcircled{8.58} \quad m\ddot{x} + ES \frac{a^3 + b^3}{2a^3 b^3} x^3 = 0$$

$$\dot{x}(t) = z(x) \Rightarrow \ddot{x}(t) = \frac{dz}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{dz}{dx} z(x)$$

$$m \frac{dz}{dx} z(x) + ES \frac{a^3 + b^3}{2a^3 b^3} x^3 = 0 \Rightarrow$$

$$z dz = - \frac{ES}{m} \frac{a^3 + b^3}{2a^3 b^3} x^3 dx \Rightarrow$$

$$\int z dz = - \frac{ES}{m} \frac{a^3 + b^3}{2a^3 b^3} \int x^3 dx \Rightarrow \frac{z^2}{2} = - \frac{ES}{m} \frac{a^3 + b^3}{2a^3 b^3} \frac{x^4}{4} + C \Rightarrow$$

$$\textcircled{8.59} \quad \dot{x}^2 = - \frac{ES(a^3 + b^3)}{ma^3 b^3} x^4 + C$$

○ Impongo che all'istante iniziale le masse abbiano velocità nulle. Dunque si ha

$$0 = - \frac{ES(e^3 + b^3)}{4me^3b^3} h^4 + C \Rightarrow C = \frac{ES(e^3 + b^3)}{4me^3b^3} h^4 \Rightarrow$$

$$8.60) \dot{x}^2 = \frac{ES(e^3 + b^3)}{4me^3b^3} (h^4 - x^4)$$

Estraggo le radici col segno meno limitandomi dunque alla fase di moto in cui $\dot{x} < 0$:

$$8.61) \boxed{\dot{x} = - \sqrt{\frac{ES(e^3 + b^3)}{4ma^3b^3} (h^4 - x^4)}} \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = - \sqrt{\frac{ES(e^3 + b^3)}{4ma^3b^3} (h^4 - x^4)} \Rightarrow dt = - \frac{dx}{\sqrt{\frac{ES(e^3 + b^3)}{4ma^3b^3} (h^4 - x^4)}}$$

Pongo $\sqrt{4ma^3b^3/ES(e^3 + b^3)} = \beta$ e ottengo

$$8.62) dt = \frac{-\beta dx}{\sqrt{h^4 - x^4}}$$

Il periodo della oscillazione è dato da

$$\begin{aligned} T &= -4\beta \int_h^0 \frac{dx}{\sqrt{h^4 - x^4}} = -4\beta \int_h^0 \frac{dx}{h^2 \sqrt{1 - \frac{x^4}{h^4}}} = -\frac{4\beta}{h^2} \int_h^0 \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^4}{h^4}}} = \\ &= -\frac{4\beta}{h^2} \int_h^0 \frac{d(x/h)}{\sqrt{1 - \frac{x^4}{h^4}}} = \end{aligned}$$

Si consideri ora la sostituzione $z = \frac{x}{h}$ e si ha

$$T = \frac{4\beta}{h} \int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

Si consideri un'ulteriore sostituzione

$$z = \cos \theta \Rightarrow dz = -\sin \theta d\theta \Rightarrow \begin{cases} z=1 \Rightarrow \theta=0 \\ z=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} T &= -\frac{4\beta}{h} \int_0^{\pi/2} \frac{-\sin \theta d\theta}{\sqrt{1-\cos^4 \theta}} = \frac{4\beta}{h} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{(1-\cos^2 \theta)(1+\cos^2 \theta)}} = \\ &= \frac{4\beta}{h} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{\sin \theta \sqrt{1+\cos^2 \theta}} = \frac{4\beta}{h} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\cos^2 \theta}} = \\ &= \frac{4\beta}{h} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{2-\sin^2 \theta}} = \frac{4\beta}{h} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{2} \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 \theta}} = \frac{4\beta}{h\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 \theta}} \end{aligned}$$

Consultando l'appendice sugli integrali ellittici si ricava

$$T = \frac{4\beta}{h} 1,8486 = 4 \sqrt{\frac{4ma^3b^3}{ES(e^3+b^3)}} \frac{1}{h} \frac{1,8486}{\sqrt{2}} = 4 \sqrt{\frac{2ma^3b^3}{ES(e^3+b^3)}} \frac{1}{h} 1,8486 \Rightarrow$$

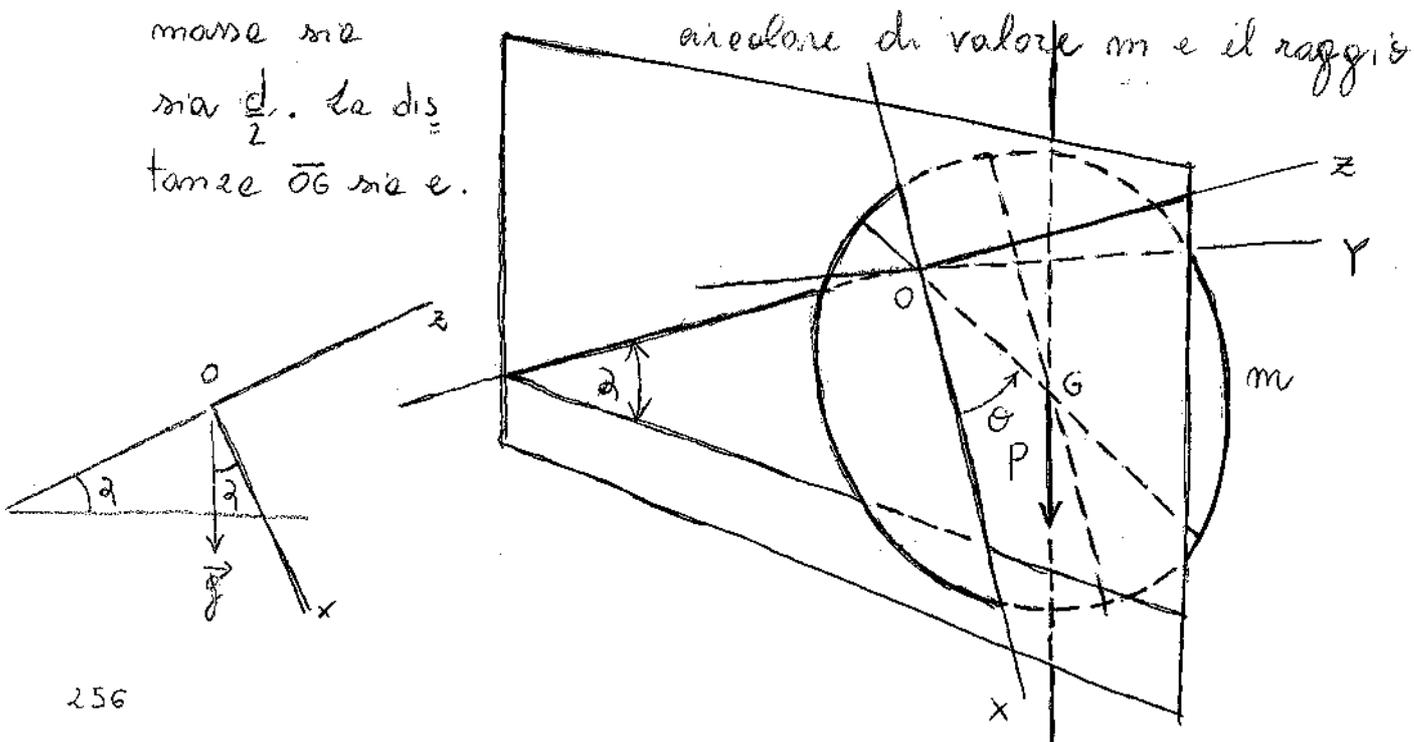
$$\textcircled{8.63} \begin{cases} T = 1,8486 \frac{4}{h} \sqrt{\frac{2ma^3b^3}{ES(a^3+b^3)}} \\ \omega_m = \frac{2\pi}{T} = \frac{8\pi h}{1,8486 \cdot 4} \sqrt{\frac{ES(e^3+b^3)}{2me^3b^3}} = 0,8497 h \sqrt{\frac{ES(e^3+b^3)}{2ma^3b^3}} \end{cases}$$

Consideriamo ora un esempio numerico per il sistema illustrato.
 Si considerino i dati seguenti:

$m = 1 \text{ Kg}$ $E = 206 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{10^{-6} \text{m}^2} = 206 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	$a = 0,2 \text{ m}$ $b = 0,8 \text{ m}$	$S = 78,54 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ $h = 0,01 \text{ m}$
---	--	---

$$\begin{aligned}
 W_m &= 0,8497 \cdot 0,01 \text{ m} \sqrt{\frac{206 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 78,54 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 (0,2^3 \text{ m}^3 + 0,8^3 \text{ m}^3)}{2 \text{ Kg} \cdot 0,2^3 \text{ m}^3 \cdot 0,8^3 \text{ m}^3}} = \\
 &= 0,008497 \text{ m} \sqrt{1027002,53906 \cdot 10^3 \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \frac{1}{\text{Kg} \cdot \text{m}^3}} = \\
 &= 0,008497 \cdot 32046,8803 \frac{1}{\text{s}} = \underline{\underline{272,3023}}
 \end{aligned}$$

8.18. Pendolo composto su asse inclinato. L'inclinazione di z (asse di sospensione) sia di α rispetto il piano orizzontale. Le masse sia m e il raggio di valore r e la distanza OG sia e .



Per il baricentro si calcola quanto segue

$$\begin{cases} X_G = e \cos \theta \\ Y_G = e \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{X}_G = -e \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{Y}_G = e \dot{\theta} \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{X}_G = -e(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \\ \ddot{Y}_G = e(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \end{cases}$$

Il momento della sollecitazione di inerzia rispetto O vale

$$\begin{aligned} \vec{M}_i^{im}(O) &= \vec{M}_i^{im}(G) + (-m \vec{a}_G) \times \vec{OG} = \vec{M}_i^{im}(G) + m \vec{a}_G \times \vec{OG} = -\ddot{\theta} \hat{e}_3 I_G + \\ &+ m \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \ddot{X}_G & \ddot{Y}_G & 0 \\ X_G & Y_G & 0 \end{vmatrix} = -\ddot{\theta} I_G \hat{e}_3 + m(\ddot{X}_G Y_G - X_G \ddot{Y}_G) \hat{e}_3 = \\ &= \left\{ -\ddot{\theta} I_G + m \left[-e(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) e \sin \theta - e(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) e \cos \theta \right] \right\} \hat{e}_3 \end{aligned}$$

Il momento delle sollecitazioni effettive rispetto O vale:

$$\begin{aligned} \vec{M}_i^e(O) &= m \vec{g} \times \vec{OG} = -m \vec{g} \times \vec{OG} = -m \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ g \cos \alpha & 0 & -g \sin \alpha \\ X_G & Y_G & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -m \left(g \sin \alpha Y_G \hat{e}_1 - g \sin \alpha X_G \hat{e}_2 + g \cos \alpha Y_G \hat{e}_3 \right) = \\ &= -m \left(g e \sin \theta \sin \alpha \hat{e}_1 - g e \cos \theta \sin \alpha \hat{e}_2 + g e \sin \theta \cos \alpha \hat{e}_3 \right) = \\ &= -m g e \left(\sin \theta \sin \alpha \hat{e}_1 - \cos \theta \sin \alpha \hat{e}_2 + \sin \theta \cos \alpha \hat{e}_3 \right) \end{aligned}$$

L'equilibrio dei momenti porge

$$\begin{cases} -mge \sin\theta \sin\alpha + M_x^r(o) = 0 \\ mge \cos\theta \sin\alpha + M_y^r(o) = 0 \\ -\ddot{\theta} I_G + m \left(-e^2 \ddot{\theta} \sin^2\theta - \cancel{e^2 \dot{\theta}^2 \sin\theta \cos\theta} + \cancel{e^2 \ddot{\theta} \cos^2\theta} + \cancel{e^2 \dot{\theta}^2 \sin\theta \cos\theta} \right) = 0 \end{cases}$$

- mge sinθ cosα

↓

$$8.64 \quad \begin{cases} M_x^r(o) = mge \sin\theta \sin\alpha \\ M_y^r(o) = -mge \cos\theta \sin\alpha \\ -\ddot{\theta} I_G - me^2 \ddot{\theta} - mge \sin\theta \cos\alpha = 0 \end{cases}$$

Ricavo anche la reazione in o :

$$\begin{cases} \vec{F}^e = m\vec{g} = m(g \cos\alpha \hat{e}_1 - g \sin\alpha \hat{e}_3) \\ \vec{F}^{im} = -m\vec{a}_G = -m \left[-e(\ddot{\theta} \sin\theta + \dot{\theta}^2 \cos\theta) \hat{e}_1 + e(\ddot{\theta} \cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta) \hat{e}_2 \right] \end{cases}$$

↓

$$\vec{F}^e + \vec{F}^{im} = 0 \Rightarrow m(g \cos\alpha \hat{e}_1 - g \sin\alpha \hat{e}_3) - m \left[-e(\ddot{\theta} \sin\theta + \dot{\theta}^2 \cos\theta) \hat{e}_1 + e(\ddot{\theta} \cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta) \hat{e}_2 \right] + R_x \hat{e}_1 + R_y \hat{e}_2 + R_z \hat{e}_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} mge \cos\alpha + me(\ddot{\theta} \sin\theta + \dot{\theta}^2 \cos\theta) + R_x = 0 \\ -e(\ddot{\theta} \cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta) + R_y = 0 \\ -mg \sin\alpha + R_z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$8.65 \quad \begin{cases} R_x = -mge \cos\alpha - me(\ddot{\theta} \sin\theta + \dot{\theta}^2 \cos\theta) \\ R_y = e(\ddot{\theta} \cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta) \\ R_z = mg \sin\alpha \end{cases}$$

La soluzione del moto è fornita dalle 3° delle 8.64, la quale si scrive

$$\ddot{\theta} I_G + m e^2 \ddot{\theta} - m g e \sin \theta \cos \alpha = 0 \Rightarrow$$

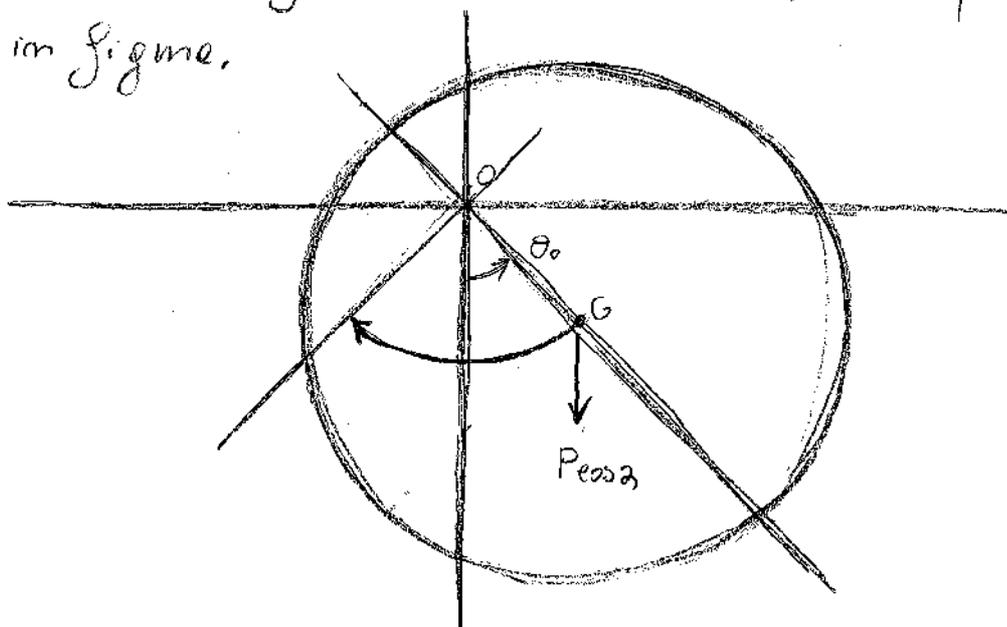
$$8.66 \quad \ddot{\theta} - \frac{m g e \cos \alpha \sin \theta}{I_G + m e^2} = 0$$

Questa equazione è formalmente simile alle 2.64, quindi - come illustrato nel paragrafo 2.8 - può essere ridotta alle equazioni differenziali

$$8.67 \quad \dot{\theta}^2 - \frac{2 m g e \cos \alpha \cos \theta}{I_G + m e^2} = C =$$

$$8.68 \quad \dot{\theta} = - \sqrt{\frac{2 m g e \cos \alpha \cos \theta + C}{I_G + m e^2}}$$

Nelle 8.68 abbiamo estratto la radice con segno meno, scegliendo in tal modo la fase di moto in cui $\dot{\theta} < 0$, ovvero quelle evidenziate in figura.



Assumo che, all'istante iniziale il sistema abbia velocità nulla e ricavo C :

$$C = - \frac{2mge \cos \alpha \cos \theta_0}{I_G + me^2} \Rightarrow$$

$$\dot{\theta} = - \sqrt{\frac{2mge \cos \alpha (\cos \theta - \cos \theta_0)}{I_G + me^2}} \Rightarrow$$

$$dt = - \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2mge \cos \alpha (\cos \theta - \cos \theta_0)}{I_G + me^2}}} \Rightarrow$$

$$T = -4 \sqrt{\frac{I_G + me^2}{2mge \cos \alpha}} \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

Come già provato nel paragrafo citato, l'integrale di cui sopra è riconducibile ad un integrale ellittico di prima specie. In particolare si ha

$$\left\{ \begin{aligned} T &= 4 \sqrt{\frac{I_G + me^2}{2mge \cos \alpha}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = 4 \sqrt{\frac{I_G + me^2}{2mge \cos \alpha}} \sqrt{\frac{2}{1 - \cos \theta_0}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \\ k &= \sin \frac{\theta_0}{2} \end{aligned} \right.$$

↓

$$8.69) T = 4 \sqrt{\frac{I_G + me^2}{mge \cos \alpha}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

Ricavo il momento d'inerzia:

$$I_G = m \frac{r^2}{2} = m \frac{(d/2)^2}{2} = m \frac{d^2}{8} \Rightarrow$$

$$T = 4 \sqrt{\frac{m \frac{d^2}{8} + 8me^2}{2mge \cos \alpha}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = 2 \sqrt{\frac{d^2 + 8e^2}{2ge \cos \alpha}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

Considerando l'espressione approssimata dell'integrale ellittico di prima specie si ha

$$8.70) \begin{cases} T \approx 2 \sqrt{\frac{d^2 + 8e^2}{2ge \cos \alpha}} \left(1,5707 + 0,3926k^2 + 0,2208k^4 + 0,1533k^6 + 0,1174k^8 \right) \\ k = \sin \frac{\theta_0}{2} \end{cases}$$

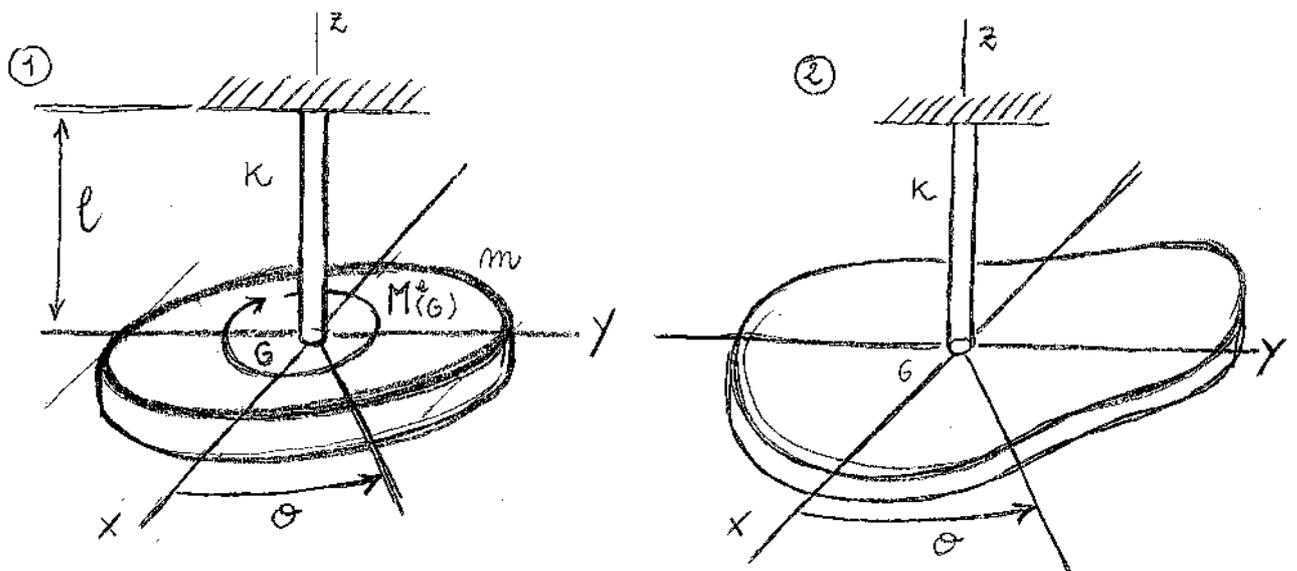
Nel caso di PICCOLE OSCILLAZIONI le 8.66 si scrive invece

$$\ddot{\theta} - \frac{mge \cos \alpha}{m \frac{d^2}{8} + me^2} \theta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} - \frac{8eg \cos \alpha}{d^2 + 8e^2} \theta = 0} \Rightarrow$$

$$\theta = A \cos \left(2 \sqrt{\frac{2eg \cos \alpha}{d^2 + 8e^2}} t + \varphi \right)$$

$$\omega_m = 2 \sqrt{\frac{2eg \cos \alpha}{d^2 + 8e^2}} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_m} = \pi \sqrt{\frac{d^2 + 8e^2}{2eg \cos \alpha}}}$$

8.19. Pendolo torsionale, momento di inerzia. Un disco di peso $P = 22,5 \text{ N}$ e di diametro $d = 152 \text{ mm} = 0,152 \text{ m}$ è sospeso all'estremità di una barra verticale. Il suo periodo delle piccole oscillazioni è di $T = 13,6 \text{ s} / 20 = 0,68 \text{ s}$. Si chiede di ricavare il momento baricentrale di inerzia di una piastra irregolare la quale sostituisce al disco oscilla con periodo $T = 19,3 \text{ s} / 20 = 0,965 \text{ s}$.



Studio il sistema 1: Il momento effettivo rispetto al polo G è dato da

$$\vec{M}^e(G) = -\theta K \hat{e}_3$$

Il momento inerziale invece è dato da

$$\vec{M}^{im}(G) = -I_z \ddot{\theta} \hat{e}_3 - m \frac{r^2}{2} \ddot{\theta} \hat{e}_3$$

Il bilancio meccanico porge dunque

$$8.71) \theta K + m \frac{r^2}{2} \ddot{\theta} = 0 \iff \theta + \frac{m r^2}{2K} \ddot{\theta} = 0 \iff \ddot{\theta} + \frac{2K}{m r^2} \theta = 0$$

Il moto è armonico con pulsazione e periodo dati da

$$8.72) \begin{cases} \omega_m = \sqrt{\frac{2K}{m r^2}} = \sqrt{\frac{2K}{m}} \frac{1}{r} \\ T = \frac{2\pi}{\omega_m} = 2\pi r \sqrt{\frac{m}{2K}} = \pi r \sqrt{\frac{2m}{K}} \end{cases} \quad m g =$$

Dovendo essere $T = 0,68 \text{ s}$ si ha

$$\pi r \sqrt{\frac{2m}{K}} = 0,68 \text{ s} \iff \frac{\pi \cdot 0,152 \text{ m}}{2} \sqrt{2 \frac{22,5 \text{ N}}{9} \frac{1}{K}} = 0,68 \text{ s} \iff$$

$$8.73) \quad \boxed{K = 0,5655 \text{ N/m}}$$

$$K \theta = M$$

Studio ora il sistema 2. Si ha

$$-\theta K - I_z' \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{K}{I_z'} \theta = 0 \Rightarrow \omega_m = \sqrt{\frac{K}{I_z'}} \Rightarrow$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_m} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z'}{K}} = 0,965 \text{ s} \Rightarrow 4\pi^2 I_z' = K \cdot 0,9312 \text{ s}^2 \Rightarrow$$

$$I_z' = 0,5655 \text{ N/m} \cdot 0,9312 \text{ s}^2 \frac{1}{4\pi^2} = 1,3339 \cdot 10^{-2} \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ m} \Rightarrow$$

$$\boxed{I_z' = 0,0133 \text{ Kg m}^2}$$

Si trova così il momento d'inerzia incognito.

8.20. Pendolo torsionale, modulo di elasticità tangenziale. Si riprende il sistema 1 del paragrafo 8.17. Dalle meccaniche dei solidi (torsione per travi a sezione circolare) si ricorre che

$$\theta = \frac{M l}{G J_p}$$

essendo G il coefficiente di elasticità tangenziale e J_p il momento amiale delle barre. Essendo poi $M = \theta K$, si ha

$$\textcircled{8.74} \quad \theta = \frac{\theta K l}{G J_p} \Rightarrow G J_p = K l \Rightarrow \boxed{G = \frac{K l}{J_p}}$$

Se ora si assume che il disco ha mom. di in. I_z e periodo T_m delle piccole oscillazioni, allora si ha

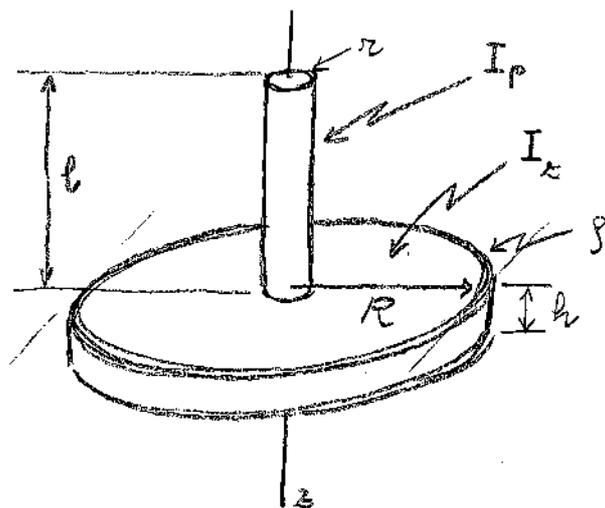
$$-\theta K - I_z \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta K + I_z \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{K}{I_z} \theta = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_m = \sqrt{K/I_z} \Rightarrow T_m = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{K}} \Rightarrow T_m^2 = 4\pi^2 \frac{I_z}{K} \Rightarrow \boxed{K = \frac{4\pi^2 I_z}{T_m^2}}$$

Sostituendo nella espressione di G si ha

$$\textcircled{8.75} \quad \boxed{G = \frac{4\pi^2 I_z l}{T_m^2 J_p}}$$

Si assumono adesso i seguenti dati numerici:



$$\begin{cases}
 T_m = 0,126 \text{ s} \\
 R = 15,3 \text{ mm} = 15,3 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\
 h = 8,5 \text{ mm} = 8,5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\
 \rho = \frac{88}{\text{mm}^3} = \frac{8 \cdot 10^{-3} \text{ Kg}}{10^{-6} \text{ m}^3} \\
 l = 0,40 \text{ m} \\
 r = 10 \text{ mm} = 0,01 \text{ m}
 \end{cases}$$

Calcolo i momenti di inerzia

$$\begin{aligned}
 I_z &= m \frac{R^2}{2} = \rho \pi R^2 h \frac{R^2}{2} = \rho \pi h \frac{R^4}{2} = \frac{8 \cdot 10^{-3} \text{ Kg}}{10^{-6} \text{ m}^3} \cdot \frac{\pi \cdot 8,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{2} \cdot \frac{(15,3 \cdot 10^{-2} \text{ m})^4}{2} = \\
 &= 40 \pi 8,5 \text{ m} (15,3)^4 10^{-8} \text{ m Kg} = 0,5853 \text{ Kg m}^2 \\
 J_p &= \pi r^2 \frac{r^2}{2} = \frac{\pi r^4}{2} = 1,5707 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4
 \end{aligned}$$

Sostituisco nelle 8.74:

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{4\pi^2 \cdot 0,5853 \text{ Kg m}^2 \cdot 0,40 \text{ m}}{(0,126 \text{ s})^2 \cdot 1,5707 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4} = 37,04 \cdot 10^6 \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2 \cdot \text{m}} = 37,04 \cdot 10^9 \frac{\text{Kg m}}{\text{s}^2 \text{ m}^2} = \\
 &= 37,04 \cdot 10^9 \text{ Pe} = \boxed{37,04 \text{ GPe}}
 \end{aligned}$$

8.21. Pendolo torsionale, ripitogo. Riparto le formule ricavate per il classico pendolo torsionale.

$$8.76) \quad \omega_m = \sqrt{\frac{k}{I_z}}$$

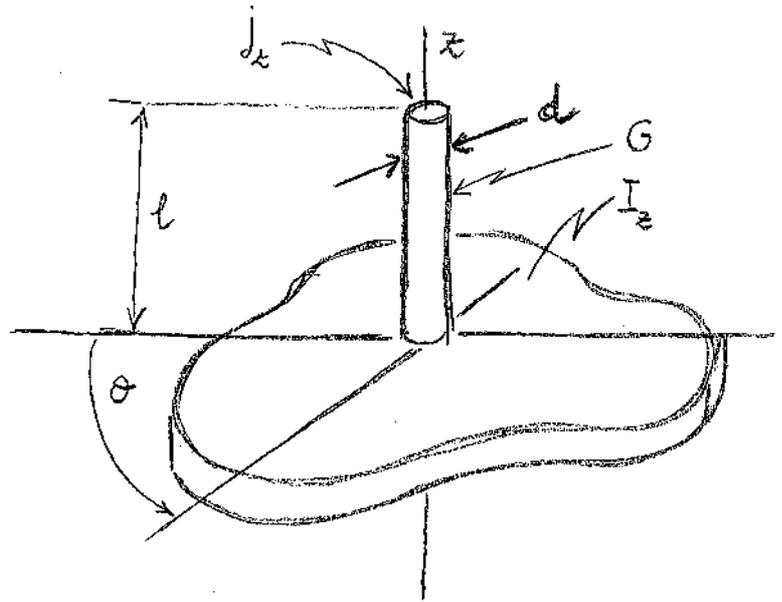
$$8.77) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{k}}$$

$$8.78) \quad \theta = \frac{M\ell}{Gj_z}$$

$$8.79) \quad G = \frac{k\ell}{j_z} = \frac{4\pi^2 I_z \ell}{T^2 j_z}$$

$$8.80) \quad k = \frac{4\pi^2 I_z}{T^2}$$

$$8.81) \quad j_z = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 \frac{1}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$



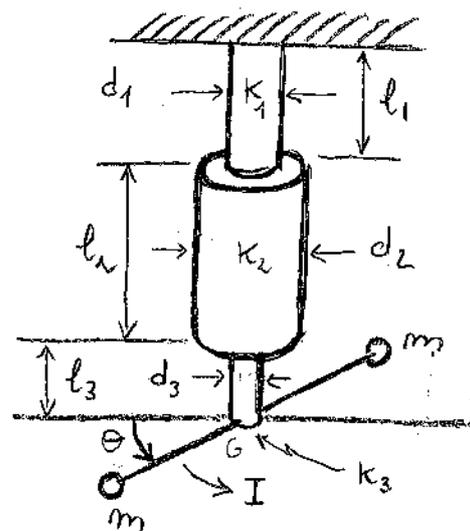
8.22. Pendolo torsionale in serie. Si consideri il sistema in figura con i dati indicati. Si ricavi il periodo delle piccole oscillazioni.

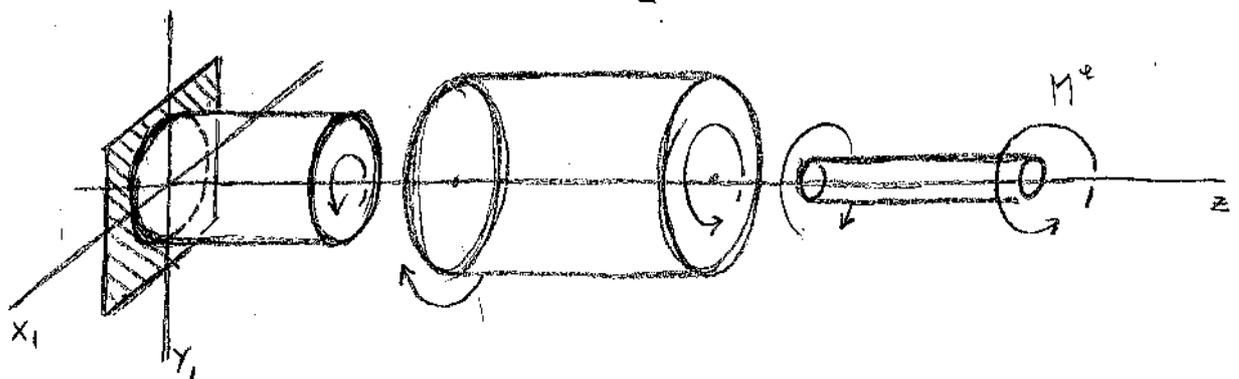
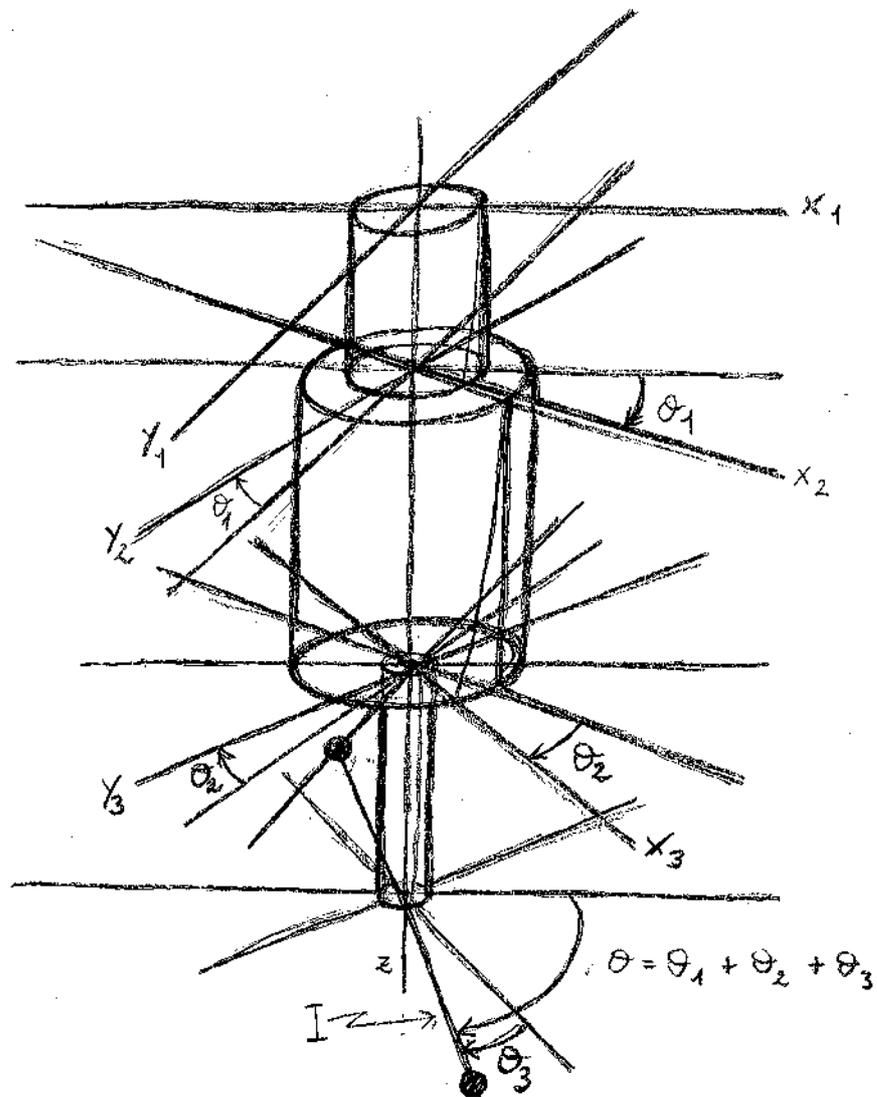
$$d_1 = 2 \text{ cm} \quad \ell_1 = 25 \text{ cm}$$

$$d_2 = 3 \text{ cm} \quad \ell_2 = 75 \text{ cm}$$

$$d_3 = 1 \text{ cm} \quad \ell_3 = 10 \text{ cm}$$

$$I = 2,5 \text{ kg cm}^2 \quad G = 82 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$





Per i tre cilindri si ha

$$\begin{cases}
 \vec{M}^e(\sigma) = -K_1 \theta_1 \hat{e}_3 \Rightarrow \theta_1 = -M^e(\sigma)/K_1 \\
 \vec{M}^e(\sigma) = -K_2 \theta_2 \hat{e}_3 \Rightarrow \theta_2 = -M^e(\sigma)/K_2 \\
 \vec{M}^e(\sigma) = -K_3 \theta_3 \hat{e}_3 \Rightarrow \theta_3 = -M^e(\sigma)/K_3
 \end{cases}$$

D'altra parte, indicate K_e come costante elastica equivalente, abbiamo anche

$$\vec{M}^e(G) = -K_e \theta \hat{e}_3 = -K_e (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \hat{e}_3 = +K_e \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3} \right) M^e(G) \hat{e}_3$$

$$\Downarrow$$

$$M^e(G) = +K_e \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3} \right) M^e(G) \Rightarrow \frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3} \Rightarrow$$

$$8.82) \quad K_e = \frac{1}{\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3}}$$

Si consideri ora la 8.79, in base alle quali si calcola

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = J_{z1} \frac{G}{l_1} = \pi \left(\frac{d_1}{2} \right)^2 \left(\frac{d_1}{2} \right)^2 \frac{1}{2} \frac{G}{l_1} = \frac{\pi d_1^4 G}{32 l_1} \\ K_2 = J_{z2} \frac{G}{l_2} = \pi \left(\frac{d_2}{2} \right)^2 \left(\frac{d_2}{2} \right)^2 \frac{1}{2} \frac{G}{l_2} = \frac{\pi d_2^4 G}{32 l_2} \\ K_3 = \frac{\pi d_3^4 G}{32 l_2} \end{array} \right.$$

Sostituendo nella 8.82 si ha

$$8.83) \quad K_e = \frac{1}{\frac{32 l_1}{\pi d_1^4 G} + \frac{32 l_2}{\pi d_2^4 G} + \frac{32 l_2}{\pi d_3^4 G}} = \frac{\pi G}{32 \left(\frac{l_1}{d_1^4} + \frac{l_2}{d_2^4} + \frac{l_3}{d_3^4} \right)} \approx 644 \text{ Nm}$$

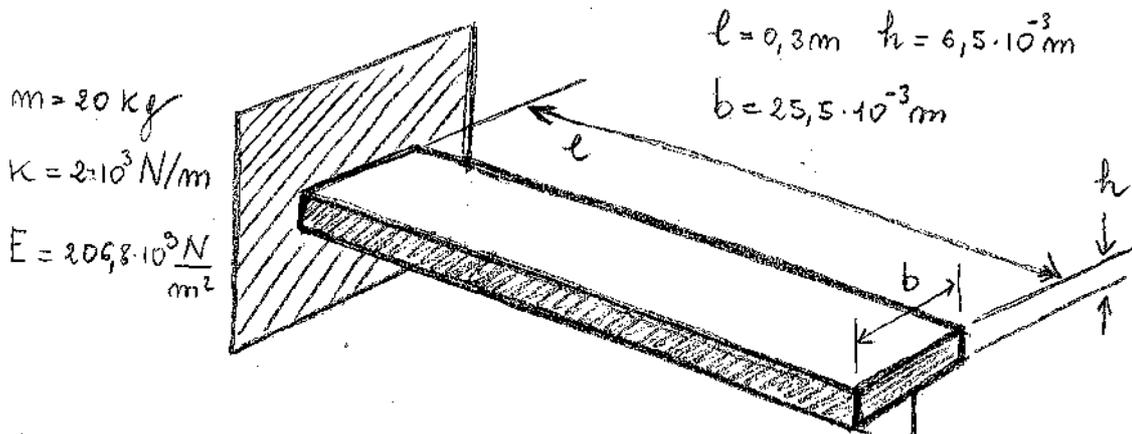
Si può ora usare la 8.77 la quale fornisce l'espressione del

periodo delle piccole oscillazioni:

$$8.84) T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K_e}} = 2\pi \sqrt{\frac{2,5 \text{ Kg m}}{644 \text{ N}}} = 0,391 \sqrt{\frac{\text{Kg m}}{\text{Kg m}}} = 0,391 \text{ s}$$

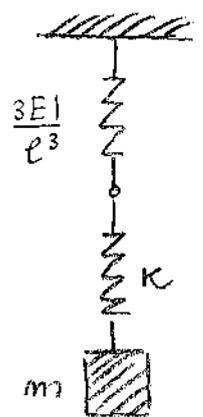
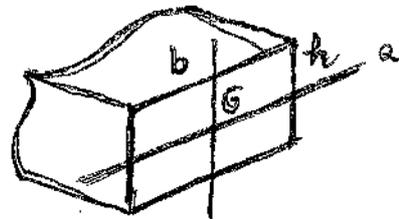
La frequenza è dunque $f = T^{-1} = 2,554 \text{ Hz}$.

8.23. Sistema con costanti elastiche in serie. Assegnato il meccanismo seguente, si chiede la frequenza delle vibrazioni naturali.



Utilizzando i risultati del paragrafo 7.5 possiamo ridurre il sistema assegnato alle serie di due molle. Il momento che figura nelle costanti elastiche equivalenti si calcola come segue.

$$I = j_a = \frac{1}{12} b h^3 = 5,83 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4$$



Dunque le costanti elastiche delle trave reale

$$\begin{aligned} \frac{3EI}{l^3} &= 3 \cdot 206,8 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 5,83 \cdot 10^{-20} \text{m}^4 \cdot \frac{1}{0,3^3 \text{m}^3} = \\ &= \frac{3 \cdot 206,8 \cdot 10^9 \cdot 5,83 \text{ N}}{3^3 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = \frac{206,8 \cdot 10^9 \cdot 5,83 \text{ N}}{3^2 \text{ m}} = \\ &= 133,96 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}} = 13,396 \cdot 10^3 \text{ N/m} \approx 13,4 \cdot 10^3 \text{ N/m} \end{aligned}$$

La costante elastica equivalente del meccanismo vale dunque:

$$\frac{1}{K_e} = \frac{1}{K} + \frac{l^3}{3EI} = \frac{1}{2 \cdot 10^3 \text{ N/m}} + \frac{1}{13,4 \cdot 10^3 \text{ N/m}} \Rightarrow \boxed{K_e = 1,74 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}}$$

Pertanto la pulsazione massima vale

$$\omega_m = \sqrt{\frac{K_e}{m}} = \sqrt{\frac{1,74 \cdot 10^3 \text{ N}}{20 \text{ kg}}} = \underline{9,328 \frac{\text{N}}{\text{m}}}$$

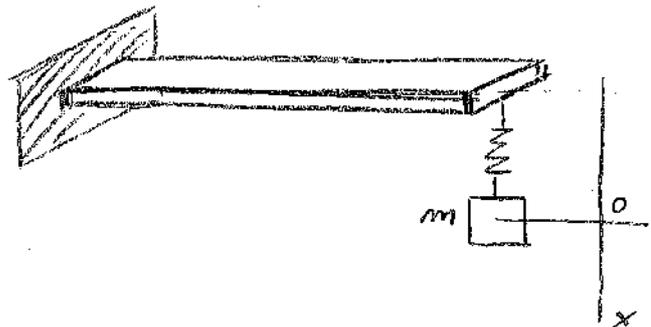
Si ricava allora il periodo e la frequenza:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_m} = \frac{2\pi \text{ m}}{9,328 \text{ N}} = 0,673 \text{ s} \Rightarrow f = \frac{1}{T} = 1,48 \text{ Hz}$$

Provo ora a risolvere il problema utilizzando il METODO ENERGETICO. Per l'energia potenziale gravitazionale si ha quanto segue:

$$U = -mgx + c$$

Per l'energia cinetica si ha



$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

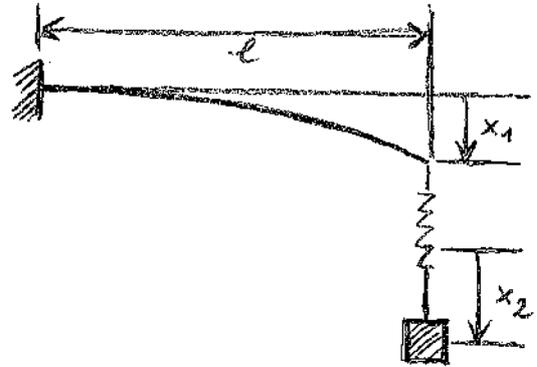
Calcolo l'energia elastica della trave e della molla.

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{1}{2} F x_1 \\ x_1 = \frac{F l^3}{3EI} \Rightarrow F = \frac{3EI x_1}{l^3} \end{cases}$$

↓

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \frac{3EI}{l^3} x_1^2 = \frac{3}{2} \frac{EI}{l^3} x_1^2$$

$$\begin{cases} \phi_2 = \frac{1}{2} F x_2 \Rightarrow \phi_2 = \frac{1}{2} k x_2^2 \\ F = k x_2 \end{cases}$$



Ricavo ora x_1 e x_2 in funzione di $x = x_1 + x_2$:

$$F = \frac{3EI}{l^3} x_1 = k x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{l^3 k}{3EI} x_2 \Rightarrow \dots$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{l^3 k}{3EI} x_2 \\ \frac{l^3 k}{3EI} x_2 + x_2 = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{l^3 k}{3EI} x_2 \\ x_2 \left(\frac{l^3 k}{3EI} + 1 \right) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{l^3 k}{3EI} x_2 \\ x_2 \left(\frac{l^3 k + 3EI}{3EI} \right) = x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{l^3 k}{3EI} \frac{3EI x}{l^3 k + 3EI} = \frac{x l^3 k}{l^3 k + 3EI} \\ x_2 = \frac{3EI x}{l^3 k + 3EI} = \frac{3EI x}{l^3 k + 3EI} \end{cases}$$

Sostituendo nelle espressioni delle energie potenziali elastiche si trova che

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_1 + \phi_2 = \frac{3}{2} \frac{EI}{l^3} \left(\frac{x l^3 \kappa}{l^3 \kappa + 3EI} \right)^2 + \frac{1}{2} \kappa \left(\frac{3EI x}{l^3 \kappa + 3EI} \right)^2 = \\ &= \frac{\textcircled{3} EI (x^2) l^6 \kappa^2}{\textcircled{2} l^3 (l^3 \kappa + 3EI)^2} + \frac{1}{2} \kappa \frac{\textcircled{3} EI^2 (x^2)}{(l^3 \kappa + 3EI)^2} = \frac{3EI x^2}{2(l^3 \kappa + 3EI)^2} \left(\frac{l^3 \kappa^2}{l^3} + \right. \\ &\left. + 3\kappa EI \right) = \frac{3EI x^2}{2(l^3 \kappa + 3EI)^2} (l^3 \kappa^2 + 3\kappa EI) \end{aligned}$$

Dunque l'energia meccanica complessiva e la sua derivata sono le seguenti:

$$E = T + V + \phi = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mgx + \frac{3EI x^2}{2(l^3 \kappa + 3EI)^2} (l^3 \kappa^2 + 3\kappa EI) + c \Rightarrow$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} m \cancel{x} \ddot{x} - mg \cancel{x} + \frac{3EI \cancel{x} x \dot{x}}{2(l^3 \kappa + 3EI)^2} (l^3 \kappa^2 + 3\kappa EI) = 0 \Rightarrow$$

$$m \ddot{x} - mg + \frac{3EI \kappa x}{(l^3 \kappa + 3EI)^2} (l^3 \kappa^2 + 3\kappa EI) = 0 \Rightarrow$$

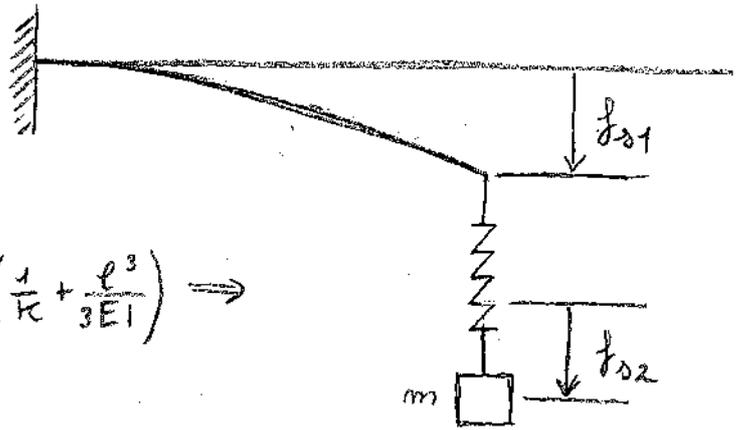
$$m \ddot{x} - mg + \frac{3EI \kappa}{l^3 \kappa + 3EI} x = 0 \Rightarrow$$

$$\textcircled{8.85} \quad \ddot{x} - g + \frac{3EI \kappa}{m(l^3 \kappa + 3EI)} x = 0$$

Calcolo ora la fisica statica e traslo il sistema di riferimento in modo che l'origine sia sulle posizioni di

equilibrio statico:

$$\begin{cases} f_{s1} = \frac{mg l^3}{3EI} \\ f_{s2} = \frac{mg}{k} \end{cases} \Rightarrow f_0 = mg \left(\frac{1}{k} + \frac{l^3}{3EI} \right) \Rightarrow$$



$$z + f_0 = x \Rightarrow \ddot{z} - g + \frac{3EI k}{m(l^3 k + 3EI)} z + \frac{3EI k}{m(l^3 k + 3EI)} mg \left(\frac{3EI + k l^3}{3EI k} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{z} + \frac{3EI k}{m(l^3 k + 3EI)} z = 0}$$

Dunque la pulsazione naturale:

$$\omega_m = \sqrt{\frac{3EI k}{m(l^3 k + 3EI)}}$$

Omnivato per che

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k} + \frac{l^3}{3EI} = \frac{3EI + k l^3}{3kEI} \Rightarrow k_e = \frac{3kEI}{3EI + k l^3} \Rightarrow$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k_e}{m}}$$

Si ritrova così il risultato ottenuto col metodo precedente. Volendo procedere ora col metodo delle equazioni di Newton si consideri l'equilibrio dinamico della massa:

$$-mg - kx_2 - m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dots$$

$$mg - \frac{3EI \times k}{l^3 k + 3EI} - m\ddot{x} = 0 \Rightarrow$$

$$mg - \frac{3EI k}{l^3 k + 3EI} (\xi + \eta) - m\ddot{\xi} = 0 \Rightarrow$$

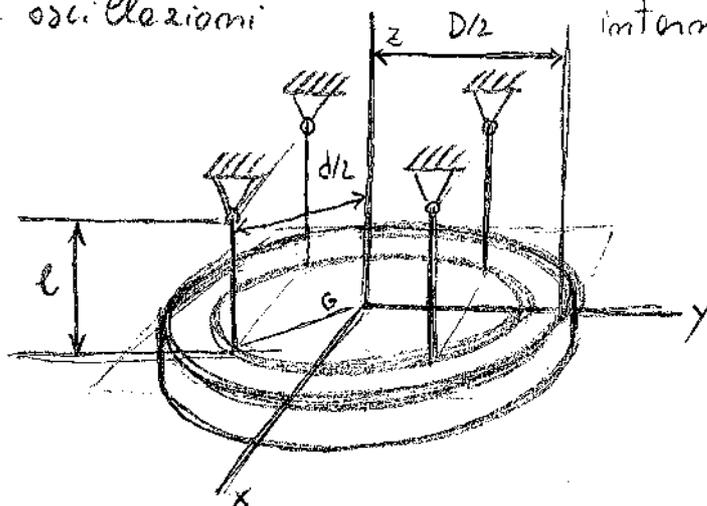
$$mg - \frac{3EI k}{l^3 k + 3EI} \xi - \frac{3EI k}{l^3 k + 3EI} \eta - m\ddot{\xi} = 0 \Rightarrow$$

$$mg - \frac{3EI k}{l^3 k + 3EI} \xi - \frac{3EI k}{l^3 k + 3EI} mg \frac{l^3 k + 3EI}{3EI k} - m\ddot{\xi} = 0 \Rightarrow$$

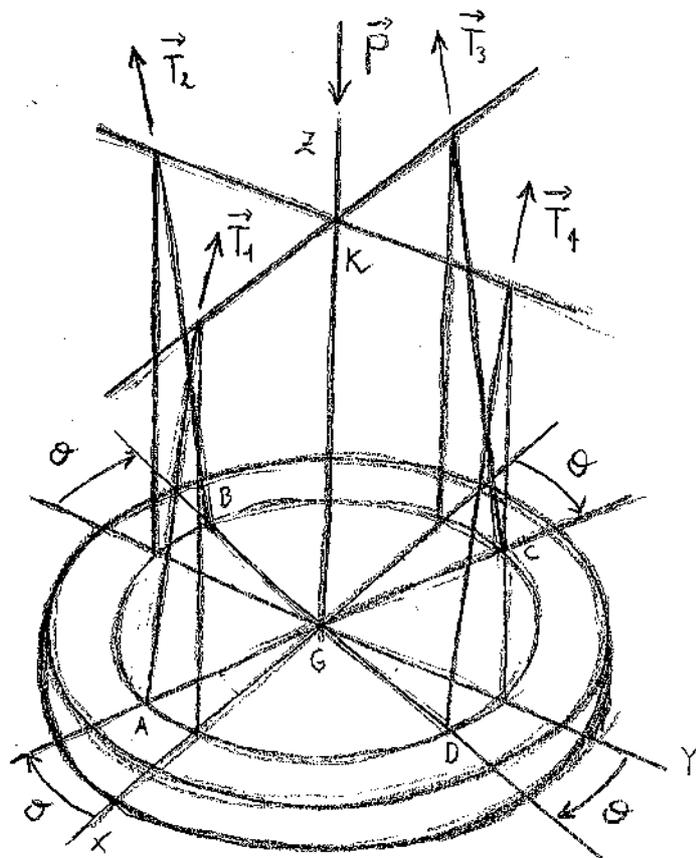
$$\boxed{\frac{3EI k}{l^3 k + 3EI} \xi + m\ddot{\xi} = 0}$$

Si ritrova così il risultato già ricavato con i due precedenti metodi.

8.24. Pendolo torsionale a quattro fili. Si chiede il periodo delle piccole oscillazioni intorno all'asse z,



Si procede in modo analogo a quanto visto nel paragrafo 2.13, Utili.



lizzando quanto calcolato in 8.37, ponendo d al posto di L abbiamo che

$$\begin{cases} \vec{T}_1 = \frac{P}{4l} \left[\frac{d}{2} (1 - \cos\theta) \hat{e}_1 - \frac{d}{2} \sin\theta \hat{e}_2 + l \hat{e}_3 \right] \\ \vec{T}_3 = \frac{P}{4l} \left[-\frac{d}{2} (1 - \cos\theta) \hat{e}_1 + \frac{d}{2} \sin\theta \hat{e}_2 + l \hat{e}_3 \right] \end{cases}$$

Inoltre, osservando la figura, si deduce che

$$\begin{array}{l} T_{2x} = T_{1y}/2 \quad T_{2y} = -T_{1x}/2 \quad T_{2z} = T_{1z}l \\ T_{4x} = -T_{1y}/2 \quad T_{4y} = T_{1x}/2 \quad T_{4z} = T_{1z}l \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{T}_2 = \frac{P}{4l} \left[-\frac{d}{2} \sin\theta \hat{e}_1 - \frac{d}{2} (1 - \cos\theta) \hat{e}_2 + l \hat{e}_3 \right] \\ \vec{T}_4 = \frac{P}{4l} \left[\frac{d}{2} \sin\theta \hat{e}_1 + \frac{d}{2} (1 - \cos\theta) \hat{e}_2 + l \hat{e}_3 \right] \end{cases}$$

Ricavo il momento delle forze T_1, T_2, T_3, T_4 rispetto G . Anzichè calcolarlo direttamente, uso le 8.38 in cui pongo d al posto di L e che moltiplico per due:

$$(8.86) \quad \vec{M}^e(G) = -\sin\theta \frac{Pd^2}{4l} \hat{e}_3$$

Dunque l'equilibrio dei momenti porta

$$\vec{M}^e(G) + \vec{M}^m(G) = 0 \Rightarrow -\sin\theta \frac{Pd^2}{4l} + I_z \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$-\sin\theta \frac{mgd^2}{24l} - m \left(\frac{D}{2}\right)^2 \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \sin\theta \frac{mgd^2}{24l} + \frac{mD^2}{4} \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$(8.87) \quad \ddot{\theta} + \frac{2gd^2}{lD^2} \sin\theta = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{2gd^2}{lD^2} \theta = 0}$$

Dunque pulsazione naturale, periodo e frequenza sono come di seguito:

$$\omega_m = \frac{d}{D} \sqrt{\frac{2g}{l}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_m} = \frac{2\pi D}{d} \sqrt{\frac{l}{2g}} = \frac{\pi D}{d} \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{d}{\pi D} \sqrt{\frac{g}{2l}}$$

Provo ora con il METODO ENERGETICO. Utilizzando le argomentazioni del paragrafo 8.13, si ha

$$U(\theta) = mg \frac{d^2 \theta^2}{8l} \Rightarrow \frac{dU}{d\theta} = \frac{mg d^2 \theta}{4l}$$

$$T(\theta) = \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m \frac{D^2}{8} \dot{\theta}^2 = \frac{m D^2 \dot{\theta}^2}{16} \Rightarrow \frac{dT}{d\theta} = \frac{m D^2 \dot{\theta} \ddot{\theta}}{8} = \frac{m D^2 \dot{\theta} \ddot{\theta}}{8}$$

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{dU}{d\theta} + \frac{dT}{d\theta} = \frac{mg d^2 \theta}{4l} + \frac{m D^2 \dot{\theta} \ddot{\theta}}{8} = \frac{\dot{\theta} m}{4} \left(\frac{d^2 g \theta}{l} + \frac{\ddot{\theta} D^2}{2} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2 d^2 g}{l D^2} \theta = 0}$$

Come si vede in figura 8.87. Provo ora a procedere col METODO DI RAYLEIGH 2.40. Si ha

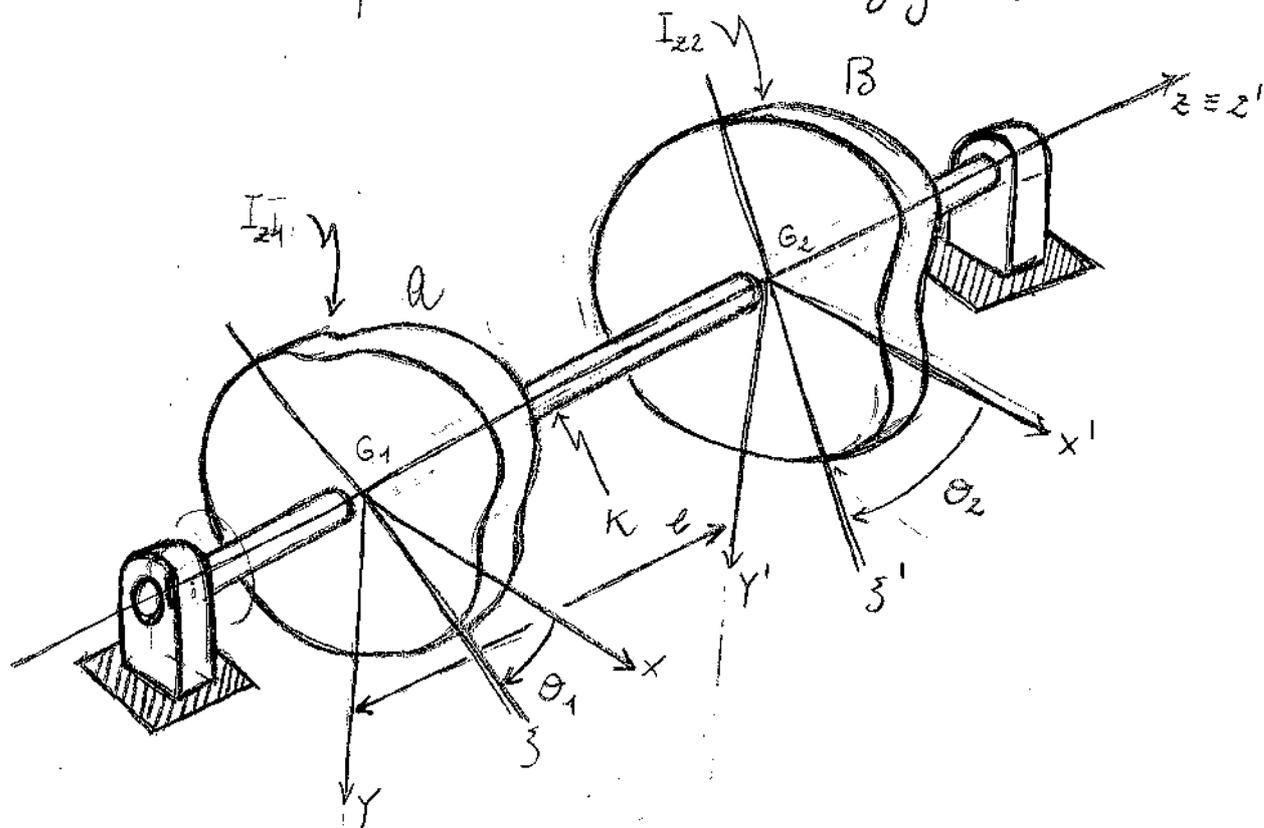
$$\begin{cases} \theta = A \cos(\omega_m t + \varphi) \Rightarrow \theta_{\text{MAX}} = A \\ \dot{\theta} = -A \omega_m \sin(\omega_m t + \varphi) \Rightarrow \dot{\theta}_{\text{MAX}} = A \omega_m \\ \ddot{\theta} = -A \omega_m^2 \cos(\omega_m t + \varphi) \Rightarrow \ddot{\theta}_{\text{MAX}} = A \omega_m^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{\text{MAX}} = \frac{mg d^2}{8l} A^2 \\ T_{\text{MAX}} = \frac{m D^2}{16} A^2 \omega_m^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$U_{\text{MAX}} = T_{\text{MAX}} \Rightarrow \frac{mg d^2}{8l} = \frac{m D^2 \omega_m^2}{2 \cdot 16} \Rightarrow \omega_m^2 = \frac{2 g d^2}{l D^2} \Rightarrow$$

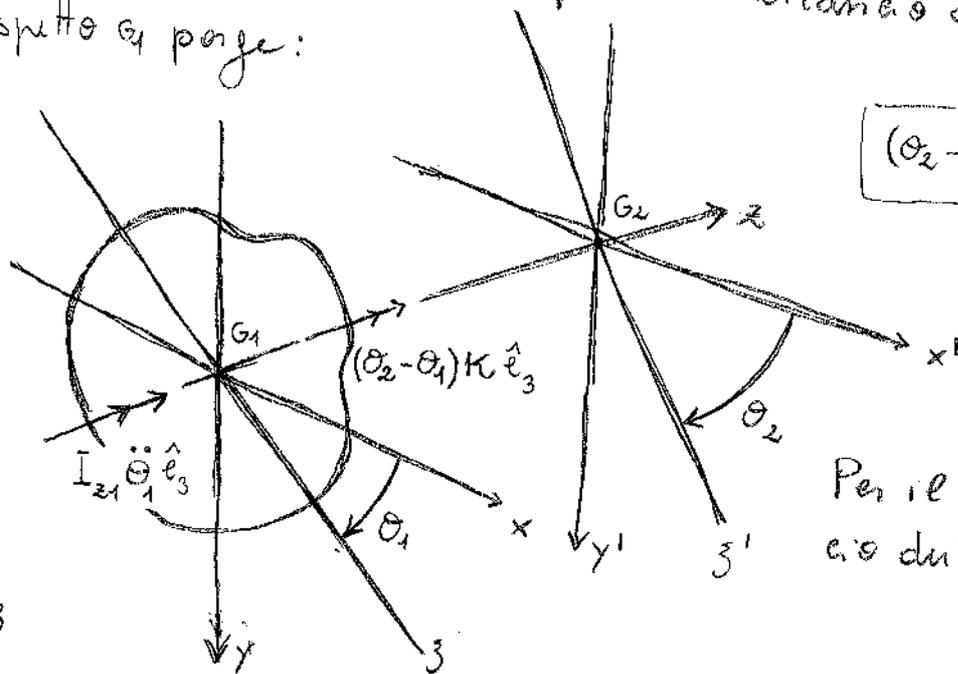
$$\omega_m = \frac{d}{D} \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

Di nuovo ritroviamo il risultato già calcolato.

8.25. Pendolo torsionale doppio. Si chiede di descrivere il moto relativo dei due corpi A, B del sistema in figura.



Per il sistema di riferimento G_1xyz e il sistema $G_2x'y'z'$ sono entrambi fissi; i sistemi $G_1\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ e $G_2\hat{x}'\hat{y}'\hat{z}'$ siano invece solidali ed A e B rispettivamente. Per il corpo A il bilancio dei momenti rispetto G_1 porge:



$$(\theta_2 - \theta_1)k = I_{z1} \ddot{\theta}_1$$

Per il corpo B il bilancio dei momenti porge

$$\boxed{-I_{z2} \ddot{\theta}_2 - (\theta_2 - \theta_1) \kappa = 0}$$

Dunque il sistema di equazioni differenziali risolvente è il seguente

$$\begin{cases} I_{z1} \ddot{\theta}_1 - (\theta_2 - \theta_1) \kappa = 0 \\ I_{z2} \ddot{\theta}_2 + (\theta_2 - \theta_1) \kappa = 0 \end{cases}$$

↓

$$\begin{cases} I_{z1} I_{z2} \ddot{\theta}_1 - (\theta_2 - \theta_1) I_{z2} \kappa = 0 \\ I_{z1} I_{z2} \ddot{\theta}_2 + (\theta_2 - \theta_1) I_{z1} \kappa = 0 \end{cases}$$

↓

$$I_{z1} I_{z2} (\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) - (\theta_2 - \theta_1) I_{z2} \kappa - (\theta_2 - \theta_1) I_{z1} \kappa = 0 \Rightarrow$$

$$I_{z1} I_{z2} (\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) - (\theta_2 - \theta_1) \kappa (I_{z1} + I_{z2}) = 0 \Rightarrow$$

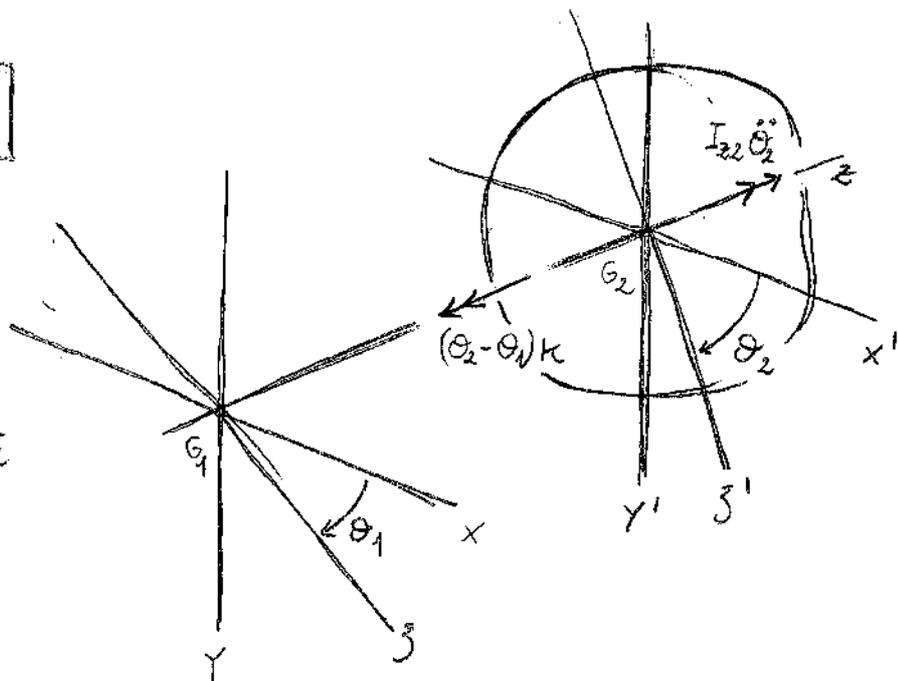
$$\boxed{+I_{z1} I_{z2} (\ddot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_1) + (\theta_2 - \theta_1) \kappa (I_{z1} + I_{z2}) = 0}$$

Si ponga ora $\theta \triangleq \theta_2 - \theta_1$, ottenendo l'equazione

$$I_{z1} I_{z2} \ddot{\theta} + \kappa (I_{z1} + I_{z2}) \theta = 0 \Rightarrow$$

$$\text{8.88} \quad \boxed{\ddot{\theta} + \kappa \frac{I_{z1} + I_{z2}}{I_{z1} I_{z2}} \theta = 0}$$

L'integrale generale di queste equazioni è immediato;



$$8.89 \quad \boxed{\theta = A \sin(\omega_m t + \varphi)} \quad \boxed{\omega_m = \sqrt{k \frac{I_{z1} + I_{z2}}{I_{z1} I_{z2}}}}$$

dove A e φ sono definiti attraverso le c.c.. Sostituendo le soluzioni 8.89 nelle equazioni relative ai due corpi si ha

$$\begin{cases} A \sin(\omega_m t + \varphi) k - I_{z1} \ddot{\theta}_1 = 0 \\ A \sin(\omega_m t + \varphi) k + I_{z2} \ddot{\theta}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$8.90 \quad \begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \frac{Ak}{I_{z1}} \sin(\omega_m t + \varphi) \\ \ddot{\theta}_2 = -\frac{Ak}{I_{z2}} \sin(\omega_m t + \varphi) \end{cases}$$

Per ottenere la soluzione si procede integrando direttamente

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \frac{Ak}{I_{z1}} \int \sin(\omega_m t + \varphi) dt = \frac{Ak}{\omega_m I_{z1}} \int \sin(\omega_m t + \varphi) d(\omega_m t + \varphi) = \\ &= \frac{Ak}{\omega_m I_{z1}} (-1) \int d \cos(\omega_m t + \varphi) = -\frac{Ak}{\omega_m I_{z1}} \cos(\omega_m t + \varphi) + C_1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -\frac{Ak}{\omega_m^2 I_{z1}} \int \cos(\omega_m t + \varphi) d(\omega_m t + \varphi) + C_1 t + C_2 = \\ &= -\frac{Ak}{\omega_m^2 I_{z1}} \sin(\omega_m t + \varphi) + C_1 t + C_2 \end{aligned}$$

$$\dot{\theta}_2 = -\frac{Ak}{I_{z2}} \int \sin(\omega_m t + \varphi) dt = \frac{Ak}{\omega_m I_{z2}} \cos(\omega_m t + \varphi) + D_1 \Rightarrow$$

$$\theta_2 = \frac{Ak}{\omega_m^2 I_{z2}} \sin(\omega_m t + \varphi) + D_1 t + D_2$$

In conclusione abbiamo trovato che

$$8.91 \begin{cases} \theta_2 - \theta_1 = A \sin(\omega_m t + \varphi) \\ \theta_1 = -\frac{AK}{\omega_m^2 I_{21}} \sin(\omega_m t + \varphi) + C_1 t + C_2 \\ \theta_2 = \frac{AK}{\omega_m^2 I_{22}} \sin(\omega_m t + \varphi) + D_1 t + D_2 \end{cases}$$

$$\omega_m^2 = \kappa \frac{I_{21} + I_{22}}{I_{21} I_{22}}$$

Prova a imporre che le 2^e, 3^e equazioni soddisfino le 1^e:

$$\begin{aligned} \theta_2 - \theta_1 &= \frac{AK \cancel{I_{21}} \cancel{I_{22}}}{\kappa (I_{21} + I_{22}) \cancel{I_{22}}} \sin(\omega_m t + \varphi) + D_1 t + D_2 + \\ &+ \frac{AK \cancel{I_{21}} I_{22}}{\kappa (I_{21} + I_{22}) \cancel{I_{21}}} \sin(\omega_m t + \varphi) - C_1 t - C_2 = \\ &= \frac{A(I_{21} + I_{22})}{I_{21} + I_{22}} \sin(\omega_m t + \varphi) + (D_1 - C_1)t + D_2 - C_2 \end{aligned}$$

Confrontando con le prime delle 8.91 si deduce

$$\begin{cases} D_1 = C_1 \triangleq B_1 \\ D_2 = C_2 \triangleq B_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$8.92 \begin{cases} \theta_2 - \theta_1 = A \sin(\omega_m t + \varphi) \\ \theta_1 = -\frac{AK}{\omega_m^2 I_{21}} \sin(\omega_m t + \varphi) + B_1 t + B_2 \\ \theta_2 = \frac{AK}{\omega_m^2 I_{22}} \sin(\omega_m t + \varphi) + B_1 t + B_2 \end{cases}$$

Impongo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \theta_2(0) - \theta_1(0) = A \sin \varphi \\ \dot{\theta}_2(0) - \dot{\theta}_1(0) = A \omega_m \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\theta_2(0) - \theta_1(0)}{A} \right)^2 = \sin^2 \varphi \\ \left(\frac{\dot{\theta}_2(0) - \dot{\theta}_1(0)}{A \omega_m} \right)^2 = \cos^2 \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{(\theta_{20} - \theta_{10})^2}{A^2} + \frac{(\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10})^2}{A^2 \omega_m^2} = 1 \\ \tan \varphi = \left(\frac{\theta_{20} - \theta_{10}}{A} \right) \left(\frac{A \omega_m}{\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}} \right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A^2 = (\theta_{20} - \theta_{10})^2 + \frac{(\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10})^2}{\omega_m^2} \\ \varphi = \arctan \left(\frac{\theta_{20} - \theta_{10}}{\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}} \omega_m \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{(\theta_{20} - \theta_{10})^2 + \frac{(\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10})^2}{\omega_m^2}} \\ \varphi = \arctan \left(\frac{\theta_{20} - \theta_{10}}{\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}} \omega_m \right) \end{cases}$$

8.93

$$\begin{cases} \theta_{10} = -\frac{A \kappa}{\omega_m^2 I_{z1}} \sin \varphi + B_2 \\ \dot{\theta}_{10} = -\frac{A \kappa}{\omega_m I_{z1}} \cos \varphi + B_1 \\ \theta_{20} = \frac{A \kappa}{\omega_m^2 I_{z2}} \sin \varphi + B_2 \\ \dot{\theta}_{20} = \frac{A \kappa}{\omega_m I_{z2}} \cos \varphi + B_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \varphi = \frac{(B_2 - \theta_{10}) \omega_m^2 I_{z1}}{A \kappa} \\ \cos \varphi = \frac{(B_1 - \dot{\theta}_{10}) \omega_m I_{z1}}{A \kappa} \\ \sin \varphi = \frac{(\theta_{20} - B_2) \omega_m^2 I_{z2}}{A \kappa} \\ \cos \varphi = \frac{(\dot{\theta}_{20} - B_1) \omega_m I_{z2}}{A \kappa} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \tan \varphi = \frac{B_2 - \theta_{10}}{B_1 - \dot{\theta}_{10}} \frac{\omega_m^2 I_{z1}}{\omega_m I_{z1}} = \frac{B_2 - \theta_{10}}{B_1 - \dot{\theta}_{10}} \omega_m \\ \tan \varphi = \frac{\theta_{20} - B_2}{\dot{\theta}_{20} - B_1} \frac{\omega_m^2 I_{z2}}{\omega_m I_{z2}} = \frac{B_2 - \theta_{20}}{B_1 - \dot{\theta}_{20}} \omega_m \end{cases}$$

Abbiamo trovato fin qui che

$$A = \sqrt{(\theta_{20} - \theta_{10})^2 + \frac{(\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10})^2}{\omega_m^2}} = \frac{1}{\omega_m} \sqrt{\omega_m^2 (\theta_{20} - \theta_{10})^2 + (\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10})^2}$$

8.94

$$t_{m\varphi} = \frac{\theta_{20} - \theta_{10}}{\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}} \omega_m$$

$$\frac{B_2 - \theta_{10}}{B_1 - \dot{\theta}_{10}} \omega_m = \frac{\theta_{20} - \theta_{10}}{\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}} \omega_m$$

$$\frac{B_2 - \theta_{20}}{B_1 - \dot{\theta}_{20}} \omega_m = \frac{\theta_{20} - \theta_{10}}{\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}} \omega_m$$

Risolvo le ultime due in B_1, B_2 :

$$\begin{cases} (B_2 - \theta_{10})(\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}) = (B_1 - \dot{\theta}_{10})(\theta_{20} - \theta_{10}) \\ (B_2 - \theta_{20})(\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}) = (B_1 - \dot{\theta}_{20})(\theta_{20} - \theta_{10}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B_2(\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}) - \theta_{10}(\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}) = B_1(\theta_{20} - \theta_{10}) - \dot{\theta}_{10}(\theta_{20} - \theta_{10}) \\ B_2(\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}) - \theta_{20}(\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}) = B_1(\theta_{20} - \theta_{10}) - \dot{\theta}_{20}(\theta_{20} - \theta_{10}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B_1(\theta_{20} - \theta_{10}) - B_2(\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}) = \dot{\theta}_{10}(\theta_{20} - \theta_{10}) - \theta_{10}(\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}) \\ B_1(\theta_{20} - \theta_{10}) - B_2(\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}) = \dot{\theta}_{20}(\theta_{20} - \theta_{10}) - \theta_{20}(\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B_1(\theta_{20} - \theta_{10}) - B_2(\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}) = \dot{\theta}_{10}\theta_{20} - \dot{\theta}_{10}\theta_{10} - \theta_{10}\dot{\theta}_{20} + \theta_{10}\dot{\theta}_{10} \\ B_1(\theta_{20} - \theta_{10}) - B_2(\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}) = \dot{\theta}_{20}\theta_{20} - \dot{\theta}_{20}\theta_{10} - \theta_{20}\dot{\theta}_{20} + \theta_{20}\dot{\theta}_{10} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \beta_1 (\theta_{20} - \theta_{10}) - \beta_2 (\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}) = \dot{\theta}_{10} \theta_{20} - \theta_{10} \dot{\theta}_{20} \\ \beta_1 (\theta_{20} - \theta_{10}) - \beta_2 (\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}) = \theta_{20} \dot{\theta}_{10} - \dot{\theta}_{20} \theta_{10} \end{cases} \Rightarrow$$

$$8.95) \beta_1 (\theta_{20} - \theta_{10}) - \beta_2 (\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}) = \theta_{20} \dot{\theta}_{10} - \dot{\theta}_{20} \theta_{10}$$

Dall'8.93 si deduce anche che

$$(\beta_2 - \theta_{10}) \frac{w_m I_{z1}}{A \kappa} = (\theta_{20} - \beta_2) \frac{w_m I_{z2}}{A \kappa} \Rightarrow$$

$$8.96) \beta_2 (I_{z1} + I_{z2}) = \theta_{10} I_{z1} + \theta_{20} I_{z2} \Rightarrow \boxed{\beta_2 = \frac{\theta_{10} I_{z1} + \theta_{20} I_{z2}}{I_{z1} + I_{z2}}}$$

Sostituendo nelle 8.95 si ha

$$\beta_1 (\theta_{20} - \theta_{10}) - \frac{(\theta_{10} I_{z1} + \theta_{20} I_{z2}) (\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10})}{I_{z1} + I_{z2}} = \dot{\theta}_{10} \theta_{20} - \theta_{10} \dot{\theta}_{20} \Rightarrow$$

$$\beta_1 (\theta_{20} - \theta_{10}) = \frac{(\theta_{10} I_{z1} + \theta_{20} I_{z2}) (\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10})}{I_{z1} + I_{z2}} + (\dot{\theta}_{10} \theta_{20} - \theta_{10} \dot{\theta}_{20}) \Rightarrow$$

$$= \frac{\cancel{\theta_{10} \dot{\theta}_{20} I_{z1}} - \cancel{\theta_{10} \dot{\theta}_{10} I_{z1}} + \theta_{20} \dot{\theta}_{20} I_{z2} - \cancel{\dot{\theta}_{20} \theta_{20} I_{z2}} +$$

$$+ \cancel{\dot{\theta}_{10} \theta_{20} I_{z1}} - \cancel{\theta_{10} \dot{\theta}_{20} I_{z1}} + \cancel{\dot{\theta}_{10} \theta_{20} I_{z2}} - \cancel{\theta_{10} \dot{\theta}_{20} I_{z2}}}{I_{z1} + I_{z2}} =$$

$$= \frac{(\dot{\theta}_{10} \theta_{20} + \dot{\theta}_{10} \dot{\theta}_{10}) I_{z1} + (\theta_{20} \dot{\theta}_{20} - \theta_{10} \dot{\theta}_{20}) I_{z2}}{I_{z1} + I_{z2}} =$$

$$= \frac{\dot{\theta}_{10} (\theta_{20} - \theta_{10}) I_{z1} + \dot{\theta}_{20} (\theta_{20} - \theta_{10}) I_{z2}}{I_{z1} + I_{z2}} = (\theta_{20} - \theta_{10}) \frac{\dot{\theta}_{10} I_{z1} + \dot{\theta}_{20} I_{z2}}{I_{z1} + I_{z2}}$$

$$8.97 \quad \boxed{B_1 = \frac{\dot{\theta}_{10} I_{z1} + \dot{\theta}_{20} I_{z2}}{I_{z1} + I_{z2}}}$$

Riepilogo la soluzione del problema:

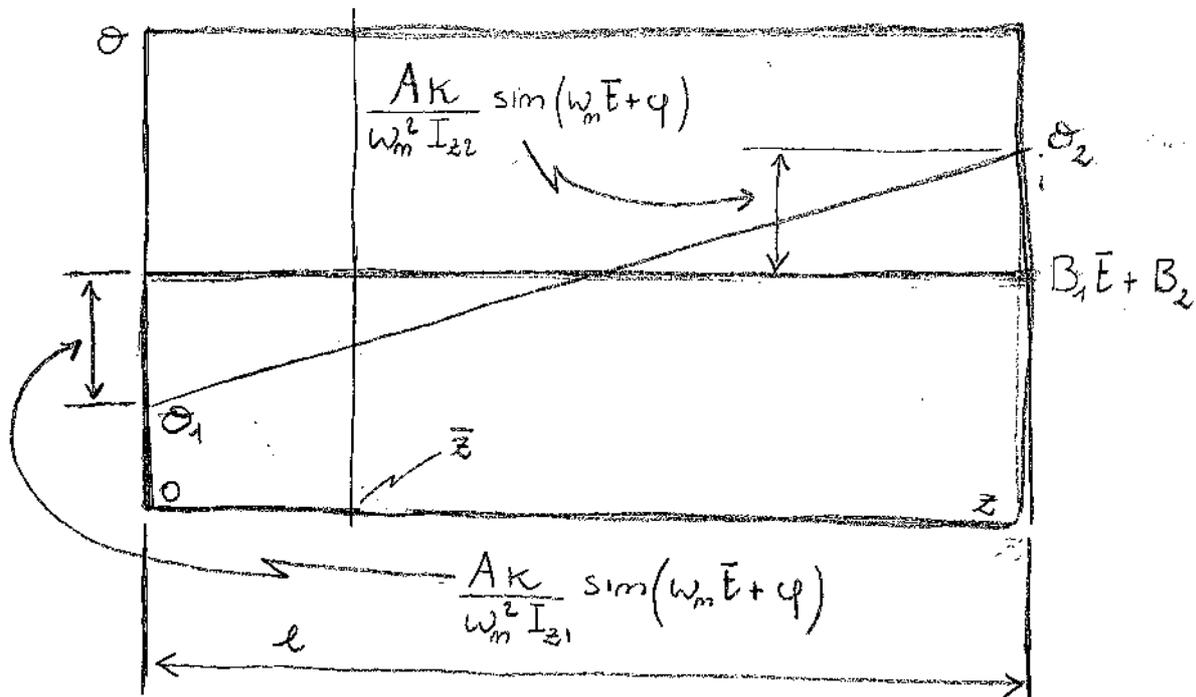
$$8.98 \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_2 - \theta_1 = A \sin(\omega_m t + \varphi) \\ \theta_1 = -\frac{AK}{\omega_m^2 I_{z1}} \sin(\omega_m t + \varphi) + B_1 t + B_2 \\ \theta_2 = \frac{AK}{\omega_m^2 I_{z2}} \sin(\omega_m t + \varphi) + B_1 t + B_2 \\ A = \frac{\sqrt{\omega_m^2 (\theta_{20} - \theta_{10})^2 + (\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10})^2}}{\omega_m} \\ \tan \varphi = \frac{\theta_{20} - \theta_{10} \omega_m}{\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}} \\ B_1 = (\dot{\theta}_{10} I_{z1} + \dot{\theta}_{20} I_{z2}) / (I_{z1} + I_{z2}) \\ B_2 = (\theta_{10} I_{z1} + \theta_{20} I_{z2}) / (I_{z1} + I_{z2}) \\ \omega_m = \sqrt{\frac{K}{I_{z1} I_{z2}} (I_{z1} + I_{z2})} \end{array} \right.$$

Si può aggiungere che - in accordo con le 8.73 - risulta

$$8.99 \quad \kappa = \frac{G J_x}{l}$$

Si aggiunge altresì che - in base ai risultati delle Meccaniche dei Solidi - si ha che la torsione dell'elmo è lineare con z

e dunque nel generico istante \bar{t} abbiamo ad esempio:



Calcolo ora le rotazioni e le velocità di rotazione delle generiche sezioni dell'albero. Si ha

$$\theta(z) = \theta_1 + \frac{\theta_2 - \theta_1}{l} z \Rightarrow$$

$$8.100) \theta(z, t) = B_1 t + B_2 - \frac{A k}{\omega_m^2 I_{z1}} \sin(\omega_m t + \varphi) + \frac{A}{l} \sin(\omega_m t + \varphi) z \Rightarrow$$

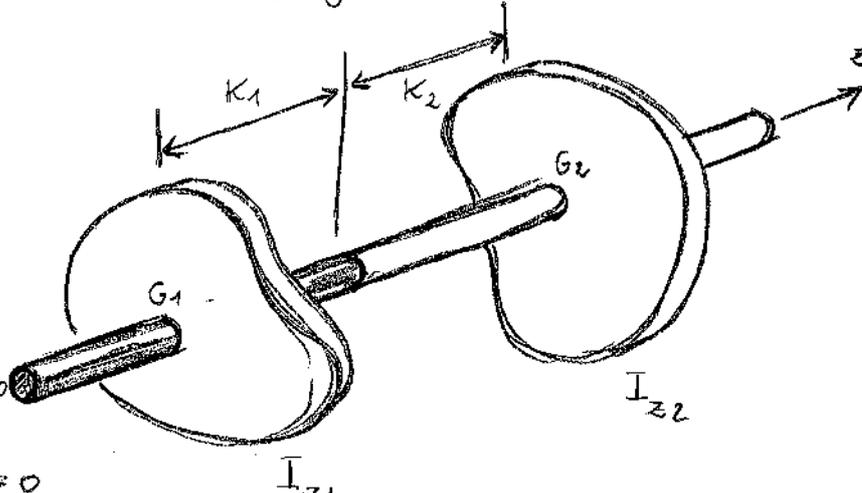
$$\dot{\theta}(z, t) = \dot{\theta}_1 + \frac{\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1}{l} z \Rightarrow$$

$$8.101) \dot{\theta}(z, t) = B_1 - \frac{A k}{\omega_m I_{z1}} \cos(\omega_m t + \varphi) + \frac{A \omega_m}{l} \cos(\omega_m t + \varphi) z$$

In definitiva abbiamo

$$8.102 \quad \begin{cases} \theta(z,t) = \beta_1 t + \beta_2 + \left(\frac{z}{l} - \frac{k}{\omega_m^2 I_{z1}} \right) A \sin(\omega_m t + \varphi) \\ \dot{\theta}(z,t) = \beta_1 + \left(\frac{z}{l} - \frac{k}{\omega_m^2 I_{z1}} \right) A \omega_m \cos(\omega_m t + \varphi) \end{cases}$$

8.25. Pendolo torsionale doppio bimateriale. Si assume ora, nel precedente meccanismo, che l'albero sia costituito da due tronchi con diverse rigidità. In tal caso, riprendendo il procedimento del paragrafo 8.23 si ha

$$\begin{cases} I_{z1} \ddot{\theta}_1 - (\theta_2 - \theta_1) K_1 = 0 \\ I_{z2} \ddot{\theta}_2 + (\theta_2 - \theta_1) K_2 = 0 \end{cases}$$


$$\begin{cases} I_{z1} I_{z2} \ddot{\theta}_1 - (\theta_2 - \theta_1) K_1 I_{z2} = 0 \\ I_{z1} I_{z2} \ddot{\theta}_2 + (\theta_2 - \theta_1) K_2 I_{z1} = 0 \end{cases}$$

⇓

$$I_{z1} I_{z2} (\ddot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_1) + (\theta_2 - \theta_1) K_2 I_{z1} + (\theta_2 - \theta_1) K_1 I_{z2} = 0 \Rightarrow$$

$$I_{z1} I_{z2} (\ddot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_1) + (K_1 I_{z2} + K_2 I_{z1}) (\theta_2 - \theta_1) = 0$$

Posto allora anche qui $\theta_2 - \theta_1 \triangleq \theta$, si ha

$$8.103 \quad \ddot{\theta} + \frac{K_1 I_{z2} + K_2 I_{z1}}{I_{z1} I_{z2}} \theta = 0 \Rightarrow$$

$$8.104 \quad \theta = A \sin(\omega_m t + \varphi), \quad \omega_m = \sqrt{\frac{K_1 I_{z2} + K_2 I_{z1}}{I_{z1} I_{z2}}} \Rightarrow$$

$$I_{z1} \ddot{\theta}_1 - A \sin(\omega_m t + \varphi) K_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{A K_1}{I_{z1}} \sin(\omega_m t + \varphi) \Rightarrow \dot{\theta}_1 = -\frac{A K_1}{\omega_m I_{z1}} \cos(\omega_m t + \varphi) + C_1 \Rightarrow$$

$$\theta_1 = -\frac{A K_1}{\omega_m^2 I_{z1}} \sin(\omega_m t + \varphi) + t C_1 + C_2$$

$$I_{z2} \ddot{\theta}_2 + A \sin(\omega_m t + \varphi) K_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\theta_2 = \frac{A K_2}{\omega_m^2 I_{z2}} \sin(\omega_m t + \varphi) + t D_1 + D_2$$

$$\theta_2 - \theta_1 = A \sin(\omega_m t + \varphi) \Rightarrow \left(\frac{A K_2}{\omega_m^2 I_{z2}} + \frac{A K_1}{\omega_m^2 I_{z1}} \right) \sin(\omega_m t + \varphi) + t(D_1 - C_1) + D_2 - C_2 = A \sin(\omega_m t + \varphi) \Rightarrow$$

$$\frac{A}{\omega_m^2} \left(\frac{K_2 I_{z1} + K_1 I_{z2}}{I_{z1} I_{z2}} \right) \sin(\omega_m t + \varphi) + t(D_1 - C_1) + D_2 - C_2 =$$

$$= A \sin(\omega_m t + \varphi) \Rightarrow \begin{cases} D_1 = C_1 \triangleq B_1 \\ D_2 = C_2 \triangleq B_2 \end{cases} \Rightarrow$$

8.105

$$\begin{cases} \theta_1 = -\frac{A K_1}{\omega_m^2 I_{z1}} \sin(\omega_m t + \varphi) + t B_1 + B_2 \\ \theta_2 = \frac{A K_2}{\omega_m^2 I_{z2}} \sin(\omega_m t + \varphi) + t B_1 + B_2 \\ \theta_2 - \theta_1 = A \sin(\omega_m t + \varphi) \\ \omega_m^2 = (K_2 I_{z1} + K_1 I_{z2}) / I_{z1} I_{z2} \end{cases}$$

Le costanti A, φ, B_1, B_2 si ricavano imponendo le c.c.

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\theta}_{10} &= -\frac{AK_1}{\omega_m^2 I_{z1}} \sin \varphi + B_2 \Rightarrow \sin \varphi = \frac{(\beta_2 - \theta_{10}) \omega_m^2 I_{z1}}{AK_1} \\ \dot{\theta}_{10} &= -\frac{AK_1}{\omega_m I_{z1}} \cos \varphi + B_1 \Rightarrow \cos \varphi = \frac{(\beta_1 - \dot{\theta}_{10}) \omega_m I_{z1}}{AK_1} \\ \dot{\theta}_{20} &= \frac{AK_2}{\omega_m^2 I_{z2}} \sin \varphi + B_2 \Rightarrow \sin \varphi = -\frac{(\beta_2 - \theta_{20}) \omega_m^2 I_{z2}}{AK_2} \\ \dot{\theta}_{20} &= \frac{AK_2}{\omega_m I_{z2}} \cos \varphi + B_1 \Rightarrow \cos \varphi = -\frac{(\beta_1 - \dot{\theta}_{20}) \omega_m I_{z2}}{AK_2} \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{(\beta_2 - \theta_{10}) \omega_m^2 I_{z1}}{AK_1} &= -\frac{(\beta_2 - \theta_{20}) \omega_m^2 I_{z2}}{AK_2} \\ \frac{(\beta_1 - \dot{\theta}_{10}) \omega_m I_{z1}}{AK_1} &= -\frac{(\beta_1 - \dot{\theta}_{20}) \omega_m I_{z2}}{AK_2} \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} (\beta_2 - \theta_{10}) I_{z1} K_2 &= -(\beta_2 - \theta_{20}) I_{z2} K_1 \\ (\beta_1 - \dot{\theta}_{10}) I_{z1} K_2 &= -(\beta_1 - \dot{\theta}_{20}) I_{z2} K_1 \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_2 (I_{z1} K_2 + I_{z2} K_1) &= \theta_{10} I_{z1} K_2 + \theta_{20} I_{z2} K_1 \\ \beta_1 (I_{z1} K_2 + I_{z2} K_1) &= \dot{\theta}_{10} I_{z1} K_2 + \dot{\theta}_{20} I_{z2} K_1 \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

$$8.106 \left\{ \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\dot{\theta}_{10} I_{z1} K_2 + \dot{\theta}_{20} I_{z2} K_1}{I_{z1} K_2 + I_{z2} K_1} \\ \beta_2 &= \frac{\theta_{10} I_{z1} K_2 + \theta_{20} I_{z2} K_1}{I_{z1} K_2 + I_{z2} K_1} \end{aligned} \right.$$

Ricavo A e φ :

$$\begin{cases} \theta_{20} - \theta_{10} = A \sin \varphi \\ \dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10} = A \omega_m \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{\omega_m} \sqrt{\omega_m (\theta_{20} - \theta_{10})^2 + (\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10})^2} \\ \varphi = \arctan \left(\frac{\theta_{20} - \theta_{10}}{\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}} \omega_m \right) \end{cases}$$

Riassumo le soluzioni trovate:

$$\theta_1 = - \frac{A K_1}{\omega_m^2 I_{z1}} \sin(\omega_m t + \varphi) + t B_1 + B_2$$

$$\theta_2 = \frac{A K_2}{\omega_m^2 I_{z2}} \sin(\omega_m t + \varphi) + t B_1 + B_2$$

$$\theta_2 - \theta_1 = A \sin(\omega_m t + \varphi)$$

$$A = \frac{\sqrt{\omega_m (\theta_{20} - \theta_{10})^2 + (\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10})^2}}{\omega_m}$$

$$\tan \varphi = \frac{\theta_{20} - \theta_{10}}{\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}} \omega_m$$

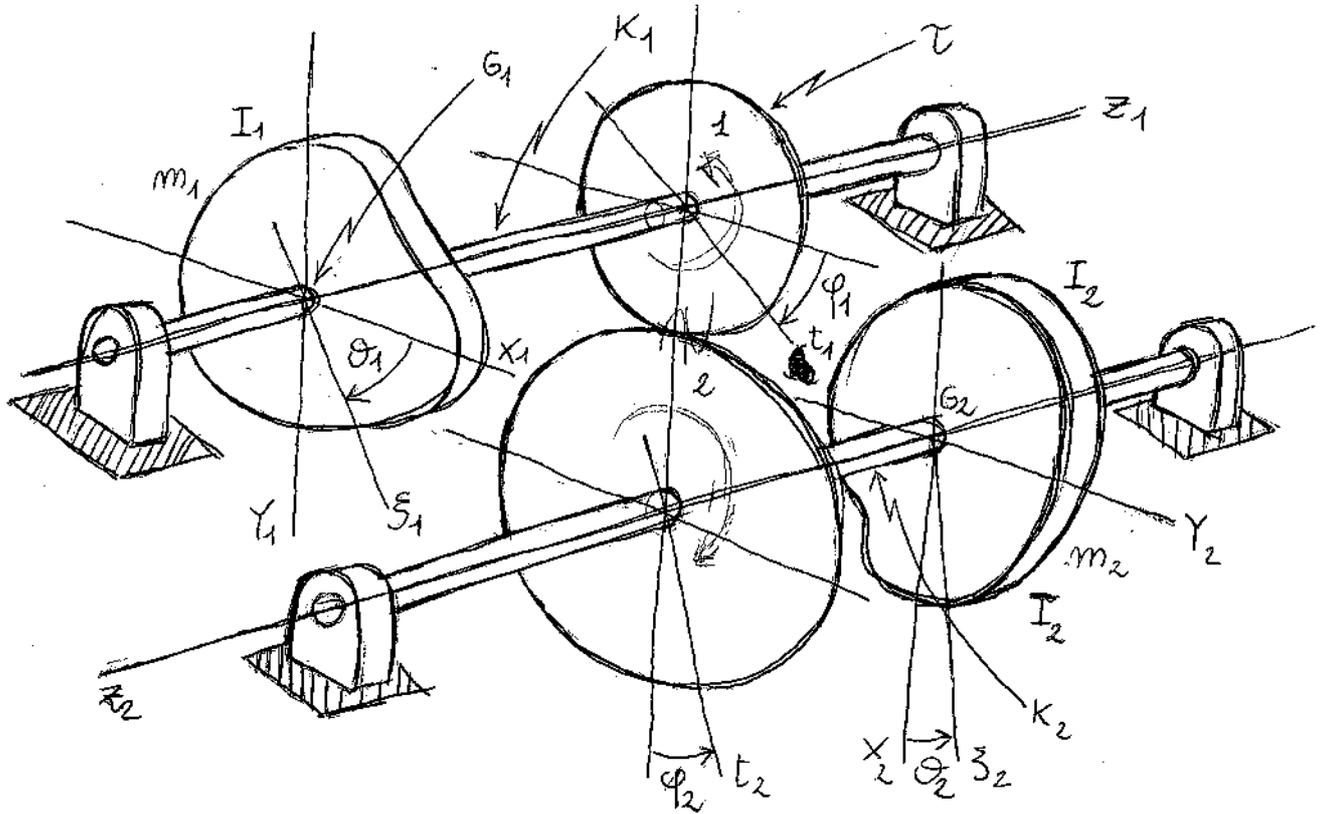
$$B_1 = \frac{\dot{\theta}_{10} I_{z1} K_2 + \dot{\theta}_{20} I_{z2} K_1}{I_{z1} K_2 + I_{z2} K_1}$$

$$B_2 = \frac{\theta_{10} I_{z1} K_2 + \theta_{20} I_{z2} K_1}{I_{z1} K_2 + I_{z2} K_1}$$

$$\omega_m^2 = (K_2 I_{z1} + K_1 I_{z2}) / I_{z1} I_{z2}$$

8.107

8.27. Pendoli torsionali accoppiati con ruote dentate. Si chiede di risolvere il problema dinamico diretto, l'accoppiamento meccanico 1-2 sia realizzato con ruote dentate con coefficiente di trasmissione τ .



L'equilibrio dei momenti per le masse m_1, m_2 possiamo rispettivamente

$$8.108 \quad \begin{cases} -I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1(\varphi_1 - \theta_1) = 0 \\ -I_2 \ddot{\theta}_2 + k_2(\varphi_2 - \theta_2) = 0 \end{cases}$$

Il rapporto di trasmissione τ permette di scrivere poi

$$8.109 \quad \begin{cases} \tau = \varphi_2 / \varphi_1 \Rightarrow \boxed{\varphi_1 = \varphi_2 / \tau} \\ \tau = \frac{-M_1}{M_2} = \frac{-k_1(\varphi_1 - \theta_1)}{k_2(\varphi_2 - \theta_2)} \Rightarrow \boxed{k_1(\varphi_1 - \theta_1) = -\tau k_2(\varphi_2 - \theta_2)} \end{cases}$$

Sostituendo le prime delle 8.109 nelle seconde si ha

$$K_1(\varphi_1 - \theta_1) = -\tau K_2(\tau \varphi_1 - \theta_2) \Rightarrow K_1 \varphi_1 - K_1 \theta_1 = -\tau^2 \varphi_1 K_2 + \tau K_2 \theta_2 \Rightarrow$$

$$\tau K_2 \theta_2 = \underbrace{-K_1 \theta_1}_{\text{circled}} + \tau^2 \varphi_1 K_2 + K_1 \varphi_1 = -K_1 \theta_1 + (\tau^2 K_2 + K_1) \varphi_1$$

Dunque le 8.109 si scrivono

$$8.110 \quad \begin{cases} \varphi_2 = \tau \varphi_1 \\ \theta_2 = \frac{-K_1 \theta_1 + (\tau^2 K_2 + K_1) \varphi_1}{\tau K_2} \Rightarrow \ddot{\theta}_2 = \frac{-K_1 \ddot{\theta}_1 + (\tau^2 K_2 + K_1) \ddot{\varphi}_1}{\tau K_2} \end{cases}$$

Sostituendo le 8.110 nelle 2° delle 8.108 si ha

$$-I_2 \ddot{\theta}_2 + K_2 \left(\tau \varphi_1 - \frac{-K_1 \theta_1 + (\tau^2 K_2 + K_1) \varphi_1}{\tau K_2} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$-I_2 \ddot{\theta}_2 + K_2 \tau \varphi_1 - \frac{-K_1 \theta_1 + (\tau^2 K_2 + K_1) \varphi_1}{\tau} = 0 \Rightarrow$$

$$-I_2 \tau \ddot{\theta}_2 + K_2 \tau^2 \varphi_1 + K_1 \theta_1 - (\tau^2 K_2 + K_1) \varphi_1 = 0 \Rightarrow$$

$$-I_2 \tau \frac{-K_1 \ddot{\theta}_1 + (\tau^2 K_2 + K_1) \ddot{\varphi}_1}{\tau K_2} + K_2 \tau^2 \varphi_1 + K_1 \theta_1 - (\tau^2 K_2 + K_1) \varphi_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\left(+I_2 \frac{K_1}{K_2} \ddot{\theta}_1 - \frac{I_2 (\tau^2 K_2 + K_1)}{K_2} \ddot{\varphi}_1 \right) + K_2 \tau^2 \varphi_1 + K_1 \theta_1 - (\tau^2 K_2 + K_1) \varphi_1 = 0 \Rightarrow$$

$$+I_2 \frac{K_1}{K_2} \ddot{\theta}_1 + K_1 \theta_1 - \frac{I_2 (\tau^2 K_2 + K_1)}{K_2} \ddot{\varphi}_1 + K_2 \tau^2 \varphi_1 + \tau^2 K_2 \varphi_1 - K_1 \varphi_1 = 0 \Rightarrow$$

$$8.111 \quad +I_2 \frac{K_1}{K_2} \ddot{\theta}_1 + K_1 \theta_1 - \frac{I_2 (\tau^2 K_2 + K_1)}{K_2} \ddot{\varphi}_1 - K_1 \varphi_1 + 2K_2 \tau^2 \varphi_1 = 0$$

È esplicito ad esso le prime della 8.108 rispetto φ_1 :

$$-I_1 \ddot{\theta}_1 + K_1 \varphi_1 - K_1 \theta_1 = 0 \Rightarrow K_1 \varphi_1 = I_1 \ddot{\theta}_1 + K_1 \theta_1 \Rightarrow$$

$$8.112 \quad \varphi_1 = \frac{I_1 \ddot{\theta}_1}{K_1} + \theta_1 \Rightarrow \ddot{\varphi}_1 = \frac{I_1}{K_1} \theta_1^{IV} + \ddot{\theta}_1$$

Sostituendo nella 8.111 si ha

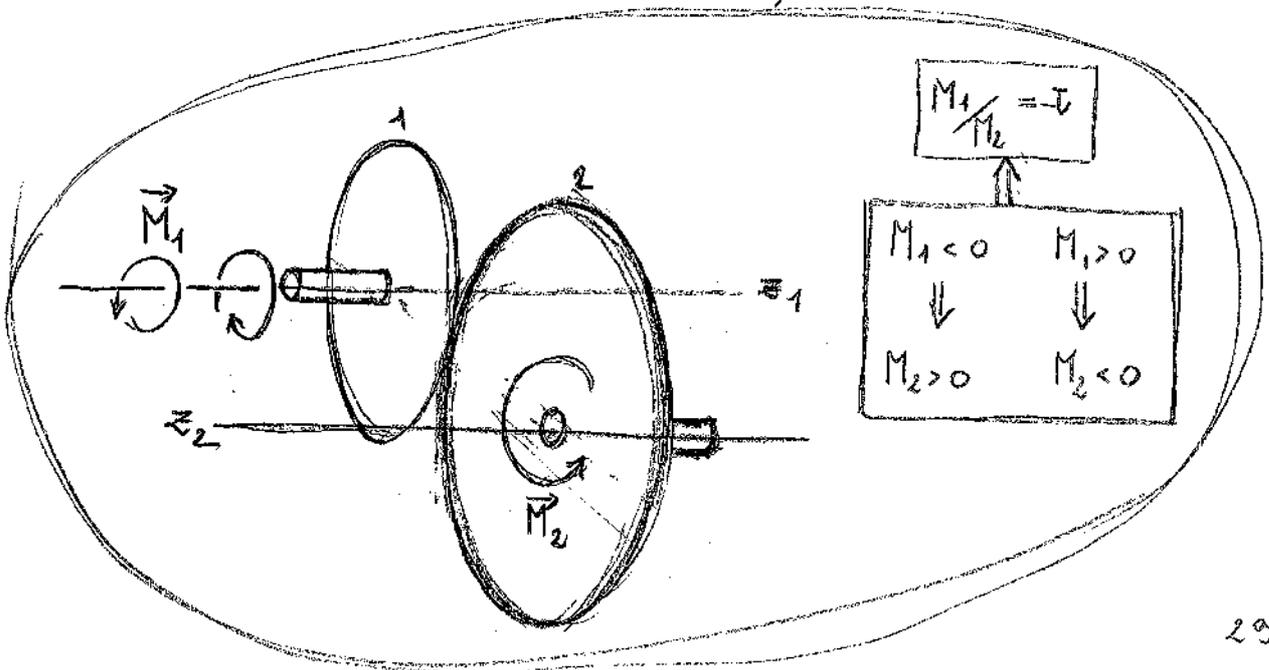
$$+I_2 \frac{K_1}{K_2} \theta_1'' + K_1 \theta_1 - I_2 \frac{\tau^2 K_2 + K_1}{K_2} \left(\frac{I_1}{K_1} \theta_1^{IV} + \theta_1'' \right) + (2K_2 \tau^2 - K_1) \left(\frac{I_1}{K_1} \theta_1'' + \theta_1 \right) = 0$$

$$\left(\frac{I_2 K_1}{K_2} \theta_1'' + K_1 \theta_1 + \frac{I_2 \tau^2 K_2 - K_1}{K_2} \frac{I_1}{K_1} \theta_1^{IV} + \frac{I_2 \tau^2 K_2 - K_1}{K_2} \theta_1'' + (2K_2 \tau^2 - K_1) \frac{I_1}{K_1} \theta_1'' + (2K_2 \tau^2 - K_1) \theta_1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{I_1 I_2 (\tau^2 K_2 - K_1)}{K_1 K_2} \theta_1^{IV} + \left(\frac{I_2 K_1}{K_2} + \frac{I_2 \tau^2 K_2}{K_1} - \frac{I_2 K_1}{K_2} \right) \theta_1'' + (2K_2 \tau^2 - K_1) \frac{I_1}{K_1} \theta_1'' + (2K_2 \tau^2 - K_1) \theta_1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{I_1 I_2 (\tau^2 K_2 - K_1)}{K_1 K_2} \theta_1^{IV} + \left(\frac{I_2 \tau^2 K_2}{K_1} + \frac{2K_2 \tau^2 I_1 - I_1}{K_1} \right) \theta_1'' + 2K_2 \tau^2 \theta_1 = 0 \Rightarrow$$

$$8.113 \quad \frac{I_1 I_2 (\tau^2 K_2 - K_1)}{K_1 K_2} \theta_1^{IV} + \left(\frac{\tau^2 K_2 (I_2 + 2I_1) - I_1}{K_1} \right) \theta_1'' + 2K_2 \tau^2 \theta_1 = 0$$

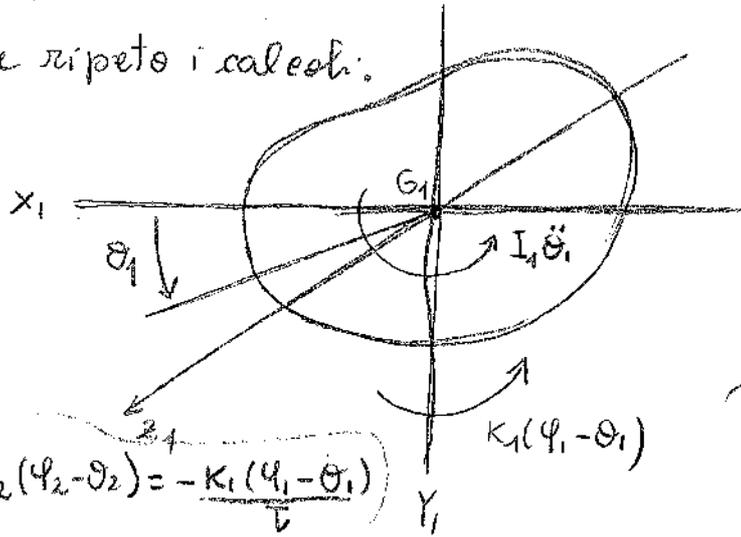


Le equazioni omogenee associate si scrivono

$$I_1 I_2 \left(\frac{\tau^2 K_2 - K_1}{K_1 K_2} \right) \zeta^4 + \left(\frac{\tau^2 K_2 (I_2 + 2I_1)}{K_1} - I_1 \right) \zeta^2 + 2K_2 \tau \zeta = 0$$

Ma da ciò non segue, dunque ripeto i calcoli:

$$\begin{cases} -I_1 \ddot{\theta}_1 + K_1 (\varphi_1 - \theta_1) = 0 \\ -I_2 \ddot{\theta}_2 + K_2 (\varphi_2 - \theta_2) = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \tau = \varphi_2 / r_2 \Rightarrow \varphi_2 = \tau \varphi_1 \\ \tau = -\frac{M_1}{M_2} = -\frac{K_1 (\varphi_1 - \theta_1)}{K_2 (\varphi_2 - \theta_2)} \Rightarrow K_2 (\varphi_2 - \theta_2) = -\frac{K_1 (\varphi_1 - \theta_1)}{\tau} \end{cases}$$

$$K_2 \tau \varphi_1 - K_2 \theta_2 = \frac{-K_1 \varphi_1 + K_1 \theta_1}{\tau} \Rightarrow K_2 \tau^2 \varphi_1 - \tau K_2 \theta_2 = -K_1 \varphi_1 + K_1 \theta_1 \Rightarrow$$

$$\tau K_2 \theta_2 = K_2 \tau^2 \varphi_1 + K_1 \varphi_1 - K_1 \theta_1 = (K_2 \tau^2 + K_1) \varphi_1 - K_1 \theta_1 \Rightarrow$$

$$\theta_2 = \frac{(K_2 \tau^2 + K_1) \varphi_1 - K_1 \theta_1}{\tau K_2}$$

$$-I_2 \ddot{\theta}_2 + K_2 \left[\tau \varphi_1 - \frac{(K_2 \tau^2 + K_1) \varphi_1 + K_1 \theta_1}{\tau K_2} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$-I_2 \left[\frac{K_2 \tau^2 + K_1}{\tau K_2} \ddot{\varphi}_1 - \frac{K_1 \ddot{\theta}_1}{\tau K_2} \right] + K_2 \left[\frac{\tau^2 K_2 - I_2 K_2 - K_1}{\tau K_2} \varphi_1 + \frac{K_1 \theta_1}{\tau K_2} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$-I_2 (K_2 \tau^2 + K_1) \ddot{\varphi}_1 + I_2 K_1 \ddot{\theta}_1 - K_1 K_2 \varphi_1 + K_1 K_2 \theta_1 = 0$$

$$K_1 (\varphi_1 - \theta_1) = I_1 \ddot{\theta}_1 \Rightarrow K_1 \varphi_1 - K_1 \theta_1 = I_1 \ddot{\theta}_1 \Rightarrow K_1 \varphi_1 = K_1 \theta_1 + I_1 \ddot{\theta}_1 \Rightarrow$$

$$\varphi_1 = \theta_1 + \frac{I_1}{K_1} \ddot{\theta}_1$$

$$-I_2(k_2\tau^2 + k_1)(\ddot{\theta}_1 + I_1/k_1 \theta_1^{IV}) + I_2 k_1 \ddot{\theta}_1 - k_1^{\cancel{K_2}} (\theta_1 + \frac{I_1}{k_1} \dot{\theta}_1) + k_1^{\cancel{K_2}} \theta_1 = 0 \Rightarrow$$

$$-I_2(k_2\tau^2 + k_1)\ddot{\theta}_1 - \frac{I_1 I_2 (k_2\tau^2 + k_1)}{k_1} \theta_1^{IV} + I_2 k_1 \ddot{\theta}_1 - \cancel{k_1^{\cancel{K_2}}} \theta_1 - \cancel{I_1^{\cancel{K_2}}} \dot{\theta}_1 + \cancel{k_1^{\cancel{K_2}}} \theta_1 = 0 \Rightarrow$$

$$-I_2 k_2 \tau^2 \ddot{\theta}_1 - \cancel{I_2 k_1} \ddot{\theta}_1 - \frac{I_1 I_2 (k_2\tau^2 + k_1)}{k_1} \theta_1^{IV} + \cancel{I_2 k_1} \ddot{\theta}_1 - \cancel{I_1^{\cancel{K_2}}} \dot{\theta}_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{I_1 I_2 (k_2\tau^2 + k_1)}{k_1} \theta_1^{IV} + (I_1 k_2 + I_2 k_2 \tau^2) \ddot{\theta}_1 = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_1 \Rightarrow \ddot{\theta} = \theta_1^{IV}} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{(I_1 k_2 + I_2 k_2 \tau^2) k_1}{I_1 I_2 (k_2\tau^2 + k_1)} \ddot{\theta} = 0}$$

$$\ddot{\theta} = A \cos(\omega_m t + \gamma) \Rightarrow \dot{\theta}_1 = \int \ddot{\theta} dt = \frac{A}{\omega_m} \sin(\omega_m t + \gamma) + B_1 \Rightarrow *$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{(I_1 k_2 + I_2 k_2 \tau^2) k_1}{I_1 I_2 (k_2\tau^2 + k_1)}} = \sqrt{\frac{(I_1 + I_2 \tau^2) k_1 k_2}{I_1 I_2 (k_2\tau^2 + k_1)}}$$

$$* \boxed{\theta_1 = \frac{-A}{\omega_m^2} \cos(\omega_m t + \gamma) + B_1 t + B_2}$$

Rimovimomando le costanti si ha

$$\theta_1 = A_1 \cos(\omega_m t + \gamma) + A_2 t + A_3$$

$$\varphi_1 = A_1 \cos(\omega_m t + \gamma) + A_2 t + A_3 + \frac{I_1}{k_1} \left[-A_1 \omega_m^2 \sin(\omega_m t + \gamma) \right] =$$

$$\theta_1 = A_1 \cos(\omega_m t + \gamma) - \frac{I_1 A_1 \omega_m^2}{k_1} \sin(\omega_m t + \gamma) + A_2 t + A_3$$

$$\varphi_2 = \tau \varphi_1$$

$$\theta_2 = \frac{(k_2\tau^2 + k_1)}{\tau k_2} \varphi_1 - \frac{k_1 \theta_1}{\tau k_2} = \frac{\cancel{k_2\tau^2}}{\cancel{\tau k_2}} \varphi_1 + \frac{k_1 \varphi_1}{\tau k_2} - \frac{k_1 \theta_1}{\tau k_2} =$$

$$= \tau \varphi_1 + \frac{k_1 \varphi_1}{\tau k_2} - \frac{k_1 \theta_1}{\tau k_2} = \tau \varphi_1 + \frac{k_1}{\tau k_2} \theta_1 + \frac{k_1 I_1}{\tau k_2 k_1} \dot{\theta}_1 - \frac{k_1 \theta_1}{\tau k_2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \tau \varphi_1 + \frac{I_1}{\tau K_2} \ddot{\theta}_1 = \left[\tau A_1 \cos(\omega_m t + \gamma) - \frac{\tau I_1 A_1 \omega_m^2}{K_1} \sin(\omega_m t + \gamma) \right] + \\
&+ \tau A_2 t + \tau A_3 - \left[\frac{I_1 \omega_m^2 A_1 \cos(\omega_m t + \gamma)}{\tau K_2} \right] = \left(\tau - \frac{I_1 \omega_m^2}{\tau K_2} \right) A_1 \cos(\omega_m t + \gamma) - \\
&- \frac{\tau I_1 A_1 \omega_m^2}{K_1} \sin(\omega_m t + \gamma) + \tau A_2 t + \tau A_3
\end{aligned}$$

Dunque la soluzione completa è

$$8.114 \quad \begin{cases}
\theta_1 = A_1 \cos(\omega_m t + \gamma) + A_2 t + A_3 \\
\varphi_1 = A_1 \cos(\omega_m t + \gamma) - \frac{I_1 A_1 \omega_m^2}{K_1} \sin(\omega_m t + \gamma) + A_2 t + A_3 \\
\theta_2 = \left(\tau - \frac{I_1 \omega_m^2}{\tau K_2} \right) A_1 \cos(\omega_m t + \gamma) - \frac{\tau I_1 A_1 \omega_m^2}{K_1} \sin(\omega_m t + \gamma) + \tau A_2 t + \tau A_3 \\
\varphi_2 = \tau \varphi_1
\end{cases}$$

con le condizioni al contorno

$$8.115 \quad \boxed{
\begin{aligned}
\theta_1(t=0) &= \theta_{10} & \theta_2(t=0) &= \theta_{20} \\
\dot{\theta}_1(t=0) &= \dot{\theta}_{10} & \dot{\theta}_2(t=0) &= \dot{\theta}_{20}
\end{aligned}
}$$

Ricavo le costanti imponendo le c.c.:

$$\dot{\theta}_1 = -A_1 \omega_m \sin(\omega_m t + \gamma) + A_2 \Rightarrow$$

$$\dot{\theta}_{10} = -A_1 \omega_m \sin \gamma + A_2 \Rightarrow \boxed{A_2 = \dot{\theta}_{10} + A_1 \omega_m \sin \gamma}$$

$$\dot{\theta}_2 = \left(\tau - \frac{I_1 \omega_m^2}{\tau K_2} \right) A_1 \omega_m (-1) \sin(\omega_m t + \gamma) - \frac{\tau I_1 A_1 \omega_m^3}{K_1} \cos(\omega_m t + \gamma) +$$

$$+ \tau A_2 \Rightarrow$$

$$\dot{\theta}_{20} = -\left(\tau - \frac{I_1 \omega_m^2}{\tau K_2}\right) A_1 \omega_m \sin \gamma - \frac{\tau I_1 A_1 \omega_m^3 \cos \gamma}{K_1} + \tau A_2 \Rightarrow$$

$$\dot{\theta}_{20} = -\left(\tau - \frac{I_1 \omega_m^2}{\tau K_2}\right) A_1 \omega_m \sin \gamma - \frac{\tau I_1 A_1 \omega_m^3 \cos \gamma}{K_1} + \tau \dot{\theta}_{10} + \tau A_1 \omega_m \sin \gamma \Rightarrow$$

$$\dot{\theta}_{20} = \left(\tau - \tau + \frac{I_1 \omega_m^2}{\tau K_2}\right) A_1 \omega_m \sin \gamma - \frac{\tau I_1 A_1 \omega_m^3 \cos \gamma}{K_1} + \tau \dot{\theta}_{10} \Rightarrow$$

$$\dot{\theta}_{20} = \frac{I_1 A_1 \omega_m^3}{\tau K_2} (\sin \gamma) - \frac{\tau I_1 A_1 \omega_m^3 \cos \gamma}{K_1} + \tau \dot{\theta}_{10} \Rightarrow$$

$$\dot{\theta}_{20} = I_1 A_1 \omega_m^3 \left(\frac{\sin \gamma}{\tau K_2} - \frac{\tau \cos \gamma}{K_1} \right) + \tau \dot{\theta}_{10} \Rightarrow$$

$$I_1 A_1 \omega_m^3 \left(\frac{\sin \gamma}{\tau K_2} - \frac{\tau \cos \gamma}{K_1} \right) = \dot{\theta}_{20} - \tau \dot{\theta}_{10} \Rightarrow$$

$$A_1 = \frac{\dot{\theta}_{20} - \tau \dot{\theta}_{10}}{I_1 \omega_m^3 \left(\frac{\sin \gamma}{\tau K_2} - \frac{\tau \cos \gamma}{K_1} \right)}$$

$$A_2 = \dot{\theta}_{10} + \frac{(\dot{\theta}_{20} - \tau \dot{\theta}_{10}) \sin \gamma}{I_1 \omega_m^2 \left(\frac{\sin \gamma}{\tau K_2} - \frac{\tau \cos \gamma}{K_1} \right)}$$

$$\dot{\theta}_{10} = A_1 \cos \gamma + A_3 \Rightarrow A_3 = \dot{\theta}_{10} - A_1 \cos \gamma$$

$$\dot{\theta}_{10} - \dot{\phi}_{10} = \cancel{A_1 \cos \gamma} + \cancel{A_3} - \cancel{A_1 \cos \gamma} + \frac{I_1 A_1 \omega_m^2 \sin \gamma}{K_1} - \cancel{A_3} = \frac{I_1 A_1 \omega_m^2 \sin \gamma}{K_1}$$

$$\dot{\theta}_{20} - \dot{\phi}_{20} = \left(\tau - \frac{I_1 \omega_m^2}{\tau K_2}\right) A_1 \cos \gamma - \frac{\tau I_1 A_1 \omega_m^2 \sin \gamma}{K_1} + \tau \cancel{A_3} -$$

$$= \tau A_1 \cos \gamma + \frac{\tau I_1 A_1 \omega_m^2 \sin \gamma}{K_1} - \tau \cancel{A_3} = \tau A_1 \cos \gamma - \frac{I_1 \omega_m^2 A_1 \cos \gamma}{\tau K_2} -$$

$$- \tau \cancel{A_3} \cos \gamma = - \frac{I_1 \omega_m^2 A_1 \cos \gamma}{\tau K_2}$$

$$\begin{cases} K_1(\theta_{10} - \varphi_{10}) = I_1 A_1 \omega_m^2 \sin \gamma \\ \tau K_2(\theta_{20} - \varphi_{20}) = -I_1 A_1 \omega_m^2 \cos \gamma \end{cases}$$

↓

$$\frac{K_1(\theta_{10} - \varphi_{10})}{K_2(\tau\theta_{20} - \tau\varphi_{20})} = \tan \gamma$$

$$\theta_{20} = \frac{K_2\tau^2 + K_1}{\tau K_2} \varphi_{10} - \frac{K_1\theta_{10}}{\tau K_2} \Rightarrow \tau K_2 \theta_{20} = (K_2\tau^2 + K_1)\varphi_{10} - K_1\theta_{10} \Rightarrow$$

$$(K_2\tau^2 + K_1)\varphi_{10} = \tau K_2 \theta_{20} + K_1\theta_{10} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{10} = \frac{\tau K_2 \theta_{20} + K_1 \theta_{10}}{K_2\tau^2 + K_1} \\ \varphi_{20} = \tau \varphi_{10} \end{cases}$$

$$\tan \gamma = - \frac{K_1 \left(\theta_{10} - \frac{\tau K_2 \theta_{20} + K_1 \theta_{10}}{K_2\tau^2 + K_1} \right)}{K_2 \left(\tau \theta_{20} - \tau^2 \frac{\tau K_2 \theta_{20} + K_1 \theta_{10}}{K_2\tau^2 + K_1} \right)}$$

$$= - \frac{K_1 \left(\theta_{10} (K_2\tau^2 + K_1) - (\tau K_2 \theta_{20} + K_1 \theta_{10}) \right)}{K_2 \left(\tau \theta_{20} (K_2\tau^2 + K_1) - \tau^2 (\tau K_2 \theta_{20} + K_1 \theta_{10}) \right)}$$

$$= - \frac{K_1 \left(\theta_{10} (K_2\tau^2 + K_1) - \tau K_2 \theta_{20} - K_1 \theta_{10} \right)}{K_2 \tau \left(\theta_{20} K_2\tau^2 + \theta_{20} K_1 - \tau^2 K_2 \theta_{20} - \tau K_1 \theta_{10} \right)} = - \frac{K_1 \tau}{K_1 K_2 \tau (-\theta_{10} \tau + \theta_{20})}$$

$$= - \frac{K_1 K_2 \tau (\theta_{10} \tau - \theta_{20})}{K_1 K_2 \tau (-\theta_{10} \tau + \theta_{20})} = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin \gamma = \sqrt{2}/2 \\ \cos \gamma = \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_1^2(\theta_{10} - \varphi_{10})^2 = I_1^2 A_1^2 \omega_m^4 \sin^2 \gamma \\ \tau^2 K_2^2(\theta_{20} - \varphi_{20})^2 = I_1^2 A_1^2 \omega_m^4 \cos^2 \gamma \end{cases} \Rightarrow I_1^2 A_1^2 \omega_m^4 = K_1^2(\theta_{10} - \varphi_{10})^2 + \tau^2 K_2^2(\theta_{20} - \varphi_{20})^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
I_1^2 A_1^2 \omega_m^4 &= K_1^2 (\theta_{10}^2 + \varphi_{10}^2 - 2\theta_{10}\varphi_{10}) + \tau^2 K_2^2 (\theta_{20}^2 + \varphi_{20}^2 - 2\theta_{20}\varphi_{20}) = \\
&= \underline{K_1^2 \theta_{10}^2 + K_1^2 \varphi_{10}^2 - 2K_1^2 \theta_{10}\varphi_{10}} + \underline{\tau^2 K_2^2 \theta_{20}^2 + \tau^2 K_2^2 \varphi_{20}^2 - 2\tau^2 K_2^2 \theta_{20}\varphi_{20}} = \\
&= \left[K_1^2 \theta_{10}^2 + \tau^2 K_2^2 \theta_{20}^2 \right] + \left(K_1^2 \varphi_{10}^2 \right) + \tau^2 K_2^2 \varphi_{20}^2 - 2 \left(K_1^2 \theta_{10} \varphi_{10} \right) - 2\tau^2 K_2^2 \theta_{20} \varphi_{20} = \\
&= K_1^2 \theta_{10}^2 + \tau^2 K_2^2 \theta_{20}^2 + K_1^2 \varphi_{10}^2 (\varphi_{10} - 2\theta_{10}) + \tau^2 K_2^2 (\varphi_{20}^2 - 2\theta_{20}\varphi_{20}) = \\
&= K_1^2 \theta_{10}^2 + \tau^2 K_2^2 \theta_{20}^2 + K_1^2 \varphi_{10} (\varphi_{10} - 2\theta_{10}) + \tau^2 K_2^2 \tau \varphi_{10} (\tau \varphi_{10} - 2\theta_{20}) = \\
&= K_1^2 \theta_{10}^2 + \tau^2 K_2^2 \theta_{20}^2 \dots \text{ lascia questa verifica.}
\end{aligned}$$

In conclusione si hanno le costanti:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\dot{\theta}_{20} - \tau \dot{\theta}_{10}}{I_1 \omega_m^3 \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{\tau K_2} - \frac{\tau}{K_1} \right)} & A_3 &= \theta_{10} - \frac{\dot{\theta}_{20} - \tau \dot{\theta}_{10}}{I_1 \omega_m^3 \left(\frac{1}{\tau K_2} - \frac{\tau}{K_1} \right)} \\
A_2 &= \frac{\dot{\theta}_{10} + \dot{\theta}_{20} - \tau \dot{\theta}_{10}}{I_1 \omega_m^2 \left(\frac{1}{\tau K_2} - \frac{\tau}{K_1} \right)} & \gamma &= \pi/4
\end{aligned}$$

8.116

Capitolo 3. Applicazioni sulle oscillazioni libere smorzate

3.1. Un primo esempio numerico. Sia dato un sistema vibrante armonicamente (a un grado di libertà) con i parametri seguenti:

$$\zeta = 0,5 \quad \omega_n = 0,2 \text{ rad/s}$$

e con le condizioni al contorno

$$x_0 = 0 \quad \dot{x}_0 = 1 \text{ cm/s}$$

Sappiamo che per $\zeta < 1$ (paragrafo 3.6) l'equazione omogenea è

$$\text{3.1} \begin{cases} x = e^{-\omega_n \zeta t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) \\ \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \end{cases}$$

Ricavo le costanti A, B in funzione delle c.c.:

$$\boxed{x_0 = A}$$

$$\dot{x} = -\omega_n \zeta e^{-\omega_n \zeta t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) + e^{-\omega_n \zeta t} (-A \omega_d \sin \omega_d t + B \omega_d \cos \omega_d t) \Rightarrow \dot{x}_0 = -\omega_n \zeta A + B \omega_d = -\omega_n \zeta x_0 + B \omega_d \Rightarrow$$

$$\text{ic} \quad B \omega_d = \dot{x}_0 + \omega_n \zeta x_0 \Rightarrow \boxed{B = \frac{\dot{x}_0 + \omega_n \zeta x_0}{\omega_d}}$$

$$\text{3.2} \begin{cases} A = x_0 \\ B = \frac{\omega_n \zeta x_0 + \dot{x}_0}{\omega_d} \end{cases}$$

Donunque la soluzione è

$$9.3) \quad x = e^{-\omega_m \zeta t} \left(x_0 \cos \omega_s t + \frac{\omega_m \zeta x_0 + \dot{x}_0}{\omega_s} \sin \omega_s t \right)$$

Alternativamente si può scrivere

$$x = e^{-\omega_m \zeta t} C \sin(\omega_s t + \varphi) = e^{-\omega_m \zeta t} (C \cos \varphi \sin \omega_s t + C \sin \varphi \cos \omega_s t)$$

$$\begin{cases} C \cos \varphi = \frac{\omega_m \zeta x_0 + \dot{x}_0}{\omega_s} \\ C \sin \varphi = x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan \varphi = \frac{x_0 \omega_s}{\omega_m \zeta x_0 + \dot{x}_0} \\ C^2 = x_0^2 + \frac{(\omega_m \zeta x_0 + \dot{x}_0)^2}{\omega_s^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \varphi = \arctan \frac{x_0 \omega_m \sqrt{1-\zeta^2}}{\omega_m \zeta x_0 + \dot{x}_0} \\ C^2 = \frac{x_0^2 \omega_m^2 (1-\zeta^2) + (\omega_m \zeta x_0 + \dot{x}_0)^2}{\omega_m^2 (1-\zeta^2)} = \frac{x_0^2 \omega_m^2 - x_0^2 \omega_m^2 \zeta^2 + \omega_m^2 \zeta^2 x_0^2 + \dot{x}_0^2 + 2\omega_m \zeta x_0 \dot{x}_0}{\omega_m^2 (1-\zeta^2)} \end{cases}$$

⇓

$$\begin{cases} \varphi = \arctan \frac{x_0 \omega_m \sqrt{1-\zeta^2}}{\omega_m \zeta x_0 + \dot{x}_0} \\ C = \sqrt{\frac{x_0^2 \omega_m^2 + \dot{x}_0^2 + 2\omega_m \zeta x_0 \dot{x}_0}{\omega_m^2 (1-\zeta^2)}} \end{cases}$$

Donunque una scrittura alternativa alle 9.3 dell'oscillatore

libero smorzato è la seguente

$$9.4 \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{X_0^2 \omega_m^2 + 2\omega_m \zeta X_0 \dot{X}_0 + \dot{X}_0^2}}{\omega_m \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\omega_m \zeta t} \sin(\omega_d t + \varphi) \\ \tan \varphi = \frac{X_0 \omega_m \sqrt{1 - \zeta^2}}{\omega_m \zeta X_0 + \dot{X}_0} \end{cases}$$

Nel caso specifico $\dot{X}_0 = 0$ e dunque la 9.4 si scrive

$$9.5 \quad x = \frac{|\dot{X}_0|}{\omega_m \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\omega_m \zeta t} \sin(\omega_m \sqrt{1 - \zeta^2} t)$$

Sostituendo i dati numerici angmat si ha

$$x = \frac{10^{-2} \text{ m/s}}{0,2 \pi \sqrt{1 - 0,25}} e^{-0,2 \pi \cdot 0,5 t} \sin\left(0,2 \frac{\pi}{0} \sqrt{1 - 0,25} t\right) \Rightarrow$$

$$9.6 \quad \boxed{x = 5,77 \cdot 10^{-2} \text{ m} e^{-0,1 t} \sin\left(\frac{0,1732}{0} t\right)}$$

Calcolo ora l'elongazione massima;

$$\begin{aligned} x &= C e^{-\omega_m \zeta t} \sin(\omega_d t + \varphi) \Rightarrow \dot{x} = \cancel{C} (-\omega_m \zeta) e^{-\omega_m \zeta t} \sin(\omega_d t + \varphi) + \\ &+ \cancel{C} e^{-\omega_m \zeta t} \omega_d \cos(\omega_d t + \varphi) = 0 \Leftrightarrow -\omega_m \zeta \sin(\omega_d t + \varphi) + \end{aligned}$$

$$+ : w_0 \cos(w_0 t + \varphi) = 0 \iff w_m \sin(w_0 t + \varphi) = w_0 \cos(w_0 t + \varphi)$$

$$\iff \tan(w_0 t + \varphi) = \frac{w_0}{w_m} \iff w_0 t + \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{w_0}{w_m}\right) \iff$$

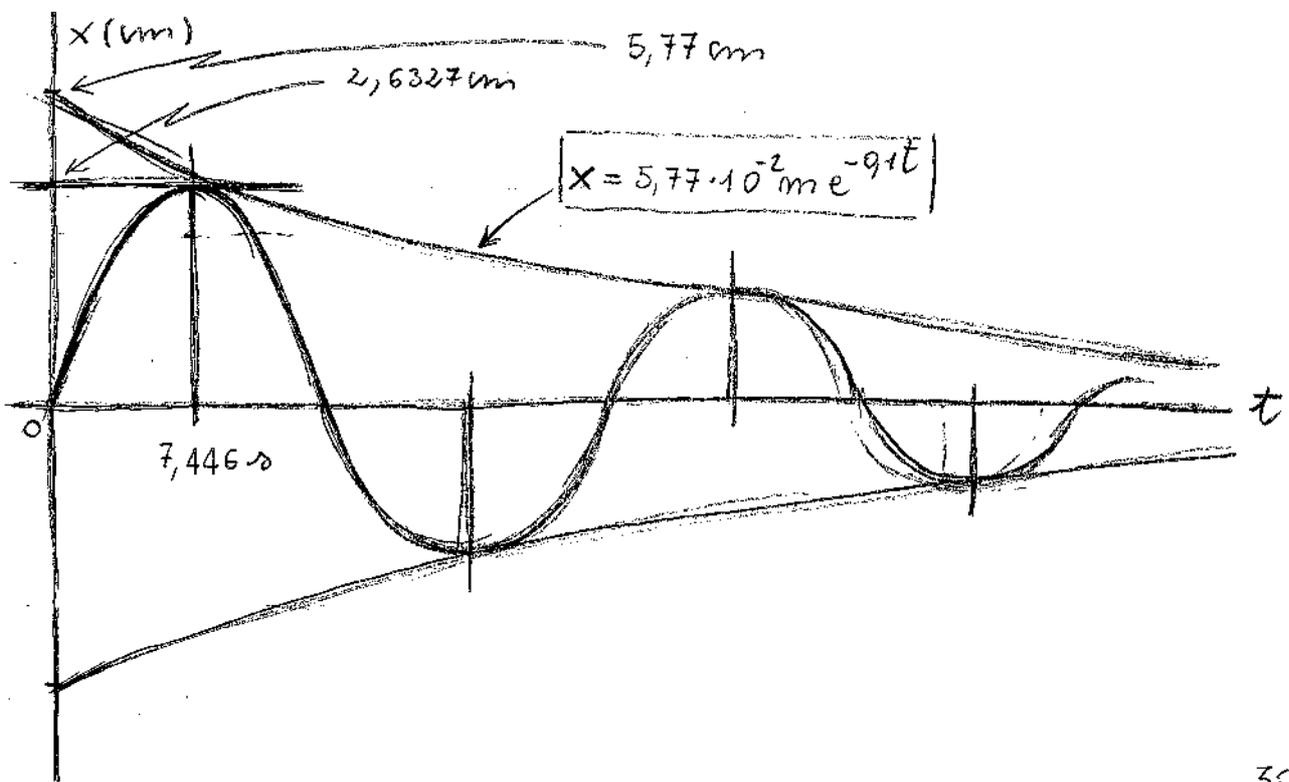
$$w_0 t = \tan^{-1}\left(\frac{w_0}{w_m}\right) - \varphi \iff \boxed{t_{\text{MAX}} = \frac{\tan^{-1}\left(\frac{w_0}{w_m}\right) - \varphi}{w_0}}$$

Nel nostro caso particolare si ha

$$t_{\text{MAX}} = \frac{\tan^{-1}\left(\frac{0,25 \sqrt{1-0,5^2}}{0,25}\right)}{0,2 \sqrt{0,75}} = \frac{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{0,75}}{0,25}\right)}{0,2 \sqrt{0,75}} = 7,446 \text{ s} \implies$$

$$x_{\text{MAX}} = 5,77 \cdot 10^{-2} \text{ m} e^{-0,1 t_{\text{MAX}}} \sin\left(\frac{0,1732 t}{\text{s}}\right) = 2,6327 \text{ cm}$$

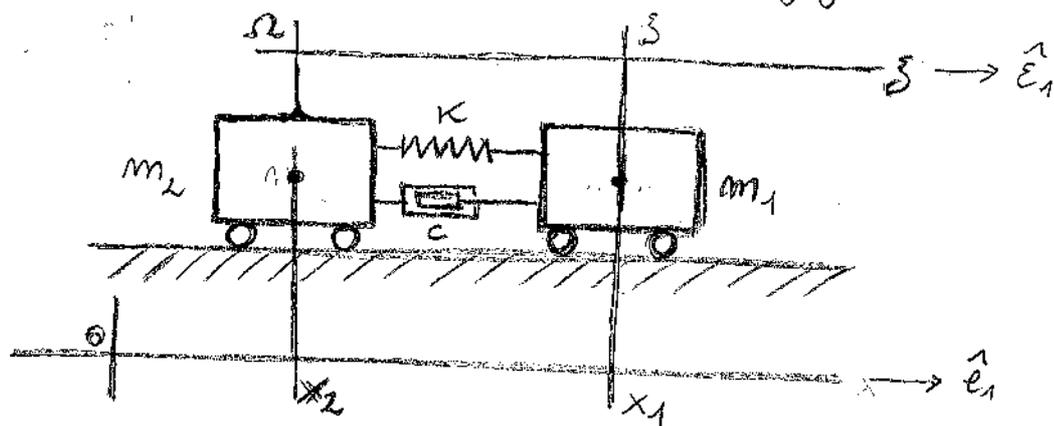
Considerando il grafico del caso generale di pag 65 possiamo tracciare il grafico delle seguenti equazioni e curve:



Il periodo delle oscillazioni è il seguente

$$\frac{0,1732}{\delta} T = 2\pi \Rightarrow T = 36,277 \text{ s}$$

9.2. Sistemi a due masse. Traccia il diagramma di



campo libero per le masse m_1 rispetto al sistema di riferimento mobile solidale con m_2 . Si osserva che il sistema di riferimento mobile è animato di moto traslatorio accelerato rispetto a quello inziale, con accelerazione $\ddot{x}_2 \hat{e}_1$. Dunque il teorema di D'Alembert permette di scrivere

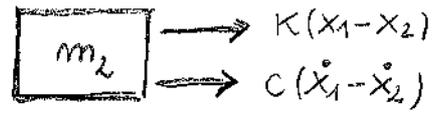
$$\vec{a}_a = \vec{a}_z + \vec{a}_{rz} \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 + \ddot{z}}$$

D'altra parte l'equazione di Newton permette di scrivere

$$\ddot{x}_1 m_1 = -Kz - c\dot{z} = -K(x_1 - x_2) - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

Per la massa m_2 si ha analogamente

$$m_2 \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$



Dunque abbiamo le due equazioni:

$$9.7 \quad \begin{cases} \ddot{x}_1 m_1 = -k(x_1 - x_2) - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ \ddot{x}_2 m_2 = k(x_1 - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \end{cases}$$

Moltiplichiamo per m_2 la prima e per m_1 la seconda, poi sottraiamo membro a membro:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 m_1 m_2 = -k m_2 (x_1 - x_2) - c m_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ \ddot{x}_2 m_1 m_2 = k m_1 (x_1 - x_2) + c m_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) m_1 m_2 &= [-k m_2 (x_1 - x_2) - k m_1 (x_1 - x_2) - c m_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \\ &- c m_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)] = -k (x_1 - x_2) (m_1 + m_2) - c (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) (m_1 + m_2) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$9.8 \quad (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) m_1 m_2 = -k (x_1 - x_2) (m_1 + m_2) - c (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) (m_1 + m_2)$$

Abbiamo dunque ottenuto per il moto relativo l'equazione

$$9.9 \quad \ddot{z} m_1 m_2 + c (m_1 + m_2) \dot{z} + k (m_1 + m_2) z = 0$$

Questa equazione può essere ricondotta alle equazioni 3.1 del vibratore libero smorzato, non appena si ponga

$$9.10 \quad \begin{cases} \bar{m} \triangleq m_1 m_2 \\ \bar{c} \triangleq c(m_1 + m_2) \\ \bar{k} \triangleq k(m_1 + m_2) \end{cases}$$

Si ottiene così l'equazione

$$9.11 \quad \bar{m} \ddot{z} + \bar{k} z + \bar{c} \dot{z} = 0$$

Dunque il coefficiente di smorzamento critico \bar{c}_0 , la pulsazione naturale $\bar{\omega}_m$ e il fattore di smorzamento viscoso $\bar{\xi}$ valgono rispettivamente

$$9.12 \quad \begin{cases} \bar{c}_0 = 2 \sqrt{\bar{k} \bar{m}} = 2 \sqrt{k(m_1 + m_2) m_1 m_2} \\ \bar{\omega}_m = \sqrt{\frac{\bar{k}}{\bar{m}}} = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} \\ \bar{\xi} = \frac{\bar{c}}{\bar{c}_0} = \frac{c(m_1 + m_2)}{2 \sqrt{k(m_1 + m_2) m_1 m_2}} = \frac{c \sqrt{m_1 + m_2}}{2 \sqrt{k m_1 m_2}} = \frac{c}{2k} \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)k}{m_1 m_2}} \end{cases}$$

$\left(\frac{c \bar{\omega}_m}{2k} \right)$
 \uparrow

Si osserva che noto il moto relativo z , la 9.7 consentiamo di ricavare i due moti assoluti.

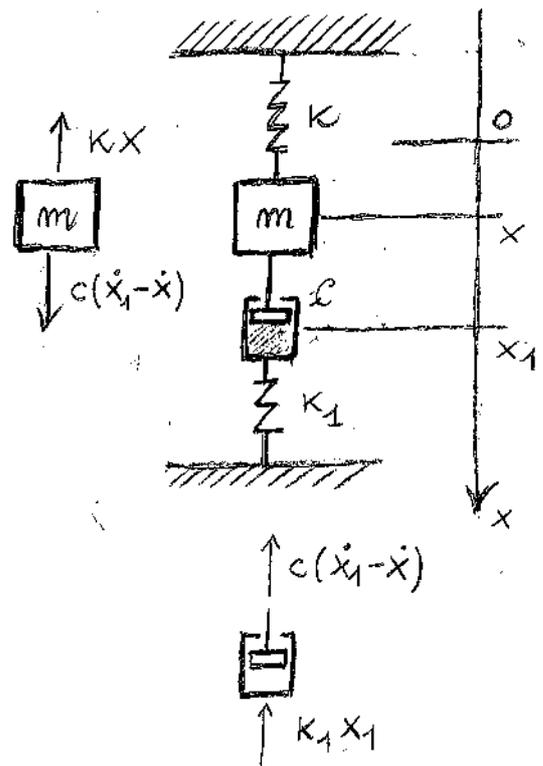
9.3. Sistemi a due molle con serie molle-smorzatore. Si assume ma che lo smorzatore abbia massa trascurabile. Si trascuri inoltre le forze peso, l'equazione della dinamica per m è

$$m\ddot{x} = -kx + c(\dot{x}_1 - \dot{x})$$

Si consideri ora lo stato di equilibrio; non avendo esso inerzia l'equilibrio meccanico perge:

$$c(\dot{x}_1 - \dot{x}) + k_1 x_1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$c\dot{x}_1 - c\dot{x} + k_1 x_1 = 0$$



Dunque abbiamo trovato

$$19.13 \begin{cases} \ddot{x} + \frac{k}{m}x - \frac{c}{m}(\dot{x}_1 - \dot{x}) = 0 \\ c\dot{x} = c\dot{x}_1 + k_1 x_1 \Leftrightarrow c(\dot{x}_1 - \dot{x}) = -k_1 x_1 \end{cases}$$

Sostituendo la seconda nella prima si ha

$$19.14 \quad \ddot{x}_1 + \frac{k_1}{c}\dot{x}_1 + \frac{k}{m}x + \frac{k_1}{m}x_1 = 0$$

Esprimendo in x e derivando si ha

$$19.15 \quad \frac{k}{m}x = -\ddot{x}_1 - \frac{k_1}{c}\dot{x}_1 - \frac{k_1}{m}x_1 \Rightarrow \boxed{\frac{k}{m}x = -\ddot{x}_1 - \frac{k_1}{c}\dot{x}_1 - \frac{k_1}{m}x_1}$$

Considerando le 19.15 e la 2^a delle 19.13 si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{m}{k}\ddot{x}_1 - \frac{m k_1}{c k}\dot{x}_1 - \frac{k_1}{k}x_1 \\ \dot{x} = \dot{x}_1 + \frac{k_1}{c}x_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-\frac{m}{k} \ddot{x}_1 - \frac{mK_1}{cK} \ddot{x}_1 - \frac{K_1}{K} \dot{x}_1 = \dot{x}_1 + \frac{K_1}{c} x_1 \Rightarrow$$

$$(9.16) \quad +\frac{m}{k} \ddot{x}_1 + \frac{mK_1}{cK} \ddot{x}_1 + \left(\frac{K_1}{K} - 1\right) \dot{x}_1 + \frac{K_1}{c} x_1 = 0$$

Risolve le 9.16 le seconde delle 9.13 per trovare x . Alternativamente si consideri di nuovo il 9.13:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx - c(\dot{x}_1 - \dot{x}) = 0 \\ c(\dot{x}_1 - \dot{x}) + K_1 x_1 = 0 \end{cases}$$

$$m\ddot{x} + kx + K_1 x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{m}{K_1} \ddot{x} - \frac{k}{K_1} x \Rightarrow$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{m}{K_1} \ddot{x} - \frac{k}{K_1} \dot{x} \Rightarrow$$

$$c\left(-\frac{m}{K_1} \ddot{x} - \frac{k}{K_1} \dot{x} - \dot{x}\right) + K_1\left(-\frac{m}{K_1} \ddot{x} - \frac{k}{K_1} x\right) = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{cm}{K_1} \ddot{x} - \frac{ck}{K_1} \dot{x} - c\dot{x} - m\ddot{x} - kx = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{cm}{K_1} \ddot{x} + m\ddot{x} + c\left(\frac{k}{K_1} + 1\right) \dot{x} + kx = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\ddot{x}}{K_1} + \frac{\dot{x}}{c} + \frac{1}{m} \left(\frac{k + K_1}{K_1}\right) \dot{x} + \frac{k}{cm} x = 0 \Rightarrow$$

$$(9.17) \quad \ddot{x} + \frac{\ddot{x}K_1}{c} + \frac{k + K_1}{m} \dot{x} + \frac{kK_1}{cm} x = 0$$

Poiché il problema può essere risolto usando una

dei due sistemi seguenti:

$$9.18 \begin{cases} \ddot{X}_1 + \frac{K_1}{c} \dot{X}_1 + \frac{K_1 - K_2}{m} X_1 + \frac{K_2 K_1}{cm} X_1 = 0 \\ X = \dot{X}_1 + \frac{K_1}{c} X_1 \end{cases}$$

$$9.19 \begin{cases} \ddot{X} + \ddot{X} \frac{K_1}{c} + \frac{K_1 + K_2}{m} \dot{X} + \frac{K_2 K_1}{cm} X = 0 \\ X_1 = -\frac{m}{K_1} \ddot{X} - \frac{K_2}{K_1} X \end{cases}$$

Consideriamo ora i seguenti dati numerici:

$$9.20 \quad m = 20 \text{ kg} \quad K = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad K_1 = 4 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad c = 4 \cdot 10^2 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$$

Utilizziamo la 9.19:

$$\lambda^3 + \lambda^2 \frac{4 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{4 \cdot 10^2 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}} + \frac{3 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{20 \text{ kg}} \lambda + \frac{2 \cdot 10^5 \frac{\text{N}^2}{\text{m}^2}}{4 \cdot 10^2 \frac{\text{Ns}}{\text{m}} \cdot 20 \frac{\text{kg}}{\text{m}}} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^3 + \frac{\lambda^2 \cdot 10^2}{1} + \frac{3 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}}{1 \frac{\text{kg}}{\text{m}}} \lambda + \frac{10^5 \text{N/m}}{1 \text{ kg}} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^3 + \frac{10^2 \lambda^2}{1} + \frac{3 \cdot 10^3 \lambda}{1 \text{ s}^2} + \frac{10^5 \frac{\text{kg}}{\text{m}}}{1 \text{ kg}} = 0 \Rightarrow$$

$$9.21 \quad \lambda^3 + \frac{10^2 \lambda^2}{1} + \frac{3 \cdot 10^3 \lambda}{1} + \frac{10^5}{1} = 0$$

$$9.22 \begin{cases} \lambda_1 = -78/5 \\ \lambda_2 = -\frac{11}{5} + i \frac{34,1}{5} \\ \lambda_3 = -\frac{11}{5} - i \frac{34,1}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$$9.23 \quad x = A e^{-78t/5} + B e^{-11t/5} \cos(34,1 t/5) + C e^{-11t/5} \sin(34,1 t/5)$$

$$\dot{x} = -\frac{78A}{5} e^{-\frac{78t}{5}} - \frac{11B}{5} e^{-\frac{11t}{5}} \cos(34,1 t/5) + B e^{-\frac{11t}{5}} \frac{34,1}{5} \sin(34,1 t/5) +$$

$$- \frac{11C}{5} e^{-\frac{11t}{5}} \sin(34,1 t/5) + C e^{-\frac{11t}{5}} \frac{34,1}{5} \cos(34,1 t/5) \Rightarrow$$

$$9.24 \quad \dot{x} = -\frac{78A}{5} e^{-\frac{78t}{5}} + e^{-\frac{11t}{5}} \cos(34,1 t/5) \left(-\frac{11}{5} B + \frac{34,1}{5} C \right) - e^{-\frac{11t}{5}} \sin(34,1 t/5) \left(\frac{34,1}{5} B + \frac{11}{5} C \right)$$

$$9.25 \quad \ddot{x} = \frac{6084A}{5^2} e^{-\frac{78t}{5}} + \left[-\frac{11}{5} e^{-\frac{11t}{5}} \cos(34,1 t/5) - e^{-\frac{11t}{5}} \frac{34,1}{5} \sin(34,1 t/5) \right] \left(\right.$$

$$\left. + \frac{11B}{5} + \frac{34,1C}{5} \right) - \left[-\frac{11}{5} e^{-\frac{11t}{5}} \sin(34,1 t/5) + e^{-\frac{11t}{5}} \frac{34,1}{5} \cos(34,1 t/5) \right] \left(\right.$$

$$\left. + \frac{34,1B}{5} + \frac{11C}{5} \right) = \dots$$

Assegno le condizioni al contorno seguenti

$$x(0) = 1 \text{ m} \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \ddot{x}(0) = +2000 \text{ m/s}^2$$

Si ha

$$x(0) = A + B = 1 \text{ m}$$

$$\dot{x}(0) = -\frac{78A}{\delta} - \frac{11}{\delta} B + \frac{34,1}{\delta} C$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}(0) &= \frac{6084A}{\delta^2} - \frac{11}{\delta} \left(-\frac{11B}{\delta} + \frac{34,1C}{\delta} \right) - \frac{34,1}{\delta} \left(\frac{34,1B}{\delta} + \frac{11C}{\delta} \right) = \\ &= \frac{6084A}{\delta^2} + \frac{144B}{\delta^2} - \frac{375,1C}{\delta^2} - \frac{1162,81B}{\delta^2} - \frac{375,1C}{\delta^2} = \\ &= \frac{6084A}{\delta^2} - \frac{1018,81B}{\delta^2} - \frac{750,2C}{\delta^2} = -2000 \frac{\text{m}}{\delta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -78 & -11 & 34,1 \\ 6084 & -1018,81 & -750,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \text{ m} \\ 0 \\ -2000 \text{ m} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,131 \text{ m} \\ 1,131 \text{ m} \\ 0,064 \text{ m} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{9.20) } x = -0,131 \text{ m } e^{-\frac{78t}{\delta}} + 1,131 \text{ m } e^{-\frac{11t}{\delta}} \cos(34,1t/\text{s}) + \\ + 0,064 \text{ m } e^{-\frac{11t}{\delta}} \sin(34,1t/\text{s})$$

Osservo ora che avendo espresso le forze elastiche come $-kx\hat{e}_1$ e $-k_1x\hat{e}_1$ si è implicitamente assunto che l'origine del sistema di riferimento coincide con il punto in cui entrambe le molle si trovano nella configurazione

ne indeformate.

9.4. Pendolo torsionale in fluido viscoso. L'effetto smorzante dovuto al fluido venga modellizzato con una coppia resistente proporzionale - secondo una costante C - alla velocità angolare.

$$I\ddot{\theta} = -K\theta - C\dot{\theta} \Rightarrow$$

$$(9.26) \ddot{\theta} + \frac{C}{I}\dot{\theta} + \frac{K}{I}\theta = 0$$

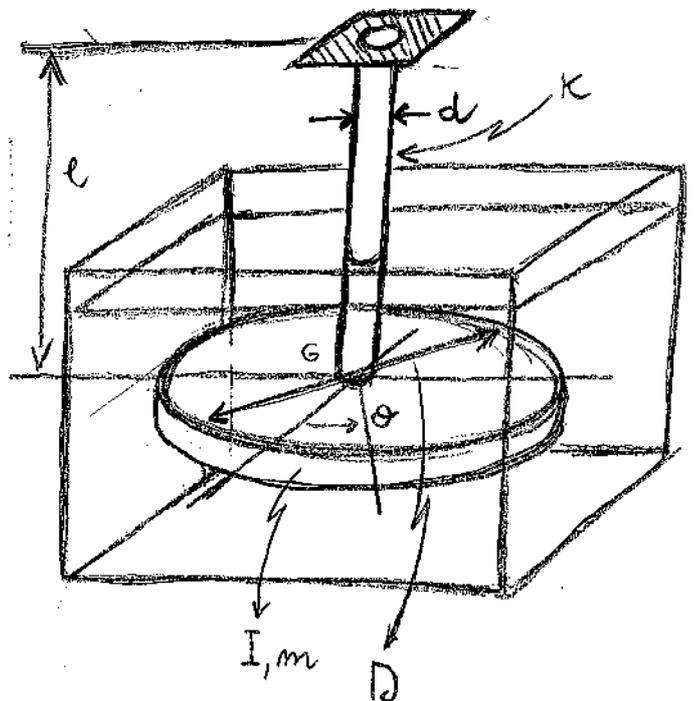
Si ottiene così una equazione formalmente analoga alle 3.1. L'equazione algebrica associate si scrive

$$\lambda^2 + \frac{C}{I}\lambda + \frac{K}{I} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{-C/I \pm \sqrt{C^2/I^2 - 4K/I}}{2} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4KI}}{2I} \Rightarrow$$

$$(9.27) \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{C}{2I} + \sqrt{\frac{C^2}{4I^2} - \frac{K}{I}} = -\frac{C}{2I} + \sqrt{\frac{K}{I} \sqrt{\frac{C^2}{4IK} - 1}} \\ \lambda_2 = -\frac{C}{2I} - \sqrt{\frac{C^2}{4I^2} - \frac{K}{I}} = -\frac{C}{2I} - \sqrt{\frac{K}{I} \sqrt{\frac{C^2}{4IK} - 1}} \end{cases}$$

In analogia con quanto definito nel paragrafo 3.1 definisce le principali grandezze di interesse:



$$\begin{cases}
 C_0 \triangleq \sqrt{4IK} \leftarrow \text{smorzamento critico} \\
 9.26) \omega_m \triangleq \sqrt{\frac{K}{I}} \leftarrow \text{pulserazione naturale} \\
 \zeta \triangleq \frac{C}{C_0} = \frac{C}{\sqrt{4IK}} \leftarrow \text{fattore di smorzamento}
 \end{cases}$$

Si consideri ora che I, K possono essere espressi in funzione delle caratteristiche fisico-geometriche del meccanismo:

$$9.29) \begin{cases}
 I = 8 \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \frac{(D/2)^2}{2} = m \frac{D^2}{8} \\
 \theta = M/K \\
 \theta = \frac{e \cdot M}{G d^4} \Rightarrow K = \frac{G J}{e} = \frac{G \pi (d/2)^4}{2e} = \frac{G \pi d^4}{32e}
 \end{cases}$$

Dunque le 9.28 si scrivono

$$9.30) \begin{cases}
 C_0 = \sqrt{\frac{m D^2 G \pi d^4}{8 \cdot 32 e}} = \sqrt{\frac{\pi m G D^2 d^4}{64 e}} = \frac{D d^2}{8} \sqrt{\frac{\pi m G}{e}} \\
 \omega_m = \sqrt{\frac{G \pi d^4}{32 e} \cdot \frac{8}{m D^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi d^4 G}{D^2 e m}} = \frac{d^2}{2D} \sqrt{\frac{\pi G}{e m}} \\
 \zeta = \frac{C}{\frac{D d^2}{8} \sqrt{\frac{\pi m G}{e}}} = \frac{8 C}{D d^2 \sqrt{\frac{\pi m G}{e}}} = \frac{8 C}{D d^2} \sqrt{\frac{e}{\pi m G}}
 \end{cases}$$

Sostituendo le 9.28 nelle 9.27 si ha

$$\begin{cases}
 \lambda_1 = -\sqrt{\frac{K}{I}} \frac{C}{2\sqrt{IK}} + \omega_m \sqrt{\zeta^2 - 1} = -\omega_m \zeta + \omega_m \sqrt{\zeta^2 - 1} \\
 \lambda_2 = \omega_m (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})
 \end{cases} \Rightarrow$$

$$9.31 \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\omega_m (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \\ \lambda_2 = -\omega_m (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \end{cases}$$

Si ritrovano così le 9.7. Sostituendo le 9.30 nelle 9.31 si ha

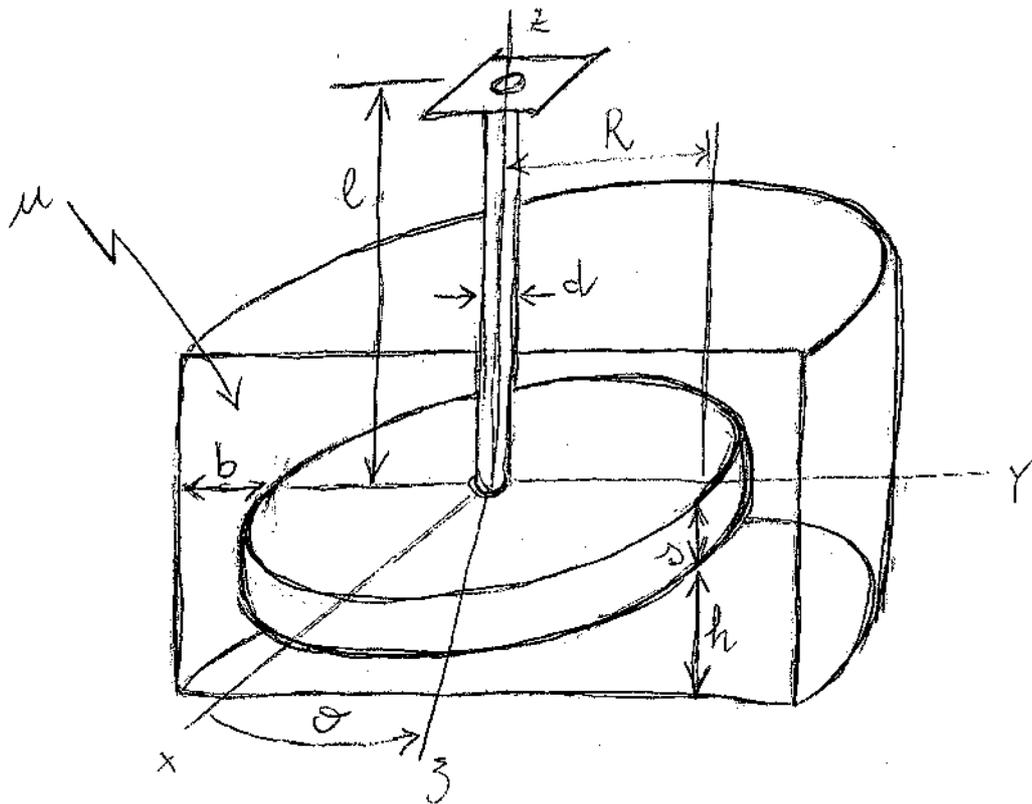
$$9.32 \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{d^2}{2D} \sqrt{\frac{\pi G}{l m}} \left(\frac{8C}{D d^2} \sqrt{\frac{l}{\pi m G}} - \sqrt{\frac{64C^2 l}{D^2 d^4 \pi m G}} - 1 \right) \\ \lambda_2 = -\frac{d^2}{2D} \sqrt{\frac{\pi G}{l m}} \left(\frac{8C}{D d^2} \sqrt{\frac{l}{\pi m G}} + \sqrt{\frac{64C^2 l}{D^2 d^4 \pi m G}} - 1 \right) \end{cases}$$

L'integrale generale della 9.26 si scrive

$$9.33 \quad \vartheta = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} = A e^{-\omega_m (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) t} + B e^{-\omega_m (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) t}$$

dove A, B sono determinate imponendo le condizioni al contorno.

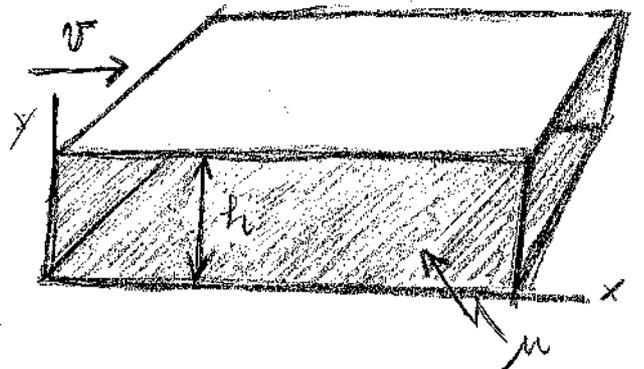
9.5. Pendolo torsionale in fluido viscoso, calcolo del coeff. di smorzamento. Completo, l'analisi del precedente paragrafo deducendo una espressione di C in funzione del coefficiente di viscosità dinamica μ del fluido. Si assume però che la vassa sia di base circolare, come nelle successive figure.



L'analisi seguente si basa - come visto - sulle ipotesi che il fluido eserciti una coppia resistente

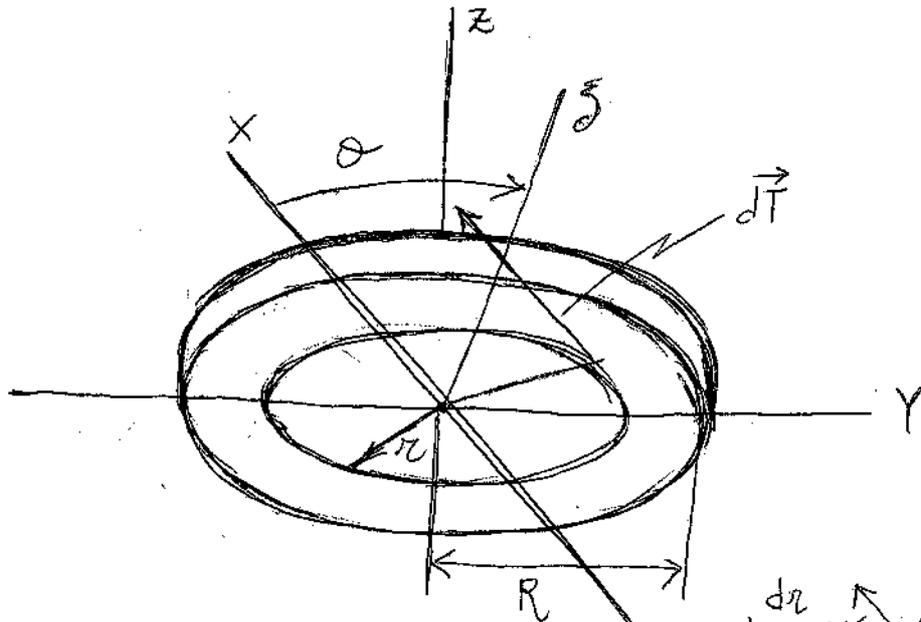
$$(9.34) \quad \vec{M}_r = -C \hat{e}_3$$

Per valutare C dunque occorre valutare M_r . A tal proposito si ricorda che nel caso di parti mobili in moto relativo divise da un fluido viscoso (flusso di Couette) la tensione tangenziale che la parte mobile esercita sul fluido è



$$(9.35) \quad \tau_{yx} = \mu v/h$$

Consideriamo allora la faccia inferiore del disco.

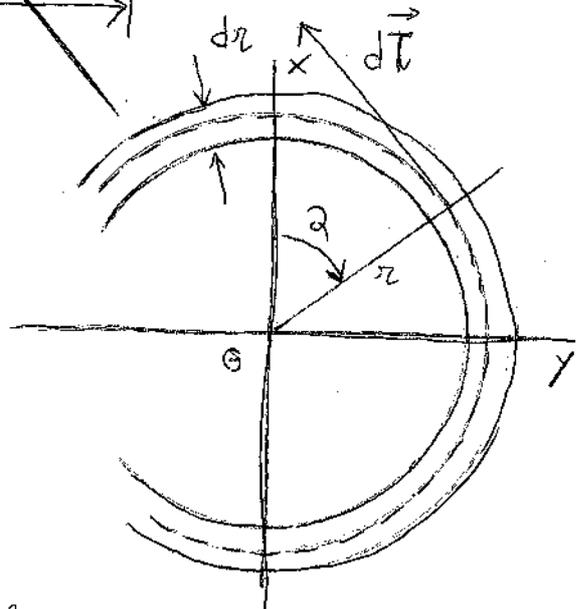


$$dT(r) = -\frac{v(r)\mu}{h} 2\pi r dr =$$

$$= -\frac{\dot{\theta} r \mu (2\pi r)}{h} dr \Rightarrow$$

$$(3.36) \quad M_{rz} = \int_0^R dT(r)r = -\frac{2\pi\mu\dot{\theta}}{h} \int_0^R r^3 dr =$$

$$= -\frac{2\pi\mu\dot{\theta}}{h} \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = -\frac{\pi\mu\dot{\theta}}{2h} R^4$$



Si può forse dedurre - anche se il ragionamento non è del tutto trasparente - che sulle faccia superiore operi un momento resistente

$$(3.37) \quad M_{rz} = -\frac{\pi\mu\dot{\theta} R^4}{2(h+s)}$$

Resta da valutare il momento resistente sul mantello della piastra.

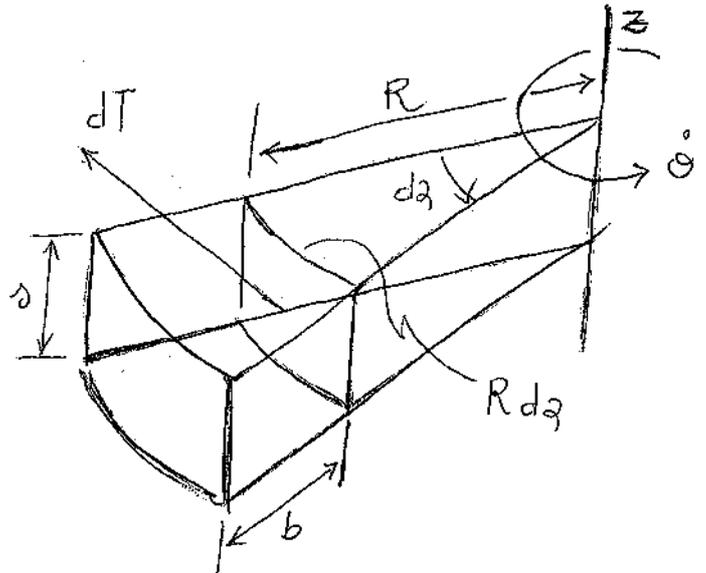
$$dT(z) = - \frac{v(R)\mu}{b} R^3 dz$$

$$\Downarrow$$

$$(9.38) M_{rz} = - \int_0^{2\pi} \frac{\dot{\theta} R \mu R^3 dz}{b} d\alpha =$$

$$= - \frac{R^3 \dot{\theta} \mu \pi}{b} \int_0^{2\pi} d\alpha =$$

$$= - \frac{R^3 \dot{\theta} \mu \pi}{b} \cdot 2\pi$$



Dunque, trascurando il momento resistente esercitato sul gambo, il momento resistente totale vale

$$(9.39) M_{rz} = M_{rz1} + M_{rz2} + M_{rz3} = - \frac{\pi \mu \dot{\theta} R^4}{2h} - \frac{\pi \mu \dot{\theta} R^4}{2(h+s)} - \frac{2\pi \mu \dot{\theta} R^3}{b} =$$

$$= - \pi \mu \dot{\theta} R^3 \left(\frac{R}{2h} + \frac{R}{2(h+s)} + \frac{2s}{b} \right)$$

Sostituendo la 9.39 nella 9.34 si trova

$$- \pi \mu \dot{\theta} R^3 \left(\frac{R}{2h} + \frac{R}{2(h+s)} + \frac{2s}{b} \right) = - \dot{\theta} C \Rightarrow$$

$$(9.40) C = \pi \mu \left(\frac{(h+s+h) R^4}{2h(h+s)} + \frac{2s R^3}{b} \right) = \pi \mu \left[\frac{2h+s}{2h(h+s)} R^4 + \frac{2s R^3}{b} \right]$$

Si considerino ora i seguenti dati numerici:

$D = 2R = 0,2 \text{ m}$	$d = 0,005 \text{ m}$	$h = 0,04 \text{ m}$
$s = 0,05 \text{ m}$	$l = 0,2 \text{ m}$	$b = 0,005 \text{ m}$
$\rho = 7860 \text{ Kg/m}^3$	$G = 84 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	$\mu = 0,658 \text{ Kg/m}^2$

Ricavo il coefficiente di smorzamento C .

$$\begin{aligned}
 C &= \pi \cdot 0,658 \frac{\text{Kg}}{\text{ms}} \left[\frac{0,07 \text{ m}}{0,02 \text{ m} (0,06 \text{ m})} \cdot 0,1^4 \text{ m}^4 + \frac{0,1 \text{ m} \cdot 0,1^3 \text{ m}^3}{0,005 \text{ m}} \right] = \\
 &= 2,066 \frac{\text{Kg}}{\text{ms}} \left[\frac{58,33 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4}{\text{m}} + \frac{10^{-4} \text{ m}^4}{0,005 \text{ m}} \right] = \\
 &= 2,066 \frac{\text{Kg}}{\text{ms}} \cdot 10^{-4} (58,33 + 200) \text{ m}^{\frac{3}{2}} = 533,7 \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} \cdot 10^{-4} = \\
 &= 0,053 \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

Ricavo le grandezze in 19.30

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \frac{0,2 \text{ m} (0,005 \text{ m})^2}{8} \sqrt{\frac{\pi \cdot 84 \cdot 10^9 \text{ N}}{0,2 \text{ m} \text{ m}^2}} = 6 \cdot 10^{-7} \sqrt{\frac{1318,8 \cdot 10^9 \text{ MN}}{\text{m}^3}} = \\
 &= 217,89 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{10 \text{ MN}}{\text{m}^3}} = 217,89 \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{10 \cdot 12,34 \text{ Kg} \cdot \text{Kg} \cdot \text{m}}{\text{m}^3 \cdot \text{m}^2}} = * \\
 M &= \rho \pi R^2 \cdot \frac{2}{3} = 7860 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \pi \cdot 0,1^2 \text{ m}^2 \cdot 0,05 \text{ m} = 12,34 \text{ Kg} \\
 * &= 217,89 \cdot 10^{-3} \cdot 11,10 \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}^3}{\text{ms}} = 2,418 \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_m &= \frac{0,005^2 \text{ m}^2}{2 \cdot 0,2 \text{ m}} \sqrt{\frac{\pi \cdot 84 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2}{0,2 \text{ m} \cdot 12,34 \text{ Kg}}} = 625 \cdot 10^{-7} \text{ m} \sqrt{\frac{106,87 \cdot 10^9 \text{ Kg} \cdot \text{m}^{\frac{3}{2}}}{\text{m}^3 \cdot \text{Kg}}} = \\
 &= 625 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot 10,33 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{10}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^2}} = 6461,18 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{ms}} \cdot 3,16 = \\
 &= 20,43 \text{ rad/s}
 \end{aligned}$$

$$\zeta = \frac{C}{C_0} = \frac{0,053}{2,418} = 0,021$$

Avendosi $\zeta < 1$ la 19.33 si scrive

$$\begin{aligned}
 \vartheta &= A e^{-\omega_m(\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2})t} + B e^{-\omega_m(\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})t} = \\
 &= A e^{-\omega_m \zeta t} (\cos \sqrt{1-\zeta^2} t - i \sin \sqrt{1-\zeta^2} t) + \\
 &+ B e^{-\omega_m \zeta t} (\cos \sqrt{1-\zeta^2} t + i \sin \sqrt{1-\zeta^2} t) = \\
 &= (A_1 + i A_2) e^{-\omega_m \zeta t} (\cos \sqrt{1-\zeta^2} t - i \sin \sqrt{1-\zeta^2} t) + \\
 &+ (B_1 + i B_2) e^{-\omega_m \zeta t} (\cos \sqrt{1-\zeta^2} t + i \sin \sqrt{1-\zeta^2} t) = \\
 &= e^{-\omega_m \zeta t} (A_1 \cos \sqrt{1-\zeta^2} t + A_2 \sin \sqrt{1-\zeta^2} t + B_1 \cos \sqrt{1-\zeta^2} t - \\
 &- B_2 \sin \sqrt{1-\zeta^2} t) + i e^{-\omega_m \zeta t} (A_2 \cos \sqrt{1-\zeta^2} t - A_1 \sin \sqrt{1-\zeta^2} t + \\
 &+ i B_2 \cos \sqrt{1-\zeta^2} t + B_1 \sin \sqrt{1-\zeta^2} t)
 \end{aligned}$$

Le parti reali delle soluzioni è dunque

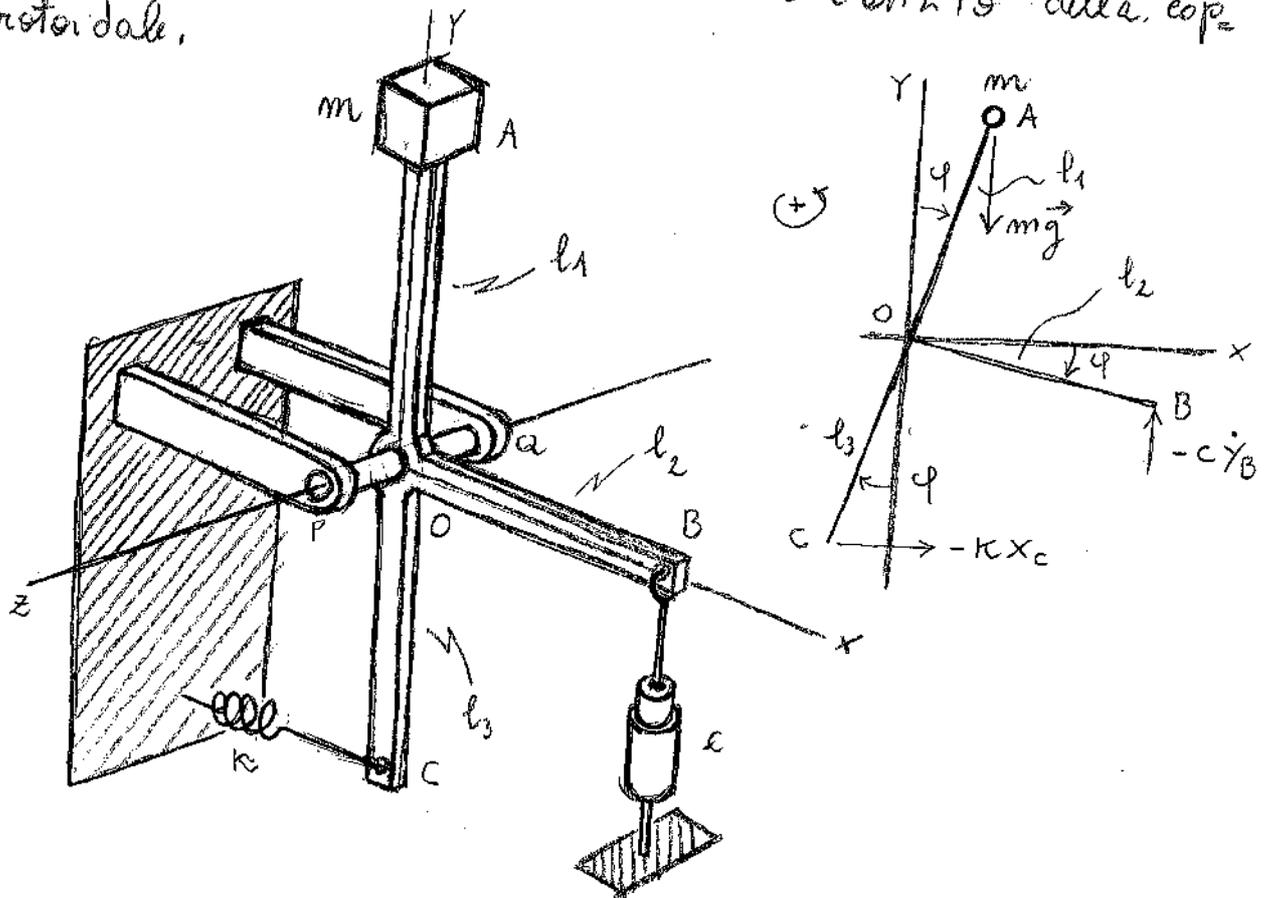
$$(19.41) \quad \vartheta = e^{-\omega_m \zeta t} (C_1 \cos \sqrt{1-\zeta^2} t + C_2 \sin \sqrt{1-\zeta^2} t)$$

Sostituendo i valori calcolati per i parametri si ha

$$(19.42) \quad \vartheta = e^{-0,42 \frac{t}{s}} (C_1 \cos 0,99 t + C_2 \sin 0,99 t)$$

9.6. Pendolo invertito con molle e smorzatore. Dedurre l'equazione del moto della massa m nell'ipotesi di piccole oscillazioni.

zioni e trascurando le masse delle leve e l'effetto della coppia rotazionale,



Impongo l'equilibrio dei momenti:

$$-I_z \ddot{\varphi} + \varphi l_1 mg - c \dot{y}_B l_2 - k x_c l_3 = 0$$

Ricavo y_B e x_c in funzione di φ :

$$\begin{cases} y_B = l_2 \varphi \Rightarrow \dot{y}_B = l_2 \dot{\varphi} \\ x_c = l_3 \varphi \end{cases}$$

Quindi - essendo poi $I_z = m l_1^2$ - si ha

$$-m l_1^2 \ddot{\varphi} + \varphi l_1 mg - c l_2^2 \dot{\varphi} - k l_3^2 \varphi = 0 \Rightarrow$$

19.43

$$\ddot{\varphi} + \frac{c l_2^2}{m l_1^2} \dot{\varphi} + \frac{\kappa l_3^2 - m g l_1}{m l_1^2} \varphi = 0$$

Si assumono per i parametri fisico-geometrici i seguenti valori:

$$m = 5 \text{ kg} \quad l_1 = 0,5 \text{ m} \quad l_2 = 0,3 \text{ m} \quad l_3 = 0,4 \text{ m}$$

$$\kappa = 400 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad c = 100 \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}}$$

La 9.43 si scrive allora

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{c l_2^2}{m l_1^2} &= \frac{100 \cdot 0,09}{5 \cdot 0,25} \frac{\text{N}\cdot\text{s} \cdot \text{m}^2}{\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2} = 7,2 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{\text{s}}{\text{kg} \cdot \text{m}} = 7,2 \\ \frac{\kappa l_3^2 - m g l_1}{m l_1^2} &= \frac{400 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,16 \text{ m}^2 - 5 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,5 \text{ m}}{5 \text{ kg} \cdot 0,25 \text{ m}^2} = \frac{64 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} - 24,52 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}}{1,25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} \\ &= 31,6 / \text{s}^2 \end{aligned} \right.$$

↓

$$\ddot{\varphi} + \frac{7,2}{\text{s}} \dot{\varphi} + \frac{31,6}{\text{s}^2} \varphi = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \frac{7,2}{\text{s}} \lambda + \frac{31,6}{\text{s}^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{-\frac{7,2}{\text{s}} \mp \sqrt{\frac{51,84}{\text{s}^2} - \frac{126,4}{\text{s}^2}}}{2} = \frac{-\frac{7,2}{\text{s}} \mp \sqrt{51,84 - 126,4}}{2\text{s}} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{3,6}{\text{s}} + i \frac{4,31}{\text{s}} \\ \lambda_2 &= -\frac{3,6}{\text{s}} - i \frac{4,31}{\text{s}} \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

19.44

$$\varphi = e^{-\frac{3,6t}{\text{s}}} \left[A \cos\left(\frac{4,31}{\text{s}} t\right) + B \sin\left(\frac{4,31}{\text{s}} t\right) \right]$$

Si ha un andamento nel tempo del tipo di quello con $\zeta < 1$ (par. 3.6). Si impongano ancora le cc. $\varphi_0 = 0,25\pi$, $\dot{\varphi}_0 = 0$.

$$\dot{\varphi} = -\frac{3,6}{\delta} e^{-\frac{3,6t}{\delta}} \left[A \cos\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) + B \sin\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) \right] +$$

$$+ e^{-\frac{3,6t}{\delta}} \left[-\frac{A 4,31}{\delta} \sin\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) + \frac{B 4,31}{\delta} \cos\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) \right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(0) = -\frac{3,6}{\delta} A + \frac{4,31}{\delta} B = 0 \iff A = \frac{4,31}{3,6} B = 1,19 B \\ \varphi(0) = A = 0,25\pi \end{cases}$$

↓

$$A = 0,25; B = 0,21$$

↓

$$19.43 \quad \varphi = e^{-\frac{3,6t}{\delta}} \left[0,25 \cos\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) + 0,21 \sin\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) \right]$$

Volemmo ricavare ζ , ω_m , ω_n confrontando la 19.43 con la 3.11:

$$\begin{cases} m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = 0 \\ m l_1^2 \ddot{\varphi} + c l_2^2 \dot{\varphi} + (k l_3^2 - m g l_1) \varphi = 0 \end{cases}$$

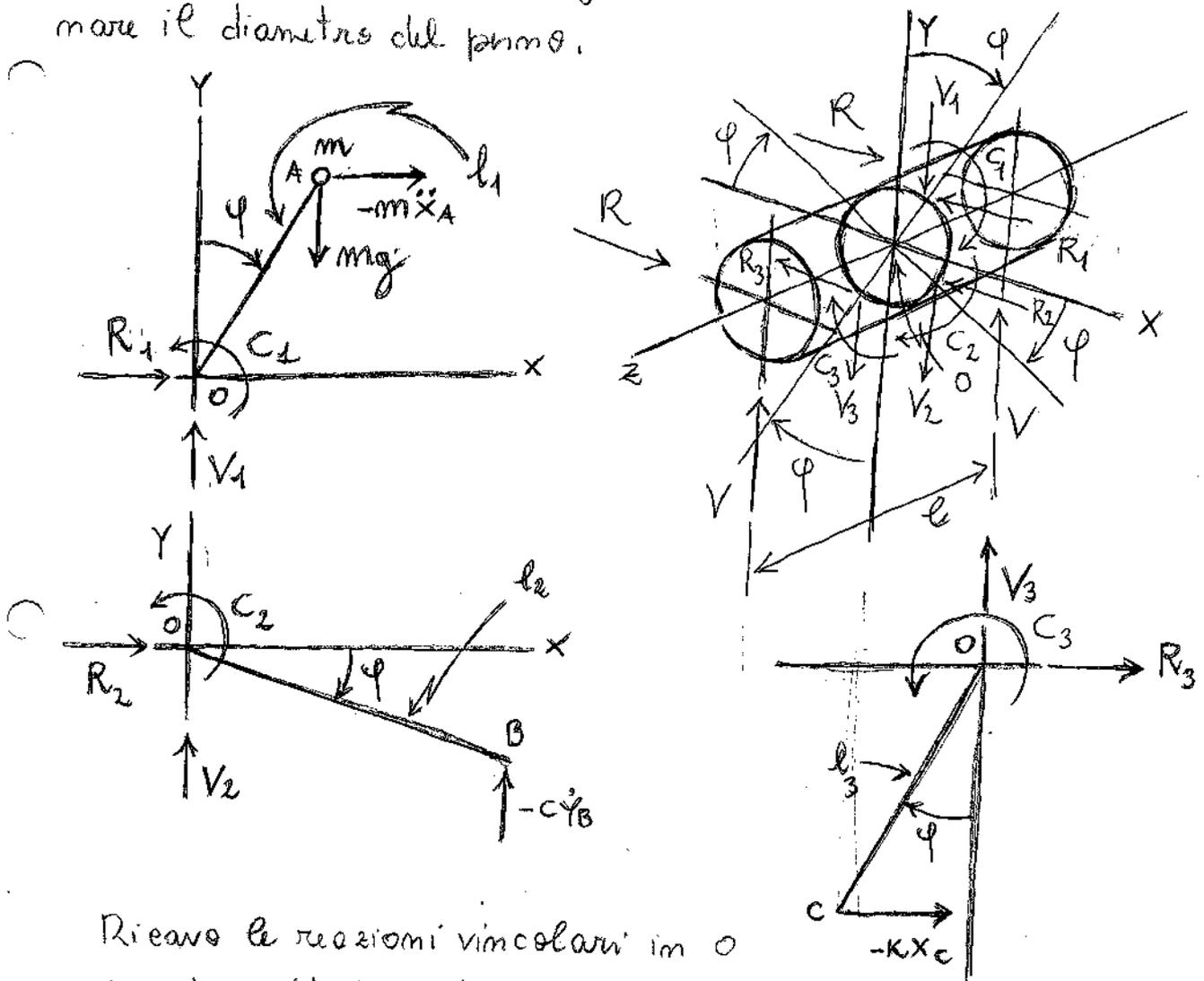
Confrontando con la 3.5 si trova

$$9.46 \quad \omega_m = \sqrt{\frac{k l_3^2 - m g l_1}{m l_1^2}} = 5,61 \sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}^2}} = 5,61 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Confrontando con la 3.6 si trova ancora

$$9.47 \quad \zeta = \frac{cl_2^2}{2\sqrt{(kl_3^2 - mgl_1)ml_1^2}} = 0,64$$

9.7. Pendolo invertito, dimensionamento del perno. Per il meccanismo del paragrafo precedente si assume che il perno in O abbia una lunghezza $l = 0,2\text{m}$ e una sollecitazione ammissibile a flessione $\sigma_a = 100\text{N/mm}^2$. Determinare il diametro del perno.



Ricavo le reazioni vincolari in O dovute all'elemento OA. Si ha

$$9.48 \quad \begin{cases} R_1 - m\ddot{x}_A = 0 \implies R_1 = m\ddot{x}_A = m(-\ddot{\varphi})l_1 = -ml_1\ddot{\varphi} \\ V_1 - mg = 0 \implies V_1 = mg \\ C_1 - mg l_1 \sin\varphi + m\ddot{x}_A l_1 \cos\varphi = 0 \end{cases}$$

Ricavo le reazioni vincolari in O dovute all'elemento OB.

$$9.49 \quad \begin{cases} R_2 = 0 \\ V_2 - c\dot{\gamma}_B = 0 \implies V_2 = c\dot{\gamma}_B = c\dot{\varphi}l_2 \\ C_2 - c\dot{\gamma}_B l_2 = 0 \implies C_2 = c\dot{\gamma}_B l_2 = c\dot{\varphi}l_2^2 \end{cases}$$

Ricavo le reazioni vincolari in O dovute all'elemento OC.

$$9.50 \quad \begin{cases} R_3 - \kappa x_C = 0 \implies R_3 = \kappa x_C = +\kappa\varphi l_3 \\ V_3 = 0 \\ C_3 - \kappa x_C l_3 \cos\varphi \implies C_3 = \kappa x_C l_3 \cos\varphi = -\kappa\varphi l_3^2 \cos\varphi \end{cases}$$

Impongo l'equilibrio alla traslazione per il primo:

$$9.51 \quad \begin{cases} \sum R = R_1 + R_2 + R_3 \\ \sum V = V_1 + V_2 + V_3 \end{cases} \implies \begin{cases} R = \frac{-ml_1\ddot{\varphi} + \kappa\varphi l_3}{2} \\ V = \frac{mg}{2} + \frac{c\dot{\varphi}l_2}{2} \end{cases}$$

In altri termini - dette $F_x \hat{e}_1 + F_y \hat{e}_2$ le risultanti della sollecitazione che i tre elementi esercitano sul primo - abbiamo

$$9.52 \begin{cases} F_x = m\ddot{q}l_1 - kq l_3 \\ F_y = -mg - c\dot{q}l_2 \end{cases}$$

Derive eq. 9.45 :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= -\frac{3,6}{\delta} e^{\frac{-3,6t}{\delta}} \left[0,25 \cos\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) + 0,21 \sin\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) \right] + \\ &+ e^{\frac{-3,6t}{\delta}} \left[-0,25 \frac{4,31}{\delta} \sin\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) + 0,21 \frac{4,31}{\delta} \cos\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) \right] = \\ &= e^{\frac{-3,6t}{\delta}} \left[\left(-\frac{3,6}{\delta} \cdot 0,25 + 0,21 \frac{4,31}{\delta} \right) \cos\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) + \left(-\frac{3,6}{\delta} \cdot 0,21 - 0,25 \frac{4,31}{\delta} \right) \sin\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) \right] = \\ &= e^{\frac{-3,6t}{\delta}} \left[\left(-\frac{0,9}{\delta} + \frac{0,905}{\delta} \right) \cos\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) + \left(-\frac{0,756}{\delta} - \frac{1,0775}{\delta} \right) \sin\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) \right] = \\ &= e^{\frac{-3,6t}{\delta}} \left[\frac{5 \cdot 10^{-3}}{\delta} \cos\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) - \frac{1,8335}{\delta} \sin\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) \right] \Rightarrow \\ \ddot{q} &= -\frac{3,6}{\delta} e^{\frac{-3,6t}{\delta}} \left[\frac{5 \cdot 10^{-3}}{\delta} \cos\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) - \frac{1,8335}{\delta} \sin\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) \right] + \\ &+ e^{\frac{-3,6t}{\delta}} \left[-\frac{5 \cdot 10^{-3}}{\delta} \frac{4,31}{\delta} \sin\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) - \frac{1,8335}{\delta} \frac{4,31}{\delta} \cos\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) \right] = \\ &= e^{\frac{-3,6t}{\delta}} \left[-\frac{3,6}{\delta} \frac{5 \cdot 10^{-3}}{\delta} \cos\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) - \frac{1,8335 \cdot 4,31}{\delta^2} \cos\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{3,6}{\delta} \frac{1,8335}{\delta} - \frac{5 \cdot 10^{-3}}{\delta} \frac{4,31}{\delta} \right) \sin\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) \right] = e^{\frac{-3,6t}{\delta}} \left[\left(\frac{0,018}{\delta^2} - \frac{7,9}{\delta^2} \right) \cos\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{6,6}{\delta^2} - \frac{0,021}{\delta^2} \right) \sin\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) \right] = e^{\frac{-3,6t}{\delta}} \left(-\frac{7,918}{\delta^2} \cos\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) + \frac{6,57}{\delta^2} \sin\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) \right) \end{aligned}$$

Dunque abbiamo trovato

$$9.53) \begin{cases} \dot{\varphi} = e^{-\frac{3,6t}{\delta}} \left[\frac{5 \cdot 10^{-3}}{\delta} \cos\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) - \frac{1,8335}{\delta} \sin\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) \right] \\ \ddot{\varphi} = e^{-\frac{3,6t}{\delta}} \left[-\frac{7,918}{\delta^2} \cos\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) + \frac{6,57}{\delta^2} \sin\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) \right] \end{cases}$$

Sostituendo nelle 9.52 si ha

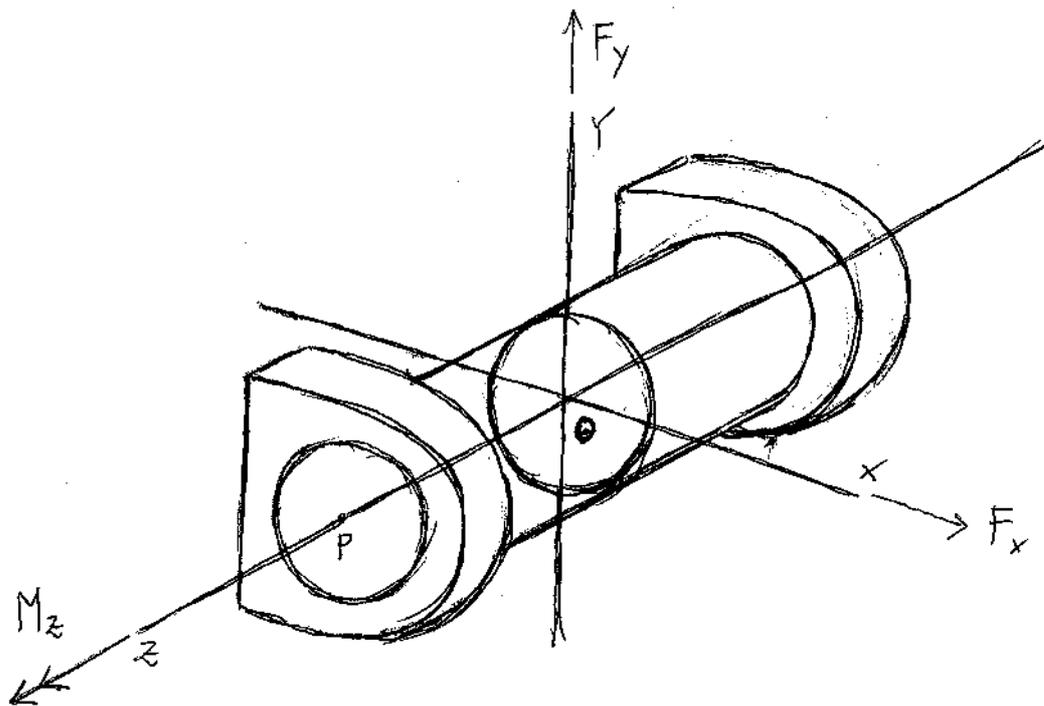
$$\begin{aligned} F_x &= m l_1 \ddot{\varphi} - \kappa l_3 \varphi = \frac{2,5 \text{ Kg m}}{\delta^2} e^{-\frac{3,6t}{\delta}} \left[-7,918 \cos\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) + 6,57 \sin\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) \right] - \\ &= 460 \text{ N} e^{-\frac{3,6t}{\delta}} \left[0,25 \cos\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) + 0,21 \sin\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) \right] = \\ &= e^{-\frac{3,6t}{\delta}} \left[(-19,79 \text{ N} - 40 \text{ N}) \cos\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) + (16,425 \text{ N} - 33,6 \text{ N}) \sin\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) \right] = \\ &= e^{-\frac{3,6t}{\delta}} \left[-59,79 \text{ N} \cos\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) - 17,175 \text{ N} \sin\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_y &= -mg - c l_2 \dot{\varphi} = -49 \text{ N} - 30 \text{ N} e^{-\frac{3,6t}{\delta}} \left[5 \cdot 10^{-3} \cos\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) - 1,8335 \sin\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) \right] = \\ &= -49 \text{ N} - e^{-\frac{3,6t}{\delta}} \left[0,15 \text{ N} \cos\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) - 55 \text{ N} \sin\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) \right] \end{aligned}$$

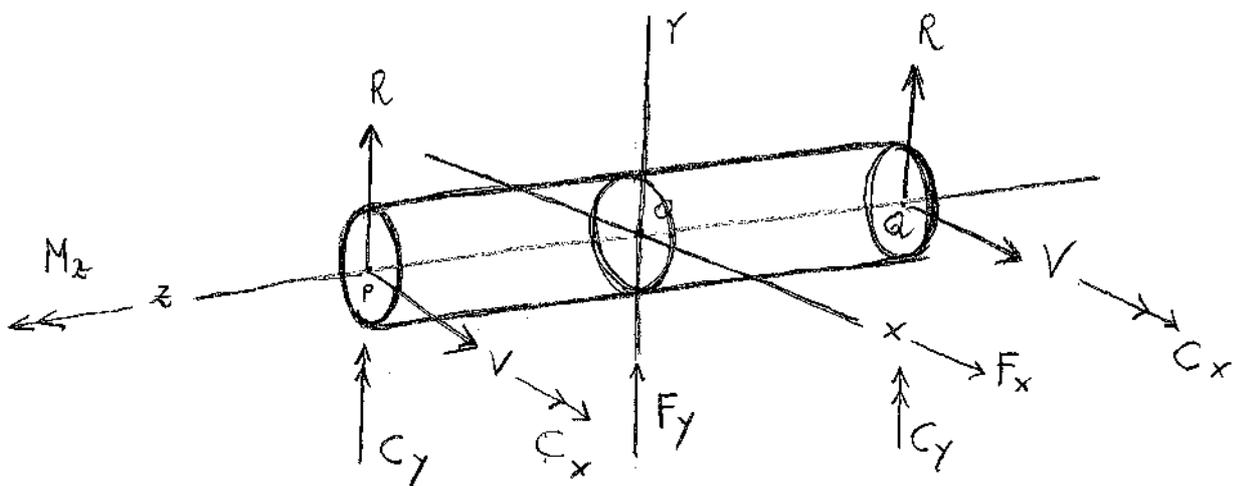
Dunque ho trovato

$$9.54) \begin{cases} F_x = e^{-\frac{3,6t}{\delta}} \left[-59,79 \text{ N} \cos\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) - 17,175 \text{ N} \sin\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) \right] \\ F_y = -49 \text{ N} - e^{-\frac{3,6t}{\delta}} \left[0,15 \text{ N} \cos\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) - 55 \text{ N} \sin\left(\frac{4,31t}{\delta}\right) \right] \end{cases}$$

Poniamo poi $M_2 = -C_1 - C_2 - C_3$. Dunque il diagramma

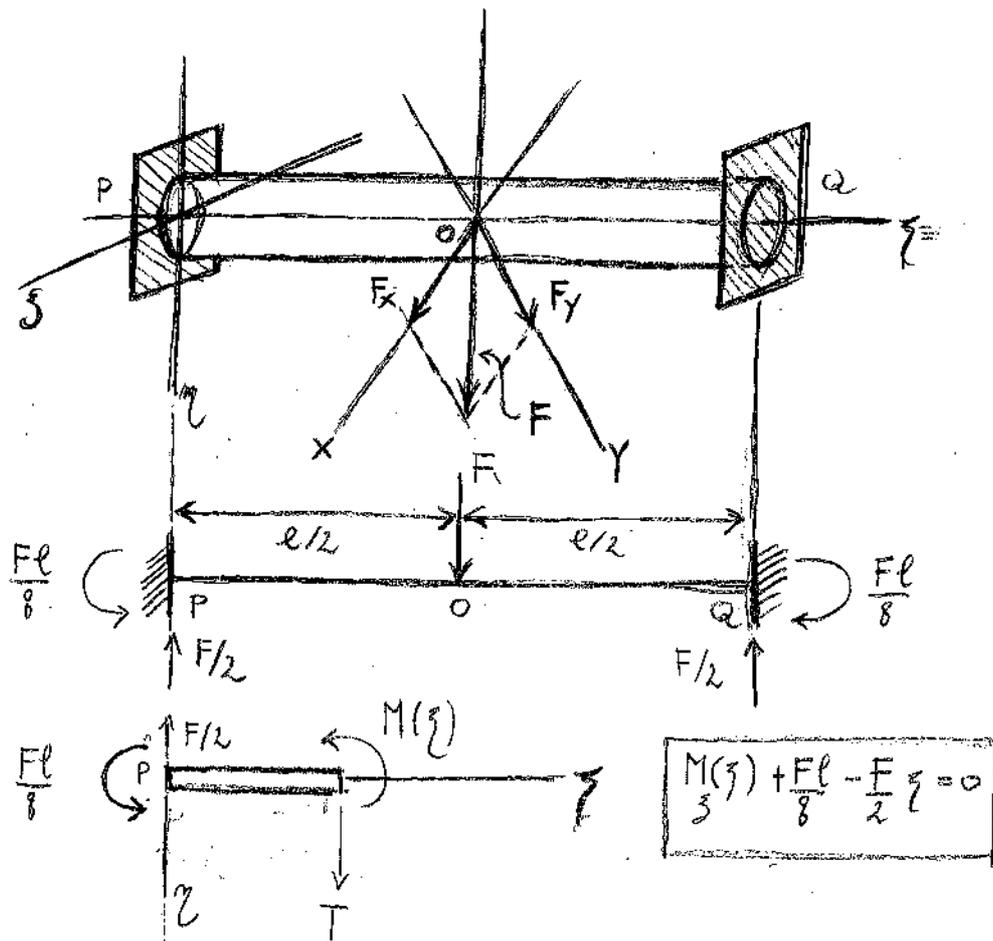


di corpo libero del primo è quello in figura. Se ammettiamo che le due cerniere impediscano le rotazioni intorno a x e a y (coerentemente con le definizioni di cerniere) allora, dette V e R le reazioni vincolari lungo x e y rispettivamente, si ha il seguente diagramma di corpo libero:



Escludendo dalle nostre considerazioni il momento torcente, il quale - date le norme del vincolo - non sollecita il primo, abbiamo allora una trave doppiamente incastrata, sollecitata da un carico in maniera, di intensità

9.55 $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$



Introdotta un sistema di riferimento P, z, ξ con asse $z \equiv z$ e con asse ξ costantemente sovrapposto alle risultanti \vec{F} ed equivalente ad esse, allora i risultati delle variazioni delle Costruzioni pagano

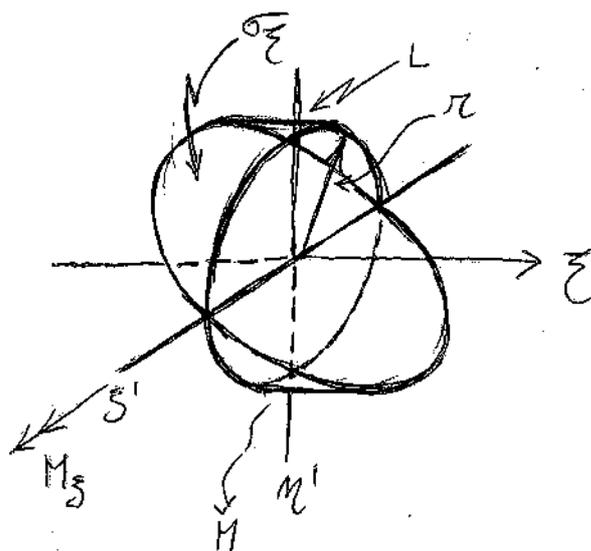
9.56 $M_z(z) = \frac{F}{2}z - \frac{Fl}{8}$

Si consideri ora che

$$\begin{cases} \sigma_z(z, r, z) = - \frac{M_z(z) r'}{j_z} \\ M_z = \frac{F}{2} z - \frac{Fl}{8} = \frac{F}{2} \left(z - \frac{l}{4} \right) \end{cases}$$

↓

$$(9.57) \quad \sigma_z(z, r, z) = - \frac{F}{2} \left(z - \frac{l}{4} \right) \frac{r'}{j_z}$$



Si può osservare che i punti maggiormente sollecitati - rispetto allo sforzo normale - nella generica sezione sono L, M. Inoltre, considerato il tratto PO del primo, la sezione maggiormente sollecitata è quella per $z = 0$. Dunque il valore massimo dello sforzo normale

$|\sigma_z| = |\sigma_z(z, r, z)|$ è dato da

$$(9.58) \quad \sigma_{z \max} = - \frac{F}{2} \frac{l}{4} \frac{r}{j_z} = - \frac{Flr}{8j_z} = \frac{Flr}{4 \pi r^2 r^2} = \frac{lF}{4\pi r^3} = \frac{lF}{4\pi r^3}$$

Procedo al calcolo di F secondo le 9.55 e la 9.54:

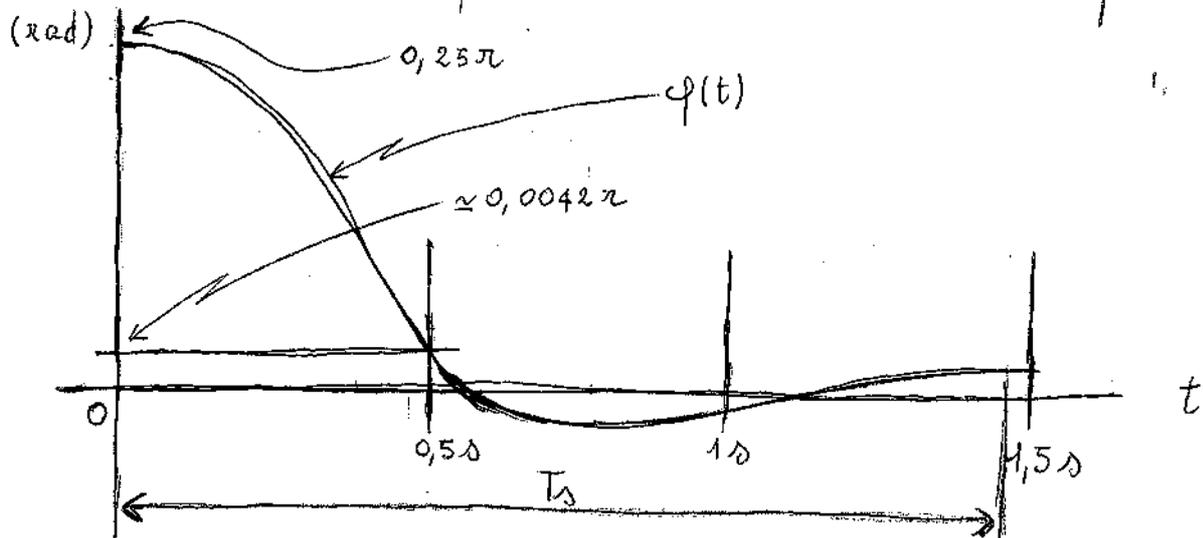
$$(9.59) \quad F = \left[254,88 \cdot \cos^2(4,31t) + 14,7 e^{3,6t} \cos(4,31t) + 2401 \cdot e^{4,2t} + 33,19,98 + \right. \\ \left. + 2037,28 \sin(4,31t) \cos(4,31t) - 5390 e^{3,6t} \sin(4,31t) \right] e^{-3,6t} \text{ N}$$

Si consideri ora che il periodo delle oscillazioni smorzate

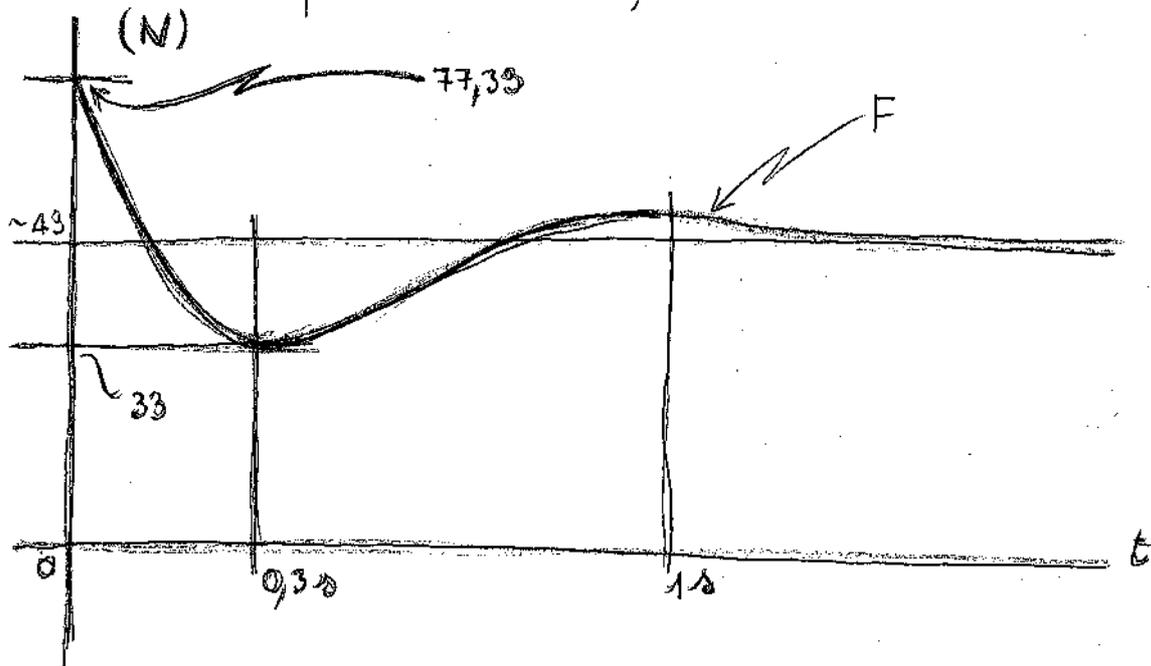
descritte dalle 19.45 è dato da

$$\frac{4,31}{\delta} T_s = 2\pi \Rightarrow T_s = \frac{2\pi}{4,31} \delta \approx 1,4578 \delta$$

e che l'andamento qualitativo delle 19.45 è dunque:



Per l'andamento qualitativo di F , si ha invece



Come si vede il modulo di F decime rapidamente, tendendo al valore $mg \approx 43 \text{ N}$. Il suo valore massimo si ha all'istante

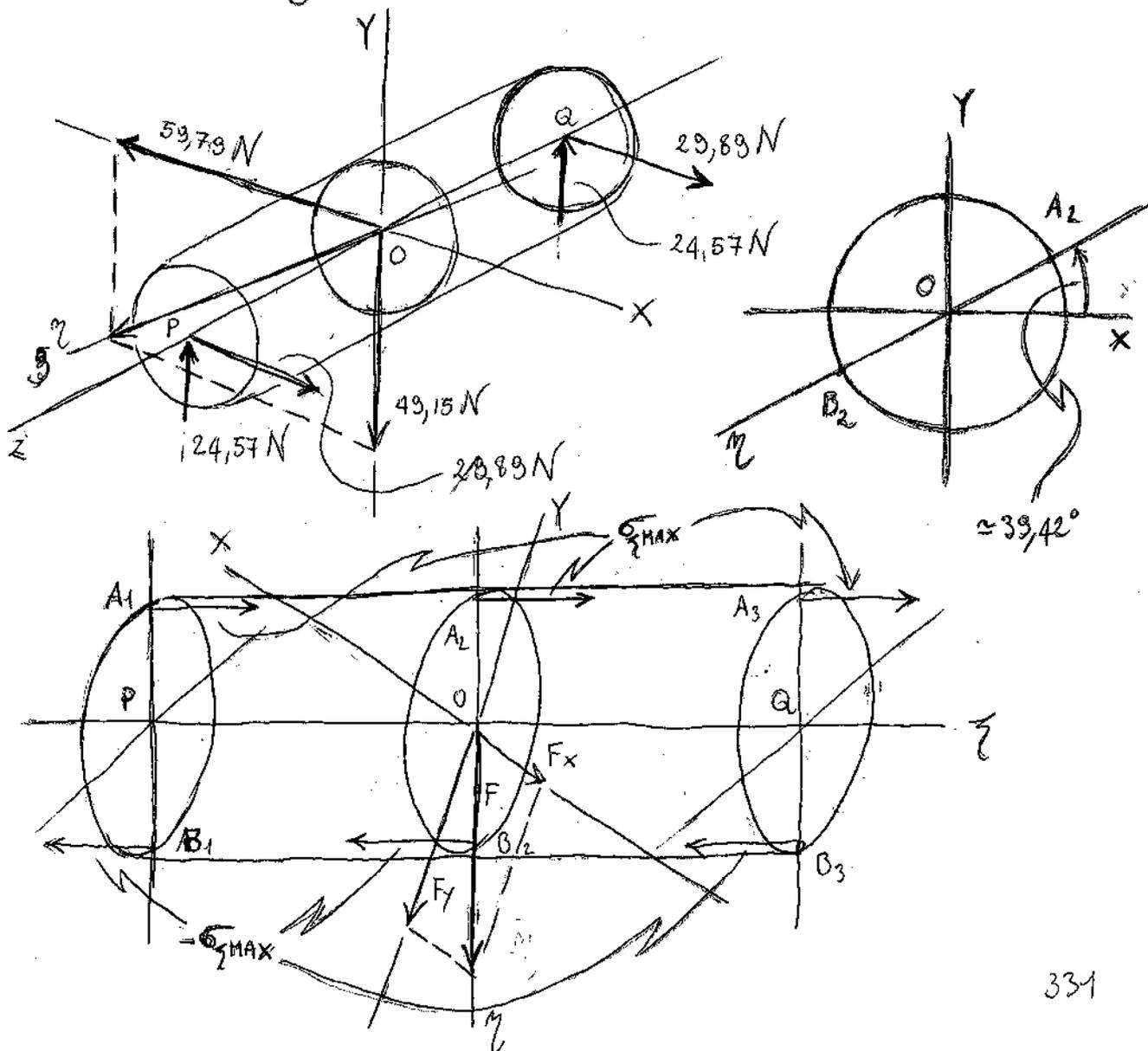
iniziali e vale

19.60 $F(t=0) \cong 77,39 \text{ N}$

Per $t=0$ mi ha anche - utilizzando la 19.54 - che

19.64
$$\begin{cases} F_x = -59,79 \text{ N} \\ F_y = -49 \text{ N} - 0,15 \text{ N} = -49,15 \text{ N} \end{cases}$$

Dunque la sollecitazione del primo all'istante iniziale è quella riassunta nelle seguenti illustrazioni.



Il valore $\sigma_{\zeta \text{ MAX}}$ è ottenuto nei punti $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ delle sezioni estreme e di quella dimensione. Il suo valore - in base alle 13.58 - dato da

$$9.62) \sigma_{\zeta \text{ MAX}} = \frac{l F_{\text{MAX}}}{4\pi r^3} = \frac{0,2 \text{ m} \cdot 77,39 \text{ N}}{4\pi r^3} = \frac{1,23 \text{ Nm}}{r^3}$$

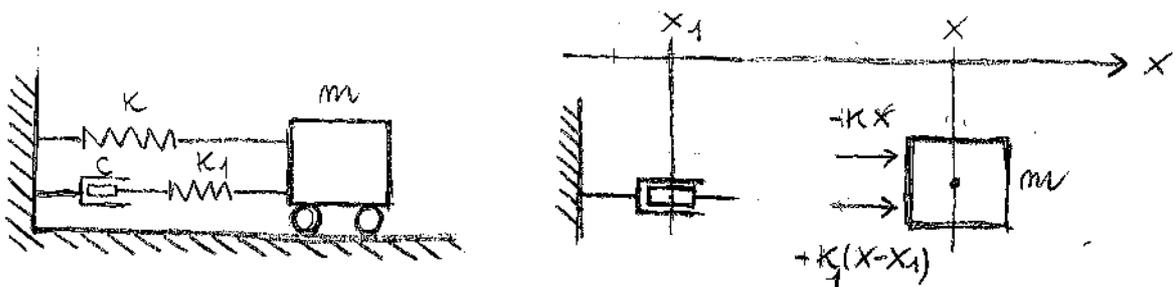
Imponendo la condizione $\sigma_{\zeta \text{ MAX}} \leq \sigma_{\text{a2}}$ si ha

$$\frac{1,23 \text{ Nm}}{r^3} \leq \frac{100 \text{ N}}{\text{mm}^2} \Rightarrow r^3 \geq \frac{1,23 \text{ m} \cdot \text{mm}^2}{100} = 1,23 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3 \Rightarrow$$

$$9.63) r \geq 2,3 \text{ mm}$$

Una scelta possibile è pertanto $r = 2,5 \text{ mm}$.

9.8. Massa con due molle in parallelo e smorzatore. Si assume lo smorzatore privo di massa. Gli equilibri meccanici per la



massa m e per lo smorzatore si scrivono rispettivamente:

$$9.64) \begin{cases} -m\ddot{x} - Kx - K_1(x-x_1) = 0 \\ -c\dot{x}_1 + K_1(x-x_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-m\ddot{x} - kx - k_1x + k_1x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{m\ddot{x} + kx + k_1x}{k_1} \Rightarrow$$

$$\dot{x}_1 = \frac{m\ddot{\dot{x}} + k\dot{x} + k_1\dot{x}}{k_1} \Rightarrow -c \frac{m\ddot{\dot{x}} + k\dot{x} + k_1\dot{x}}{k_1} + k_1 \left(\frac{xk_1 - m\ddot{x} - kx - k_1x}{k_1} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$-c(m\ddot{\dot{x}} + k\dot{x} + k_1\dot{x}) + k_1(-m\ddot{x} - kx) = 0 \Rightarrow$$

$$-cm\ddot{\dot{x}} - ck\dot{x} - ck_1\dot{x} - k_1m\ddot{x} - k_1kx = 0 \Rightarrow$$

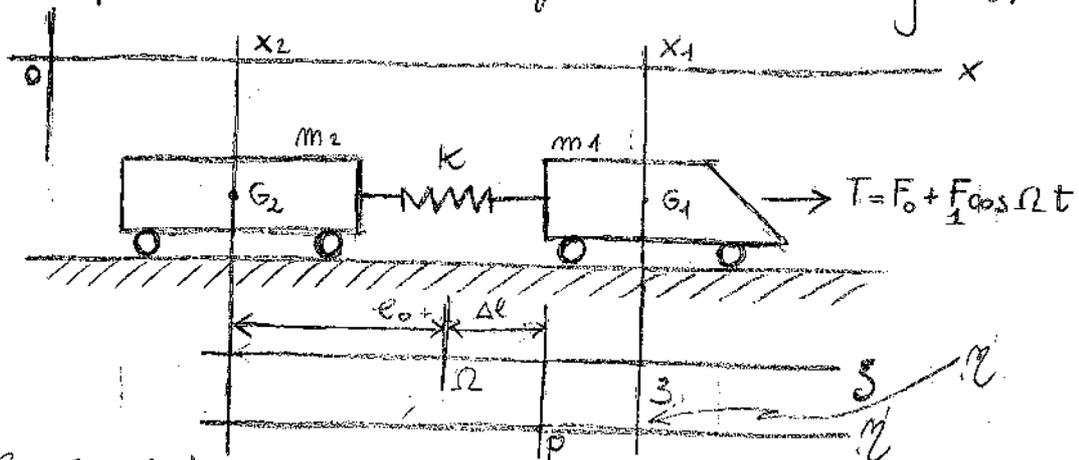
$$-cm\ddot{\dot{x}} - k_1m\ddot{x} - c(k+k_1)\dot{x} - k_1kx = 0 \Rightarrow$$

$$\textcircled{3.65} \quad \ddot{x} + \frac{k_1}{c}\dot{x} + \frac{k+k_1}{m}x - \frac{k_1k}{cm}x = 0$$

Note le costanti k_1, k, c, m è possibile risolvere le 3.65 con le consuete procedure.

Capitolo 10. Applicazioni sulle oscillazioni forzate

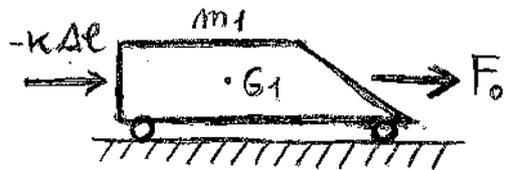
10.1. Sistemi locomotive-carro merci. Determinare la legge oraria dello spostamento relativo fra motrice e vagone.



Indico e_0 la distanza $\bar{G}_1\bar{G}_2$ per la quale la molla è scarica e Δl l'allungamento dovuto alla componente F_0 delle forzanti. Ricavo Δl considerando nulla F_1 e ponendomi in condizioni statiche.

$$-k\Delta l + F_0 = 0 \Rightarrow$$

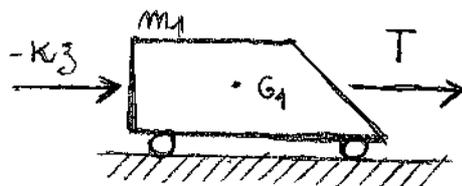
$$(10.1) \Delta l = F_0/k$$



Ciò posto l'equilibrio dinamico per la massa m_1 porge

$$-m_1 \ddot{z} - kz + F_0 + F_1 \cos \Omega t = 0 \Rightarrow$$

$$(10.2) -m_1 \ddot{z} - k(z - \frac{F_0}{k}) + F_1 \cos \Omega t = 0.$$



Definisco ora una nuova asse η : $z = \eta + \Delta l \Leftrightarrow \eta = z - \Delta l.$

Sostituendo $z = \eta + \Delta l$ nella 10.2 abbiamo

$$-m_1 \ddot{\eta} - k(\eta + \Delta l - \frac{F_0}{k}) + F_1 \cos \Omega t = 0 \Rightarrow$$

$$-m_1 \ddot{\eta} - k\eta + F_1 \cos \Omega t = 0 \Rightarrow$$

$$(10.3) \quad m_1 \ddot{\eta} + k\eta = F_1 \cos \Omega t$$

L'integrale generale delle omogenee associate è

$$(10.4) \quad \eta = C_1 \cos(\omega_m t) + C_2 \sin(\omega_m t)$$

Cerco una soluzione particolare della non omogenea:

$$\eta = A \cos \Omega t \Rightarrow \dot{\eta} = -A\Omega \sin \Omega t \Rightarrow \ddot{\eta} = -A\Omega^2 \cos \Omega t \Rightarrow$$

$$-m_1 A \Omega^2 \cos \Omega t + k A \cos \Omega t = F_1 \cos \Omega t \Rightarrow$$

$$(-m_1 \Omega^2 + k) A \cos \Omega t = F_1 \cos \Omega t \Rightarrow A = \frac{F_1}{k - m_1 \Omega^2} \Rightarrow$$

$$(10.5) \quad \eta = \frac{F_1}{k - m_1 \Omega^2} \cos \Omega t$$

Sommando la 10.5 alla 10.4 otteniamo l'integrale generale delle non omogenee:

$$(10.6) \quad \eta = C_1 \cos(\omega_m t) + C_2 \sin(\omega_m t) + \frac{F_1}{k - m_1 \Omega^2} \cos \Omega t$$

errata!

In realtà le 10.6 è sbagliate in quanto nelle 10.2 non si è tenuto in conto che il sistema di riferimento o, z in generale non è inerziale. Considerando allora il teorema dei moti relativi si ha

$$(10.7) \quad \vec{a}_{a1} = \vec{a}_{v1} + \vec{a}_{\Omega 1} \Rightarrow m_1 \vec{a}_{a1} = m_1 \vec{a}_{v1} + m_1 \vec{a}_{\Omega 1} \Rightarrow \boxed{m_1 \ddot{x}_1 = m_1 \ddot{z} + m_1 \ddot{x}_2}$$

D'altra parte si ha

$$(10.8) \quad m_1 \vec{a}_{a1} = \vec{T} + \vec{F}_e \Rightarrow \boxed{m_1 \ddot{x}_1 = F_0 + F_1 \cos \Omega t - k z}$$

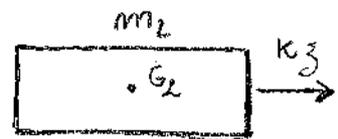
Si consideri inoltre che $x_1 - x_2 = l_0 + z$, dunque abbiamo sin qui che

$$(10.9) \quad \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = m_1 \ddot{z} + m_1 \ddot{x}_2 & \vee \\ m_1 \ddot{x}_1 = F_0 + F_1 \cos \Omega t - k z & \vee \\ x_1 - x_2 = l_0 + z \end{cases}$$

Per la massa m_2 l'equilibrio dinamico porge

$$(10.10) \quad -m_2 \ddot{x}_2 + k z = 0 \Rightarrow \ddot{x}_2 = \frac{k z}{m_2} \vee$$

Sostituire le 1^o delle 10.9 nelle seconde, ottenendo



$$(10.11) \quad m_1 \ddot{\zeta} + m_1 \ddot{x}_2 = F_0 + F_1 \cos \Omega t - k \zeta$$

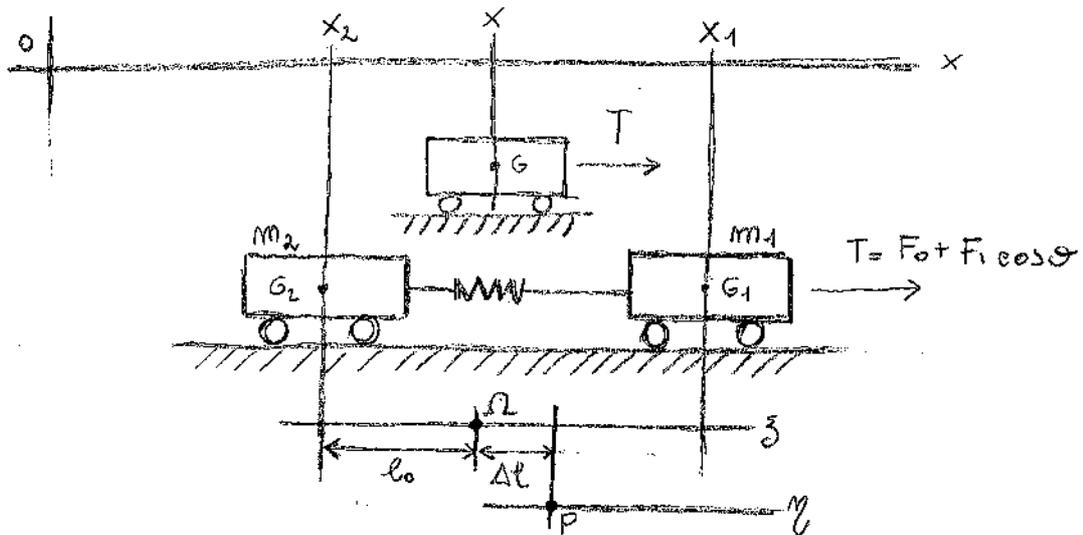
Sostituendo le 10.10 nelle 10.11 si ha

$$m_1 \ddot{\zeta} + \frac{m_1 k \zeta}{m_2} = F_0 + F_1 \cos \Omega t - k \zeta \Rightarrow$$

$$m_1 m_2 \ddot{\zeta} + m_1 k \zeta = m_2 F_0 + m_2 F_1 \cos \Omega t - m_2 k \zeta \Rightarrow$$

$$(10.12) \quad \boxed{m_1 m_2 \ddot{\zeta} + m_1 k \zeta + m_2 k \zeta = m_2 F_0 + m_2 F_1 \cos \Omega t}$$

Per verificare questa equazione studiamo il moto del baricentro del sistema costituito dalle due masse.



La posizione del baricentro è data da

$$(10.13) \quad X = \frac{x_2 m_2 + x_1 m_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow \ddot{X} = \frac{\ddot{x}_2 m_2 + \ddot{x}_1 m_1}{m_1 + m_2}$$

L'equazione di Newton si scrive dunque

$$-\ddot{x}(m_1 + m_2) + F_0 + F_1 \cos \Omega t = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{(\ddot{x}_1 m_1 + \ddot{x}_2 m_2)(m_1 + m_2) + F_0 + F_1 \cos \Omega t}{m_1 + m_2} = 0 \Rightarrow$$

$$(10.14) \quad -\ddot{x}_1 m_1 - \ddot{x}_2 m_2 + F_0 + F_1 \cos \Omega t = 0$$

Essendo poi $x_1 - x_2 = z + l_0$, segue che

$$(10.15) \quad x_1 = x_2 + z + l_0 \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{x}_2 + \dot{z}$$

Sostituendo le 10.15 nelle 10.14 si ha

$$-(\ddot{x}_2 + \ddot{z})m_1 - \ddot{x}_2 m_2 + F_0 + F_1 \cos \Omega t = 0 \Rightarrow$$

$$-\ddot{x}_2 m_1 + \ddot{z} m_1 - \ddot{x}_2 m_2 + F_0 + F_1 \cos \Omega t = 0 \Rightarrow$$

$$(10.16) \quad \ddot{x}_2 (m_1 + m_2) + m_1 \ddot{z} = F_0 + F_1 \cos \Omega t$$

Sostituendo ora le 10.10 nelle 10.16 abbiamo

$$\frac{kz}{m_2} (m_1 + m_2) + m_1 \ddot{z} = F_0 + F_1 \cos \Omega t \Rightarrow$$

$$k(m_1 + m_2)z + m_1 m_2 \ddot{z} = F_0 + F_1 \cos \Omega t \Rightarrow$$

$$m_1 m_2 \ddot{z} + k(m_1 + m_2)z = m_2 F_0 + m_2 F_1 \cos \Omega t \Rightarrow$$

$$(10.17) \quad \ddot{z} + \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} z = \frac{m_2}{m_1} (F_0 + F_1 \cos \Omega t)$$

Si ritrova così le 10.12. L'integrale generale delle 10.17 è

$$10.18) \quad \begin{cases} z_0 = C_1 \cos(\omega_m t) + C_2 \sin(\omega_m t) \\ \omega_m = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} \end{cases}$$

Ricavo una soluzione delle non omogenea utilizzando il metodo di variazione delle costanti secondo il quale esse si scrive nella forma

$$10.19) \quad z(t) = \varphi_1(t) \cos(\omega_m t) + \varphi_2(t) \sin(\omega_m t)$$

ove φ_1, φ_2 devono soddisfare le seguenti condizioni sulle derivate prime

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin \omega_m t \\ \frac{1}{m_1} (F_0 + F_1 \cos \Omega t) & \omega_m \cos \omega_m t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(\omega_m t) & \sin(\omega_m t) \\ -\omega_m \sin(\omega_m t) & \omega_m \cos(\omega_m t) \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{1}{m_1} \sin \omega_m t (F_0 + F_1 \cos \Omega t)}{\omega_m \cos^2(\omega_m t) + \omega_m \sin^2(\omega_m t)}$$

$$= -\frac{\sin(\omega_m t) (F_0 + F_1 \cos \Omega t)}{\omega_m m_1}$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{\begin{vmatrix} \cos(\omega_m t) & 0 \\ -\omega_m \sin(\omega_m t) & \frac{F_0 + F_1 \cos \Omega t}{m_1} \end{vmatrix}}{\omega_m m_1} = \frac{\cos(\omega_m t) (F_0 + F_1 \cos \Omega t)}{\omega_m m_1}$$

Integrando si ha

$$\begin{aligned}
q_1 &= -\frac{1}{\omega_m m_1} \int \sin(\omega_m t) (F_0 + F_1 \cos \Omega t) dt = \\
&= -\frac{1}{\omega_m m_1} \left(\int F_0 \sin(\omega_m t) dt + F_1 \int \sin(\omega_m t) \cos \Omega t dt \right) = \\
&= -\frac{1}{\omega_m m_1} \left(\frac{F_0}{\omega_m} \int \sin(\omega_m t) d(\omega_m t) + \frac{F_1}{2} \int [\sin(\omega_m t + \Omega t) + \right. \\
&\quad \left. + \sin(\omega_m t - \Omega t)] dt \right) = -\frac{1}{\omega_m m_1} \left[\frac{-F_0}{\omega_m} \cos(\omega_m t) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{F_1}{2} \frac{1}{\omega_m + \Omega} \int \sin(\omega_m + \Omega)t d(\omega_m + \Omega)t + \frac{F_1}{2} \frac{1}{\omega_m - \Omega} \int \sin(\omega_m - \right. \\
&\quad \left. - \Omega)t d(\omega_m - \Omega)t \right] = -\frac{1}{\omega_m m_1} \left[-\frac{F_0}{\omega_m} \cos(\omega_m t) - \frac{F_1}{2(\omega_m + \Omega)} \cos(\omega_m + \Omega)t - \right. \\
&\quad \left. - \frac{F_1}{2(\omega_m - \Omega)} \cos(\omega_m - \Omega)t \right] \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{F_0}{\omega_m^2 m_1} \cos(\omega_m t) + \frac{F_1}{2\omega_m m_1 (\omega_m + \Omega)} \cos(\omega_m + \Omega)t + \\
&\quad + \frac{F_1}{2\omega_m m_1 (\omega_m - \Omega)} \cos(\omega_m - \Omega)t = \frac{F_0}{\omega_m^2 m_1} \cos(\omega_m t) + \\
&\quad + \frac{F_1}{2\omega_m m_1} \left(\frac{\cos(\omega_m + \Omega)t}{\omega_m + \Omega} + \frac{\cos(\omega_m - \Omega)t}{\omega_m - \Omega} \right) = \frac{F_0}{\omega_m^2 m_1} \cos(\omega_m t) + \\
&\quad + \frac{F_1 \cos(\omega_m + \Omega)t}{2\omega_m m_1 (\omega_m + \Omega)} + \frac{F_1 \cos(\omega_m - \Omega)t}{2\omega_m m_1 (\omega_m - \Omega)} = \frac{F_0}{\omega_m^2 m_1} \cos(\omega_m t) + \\
&\quad + \frac{F_1}{2\omega_m m_1 (\omega_m + \Omega)} \left(\cos(\omega_m t) \cos(\Omega t) - \sin(\omega_m t) \sin(\Omega t) \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{F_1}{2\omega_m m_1 (\omega_m - \Omega)} \left(\cos(\omega_m t) \cos(\Omega t) + \sin(\omega_m t) \sin(\Omega t) \right) = \\
& = \frac{F_0 \cos(\omega_m t)}{\omega_m^2 m_1} + \left(\frac{F_1}{2\omega_m m_1 (\omega_m + \Omega)} + \frac{F_1}{2\omega_m m_1 (\omega_m - \Omega)} \right) \cos(\omega_m t) \cos(\Omega t) + \\
& + \left(\frac{-F_1}{2\omega_m m_1 (\omega_m + \Omega)} + \frac{F_1}{2\omega_m m_1 (\omega_m - \Omega)} \right) \sin(\omega_m t) \sin(\Omega t) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii) } \varphi_1(t) &= \frac{F_0 \cos(\omega_m t)}{\omega_m^2 m_1} + \frac{F_1}{2\omega_m m_1} \left(\frac{1}{\omega_m + \Omega} + \frac{1}{\omega_m - \Omega} \right) \cos(\omega_m t) \cos(\Omega t) + \\
& + \frac{F_1}{2\omega_m m_1} \left(\frac{-1}{\omega_m + \Omega} + \frac{1}{\omega_m - \Omega} \right) \sin(\omega_m t) \sin(\Omega t) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{F_0 \cos(\omega_m t)}{\omega_m^2 m_1} + \frac{F_1}{2\omega_m m_1} \frac{\omega_m - \Omega + \omega_m + \Omega}{\omega_m^2 - \Omega^2} \cos(\omega_m t) \cos(\Omega t) + \\
& + \frac{F_1}{2\omega_m m_1} \frac{-\omega_m + \Omega + \omega_m + \Omega}{\omega_m^2 - \Omega^2} \sin(\omega_m t) \sin(\Omega t) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{10.20) } \varphi_1(t) &= \frac{F_0 \cos(\omega_m t)}{\omega_m^2 m_1} + \frac{F_1}{m_1 (\omega_m^2 - \Omega^2)} \cos(\omega_m t) \cos(\Omega t) + \\
& + \frac{F_1 \Omega}{\omega_m m_1 (\omega_m^2 - \Omega^2)} \sin(\omega_m t) \sin(\Omega t)
\end{aligned}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\omega_m m_1} \left(F_0 \int \cos(\omega_m t) dt + F_1 \int \cos(\omega_m t) \cos(\Omega t) dt \right)$$

$$\int \cos(\omega_m t) dt = \frac{1}{\omega_m} \int \cos(\omega_m t) d(\omega_m t) = \frac{1}{\omega_m} \sin(\omega_m t)$$

$$\int \cos(\omega_m t) \cos(\Omega t) dt = \frac{1}{2} \int \cos(\omega_m + \Omega)t dt + \frac{1}{2} \int \cos(\omega_m - \Omega)t dt =$$

$$= \frac{1}{2(\omega_m + \Omega)} \int \cos(\omega_m + \Omega)t d(\omega_m + \Omega)t + \frac{1}{2(\omega_m - \Omega)} \int \cos(\omega_m - \Omega)t d(\omega_m - \Omega)t =$$

$$= \frac{1}{2(\omega_m + \Omega)} \sin(\omega_m + \Omega)t + \frac{1}{2(\omega_m - \Omega)} \sin(\omega_m - \Omega)t$$

$$q_2 = \frac{1}{\omega_m m_1} \left[\frac{F_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + F_1 \left(\frac{\sin(\omega_m + \Omega)t}{2(\omega_m + \Omega)} + \frac{\sin(\omega_m - \Omega)t}{2(\omega_m - \Omega)} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{\omega_m m_1} \left[\frac{F_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + \frac{F_1}{2} \left(\frac{\sin(\omega_m t) \cos(\Omega t) + \cos(\omega_m t) \sin(\Omega t)}{\omega_m + \Omega} + \frac{\sin(\omega_m t) \cos(\Omega t) - \cos(\omega_m t) \sin(\Omega t)}{\omega_m - \Omega} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{\omega_m m_1} \left[\frac{F_0 \sin(\omega_m t)}{\omega_m} + \frac{F_1}{2} \left(\frac{\omega_m - \Omega + \omega_m + \Omega}{\omega_m^2 - \Omega^2} \sin(\omega_m t) \cos(\omega_m t) + \frac{\omega_m - \Omega - \omega_m - \Omega}{\omega_m^2 - \Omega^2} \cos(\omega_m t) \sin(\Omega t) \right) \right] \Rightarrow$$

10.21 $q_2 = \frac{F_0 \sin(\omega_m t)}{\omega_m^2 m_1} + \frac{F_1}{m_1(\omega_m^2 - \Omega^2)} \sin(\omega_m t) \cos(\omega_m t) - \frac{F_1 \Omega}{\omega_m m_1(\omega_m^2 - \Omega^2)} \cos(\omega_m t) \sin(\Omega t)$

Sostituendo le 10.21, 10.22 nella 10.19 si ha

$$\begin{aligned}
 z(t) &= \frac{F_0 \cos^2(\omega_m t)}{\omega_m^2 m_1} + \frac{F_1 \cos^2(\omega_m t) \cos(\Omega t)}{m_1 (\omega_m^2 - \Omega^2)} + \\
 &+ \frac{F_1 \Omega \sin(\omega_m t) \cos(\omega_m t) \sin(\Omega t)}{\omega_m m_1 (\omega_m^2 - \Omega^2)} + \\
 &+ \frac{F_0 \sin^2(\omega_m t)}{\omega_m^2 m_1} + \frac{F_1 \sin^2(\omega_m t) \cos(\Omega t)}{m_1 (\omega_m^2 - \Omega^2)} - \\
 &- \frac{F_1 \Omega \sin(\omega_m t) \cos(\omega_m t) \sin(\Omega t)}{\omega_m m_1 (\omega_m^2 - \Omega^2)} = \frac{F_0}{\omega_m^2 m_1} + \\
 &+ \frac{F_1 \cos(\Omega t)}{m_1 (\omega_m^2 - \Omega^2)}
 \end{aligned}$$

Dunque l'integrale generale della 10.17 si scrive

$$\text{10.22) } z(t) = C_1 \cos(\omega_m t) + C_2 \sin(\omega_m t) + \frac{F_0}{\omega_m^2 m_1} + \frac{F_1 \cos(\Omega t)}{m_1 (\omega_m^2 - \Omega^2)}$$

Ricavo le costanti C_1, C_2 in funzione delle c.c..

$$\begin{aligned}
 z(0) &= C_1 + \frac{F_0}{\omega_m^2 m_1} + \frac{F_1}{m_1 (\omega_m^2 - \Omega^2)} = z_0 \Rightarrow C_1 = z_0 - \frac{F_0}{\omega_m^2 m_1} - \\
 &- \frac{F_1}{m_1 (\omega_m^2 - \Omega^2)} = z_0 - \frac{1}{m_1} \left(\frac{F_0}{\omega_m^2} + \frac{F_1}{\omega_m^2 - \Omega^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{10.23) } z'(t) = -C_1 \omega_m \sin(\omega_m t) + C_2 \omega_m \cos(\omega_m t) - \frac{F_1 \Omega \sin(\Omega t)}{m_1 (\omega_m^2 - \Omega^2)} \Rightarrow$$

$$\xi'(0) = C_2 \omega_m = \dot{\xi}_0 \Rightarrow C_2 = \frac{\dot{\xi}_0}{\omega_m}$$

Daunque le 10.22 si scrive

$$\xi(t) = \left[\xi_0 - \frac{1}{m_1} \left(\frac{F_0}{\omega_m^2} + \frac{F_1}{\omega_m^2 - \Omega^2} \right) \right] \cos(\omega_m t) + \frac{\dot{\xi}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) +$$

$$+ \frac{F_0}{\omega_m^2 m_1} + \frac{F_1 \cos(\Omega t)}{m_1(\omega_m^2 - \Omega^2)} = \left(\xi_0 - \frac{F_0}{m_1 \omega_m^2} \right) \cos(\omega_m t) + \frac{\dot{\xi}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) -$$

$$\left(\frac{F_1}{m_1(\omega_m^2 - \Omega^2)} \cos(\omega_m t) \right) + \frac{F_1}{m_1(\omega_m^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t) + \frac{F_0}{\omega_m^2 m_1} \Rightarrow$$

$$\text{10.24} \quad \xi(t) = \left(\xi_0 - \frac{F_0}{m_1 \omega_m^2} \right) \cos(\omega_m t) + \frac{\dot{\xi}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + \frac{F_1}{m_1(\omega_m^2 - \Omega^2)} \left[\cos(\Omega t) - \right. \\ \left. - \cos(\omega_m t) \right] + \frac{F_0}{\omega_m^2 m_1}, \quad \omega_m \neq \Omega$$

Questa soluzione è valida per $\omega_m \neq \Omega$. Per $\Omega \rightarrow \omega_m$ occorre invece considerare che

$$\lim_{\Omega \rightarrow \omega_m} \frac{\cos(\Omega t) - \cos(\omega_m t)}{\omega_m^2 - \Omega^2} = \lim_{\Omega \rightarrow \omega_m} \frac{-t \sin(\Omega t)}{-2\Omega} = \frac{t \sin(\Omega t)}{2\Omega}$$

e dunque per $\Omega \rightarrow \omega_m$ si ha la soluzione

$$\text{10.25} \quad \xi(t) = \left(\xi_0 - \frac{F_0}{m_1 \omega_m^2} \right) \cos(\omega_m t) + \frac{\dot{\xi}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + \frac{F_1 \sin(\Omega t) t}{2 m_1 \Omega} + \frac{F_0}{\omega_m^2 m_1}$$

Definire una nuova ascissa ξ $\xi = \zeta - \frac{F_0}{\omega_m^2 m_1}$ allora le

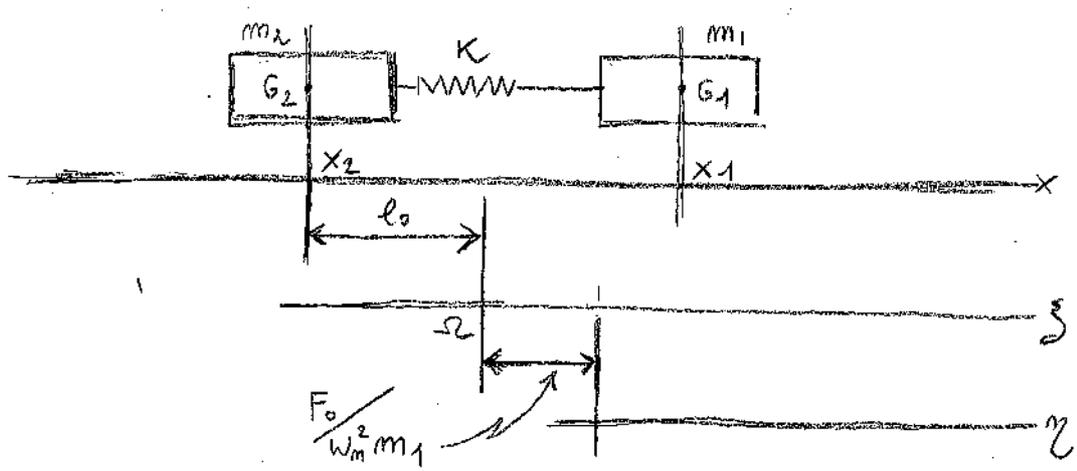
10.24, 10.25. in diviso θ

10.26
$$\xi(t) = \left(\xi_0 - \frac{F_0}{m_1 \omega_m^2} \right) \cos(\omega_m t) + \frac{\dot{\xi}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + \frac{F_1}{m_1 (\omega_m^2 - \Omega^2)} \left[\cos(\Omega t) - \cos(\omega_m t) \right]$$
 per $\omega_m \neq \Omega$

10.27
$$\xi(t) = \left(\xi_0 - \frac{F_0}{m_1 \omega_m^2} \right) \cos(\omega_m t) + \frac{\dot{\xi}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + \frac{F_1 \sin(\Omega t) t}{2 m_1 \Omega}$$
 per $\Omega \rightarrow \omega_m$

Si consideriamo ora i seguenti dati numerici

$m_1 = 84 \cdot 10^3 \text{ kg}$ $F_1 = 7 \cdot 10^3 \text{ N}$ $K = 2500 \cdot 10^3 \text{ N/m}$
 $m_2 = 130 \cdot 10^3 \text{ kg}$ $\Omega = 6\pi/10$



Per la pulsazione naturale si ha

$$\omega_m = \sqrt{\frac{2500 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}} (214 \cdot 10^3 \text{Kg})}{10520 \cdot 10^6 \text{Kg}^2}} = \sqrt{48,99 \frac{\text{Kg}}{\text{s}^2} \frac{\text{Kg}}{\text{Kg}^2}} = 6,99 \frac{\text{r}}{\text{s}}$$

Diunque la legge oraria da utilizzare è la 10.26, la quale si scrive

$$10.26) \zeta = \zeta_0 \cos(\omega_m t) + 0,142 \dot{\zeta}_0 \sin(\omega_m t) + 6,4 \cdot 10^{-3} \text{m} [\cos(\Omega t) - \cos(\omega_m t)]$$

essendo in questo caso

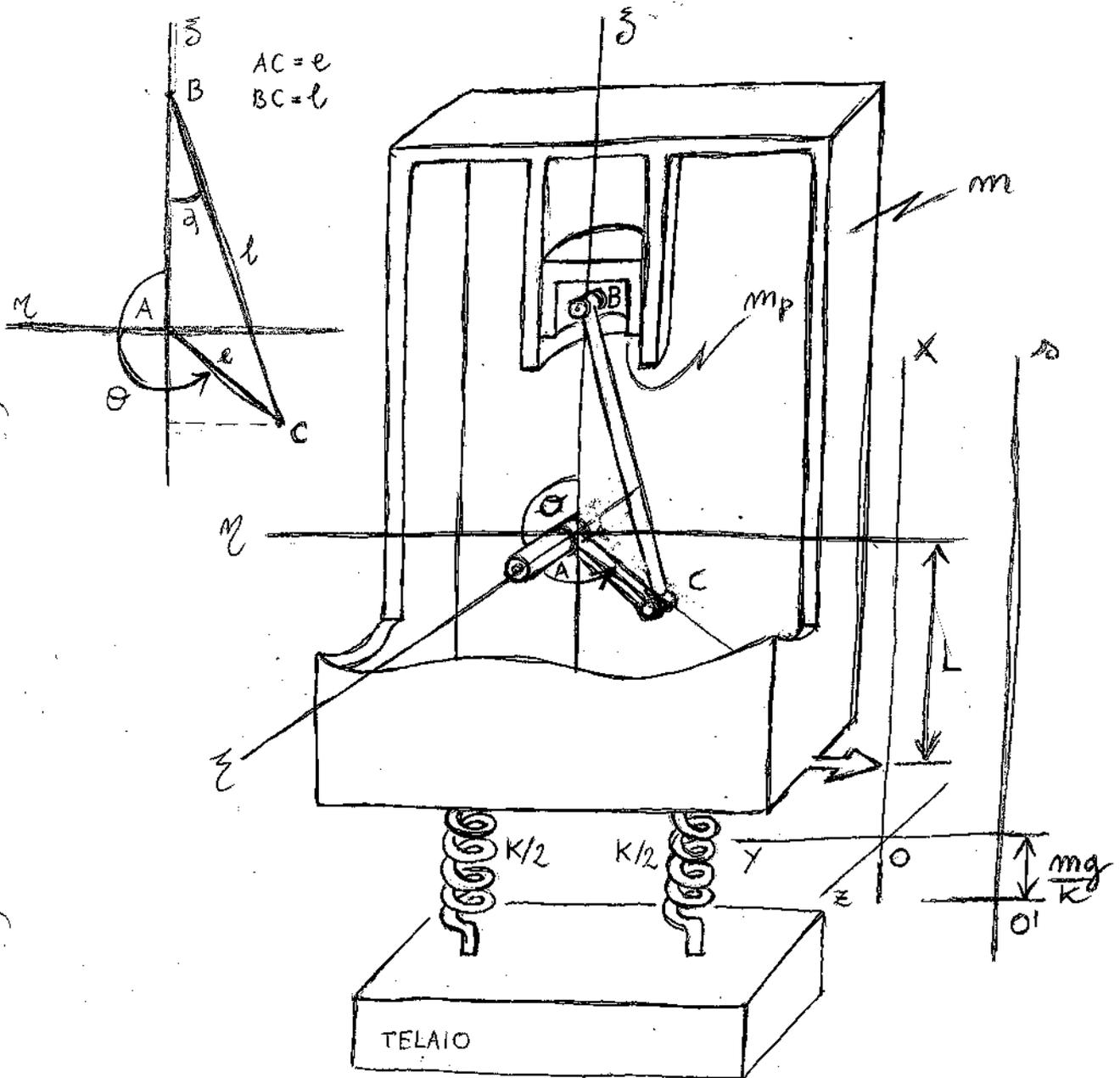
$$\frac{F_1}{m_1(\omega_m^2 - \Omega^2)} = \frac{7 \cdot 10^3 \text{N} \cdot 10^2}{84 \cdot 10^3 \text{Kg} \cdot 13} = 6,4 \cdot 10^{-3} \text{m}$$

$$m_1 \omega_m^2 = 84 \cdot 10^3 \text{Kg} \cdot \frac{49}{\text{s}^2} = 4,11 \cdot 10^6 \text{Kg} / \text{s}^2$$

Sostituendo anche gli argomenti delle funzioni trigonometriche abbiamo in fine

$$10.29) \zeta = \zeta_0 \cos\left(\frac{7t}{5}\right) + 0,142 \dot{\zeta}_0 \sin\left(\frac{7t}{5}\right) + 6,4 \cdot 10^{-3} \text{m} \left[\cos\left(\frac{6t}{5}\right) - \cos\left(\frac{7t}{5}\right) \right]$$

10.2. Macchine ammortizzate con un pistone, la manovella AC sia animata da un moto rotatorio uniforme di velocità



angolare $\Omega = \dot{\theta}$. Ricavo il moto del pistone nel sistema di riferimento $Azyz$:

$$10.30 \quad \begin{cases} z = l \cos \alpha + e \cos \theta \Rightarrow l \cos \alpha = z + e \cos \theta \\ l \sin \alpha = e \sin \theta \end{cases}$$

Derivando nel tempo si ha

$$10.31 \quad \begin{cases} \dot{z} = -(\ell \dot{\alpha} \sin \alpha) + e \dot{\theta} \sin \theta \\ \ell \dot{\alpha} \cos \alpha = e \dot{\theta} \cos \theta \end{cases}$$

Sostituendo la seconda delle 10.30 nelle prime delle 10.31 otteniamo e la prima delle 10.30 nelle seconde delle 10.31 si ha:

$$\begin{cases} \dot{z} = -\dot{\alpha} (e \sin \theta) + e \dot{\theta} \sin \theta = -(\dot{\theta} + \dot{\alpha}) e \sin \theta \\ \dot{\alpha} (z - e \cos \theta) = e \dot{\theta} \cos \theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{z} = -(\dot{\theta} + \dot{\alpha}) e \sin \theta \\ \dot{\alpha} = \frac{e \dot{\theta} \cos \theta}{z - e \cos \theta} \end{cases} \Rightarrow \dot{z} = -\left(\dot{\theta} + \frac{e \dot{\theta} \cos \theta}{z - e \cos \theta}\right) e \sin \theta \Rightarrow$$

$$10.32 \quad \dot{z} = -\frac{z - e \cos \theta + e \cos \theta}{z - e \cos \theta} \dot{\theta} e \sin \theta = \boxed{-\frac{z \dot{\theta} e \sin \theta}{z - e \cos \theta}}$$

Considerando che $\dot{\theta} = \Omega$, $\theta = \Omega t$ allora si ha

$$10.33 \quad \dot{z} = -\frac{\Omega e z \sin(\Omega t)}{z - e \cos(\Omega t)} \Leftrightarrow \boxed{[z - e \cos(\Omega t)] dz + [\Omega e z \sin(\Omega t)] dt = 0}$$

Cioè ora la funzione $F(z, t)$ il cui differenziale si è

$$10.34 \quad dF = \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial t} dt = [z - e \cos(\Omega t)] dz + [\Omega e z \sin(\Omega t)] dt$$

ovvero le cui derivate soddisfino le equazioni:

$$(10.35) \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z} = z - e \cos(\Omega t) \\ \frac{\partial F}{\partial t} = + \Omega e z \sin(\Omega t) \end{cases}$$

Si può osservare che questa funzione esiste, infatti le forme differenziali in 10.33 è chiusa, quindi

$$\begin{cases} \frac{\partial (z - e \cos(\Omega t))}{\partial t} = + e \Omega \sin(\Omega t) \\ \frac{\partial (+ \Omega e z \sin(\Omega t))}{\partial z} = + e \Omega \sin(\Omega t) \end{cases}$$

Perché per l'insieme di variabili di (t, z) un insieme semplicemente connesso, allora la f.d. 10.33 è esatta.

Provo a ricavare F integrando direttamente le 10.35:

$$(10.36) \quad F = \int \frac{\partial F}{\partial z} dz = \int (z - e \cos(\Omega t)) dz = \frac{z^2}{2} - e z \cos(\Omega t) + C_1(t)$$

$$(10.37) \quad F = \int \frac{\partial F}{\partial t} dt = \int (+ \Omega e z \sin(\Omega t)) dt = e z \int (+ \sin(\Omega t)) d(\Omega t) = \\ = - e z \cos(\Omega t) + C_2(z)$$

Confrontando le 10.36, 10.37 si ha

$$\frac{z^2}{2} + e z \cos(\Omega t) + C_1(t) = -e z \cos(\Omega t) + C_2(z) \Rightarrow$$

$$10.38) C_1(t) = \frac{z^2}{2} + C_1(t)$$

Sostituendo le 10.38 nelle 10.37 si ha

$$10.39) F = -e z \cos(\Omega t) + \frac{z^2}{2} + C_1(t)$$

Derivando parzialmente le 10.39 e confrontando con le 10.35 si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z} = -e \cos(\Omega t) + z \\ \frac{\partial F}{\partial t} = +e z \Omega \sin(\Omega t) + \frac{dC_1(t)}{dt} = +e z \Omega \sin(\Omega t) \Rightarrow \end{cases}$$

$$\frac{dC_1(t)}{dt} = 0 \Rightarrow C_1(t) = K \Rightarrow$$

$$10.40) \boxed{F = -e z \cos(\Omega t) + \frac{z^2}{2} + K}$$

Dunque le 10.40 rappresenta l'insieme delle funzioni il cui differenziale totale si scrive

$$10.41) dF = +\Omega e z \sin(\Omega t) dt + [z + e \cos(\Omega t)] dz$$

Tornando ora alla equazione differenziale 10.33, dobbiamo

trovare ora la funzione $z = z(t)$ per la quale la funzione composta $F(z(t), t)$ ha differenziale nullo:

$$dF(z(t), t) = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0 \iff F(z(t), t) = \text{costante}$$

$$\iff -e z \cos(\Omega t) + \frac{z^2}{2} + K = \text{cost} \iff -e z \cos(\Omega t) + \frac{z^2}{2} = \text{cost}$$

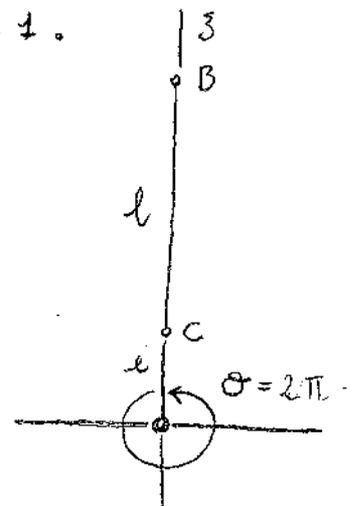
$$10.42 \quad -2e z \cos(\Omega t) + z^2 = \text{cost}$$

Prendiamo ora le configurazioni del manovellismo indicate in figura. Si ha $z = e + l$, $\cos \Omega t = 1$. Sostituendo nella 10.42 abbiamo

$$-2e(e+l) + (e+l)^2 = \text{cost} \Rightarrow$$

$$-2e^2 - 2el + e^2 + l^2 + 2el = \text{cost} \Rightarrow$$

$$10.43 \quad l^2 - e^2 = \text{cost}$$



Risolviamo ora la 10.42 in z . Si ha

$$z^2 - 2e \cos(\Omega t) z - \text{cost} = 0 \Rightarrow$$

$$z = \frac{+2e \cos(\Omega t) \mp \sqrt{4e^2 \cos^2(\Omega t) + 4 \text{cost}}}{2}$$

$$= +e \cos(\Omega t) \mp \sqrt{e^2 \cos^2(\Omega t) + \text{cost}}$$

Poiché, nel nostro caso $z > 0 \forall t$, segue che

$$10.44) \quad \zeta = +e \cos(\Omega t) + \sqrt{e^2 \cos^2(\Omega t) + e^2}$$

Sostituendo le 10.43 nelle 10.44 si ha

$$10.45) \quad \boxed{\zeta = +e \cos(\Omega t) + \sqrt{e^2 \cos^2(\Omega t) + l^2 - e^2}}$$

Come verifica delle 10.45 controllo che soddisfi le 10.33:

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} &= -e \Omega \sin(\Omega t) + \frac{1}{2} \left(e^2 \cos^2(\Omega t) + e^2 \right)^{-1/2} e^2 \cos(\Omega t) \cdot (-2 \sin(\Omega t) \Omega) = \\ &= -e \Omega \sin(\Omega t) - \frac{e^2 \cos(\Omega t) \Omega \sin(\Omega t)}{\sqrt{e^2 \cos^2(\Omega t) + e^2}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{-e \Omega \sin(\Omega t) \sqrt{e^2 \cos^2(\Omega t) + e^2} - e^2 \cos(\Omega t) \Omega \sin(\Omega t)}{\sqrt{e^2 \cos^2(\Omega t) + e^2}} =$$

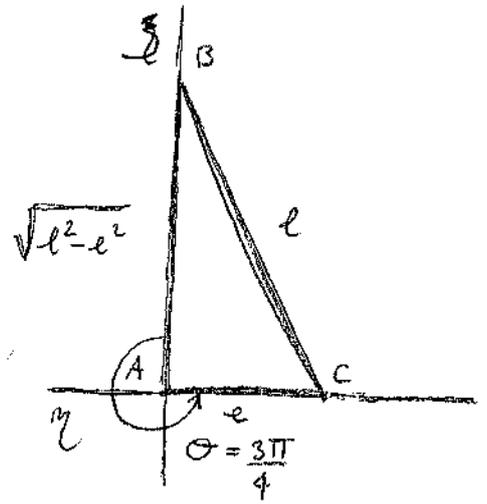
$$= \frac{e \Omega \sin(\Omega t) \left(-e \cos(\Omega t) - \sqrt{e^2 \cos^2(\Omega t) + e^2} \right)}{\zeta + e \cos(\Omega t)} =$$

$$= \frac{-e \Omega \sin(\Omega t) \zeta}{\zeta + e \cos(\Omega t)}$$

Si ritrova così la 10.33. Vediamo ancora se le 10.45 è verificata nelle configurazioni indicate in figura:

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \zeta = \sqrt{l^2 + e^2} \quad \dots$$

Il procedimento che ho adottato per pervenire alla 10.45 è molto lungo. Col teorema del coseno si procede più speditamente:



$$e^2 = l^2 + z^2 - 2lz \cos \alpha \Rightarrow$$

$$l^2 + z^2 - e^2 = 2(lz \cos \alpha) \Rightarrow l \cos \alpha = \frac{l^2 + z^2 - e^2}{2z}$$

Sostituendo nelle prime delle 10.30 abbiamo

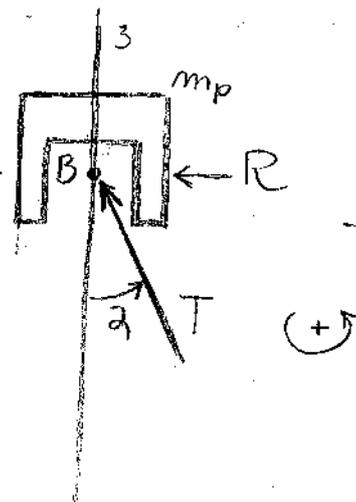
$$z = \frac{l^2 + z^2 - e^2}{2z} + e \cos \theta \Rightarrow 2z^2 = l^2 + z^2 - e^2 + 2ez \cos \theta \Rightarrow$$

$$10.46) z^2 - 2ez \cos \theta - l^2 + e^2 = 0 \Rightarrow$$

$$z = \frac{2e \cos \theta \pm \sqrt{4e^2 \cos^2 \theta + 4l^2 - 4e^2}}{2} = e \cos \theta \pm \sqrt{e^2 \cos^2 \theta + l^2 - e^2} \Rightarrow$$

$$10.47) z = e \cos \theta + \sqrt{e^2 \cos^2 \theta + l^2 - e^2} = e \cos \theta + \sqrt{l^2 - e^2 \sin^2 \theta}$$

Si ritrova la 10.45. Impongo l'equilibrio dinamico per lo stantuffo. Si consideri che il sistema di riferimento $Az\eta\xi$ è inerziale, dunque si ha



$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_A \Rightarrow m_P \vec{a}_a = m_P \vec{a}_r + m_P \vec{a}_A$$

↓

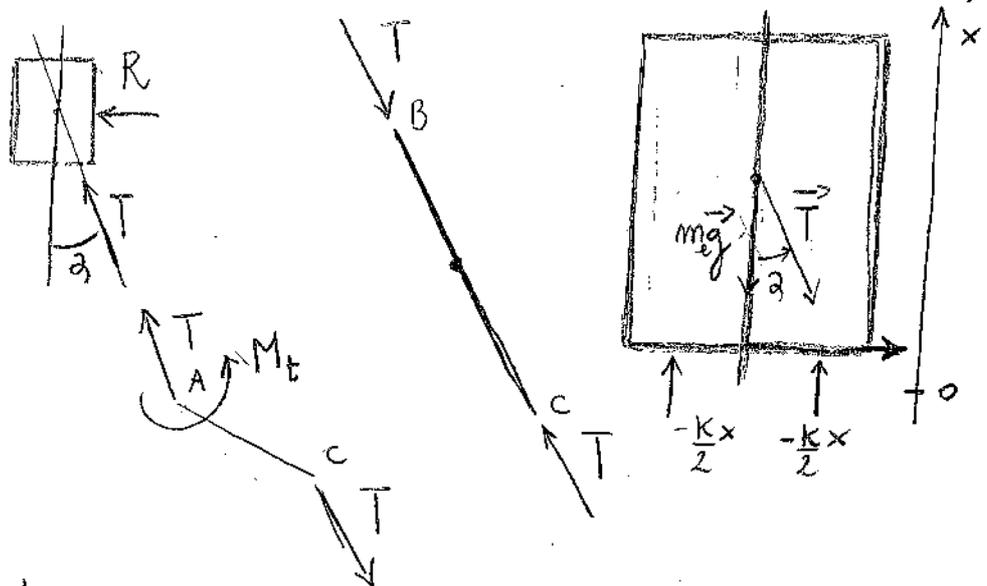
$$\begin{cases} m_p \vec{a}_a = m_p \vec{g} + \vec{T} + \vec{R} \\ m_p \vec{a}_a = m_p \vec{a}_z + m_p \vec{a}_A \end{cases} \Rightarrow m_p \vec{g} + \vec{T} + \vec{R} = m_p \vec{a}_z + m_p \vec{a}_A \Rightarrow$$

$$10.48 \begin{cases} -m_p g + T \cos \alpha = m_p \ddot{z} + m_p \ddot{x} \\ T \sin \alpha + R = 0 \end{cases}$$

Dalle prime delle 10.48 ricavo $T \cos \alpha$:

$$10.49 \quad T \cos \alpha = m_p g + m_p \ddot{z} + m_p \ddot{x}$$

Impongo l'equilibrio dinamico per il resto della macchina: assumendo nulla l'inerzia di bielle e manovelle,



allora viene trasmessa alla cinghiera in A esattamente la forza \vec{T} . Ponendo

$$10.49.b) \quad m_e = m - m_p \quad (\text{masse totali meno quella del pistone})$$

$$-T \cos \alpha - m_2 g - kX - m_2 \ddot{x} = 0 \Rightarrow$$

$$(10.50) \quad m_2 \ddot{x} + kX + m_2 g + T \cos \alpha = 0$$

Sostituendo le 10.49 nelle 10.50 si ha

$$\overline{m_2 \ddot{x}} + \overline{kX} + \overline{m_2 g} + \overline{m_p g} + \overline{m_p \ddot{z}} + \overline{m_p \ddot{x}} = 0 \Rightarrow$$

$$(10.51) \quad (m_2 + m_p) \ddot{x} + m_p \ddot{z} + kX + (m_2 + m_p)g = 0$$

Derivo le 10.47 per ricavare \ddot{z} :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -e \dot{\theta} \sin \theta + \frac{1}{2} (l^2 - e^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} (-e^2) 2 \sin \theta \dot{\theta} \cos \theta = \\ &= -e \dot{\theta} \sin \theta - \frac{e^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}}{\sqrt{l^2 - e^2 \sin^2 \theta}} \Rightarrow \dots \end{aligned}$$

Come si vede l'espressione di \dot{z} è piuttosto complessa e comparsa le 10.51. Allora in questo caso ammettiamo $e \ll l$,

e dunque le 10.47 si scrivono

$$(10.52) \quad z = e \cos \theta + l \Rightarrow \dot{z} = -e \dot{\theta} \sin \theta \Rightarrow \ddot{z} = -e \dot{\theta}^2 \cos \theta$$

Pertanto le 10.51 si scrive

$$\overline{(m_2 + m_p) \ddot{x}} + \overline{m_p (-e \dot{\theta}^2 \cos \theta)} + \overline{kX} + \overline{(m_2 + m_p)g} = 0 \Rightarrow$$

$$\overline{(m_2 + m_p) \ddot{x}} + \overline{kX} = \overline{m_p e \dot{\theta}^2 \cos \theta} - \overline{(m_2 + m_p)g} \Rightarrow$$

$$10.53) m\ddot{x} + kx = e m_p \Omega^2 \cos \theta - mg$$

Si considera ora che in condizioni statiche l'equilibrio fra le forze elastiche e le forze peso porta

$$mg = k \Delta x_s \Rightarrow \Delta x_s = \frac{mg}{k}$$

Introduco allora una nuova ascissa s avente origine nella posizione di equilibrio statico e equivalente ad x . Si ha allora $s = x + \frac{mg}{k} \Rightarrow \ddot{s} = \ddot{x}$. Sostituendo nelle 10.53 si ha allora

$$m\ddot{s} + k\left(s - \frac{mg}{k}\right) = e m_p \Omega^2 \cos \theta - mg \Rightarrow$$

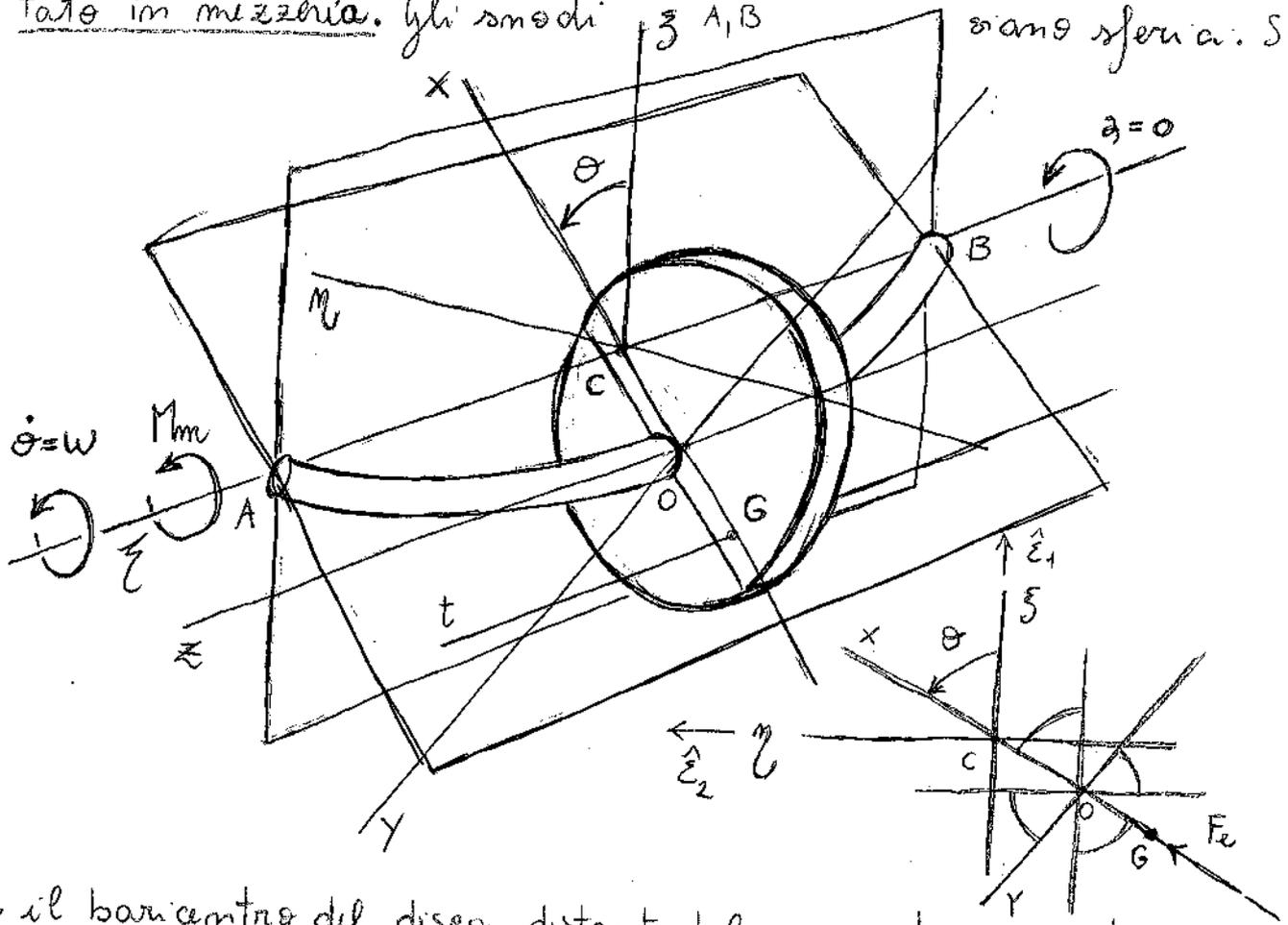
$$10.54) \boxed{m\ddot{s} + ks = e m_p \Omega^2 \cos(\Omega t)} \quad \boxed{\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Dunque - in base alle 4.14, 4.15 - abbiamo la soluzione

$$10.55) \begin{cases} s(t) = \frac{\dot{s}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + s_0 \cos(\omega_m t) + \frac{e m_p \Omega^2}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} (\cos(\Omega t) - \cos(\omega_m t)) \\ \omega_m \neq \Omega \end{cases}$$

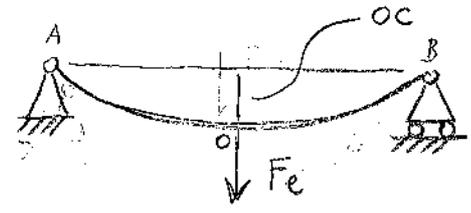
$$10.56) \begin{cases} s(t) = \frac{\dot{s}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + s_0 \cos(\omega_m t) + \left(\frac{e m_p \Omega^2 \sin(\omega_m t)}{2\omega_m m} \right) t \\ \Omega \rightarrow \omega_m \end{cases}$$

10.3. Autocentramento di un albero rotante con volano calcolato in mezzeria. Gli smodi $\xi_{A,B}$ sono sferici. Si



G il baricentro del disco, distante dal suo centro geometrico di una distanza $\overline{OG} = e$, detta ECCENTRICITA'. Si trascuri l'effetto della forza peso. Allora le sollecitazioni effettive agenti e costituite dalle forze elastiche esercitate dall'albero il quale e sollecitato come una trave isostatica caricata in mezzeria, per le quali si ha quanto segue

$$10.57 \quad \overline{OC} = \frac{L^3 F_e}{48 E j} \iff \boxed{F_e = \frac{\overline{OC} 48 E j}{L^3}}$$



L'equilibrio dinamico del disco poggia

$$10.58 \quad \begin{cases} \vec{F}_e - m\vec{a}_G = 0 \\ \vec{M}_m - I_t \vec{\alpha} - m\vec{a}_G \times \vec{GC} = 0 \end{cases}$$

Ricavo la posizione del centro di massa G in funzione di θ . A tal fine deduco le relazioni fra i vettori.

$$10.59 \quad \begin{cases} \hat{e}_1 = \cos\theta \hat{E}_1 + \sin\theta \hat{E}_2 \\ \hat{e}_2 = -\sin\theta \hat{E}_1 + \cos\theta \hat{E}_2 \end{cases}$$

La posizione del centro di massa è data da

$$\vec{CG} = \vec{CO} + \vec{OG} = -(\overline{OC} + e) \hat{e}_1 = -(\overline{OC} + e)(\cos\theta \hat{E}_1 + \sin\theta \hat{E}_2) \Rightarrow$$

$$10.60 \quad \begin{cases} x_G = -(\overline{OC} + e) \cos\theta \\ z_G = -(\overline{OC} + e) \sin\theta \end{cases}$$

Derivo per ricavare l'accelerazione del centro di massa:

$$10.61 \quad \begin{cases} \dot{x}_G = -[\dot{\overline{OC}} \cos\theta - (\overline{OC} + e) \dot{\theta} \sin\theta] \\ \dot{z}_G = -[\overline{OC} \sin\theta + (\overline{OC} + e) \dot{\theta} \cos\theta] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\ddot{x}_G = -\left[\ddot{\overline{OC}} \cos\theta - \dot{\overline{OC}} \dot{\theta} \sin\theta - (\overline{OC} \dot{\theta} \sin\theta + (\overline{OC} + e) \dot{\theta}^2 \cos\theta) \right]$$

$$\ddot{z}_G = - \left[\ddot{\bar{c}} \sin \theta + \dot{\bar{c}} \dot{\theta} \cos \theta + \left(\dot{\bar{c}} \dot{\theta} \cos \theta - (\bar{c} + e) \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) \right]$$

Nel calcolo delle accelerazioni ho assunto $\ddot{\theta} = 0$ poiché voglio studiare il comportamento del sistema a regime.

Dunque per l'accelerazione si ha

$$\begin{cases} \ddot{z}_G = - \ddot{\bar{c}} \cos \theta + \dot{\bar{c}} \dot{\theta} \sin \theta + \dot{\bar{c}} \dot{\theta}^2 \sin \theta + (\bar{c} + e) \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ \ddot{y}_G = - \ddot{\bar{c}} \sin \theta - \dot{\bar{c}} \dot{\theta} \cos \theta - \dot{\bar{c}} \dot{\theta} \cos \theta + (\bar{c} + e) \dot{\theta}^2 \sin \theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\textcircled{10.62} \begin{cases} \ddot{z}_G = - \ddot{\bar{c}} \cos \theta + 2 \dot{\bar{c}} \dot{\theta} \sin \theta + (\bar{c} + e) \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ \ddot{y}_G = - \ddot{\bar{c}} \sin \theta - 2 \dot{\bar{c}} \dot{\theta} \cos \theta + (\bar{c} + e) \dot{\theta}^2 \sin \theta \end{cases}$$

La forza elastica si scrive

$$\textcircled{10.63} \vec{F}_e = \frac{\bar{c}}{L^3} 48 E J \hat{e}_1 = \frac{\bar{c}}{L^3} 48 E J (\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2)$$

In queste formule \bar{c} rappresenta un segmento orientato, primo $\bar{c} = x_c$. Ciò posto le prime delle 10.58 si scrivono:

$$\textcircled{10.64} \begin{cases} \frac{48 E J}{L^3} x_c \cos \theta - m \left(-\ddot{x}_c \cos \theta + 2 \dot{x}_c \dot{\theta} \sin \theta + (x_c + e) \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) = 0 \\ \frac{48 E J}{L^3} x_c \sin \theta - m \left(-\ddot{x}_c \sin \theta - 2 \dot{x}_c \dot{\theta} \cos \theta + (x_c + e) \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) = 0 \end{cases}$$

Consideriamo ora le seconde delle 10.58. Per il modello vettoriale si ha

$$\begin{aligned} \vec{a}_G \times \vec{GC} &= \left(\ddot{\zeta}_G \hat{E}_1 + \ddot{\eta}_G \hat{E}_2 \right) \times (e + \overline{OC}) \left(\cos\theta \hat{E}_1 + \sin\theta \hat{E}_2 \right) = \\ &= (e + x_c) \begin{vmatrix} \ddot{\zeta}_G \hat{E}_1 & \hat{E}_2 & \hat{E}_3 \\ \ddot{\zeta}_G & \ddot{\eta}_G & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (e + x_c) \left(\ddot{\zeta}_G \sin\theta - \ddot{\eta}_G \cos\theta \right) \hat{E}_3 \end{aligned}$$

Si consideri poi che

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta}_G \sin\theta - \ddot{\eta}_G \cos\theta &= -\cancel{\ddot{x}_c \sin\theta \cos\theta} + 2\dot{x}_c \dot{\theta} \sin^2\theta + \\ &+ (x_c + e) \dot{\theta}^2 \sin\theta \cos\theta - \left[-\cancel{\ddot{x}_c \sin\theta \cos\theta} - 2\dot{x}_c \dot{\theta} \cos^2\theta + \right. \\ &\left. + (x_c + e) \dot{\theta}^2 \sin\theta \cos\theta \right] = 2\dot{x}_c \dot{\theta} \end{aligned}$$

Dunque - tenendo conto che $\vec{a} = 0$ per ipotesi - la seconda delle 10.58 si scrive

$$(10.65) \quad M_{mm} - m(e + x_c) 2\dot{x}_c \dot{\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$(m)(e + x_c) (2\dot{\theta}) \dot{x}_c = M_{mm} \Rightarrow (e + x_c) \dot{x}_c = \frac{M_{mm}}{m 2\dot{\theta}} \Rightarrow$$

$$(e + x_c) dx_c = \frac{M_m}{2m\dot{\theta}} dt \Rightarrow$$

$$e x_c + \frac{x_c^2}{2} = \frac{M_m}{2m\dot{\theta}} t + C \Rightarrow 2e x_c + x_c^2 = \frac{M_m}{m\dot{\theta}} t + C \Rightarrow$$

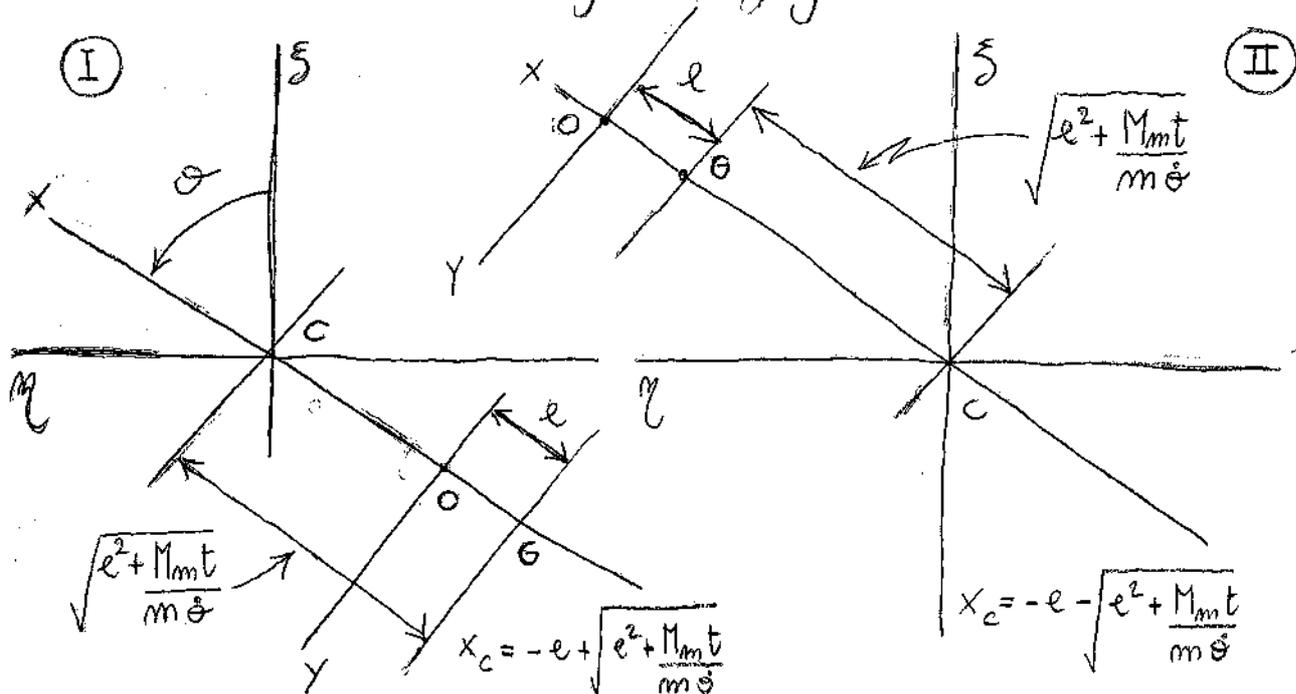
$$x_c^2 + 2e x_c - \frac{M_m t}{m\dot{\theta}} + C = 0$$

Assumiamo ora che per $t=0$ sia $x_c=0$, allora si ha $C=0$, dunque

$$\text{10.66) } x_c^2 + 2e x_c - \frac{M_m t}{m\dot{\theta}} = 0 \Rightarrow x_c = -e \pm \frac{\sqrt{4e^2 + \frac{4M_m t}{m\dot{\theta}}}}{2}$$

$$= -e \pm \sqrt{e^2 + \frac{M_m t}{m\dot{\theta}}}$$

Queste due soluzioni corrispondono alle due configurazioni illustrate nelle seguenti figure.



Entrambe le configurazioni sono caratterizzate dalle stesse distanze di g dell'asse di rotazione. Studia la CONFIGURAZIONE I, a verso orario

$$10.67 \left\{ x_c = -e + \sqrt{e^2 + \frac{M_m t}{m \dot{\theta}}} = -e + \sqrt{e^2 + a t} \right.$$

$$10.68 \left\{ a \triangleq \frac{M_m}{m \dot{\theta}} \right.$$

Derivando abbiamo

$$10.69 \quad \dot{x}_c = \frac{1}{2} (e^2 + a t)^{-1/2} a = \frac{a}{2 \sqrt{e^2 + a t}} \Rightarrow$$

$$10.70 \quad \ddot{x}_c = \frac{a}{2} (e^2 + a t)^{-3/2} a = \frac{a^2}{2} (e^2 + a t)^{-3/2}$$

Moltiplico ora la prima delle 10.64 per $\sin \theta$ e la seconda per $\cos \theta$ e sottraggo le seconde alle prime:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{48 E J}{L^3} x_c \sin \theta \cos \theta - m \left[-\ddot{x}_c \sin \theta \cos \theta + 2 \dot{x}_c \dot{\theta} \sin^2 \theta + \right. \\ \left. + (x_c + e) \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta \right] = 0 \\ \frac{48 E J}{L^3} x_c \sin \theta \cos \theta - m \left[-\ddot{x}_c \sin \theta \cos \theta - 2 \dot{x}_c \dot{\theta} \cos^2 \theta + \right. \\ \left. + (x_c + e) \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta \right] = 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

$$\frac{48 EJ}{L^3} x_c (\cancel{\sin \theta \cos \theta} - \cancel{\sin \theta \cos \theta}) - m \left[-\ddot{x}_c \cancel{\sin \theta \cos \theta} + \underline{2 \dot{x}_c \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta} + \right. \\ \left. + (x_c + e) \cancel{\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta} + \ddot{x}_c \cancel{\sin \theta \cos \theta} + \underline{2 \dot{x}_c \dot{\theta} \cos^2 \theta} - \right. \\ \left. - (x_c + e) \cancel{\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta} \right] = -m 2 \ddot{x}_c \dot{\theta} = 0$$

Quindi abbiamo trovato che $\ddot{x}_c = 0$. Con eq. 10.64 si riscrivono

$$\begin{cases} \frac{48 EJ}{L^3} x_c \cos \theta - m (x_c + e) \dot{\theta}^2 \cos \theta = 0 \\ \frac{48 EJ}{L^3} x_c \sin \theta - m (x_c + e) \dot{\theta}^2 \sin \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\textcircled{10.70.b} \quad \boxed{\frac{48 EJ}{L^3} x_c - m (x_c + e) \dot{\theta}^2 = 0} \Rightarrow \left(\frac{48 EJ}{L^3} - m \dot{\theta}^2 \right) x_c - \\ - m e \dot{\theta}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\textcircled{10.71} \quad x_c = \frac{m \dot{\theta}^2}{\frac{48 EJ}{L^3} - m \dot{\theta}^2} e$$

Dalle 10.65 si deduce anche $M_m = 0$. Si consideri ora che - in accordo con quanto calcolato nel paragrafo 7.12 - possiamo definire la costante elastica dell'albero come

$$K = \frac{3EJL}{\frac{L^2}{4} \frac{L^2}{4}} = \frac{48EJ}{L^3}$$

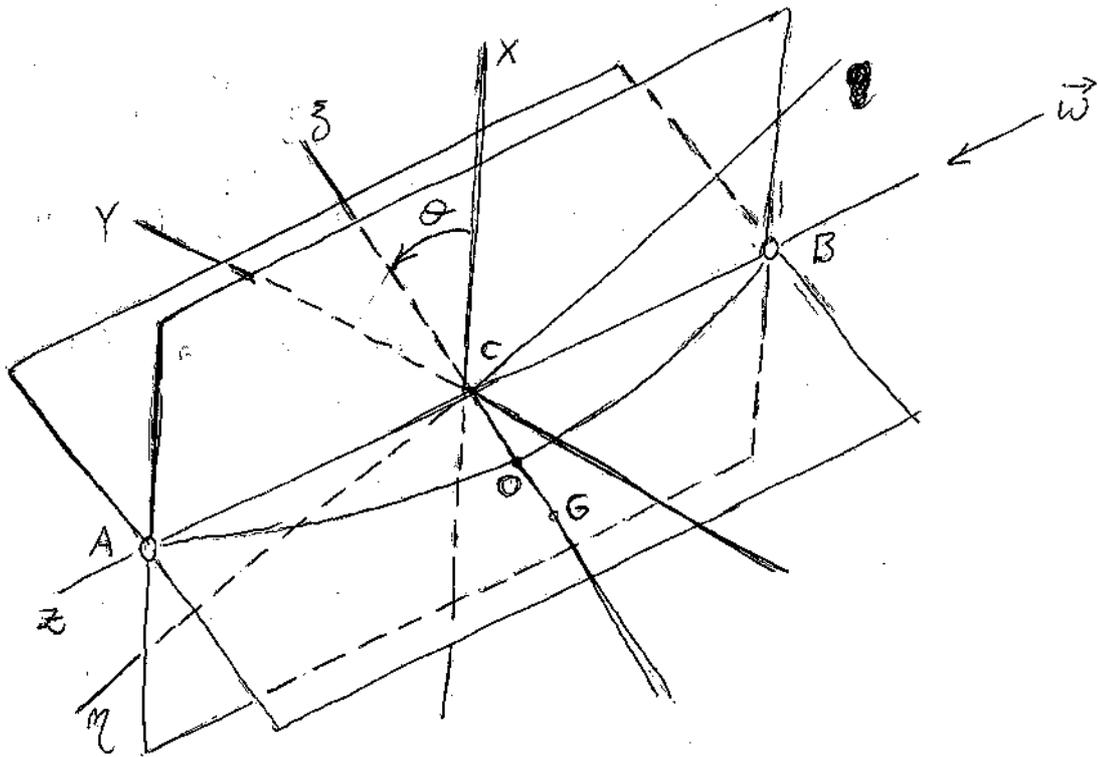
e dunque le 10.17 si riscrivono

$$(10.72) \quad X_c = \frac{m \ddot{\theta}^2}{K - m \ddot{\theta}^2} e$$

Definita ancora la pulsazione naturale come $\omega_m = \sqrt{K/m}$ abbiamo

$$(10.73) \quad \begin{cases} X_c = \frac{\ddot{\theta}^2}{\omega_m^2 - \ddot{\theta}^2} e = \frac{m}{1 - m^2} e \\ m = \ddot{\theta}^2 / \omega_m^2 \\ K = 48EJ/L^3 \\ \omega_m = \sqrt{K/m} \end{cases}$$

Si osserva che il problema in esame può essere discusso molto più velocemente attraverso il teorema dei moti relativi e modificando i sistemi di riferimento. Sia (xyz) il sistema di riferimento fisso e $(x'z')$ quella mobile. Allora il teorema dei moti relativi applicato al punto G page



$$1074) \vec{a}_{AG} = \vec{a}_c + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{CG})) + \vec{a}_{rG} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rG}$$

Si consideri ora che $\vec{a}_c = 0$ - essendo c fisso - e inoltre che

$$\begin{cases} \vec{CG} = -z_G \hat{\xi}_1 \\ \vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{\xi}_3 \end{cases} \Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{CG} = \begin{vmatrix} \hat{\xi}_1 & \hat{\xi}_2 & \hat{\xi}_3 \\ -z_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \end{vmatrix} = \dot{\theta} z_G \hat{\xi}_2 \Rightarrow$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{CG}) = \begin{vmatrix} \hat{\xi}_1 & \hat{\xi}_2 & \hat{\xi}_3 \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ 0 & \dot{\theta} z_G & 0 \end{vmatrix} = -\dot{\theta}^2 z_G \hat{\xi}_1$$

$$\vec{v}_{rG} = -\dot{z}_G \hat{\xi}_1 \Rightarrow 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rG} = -2 \begin{vmatrix} \hat{\xi}_1 & \hat{\xi}_2 & \hat{\xi}_3 \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ \dot{z}_G & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\dot{z}_G \dot{\theta} \hat{\xi}_2$$

$$m \vec{a}_{Ga} = F_e \hat{e}_1 = k(-z_0) \hat{e}_1 = -k z_0 \hat{e}_1$$

Sostituendo il tutto in 10.74 abbiamo

$$10.75 \quad -k z_0 \hat{e}_1 = -\overset{m}{\gamma} \dot{\theta}^2 z_0 \hat{e}_1 - \overset{m}{\gamma} \ddot{z}_0 \hat{e}_1 - 2 \overset{m}{\gamma} \dot{z}_0 \dot{\theta} \hat{e}_2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} +k z_0 = +\dot{\theta}^2 \overset{m}{\gamma} z_0 + \overset{m}{\gamma} \ddot{z}_0 \\ 0 = 2 \dot{z}_0 \dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k z_0 = \dot{\theta}^2 (-e + z_0) m \\ \dot{z}_0 = 0 \Rightarrow z_0 = \text{costante} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{k}{m} z_0 = -\dot{\theta}^2 e + \dot{\theta}^2 z_0 \Rightarrow \left(\frac{k}{m} - \dot{\theta}^2 \right) z_0 = -\dot{\theta}^2 e \Rightarrow z_0 = \frac{-\dot{\theta}^2 e}{\frac{k}{m} - \dot{\theta}^2} \Rightarrow$$

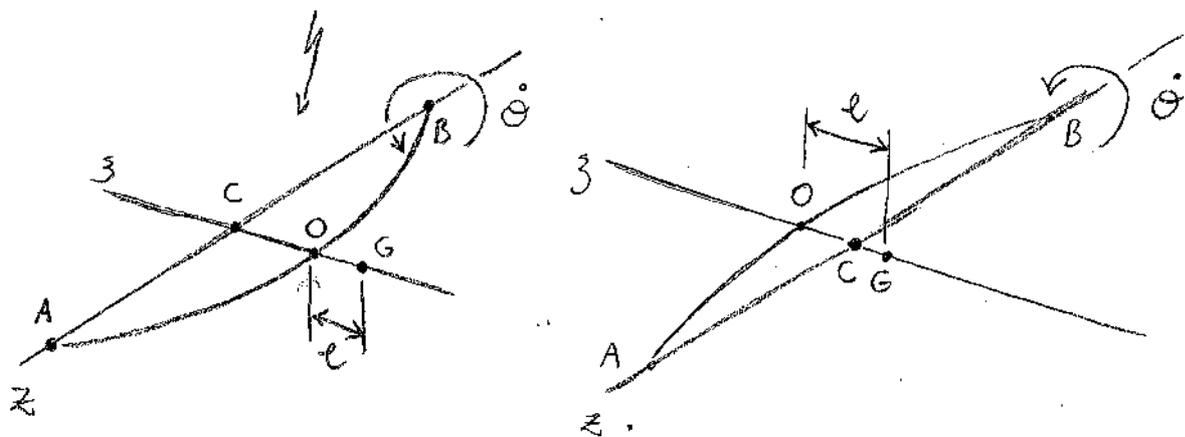
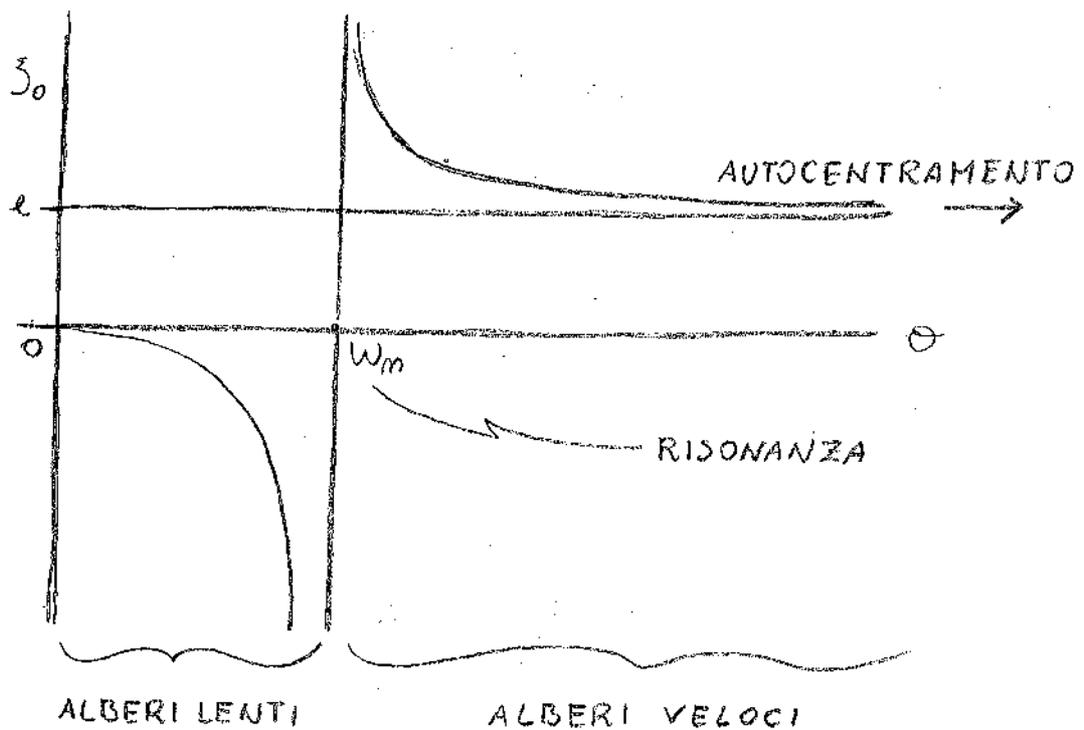
$$10.76 \quad \boxed{-z_0 = \frac{\dot{\theta}^2}{\frac{k}{m} - \dot{\theta}^2} e = \frac{\dot{\theta}^2}{\omega_m^2 - \dot{\theta}^2} e}$$

Si ritrova così la 10.72, molto più velocemente. Si fanno ora alcune osservazioni.

- I) Per $\theta \rightarrow \omega_m$ la deformazione dell'albero tende all'infinito; dunque si può affermare che ogni albero ammette una velocità - detta CRITICA - per la quale le deformazioni diventano pericolose.
- II) Per $\theta < \omega_m$ si parla di ALBERI LENTI, e in questo caso si

ha che $-\xi_0 > 0$ ovvero $\xi_0 < 0$, quindi le con figure 21 e quelle rappresentate nelle precedenti figure.

III) Per $\omega > \omega_m$ si parla di ALBERI VELOCI, e in questo caso si ha $-\xi_0 < 0$ ovvero $\xi_0 > 0$, quindi si realizza una configurazione che tende a portare G sul punto C. Si parla in questo caso di AUTOCENTRAGGIO.



IV) In caso di eccentricità nulla - la $\omega_{0.75}$ si scrive

$$-k z_0 \hat{z}_1 = -m \dot{\theta}^2 z_0 \hat{z}_1 - m \ddot{z}_0 \hat{z}_1 - 2m \dot{z}_0 \dot{\theta} \hat{z}_2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -k z_0 = -m \dot{\theta}^2 z_0 - m \ddot{z}_0 \\ \dot{z}_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow k z_0 = m \dot{\theta}^2 z_0 \Rightarrow$$

$$(10.77) \quad (k - m \dot{\theta}^2) z_0 = 0$$

La 10.77 è soddisfatta sia se $\theta \equiv c$ per qualunque velocità angolare, sia per $\dot{\theta} = \omega$ per qualunque frequenza ω .

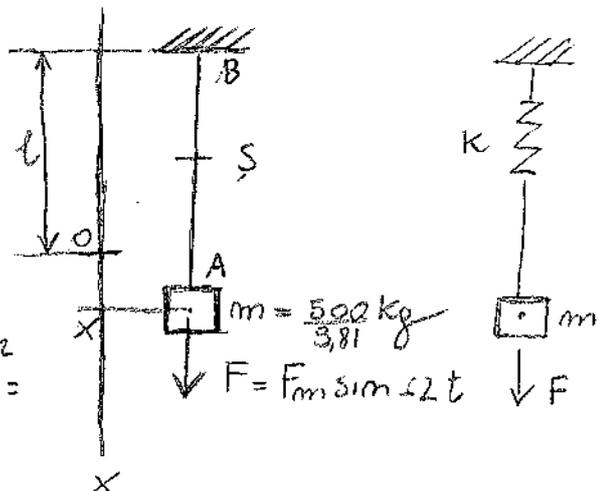
10.4. Sistema massa-molle con forzante periodica. La molla sia costituita da un filo di metallo di diametro $d = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, lunghezza $l = 10 \text{ m}$, la massa sia $m = \frac{500 \text{ N}}{9,81}$. La massa sia sollecitata da una forza verticale sinusoidale $F = F_m \sin \omega t$ con $F_m = 200 \text{ N}$ e $f = 5/\text{s}$. Sia il modulo $E = 206 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$.

Per ricavare k si consideri che l'allungamento del cavo è

$$\Delta l = \frac{F l}{ES} \Rightarrow F = \frac{\Delta l ES}{l}$$

$$k = \frac{ES}{l} = \frac{206 \cdot 10^3 \text{ N}}{\text{mm}^2 \cdot 10 \text{ m}} \left(\frac{\pi (3 \cdot \text{mm})^2}{4} \right)^2 =$$

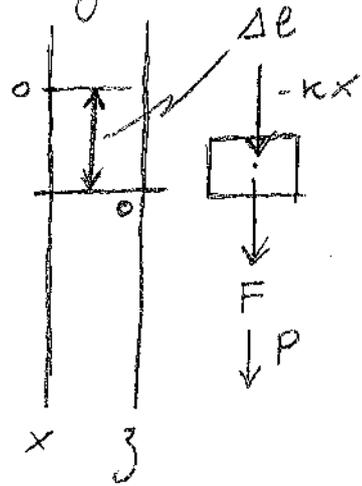
$$= \frac{10^3}{m} \frac{206 \pi \cdot 10^2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{\text{mm}^2 \cdot 4} = 1455,33 \cdot 10^2 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$



Il bilanciere meccanico per la massa poggia

$$-m\ddot{x} - kx + P + F = 0 \Rightarrow$$

$$10.78 \left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} + kx = P + F_m \sin(\Omega t) \\ m = 50,96 \text{ kg} \\ K = 1455,39 \cdot 10^2 \text{ N/m} \\ P = 500 \text{ N} \\ F_m = 200 \text{ N} \\ \Omega = 2\pi f = 31,4 \text{ rad/s} \end{array} \right.$$



In condizioni statiche - e in assenza di F - si ha $P = k\Delta\ell \Rightarrow \Delta\ell = P/k$. Quindi introdotta l'ascissa $z = x - \Delta\ell$ si ha

$$m\ddot{x} + k\left(x - \frac{P}{k}\right) = F_m \sin(\Omega t) \Rightarrow$$

$$10.79 \left\{ m\ddot{z} + kz = F_m \sin(\Omega t) \right\}$$

l'integrale generale della omogenea si scrive

$$10.80 \left\{ \begin{array}{l} z = C_1 \cos(\omega_m t) + C_2 \sin(\omega_m t) \\ \omega_m = \sqrt{K/m} = 5,34 \text{ rad/s} \end{array} \right.$$

Per la soluzione particolare delle 10.79 si consideri che

$$z = A \sin(\Omega t) \Rightarrow \dot{z} = A\Omega \cos(\Omega t) \Rightarrow \ddot{z} = -A\Omega^2 \sin(\Omega t) \Rightarrow$$

$$m(-A\Omega^2 \sin(\Omega t)) + kA \sin(\Omega t) = F_m \sin(\Omega t) \Rightarrow$$

$$(-m A \Omega^2 + kA) \sin(\Omega t) = F_m \sin(\Omega t), \forall t \Rightarrow$$

$$(-m \Omega^2 + k) A = F_m \Rightarrow \boxed{A = \frac{F_m}{k - m \Omega^2}} \Rightarrow$$

$$\bar{z} = \frac{F_m}{k - m \Omega^2} \sin(\Omega t) = \frac{F_m/m}{\omega_m^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t)$$

Dunque l'integrale generale si scrive

$$(10.81) \begin{cases} \bar{z} = C_1 \cos(\omega_m t) + C_2 \sin(\omega_m t) + \frac{F_m}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} \sin(\Omega t) \\ \dot{\bar{z}} = -C_1 \omega_m \sin(\omega_m t) + C_2 \omega_m \cos(\omega_m t) + \frac{\Omega F_m}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t) \end{cases}$$

Ricavo C_1, C_2 imponendo le c.i.i.

$$\begin{cases} \bar{z}_0 = C_1 \Rightarrow \boxed{C_1 = \bar{z}_0} \\ \dot{\bar{z}}_0 = C_2 \omega_m + \frac{\Omega F_m}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} \Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{\dot{\bar{z}}_0}{\omega_m} - \frac{\Omega F_m}{\omega_m m(\omega_m^2 - \Omega^2)}} \end{cases}$$

Dunque abbiamo le soluzioni

$$\bar{z} = \bar{z}_0 \cos(\omega_m t) + \left(\frac{\dot{\bar{z}}_0}{\omega_m} - \frac{\Omega F_m}{\omega_m m(\omega_m^2 - \Omega^2)} \right) \sin(\omega_m t) + \frac{F_m}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} \sin(\Omega t)$$

$$\Rightarrow \bar{z} = \bar{z}_0 \cos(\omega_m t) + \frac{\dot{\bar{z}}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) - \frac{\Omega}{\omega_m} \frac{F_m}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} \sin(\omega_m t) +$$

$$+ \frac{F_m}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} \sin(\Omega t) \Rightarrow$$

$$10.82 \left\{ \begin{aligned} z &= z_0 \cos(\omega_m t) + \frac{\dot{z}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + \frac{F_m}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} \left[\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega_m} \sin(\omega_m t) \right] \\ \dot{z} &= -z_0 \omega_m \sin(\omega_m t) + \dot{z}_0 \cos(\omega_m t) + \frac{F_m}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} \Omega \left[\cos(\Omega t) - \cos(\omega_m t) \right] \\ \Omega &\neq \omega_m \end{aligned} \right.$$

Per $\Omega \rightarrow \omega_m$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\Omega \rightarrow \omega_m} \frac{\sin(\Omega t) - \Omega \sin(\omega_m t) / \omega_m}{\omega_m^2 - \Omega^2} &= \\ &= \lim_{\Omega \rightarrow \omega_m} \frac{d(\sin(\Omega t) - \Omega \sin(\omega_m t) / \omega_m) / d\Omega}{d(\omega_m^2 - \Omega^2) / d\Omega} = \\ &= \lim_{\Omega \rightarrow \omega_m} \frac{t \cos(\Omega t) - \sin(\omega_m t) / \omega_m}{-2\Omega} = \\ &= \frac{t \cos(\omega_m t)}{-2\omega_m} - \frac{\sin(\omega_m t)}{-2\omega_m^2} = \frac{\sin(\omega_m t)}{2\omega_m^2} - \frac{t \cos(\omega_m t)}{2\omega_m} \end{aligned}$$

Sostituendo nelle 10.82 si ha

$$z = z_0 \cos(\omega_m t) + \frac{\dot{z}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + \frac{F_m}{m} \left(\frac{\sin(\omega_m t)}{2\omega_m^2} - \frac{t \cos(\omega_m t)}{2\omega_m} \right) \Rightarrow$$

$$z = z_0 \cos(\omega_m t) + \left(\frac{\dot{z}_0}{\omega_m} + \frac{F_m}{m 2\omega_m^2} \right) \sin(\omega_m t) - \frac{F_m t}{2\omega_m m} \cos(\omega_m t) \Rightarrow$$

$$10.83 \left\{ \begin{aligned} z &= z_0 \cos(\omega_m t) + \frac{1}{\omega_m} \left(\dot{z}_0 + \frac{F_m}{2m\omega_m} \right) \sin(\omega_m t) - \frac{F_m t}{2\omega_m m} \cos(\omega_m t) \\ \Omega &\rightarrow \omega_m \end{aligned} \right.$$

Si osserva che le equazioni 10.82, 10.83 sono differenti dalle 4.14, 4.15 ottenute per una forzante cosinusoidale. La loro struttura è diversa, non basta sostituire il seno al coseno.

Si consideri ora che nel caso presente si ha

$$\begin{cases} \Omega = 31,4 \pi / s \\ \omega_m = \sqrt{k/m} = \sqrt{\frac{1455,39 \cdot 10^2 N/m}{50,96 kg}} = 53,44 \pi / s \end{cases}$$

Dunque, adottando le prime delle 10.82 abbiamo

$$z = z_0 \cos(\omega_m t) + \frac{\dot{z}_0}{53,44 \pi / s} \sin(\omega_m t) + \frac{200 N (\sin(2t) - 0,58 \sin(\omega_m t))}{50,96 kg (2855,83 / s^2 - 985,96 / s^2)} \Rightarrow$$

$$z = z_0 \cos\left(53,44 \frac{\pi}{s} t\right) + 0,018 s \frac{\dot{z}_0}{s} \sin\left(53,44 \frac{\pi}{s} t\right) + 2,09 mm \left[\sin\left(\frac{2t}{s}\right) - 0,58 \sin(\omega_m t) \right] \Rightarrow$$

$$\textcircled{10.84} \quad z = z_0 \cos\left(\frac{53,44 \pi t}{s}\right) + 0,018 s \frac{\dot{z}_0}{s} \sin\left(\frac{53,44 \pi t}{s}\right) + 2,09 mm \left[\sin\left(\frac{31,4 \pi t}{s}\right) - 0,58 \sin\left(\frac{53,44 \pi t}{s}\right) \right]$$

Dunque l'ampiezza delle oscillazioni forzate vale

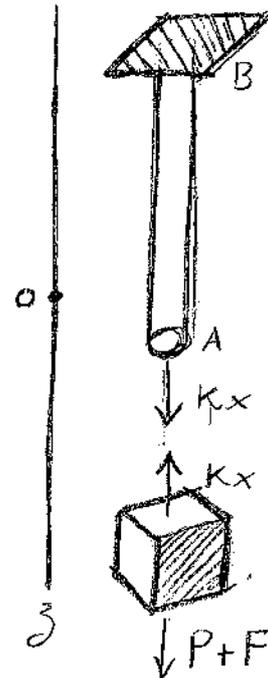
$$\textcircled{10.85} \quad \boxed{X = 2,09 \cdot 10^{-3} m}$$

Calcolo ora le tensioni a cui è sottoposto il filo.
La forza che il filo scambia con la massa in A e con il telaio in B è

$$F_e = kx = k(z + \Delta l) = k\left(z + \frac{P}{k}\right) = k z + P$$

Dunque il suo valore massimo è

$$10.86 \quad F_{eMAX} = k z_{MAX} + P$$



Se ammettiamo che $z_0 = \dot{z}_0 = 0$, dalle 10.84 si ricave

$$10.86.b) \quad z = 2,09 \text{ mm} \left[\sin\left(\frac{31,4\pi t}{s}\right) - 0,58 \sin\left(\frac{53,44\pi t}{s}\right) \right]$$

da cui si deduce - utilizzando magari un programma di calcolo - che

$$10.87) \quad z_{MAX} \cong 1,54 \cdot 2,09 \text{ mm} = 3,21 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Sostituendo nella 10.86 si ha

$$10.88) \quad F_{eMAX} = 1455,39 \cdot \frac{10^2 \text{ N}}{\text{m}} \cdot 3,21 \cdot 10^{-3} \text{ m} + 500 \text{ N} = 967,18 \text{ N}$$

Questo rappresenta le massime forze agenti sul telaio in B.

normali
 Le massima tensione tangente sul filo vola invece

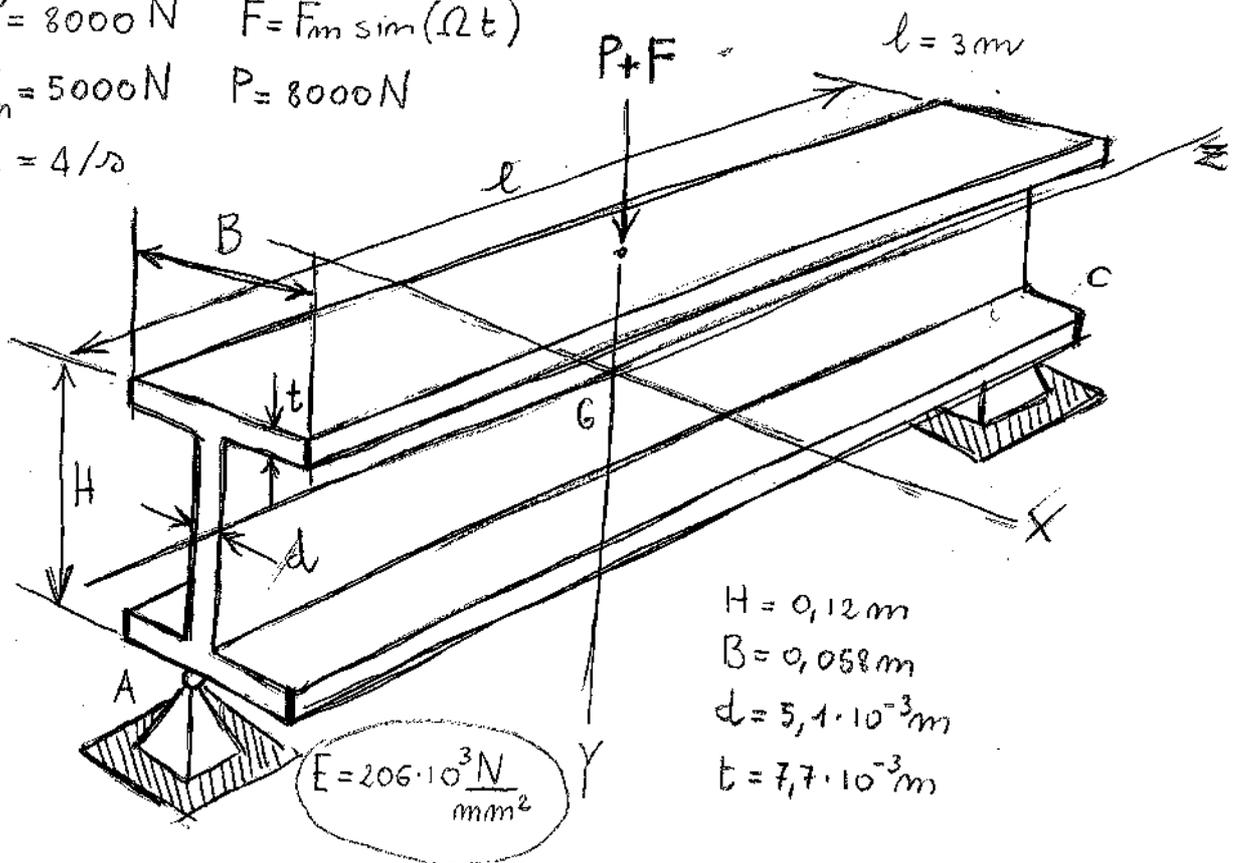
$$\sigma_m = \frac{F_{eMAX}}{S} = \frac{967,18 \text{ N}}{\pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = 136,89 \text{ MPa}$$

10.5. Trave a doppio T sollecitata in mezz'aria. Trascurando le masse della trave, calcolare l'ampiezza delle vibrazioni in mezz'aria, le reazioni vincolari e i valori massimi di momento flettente e taglio.

$$P = 8000 \text{ N} \quad F = F_m \sin(\Omega t)$$

$$F_m = 5000 \text{ N} \quad P = 8000 \text{ N}$$

$$f = 4/5$$



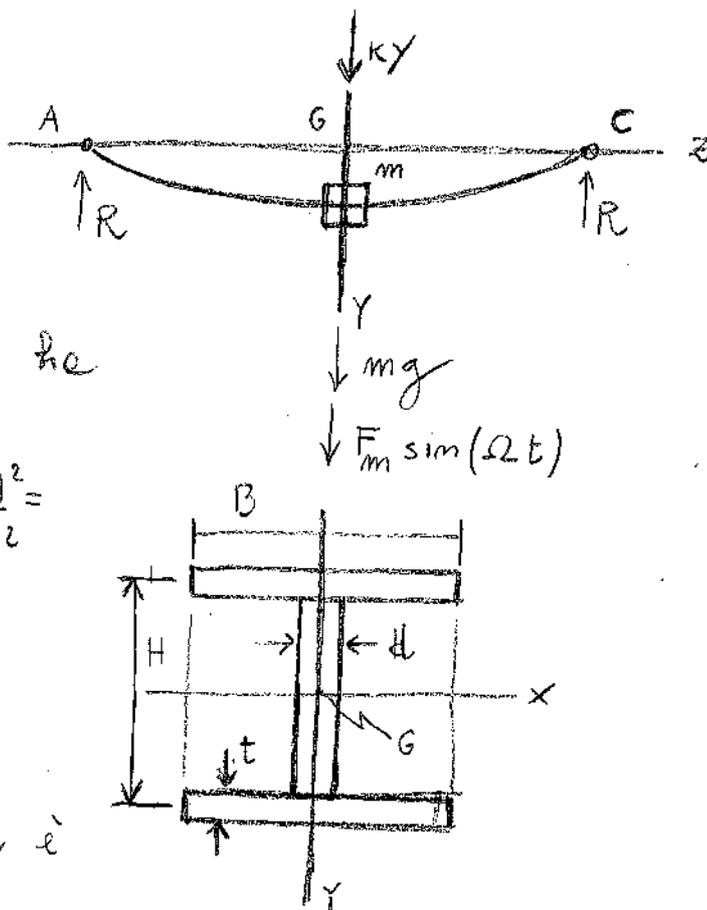
Ricordo che - pu quanto calcolato nel paragrafo 7.12 - la costante elastica di una trave appoggiata rispetto al punto

di mezz'aria vale

$$10.90) K = \frac{48 E J l}{l^4} = \frac{48 E J_x}{l^3}$$

Per il momento di figura si ha

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{12} H^3 d + \frac{2}{6} (t^3 B) + 2 t B \frac{H^2}{4} = \\ &= \frac{H^3 d}{12} + \frac{t^3 B}{6} + \frac{t B H^2}{2} = \\ &= 3,95 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \end{aligned}$$



Dunque la costante elastica è

$$10.91) K = \frac{48 \cdot 206 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 3,95 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4}{\text{mm}^2 (3 \text{ m})^3} = \frac{1446,57 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4 \text{ N}}{10^{-6} \text{ m}^2 \text{ m}^3} = 1446,57 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Ricavo la pulsazione della forzante

$$10.92) \Omega = 2\pi/T = 2\pi f = 25,12 \pi / \text{s}$$

Ciò posto, la soluzione analitica di questo problema è formalmente analoga a quella del sistema del paragrafo precedente, ovvero - posto $\boxed{z = y - \frac{P}{K}}$ - si ha

$$10.93) \begin{cases} z = z_0 \cos(\omega_m t) + \frac{z_1}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + \frac{F_m}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} \left[\frac{\sin(\Omega t)}{\omega_m} - \frac{\Omega}{\omega_m} \sin(\omega_m t) \right] \\ \omega_m = \sqrt{K/m} = \sqrt{\frac{1446,57 \cdot 10^3 \text{ N}}{8000 \text{ kg}}} = 42,11 \pi / \text{s} \end{cases}$$

Calcolo il valore dell'ampiezza delle sollecitazioni porticolari dovute alle sollecitazioni pulsanti:

$$X = \frac{F_m}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} = \frac{5000 \text{ N}}{\frac{8000 \text{ kg}}{981} \left(\frac{1773,25}{\delta^2} - \frac{631,01}{\delta^2} \right)} = 5,36 \text{ mm}$$

Assumendo allora $z_0 = \dot{z}_0 = 0$ le 10.93 si scrive

$$(10.94) \quad z = 5,36 \cdot 10^{-3} \text{ m} \left[\sin\left(25,12 \frac{\pi}{\delta} t\right) - 0,59 \sin\left(42,12 \frac{\pi}{\delta} t\right) \right]$$

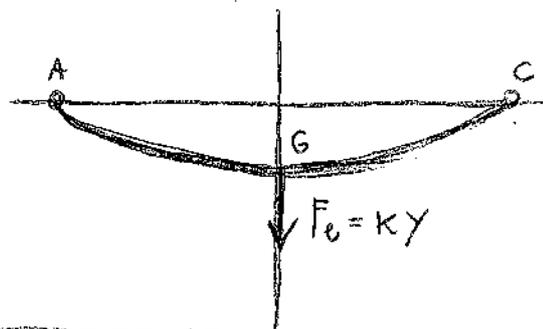
Essendo per $y = z + \frac{P}{K}$, si ha

$$(10.95) \quad y = 5,36 \cdot 10^{-3} \text{ m} \left[\sin\left(25,12 \frac{\pi}{\delta} t\right) - 0,59 \sin\left(42,12 \frac{\pi}{\delta} t\right) \right] + 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Analizzando la funzione si trova che

$$(10.96) \quad \begin{cases} -2,9 \text{ mm} < y < 13,7 \text{ mm} \\ 2,6 \text{ mm} < z < 8,2 \text{ mm} \end{cases}$$

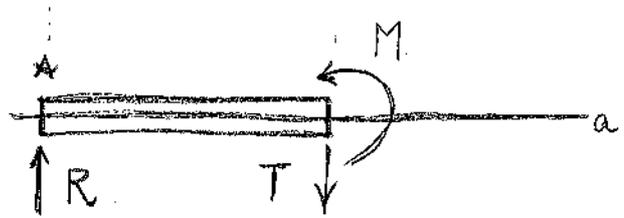
Per le reazioni si ha



$$(10.97) \quad R = \frac{Ky}{2} \Rightarrow \boxed{-2097,52 \text{ N} < R < 9909,00 \text{ N}}$$

Ricavo ora il momento flettente e il taglio lungo la trave.

$$\begin{cases} T(a) = R \\ M(a) = Ra \end{cases}$$



Dunque il taglio è costante e coincide con R . Il momento flettente invece attinge il suo valore massimo + un valore assoluto ϵ_s in $a = l/2$, dove si ha

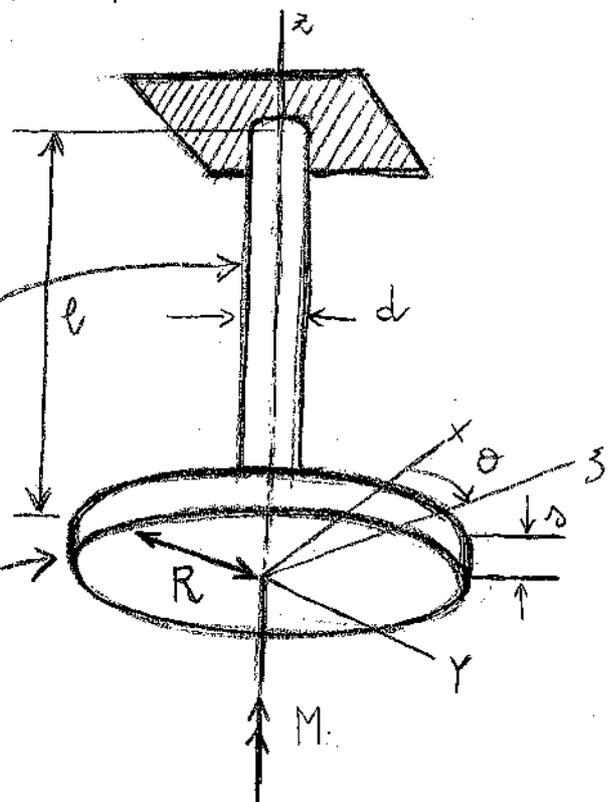
$$10.38) M(l/2) = \frac{Rl}{2} \Rightarrow -3146,28 \text{ Nm} < M(l/2) < 14863,5 \text{ Nm}$$

Per lo sforzo normale massimo si ha invece

$$10.39) \sigma_{n \max} = \frac{14863,5 \text{ H/2 Nm}}{J_x} = 225,77 \cdot 10^6 \frac{\text{Nm}^2}{\text{m}^4} = 225,77 \text{ MPa}$$

10.6. Pendolo di torsione con coppia pulsante. L'albero si è di masse trascurabile.

$M = M_m \sin \Omega t$
$R = 0,45 \text{ m}$
$\rho = 7,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$
$\nu = 4 \cdot 10^{-2}$
$d = 6 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
$l = 2,3 \text{ m}$
$G = 83 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$
$M_m = 1500 \text{ Nm}$
$f = 6 \text{ Ks}$



Ricavo le costanti elastiche e il momento di figura dell'elmo:

$$\begin{cases} M = k\theta \\ \theta = \frac{M\ell}{GJ} \end{cases} \Rightarrow k = \left(\frac{\ell}{GJ}\right)^{-1} = \left(\frac{2,30m \cdot 10^{-6} m^2}{83 \cdot 10^3 N \cdot 127,17 \cdot 10^{-8} m^4}\right)^{-1} = 4,589 \cdot 10^4 Nm$$

$$J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14}{32} \cdot 1296 \cdot 10^{-8} m^4 = 127,17 \cdot 10^{-8} m^4$$

↓

10.100

$$\begin{cases} k = 4,589 \cdot 10^4 Nm \\ J = 127,17 \cdot 10^{-8} m^4 \end{cases}$$

Ricavo la pulsazione delle forzanti:

10.101

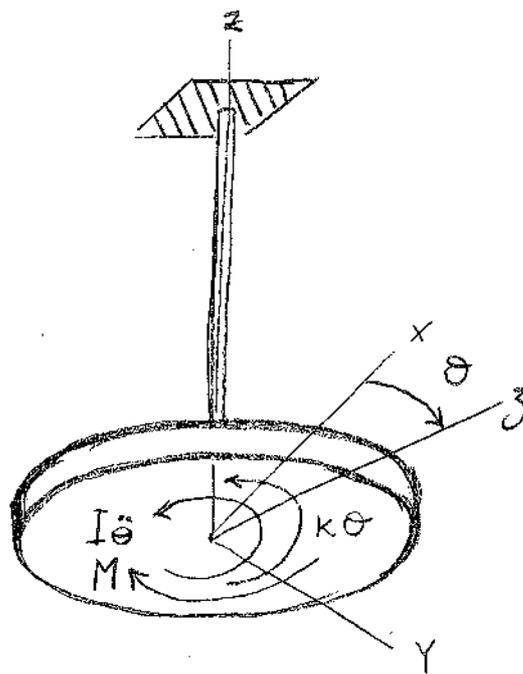
$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \frac{37,68}{s}$$

Impongo il bilanciare meccanico al disco

$$-I\ddot{\theta} - k\theta + M = 0 \Rightarrow$$

10.102

$$I\ddot{\theta} + k\theta = M_m \sin(\Omega t)$$



L'integrale generale della omogenea è

10.103

$$\begin{cases} \theta = C_1 \cos(\omega_m t) + C_2 \sin(\omega_m t) \\ \omega_m = \sqrt{k/I} \end{cases}$$

Ricavo un integrale particolare:

$$\vartheta = A \sin(\Omega t) \Rightarrow \dot{\vartheta} = A \Omega \cos(\Omega t) \Rightarrow \ddot{\vartheta} = -A \Omega^2 \sin(\Omega t) \Rightarrow$$

$$-I A \Omega^2 \sin(\Omega t) + \kappa A \sin(\Omega t) = M_m \sin(\Omega t) \Rightarrow$$

$$(-I \Omega^2 + \kappa) A = M_m \Rightarrow A = \frac{M_m}{\kappa - I \Omega^2} = \frac{M_m}{I(\omega_m^2 - \Omega^2)} \Rightarrow$$

$$\boxed{10.104} \quad \vartheta = \frac{M_m}{I(\omega_m^2 - \Omega^2)} \sin(\Omega t)$$

Dunque l'integrale generale si scrive

$$10.105 \quad \vartheta = C_1 \cos(\omega_m t) + C_2 \sin(\omega_m t) + \frac{M_m}{I(\omega_m^2 - \Omega^2)} \sin(\Omega t)$$

Calcolo I, ω_m :

$$I = m \frac{R^2}{2} = \pi R^2 \rho \frac{R^2}{2} = \pi \rho \frac{R^4}{2} = 20,09 \text{ Kg m}^2$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} = \sqrt{\frac{4,583 \cdot 10^4 \text{ Nm}}{20,09 \text{ Kg m}^2}} = 0,477 \sqrt{10^4 \frac{\text{Kg m}^2 \text{ s}^{-2}}{\text{Kg m}^2}} = \frac{47,7}{s}$$

↓

$$\frac{M_m}{I(\omega_m^2 - \Omega^2)} = \frac{1500 \text{ Nm}}{20,09 \text{ Kg m}^2 \left(\frac{47,7^2}{s^2} - \frac{37,68^2}{s^2} \right)} = 8,72 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

Ricavo le costanti C_1, C_2 imponendo le c.t.:

$$\vartheta_0 = C_1$$

$$\dot{\vartheta} = -C_1 \omega_m \sin(\omega_m t) + C_2 \omega_m \cos(\omega_m t) + \frac{M_m \Omega}{I(\omega_m^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t) \Rightarrow$$

$$\dot{\theta}_0 = C_2 \omega_m + \frac{M_m \Omega}{I(\omega_m^2 - \Omega^2)} \Rightarrow C_2 = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_m} - \frac{M_m \Omega}{\omega_m I(\omega_m^2 - \Omega^2)}$$

Sostituendo nelle 10.105 si ha

$$10.106 \quad \theta = \theta_0 \cos\left(\frac{47,7t}{s}\right) + 0,02 \dot{\theta}_0 \sin\left(\frac{47,7t}{s}\right) + 8,72 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \left[\sin\left(\frac{37,68t}{s}\right) - 0,78 \sin\left(\frac{47,7t}{s}\right) \right]$$

Nel caso particolare in cui sia $\theta_0 = \dot{\theta}_0 = 0$, abbiamo

$$10.107 \quad \theta = 8,72 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \left[\sin\left(\frac{37,68t}{s}\right) - 0,78 \sin\left(\frac{47,7t}{s}\right) \right]$$

Lo studio di queste funzioni permette di dedurre che

$$\begin{cases} \theta_{\text{MIN}} = -0,1539 \text{ rad} \approx 8,82 \\ \theta_{\text{MAX}} = 0,1492 \text{ rad} \approx 8,55 \end{cases}$$

10.7. Anzore sul sistema masse-molla con forzanti periodiche.

Per il sistema del paragrafo 10.4 si richiede ora il calcolo di $z(t=0,5s)$ e $\dot{z}(t=0,5s)$ per le c.i. $z(0) = \dot{z}(0) = 0$.

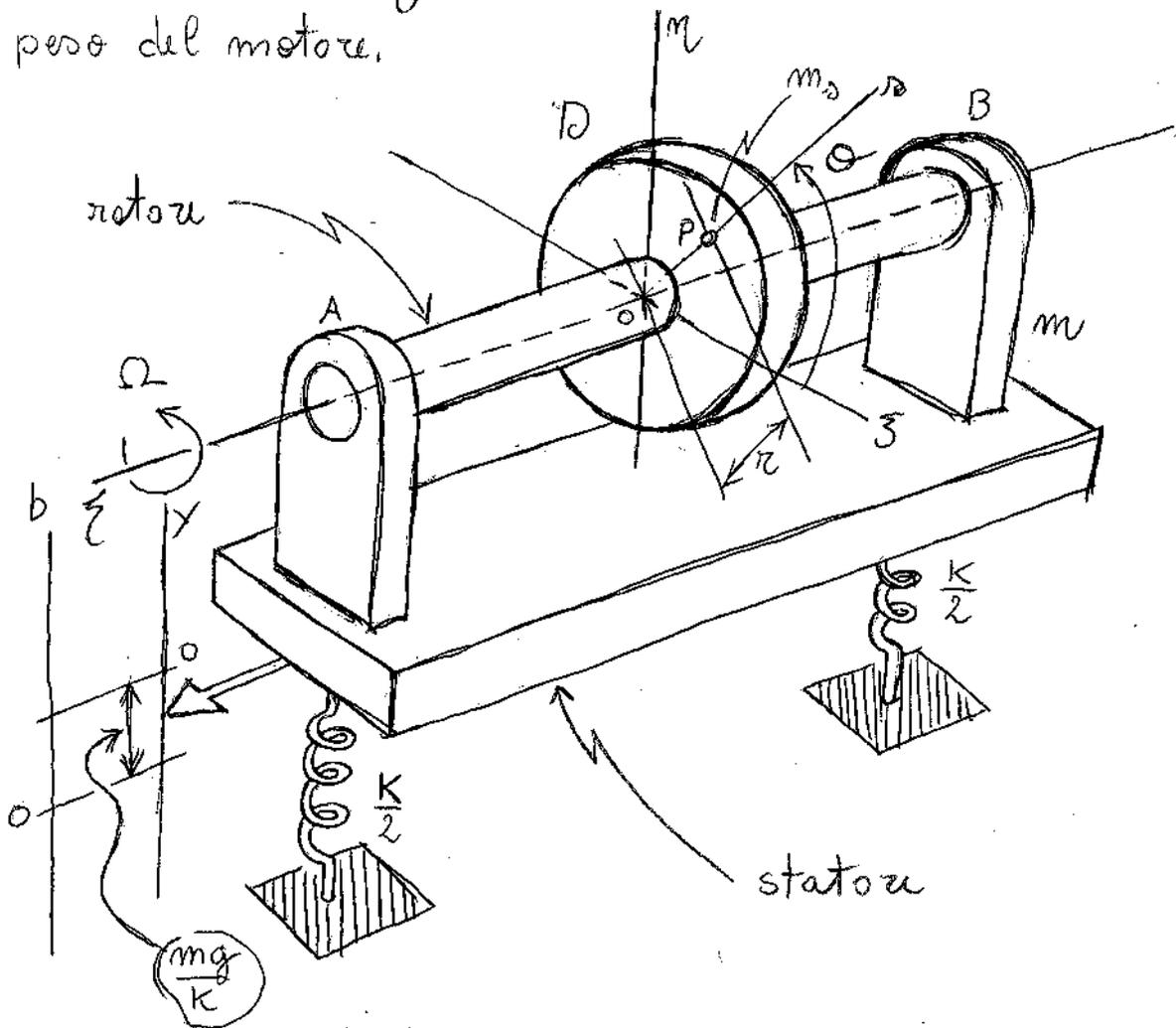
Le equazioni 10.82' pongono

$$10.108 \quad \begin{cases} z = 2,09 \text{ mm} \left[\sin\left(\frac{31,4\pi t}{s}\right) - 0,58 \sin\left(\frac{53,44t}{s}\right) \right] \\ \dot{z} = 65,626 \frac{\text{mm}}{s} \left[\cos\left(\frac{31,4\pi t}{s}\right) - \cos\left(\frac{53,44t}{s}\right) \right] \end{cases}$$

∩ Dunque all'istante richiesto si ha

$$\begin{cases} \ddot{z}(0,50) = 2,09 \text{ mm} (7,96 \cdot 10^{-3} - 0,58 \cdot 0,99) = -1,18 \text{ mm} \\ \dot{z}(0,50) = -0,064 \text{ m/s} \end{cases}$$

∩ 10.8. Motore con massa sbilanciata. Si chiede di determinare la rigidità k in modo tale che al telaio venga trasmessa una forza pari al poi a un decimo del peso del motore.



∩ La sollecitazione di inerzia relativa al disco D (inclusa

la massa m_D è data

$$10.109 \quad \begin{cases} (\vec{F}^{\text{im}})_O = -m_D \vec{a}_P = -m_D \ddot{\vec{O}}P \\ \vec{M}^{\text{im}}(O) = -I_z \ddot{\theta} - (m_D \ddot{\vec{O}}P \times \vec{PO}) \end{cases}$$

dove I_z è il momento di inerzia del disco rispetto z . Si consideri pure che

$$\vec{OP} = r \cos \theta \hat{e}_1 + r \sin \theta \hat{e}_2 \Rightarrow$$

$$\dot{\vec{O}}P = -r \dot{\theta} \sin \theta \hat{e}_1 + r \dot{\theta} \cos \theta \hat{e}_2 \Rightarrow$$

$$10.110 \quad \ddot{\vec{O}}P = -r(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \hat{e}_1 + r(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \hat{e}_2 \Rightarrow$$

$$\ddot{\vec{O}}P \times \vec{PO} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -r(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) & r(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) & 0 \\ -r \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} =$$

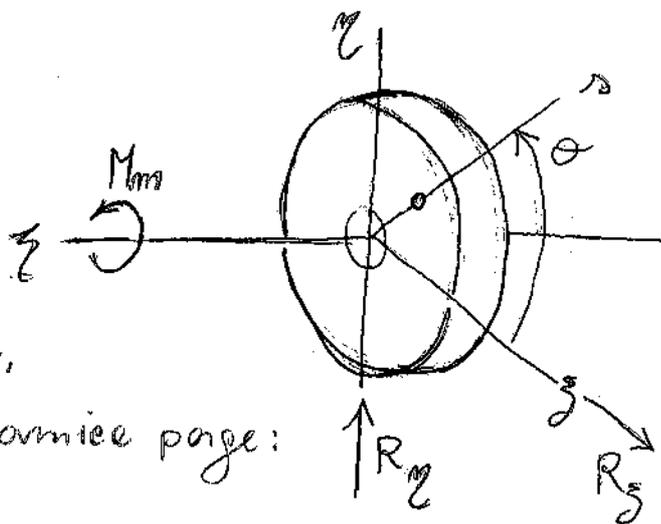
$$= r^2 \left(\ddot{\theta} \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta + \ddot{\theta} \cos^2 \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta \right) \hat{e}_3 = r^2 \ddot{\theta} \hat{e}_3$$

$$10.111 \quad m_D \ddot{\vec{O}}P \times \vec{PO} = m_D r^2 \ddot{\theta} \hat{e}_3$$

Sostituendo le 10.110, 10.111 nelle 10.109 si ha

$$10.112 \quad \begin{cases} (\vec{F}^{\text{im}})_O = m_D \left[r(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \hat{e}_1 - r(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \hat{e}_2 \right] \\ \vec{M}^{\text{im}}(O) = (-I_z \ddot{\theta} - m_D r^2 \ddot{\theta}) \hat{e}_3 \end{cases}$$

La sollecitazione effettive agenti sul disco e dete invece della coppia motrice \vec{M}_m e delle reazioni dell'albero. Dunque il sistema delle dinamiche page:



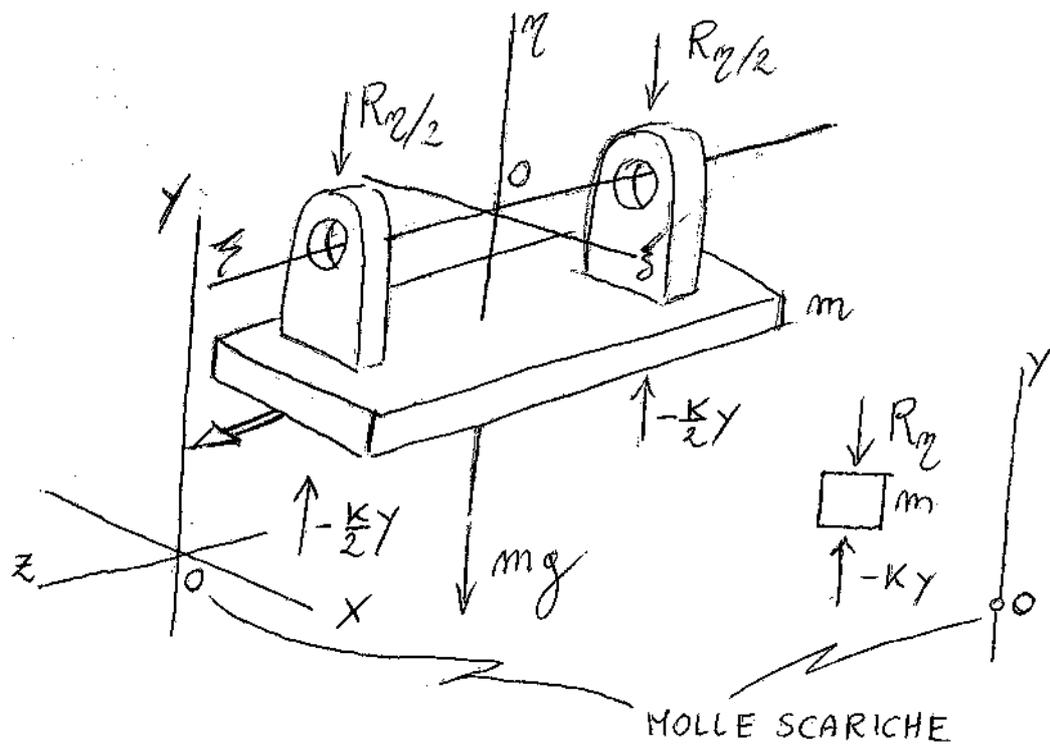
$$10.113 \quad \begin{cases} M_m - I_z \ddot{\theta} - m_D r^2 \ddot{\theta} = 0 \\ m_D r (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) + R_z = 0 \\ -m_D r (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + R_y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$10.114 \quad \begin{cases} \theta = \frac{M_m t^2}{2(I_z + m_D r^2)} + \dot{\theta}_0 t + \theta_0 \\ R_z = -m_D r (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \\ R_y = m_D r (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \end{cases}$$

Si supponga ora che sia $\dot{\theta} = \Omega$ costante; allora le 10.113 si scrivono

$$10.115 \quad \begin{cases} M_m = 0 \\ R_z = -m_D r \Omega^2 \cos \theta = -m_D r \Omega^2 \cos(\Omega t) \\ R_y = -m_D r \Omega^2 \sin(\Omega t) \end{cases}$$

Considero ora l'equilibrio meccanico dello statore del motore. Relativamente all'asse y si ha



$$-m\ddot{y} - ky - R_{\Omega} - mg = 0 \Rightarrow$$

$$-m\ddot{y} - ky + m_{\Omega} \Omega^2 r \sin(\Omega t) - mg = 0$$

$$(10.116) \quad m\ddot{y} + ky = m_{\Omega} \Omega^2 r \sin(\Omega t) - mg$$

Si consideri ora l'axe $b // y$ tale che $y = b - \frac{mg}{k}$:

$$m\ddot{b} + kb - \cancel{mg} = m_{\Omega} \Omega^2 r \sin(\Omega t) - \cancel{mg} \Rightarrow$$

$$(10.117) \quad \boxed{m\ddot{b} + kb = (m_{\Omega} \Omega^2 r \sin(\Omega t))}$$

L'integrale generale della omogenea è

$$(10.118) \quad \begin{cases} b = C_1 \cos(\omega_m t) + C_2 \sin(\omega_m t) \\ \omega_m = \sqrt{k/m} \end{cases}$$

Cerco una soluzione particolare della non omogenea:

$$\circ \quad b = A \sin(\Omega t) \Rightarrow \dot{b} = \Omega A \cos(\Omega t) \Rightarrow \ddot{b} = -A \Omega^2 \sin(\Omega t) \Rightarrow$$

$$(-mA\Omega^2 + \kappa A) \sin(\Omega t) = m_0 \Omega^2 r \sin(\Omega t) \Rightarrow$$

$$\textcircled{10.119} \quad A = \frac{m_0 \Omega^2 r}{\kappa - m\Omega^2} = \frac{m_0}{m} \frac{r \Omega^2}{\omega_m^2 - \Omega^2}$$

L'integrale generale dunque si scrive

$$\textcircled{10.120} \quad b = C_1 \cos(\omega_m t) + C_2 \sin(\omega_m t) + \frac{m_0}{m} \frac{r \Omega^2}{\omega_m^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t)$$

Impongo le condizioni iniziali:

$$b(0) = \boxed{C_1 = b_0}$$

$$\dot{b}(t) = -C_1 \omega_m \sin(\omega_m t) + C_2 \omega_m \cos(\omega_m t) + \frac{m_0 r \Omega^3}{m (\omega_m^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t)$$

$$\downarrow$$

$$\dot{b}_0 = \overset{\omega_m}{\sqrt{C_2}} + \frac{m_0 r \Omega^3}{m (\omega_m^2 - \Omega^2)} \Rightarrow$$

$$\boxed{C_2 = \frac{\dot{b}_0}{\omega_m} - \frac{m_0 r \Omega^3}{\omega_m m (\omega_m^2 - \Omega^2)}}$$

Sostituendo nella 10.120 si ha

$$b(t) = b_0 \cos(\omega_m t) + \left(\frac{\dot{b}_0}{\omega_m} - \frac{\Omega}{\omega_m} \left(\frac{m_0}{m} \frac{r \Omega^2}{\omega_m^2 - \Omega^2} \right) \right) \sin(\omega_m t) +$$

$$+ \frac{m_0 r \Omega^2}{m (\omega_m^2 - \Omega^2)} \sin(\Omega t) \Rightarrow$$

$$10.121) \quad b(t) = b_0 \cos(\omega_m t) + \frac{b_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + \frac{m_0 r \Omega^2}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} \left[\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega_m} \sin(\omega_m t) \right]$$

Ammettendo ora che sia $b_0 = 0$ e $\dot{b}_0 = 0$ abbiamo

$$10.121) \quad b(t) = \frac{m_0 r \Omega^2}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} \left[\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega_m} \sin(\omega_m t) \right]$$

La forza complessivamente trasmessa al telaio è dunque

$$10.122) \quad k y = k \left(b - \frac{mg}{k} \right) = kb - mg = \frac{k m_0 r \Omega^2}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} \left[\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega_m} \sin(\omega_m t) \right] - mg$$

Ricavo ora gli estremi della 10.22:

$$\frac{d(ky)}{dt} = k \dot{y} = \frac{k m_0 r \Omega^2}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} \left[\Omega \cos(\Omega t) - \Omega \cos(\omega_m t) \right] = 0 \iff$$

$$\iff \cos(\Omega t) = \cos(\omega_m t) \iff \Omega t = \omega_m t + 2\pi h \iff (\Omega - \omega_m)t = 2\pi h$$

$$\iff \boxed{t = \frac{2\pi h}{\Omega - \omega_m}; \quad h = 0, 1, 2, 3}$$

Studio ora la natura degli estremi:

$$\frac{d(k\dot{y})}{dt} = \frac{k m_d r \Omega^2}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} \left[-\Omega^2 \sin(\Omega t) + \Omega^2 \sin(\omega_m t) \right] \geq 0 \iff$$

$$-\sin(\Omega t) \geq -\sin(\omega_m t) \iff \sin(\Omega t) \leq \sin(\omega_m t) \iff$$

$$\sin\left(\frac{\Omega \pi h}{\Omega - \omega_m}\right) \leq \sin\left(\frac{\omega_m \pi h}{\Omega - \omega_m}\right) \iff \sin\left(\frac{\pi h}{1 - \omega_m/\Omega}\right) \leq \sin\left(\frac{\pi h}{\Omega/\omega_m - 1}\right)$$

credo che non si possa stabilire le maxime dei punti estremali senza le conoscenze di ω_m , che dipende dalla conoscenza di k - l'inequante del problema. Allora procedo assumendo che la soluzione dovuta alle oscillazioni libere sia smorzata (come accade nelle realtà) e si estingue nel tempo. Ovvero assumo che sia - e partire da un certo istante in poi - che

$$(10.123) \quad b(t) = \frac{m_d r \Omega^2}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} \sin(\Omega t) \implies$$

$$(10.124) \quad ky(t) = k(b - mg/k) = kb - mg = \frac{k m_d r \Omega^2}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} \sin(\Omega t) - mg$$

Dunque la forza massima che lo stetore esercita sul telaio è pari a

$$(10.125) \quad \vec{F} = \left(-\frac{k m_d r \Omega^2}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} - mg \right) \hat{e}_2$$

Se si richiede che il primo addendo di queste forze

sia pari a un decimo del peso delle macchine, ovvero
che sia

$$\frac{\kappa m_0 r \Omega^2}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} = \frac{mg}{10} \iff \frac{\kappa m_0 r \Omega^2}{m \frac{\kappa}{m} - m \Omega^2} = \frac{mg}{10} \iff$$

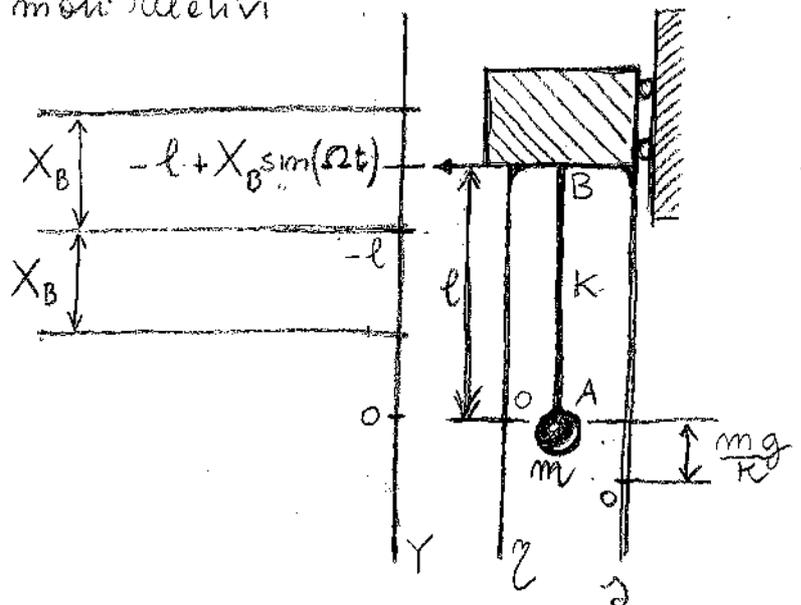
$$\kappa m_0 r \Omega^2 = \frac{mg}{10} (\kappa - m \Omega^2) \iff \kappa m_0 r \Omega^2 = \frac{m \kappa g}{10} - \frac{m^2 g \Omega^2}{10}$$

$$\iff \kappa \left(m_0 r \Omega^2 - \frac{mg}{10} \right) = -\frac{m^2 g \Omega^2}{10} \iff$$

10.126) $\kappa = \frac{m^2 g \Omega^2}{mg - 10 m_0 r \Omega^2}$

10.9. Pendolo con sostegno mobile. Il sostegno sia animato da un moto verticale alternativo di ampiezza $X_B = 0,4 \text{ cm}$ e frequenza $f = 5/\text{s}$. Il teorema dei moti relativi applicato ad m permette di scrivere

$$\vec{a}_{aA} = \vec{a}_{rA} + \vec{a}_B$$



D'altra parte si ha

$$\vec{a}_{aA} = g \hat{e}_2 - \frac{\kappa}{m} x \hat{e}_2$$

$$\vec{a}_{rA} = \ddot{\eta} \hat{e}_2$$

$$\vec{a}_B = \frac{d^2}{dt^2} (-l + X_B \sin(\Omega t)) \hat{e}_2 = \frac{d}{dt} (X_B \Omega \cos(\Omega t)) = -X_B \Omega^2 \sin(\Omega t) \hat{e}_2$$

Quindi si conclude che

$$g - \frac{\kappa}{m} \eta = \ddot{\eta} - X_B \Omega^2 \sin(\Omega t) \Rightarrow$$

$$(10.127) \quad m \ddot{\eta} + \kappa \eta = m X_B \Omega^2 \sin(\Omega t) + mg$$

Si consideri ancora l'asse $s = \eta - \frac{mg}{\kappa}$ la cui origine coincide con la posizione di equilibrio statico della massa rispetto al punto B. Allora la 10.127 si scrive

$$(10.128) \quad m \ddot{s} + \kappa s = m X_B \Omega^2 \sin(\Omega t)$$

Che è una soluzione particolare:

$$s = A \sin(\Omega t) \Rightarrow \dot{s} = A \Omega \cos(\Omega t) \Rightarrow \ddot{s} = -A \Omega^2 \sin(\Omega t) \Rightarrow$$

$$-mA \Omega^2 + \kappa A = m X_B \Omega^2 \Rightarrow A(\kappa - m \Omega^2) = m X_B \Omega^2 \Rightarrow A = \frac{m X_B \Omega^2}{\kappa - m \Omega^2} \Rightarrow$$

$$(10.129) \quad s = \frac{m X_B \Omega^2}{\kappa - m \Omega^2} \sin(\Omega t) = \frac{X_B \Omega^2}{\omega_m^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t)$$

Dunque l'integrale generale della 10.128 è

$$(10.130) \quad s = C_1 \cos(\omega_m t) + C_2 \sin(\omega_m t) + \frac{X_B \Omega^2}{\omega_m^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t)$$

Impongo le c.i. e ricavo C_1, C_2 :

$$s_0 = C_1$$

$$\dot{s} = -C_1 \omega_m \sin(\omega_m t) + C_2 \omega_m \cos(\omega_m t) + \frac{X_B \Omega^2}{\omega_m^2 - \Omega^2} \Omega \cos(\Omega t) \Rightarrow$$

$$\dot{s}_0 = C_2 \omega_m + \frac{X_B \Omega^2}{\omega_m^2 - \Omega^2} \Omega \Rightarrow C_2 = \frac{\dot{s}_0}{\omega_m} - \frac{X_B \Omega^3}{(\omega_m^2 - \Omega^2) \omega_m}$$

Assumendo per $s_0 = \dot{s}_0 = 0$ si ha l'equazione omogenea

$$s = -\frac{X_B \Omega^2}{\omega_m^2 - \Omega^2} \frac{\Omega}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + \frac{X_B \Omega^2}{\omega_m^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t) \Rightarrow$$

$$(10.131) \quad s = \frac{X_B \Omega^2}{\omega_m^2 - \Omega^2} \left[\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega_m} \sin(\omega_m t) \right]$$

I dati numerici del problema sono

$$(10.132) \quad \begin{cases} X_B = 0,4 \cdot 10^{-2} \text{ m} & f = 5/\text{s} & mg = 200 \text{ N} \\ l = 4 \text{ m} & r = 10^{-3} \text{ m} & E = 206 \cdot 10^9 \text{ Pa} \end{cases}$$

Dunque si ha

$$\left. \begin{aligned} \Omega T = 2\pi &\Rightarrow \Omega = 2\pi f = 31,4/\text{s} \\ \Delta l = \frac{F l}{ES} = \frac{E \cdot 4 \text{ m} \cdot \text{mm}^2}{206 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \cdot 10^3 \text{ mm}^2} = \frac{2 F \text{ m}}{103 \pi \cdot 10^3 \text{ N}} &\Rightarrow F = \frac{103 \pi \cdot 10^3 \text{ N} \Delta l}{2 \text{ m}} \\ K = \frac{103 \pi \cdot 10^3 \text{ N}}{2 \text{ m}} = 161,71 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}} \\ \omega_m = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{K g}{mg}} = 89,08 \frac{\pi}{\text{s}} \\ \frac{X_B \Omega^2}{\omega_m^2 - \Omega^2} = \frac{0,4 \cdot 10^{-2} \text{ m} (31,4/\text{s})^2}{(89,08 \frac{\pi}{\text{s}})^2 - (31,4)^2} = 5,67 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,56 \text{ mm} \end{aligned} \right\}$$

Dunque le 10.131 si scrive

$$10.133) \quad s = 0,56 \text{ mm} \left[\sin\left(\frac{31,4}{s} t\right) - \frac{31,4}{89,08} \sin\left(\frac{89,08}{s} t\right) \right]$$

Analizzando la funzione $s = s(t)$ si trova che

$$10.134) \quad -0,69 \text{ mm} < s < 0,72 \text{ mm} \Rightarrow X_r \approx 0,705$$

e ciò fornisce l'ampiezza della oscillazione del moto relativo. Studia ora il moto assoluto.

$$Y_A = Y_B + r_B = -l + X_B \sin(\Omega t) + s + \frac{mg}{K} \Rightarrow$$

$$Y_A(t) = -3,9 \text{ m} + (0,56 \text{ mm} + 0,4 \cdot 10^{-2} \text{ m}) \sin\left(\frac{31,4}{s} t\right) -$$

$$- \frac{31,4}{89,08} 0,56 \text{ mm} \sin\left(\frac{89,08}{s} t\right) \Rightarrow$$

$$10.135) \quad Y_A(t) = -3,9 \text{ m} + 40,56 \text{ mm} \sin\left(\frac{31,4}{s} t\right) - 0,197 \text{ mm} \sin\left(\frac{89,08}{s} t\right)$$

Lo studio di questa funzione porge

$$10.136) \quad -3,94 \text{ m} < Y_A < -3,85 \text{ m} \Rightarrow X_A = 0,045 \text{ m}$$

e ciò fornisce l'ampiezza delle oscillazioni del moto assoluto. Si voglia calcolare ora la forza trasmessa in B, si ha

$$10.137) \quad F = K r = K \left(s + \frac{mg}{K} \right) = K s + mg = K s + 200 \text{ N} \Rightarrow$$

$$-K 0,69 \text{ mm} + 200 \text{ N} < F < K 0,72 \text{ mm} + 200 \text{ N} \Rightarrow$$

$$10.138 \quad 88,42 \text{ N} < F < 316,43 \text{ N}$$

Lo sforzo massimo a cui è sottoposto il cavo vale per

$$10.139 \quad \sigma_m = \frac{F_{\text{MAX}}}{\pi \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = \frac{316,43 \text{ N} \cdot 10^6}{\pi \text{ m}^2} = 100,7 \text{ MPa}$$

Si osserva che dalle 10.138 si deduce $\eta > 0$ e dunque il cavo è sempre in tensione.

10.10. Pendolo con sostegno mobile e carico critico. Si consideri il sistema fisso del paragrafo 10.9, ma si assuma per f il valore $f = 20/\text{s}$. Allora si ha

$$\Omega = 2\pi f = 125,6 \text{ rad/s} \Rightarrow$$

$$\frac{X_B \Omega^2}{\omega_m^2 - \Omega^2} = -8,04 \text{ mm}$$

Dunque da 10.131 si scrive

$$s = -8,04 \text{ mm} \left[\sin\left(\frac{125,6 t}{s}\right) - \frac{125,6}{89,08} \sin\left(\frac{89,08 t}{s}\right) \right] \Rightarrow$$

$$-18,81 \text{ mm} < s < 18,41 \text{ mm}$$

Per l'oscillazione intorno alle configurazioni indeterminate si ha

$$\eta = s + \frac{mg}{K} = s + \frac{200 \text{ Nm}}{161,71 \cdot 10^3 \text{ N}} = s + 1,23 \text{ mm} \Rightarrow$$

$$10.140 \quad -17,58 \text{ mm} < \eta < 19,64 \text{ mm} \Rightarrow$$

$$10.141 \quad -2842,86 \text{ N} < F = k\eta < 3175,98 \text{ N}$$

Il cavo si contrae e viene sottoposto a compressione, dunque è legittimo chiedersi se esso può assumere le configurazioni biforcute, ovvero se il massimo carico di compressione raggiunge il valore del CARICO CRITICO, che nel caso presente (TRAVE INCASTATA CARICATA DI PUNTA) vale

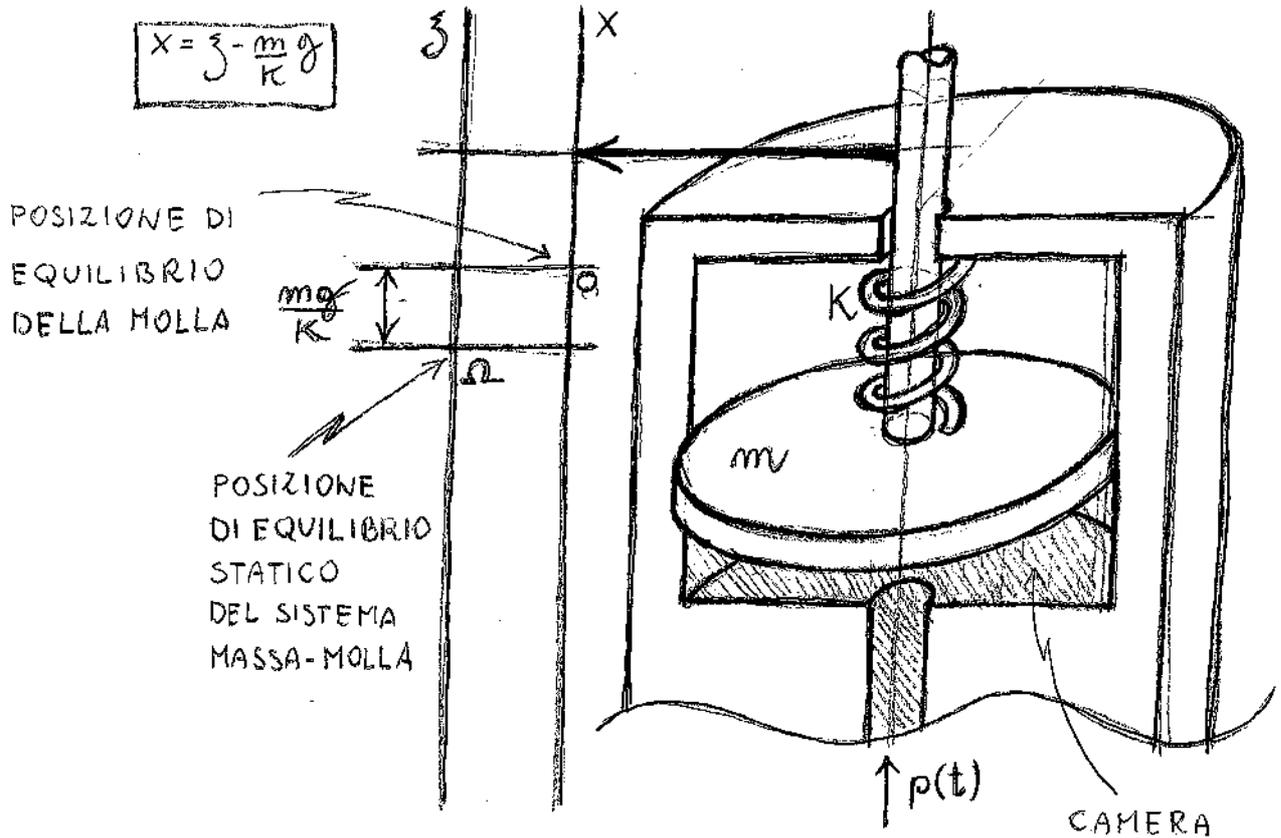
$$10.142 \quad F_c = \frac{\pi^2 E J}{4l^2} = \frac{\pi^2 206 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot \pi^2 r^3}{64 \text{ m}^2} = \frac{\pi^3 206 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot r^3}{256 \text{ m}^2} = 24,91 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Dunque il carico critico è ampiamente superato. In caso di instaurazione delle configurazioni biforcute il modello matematico proposto in questo testo perde di validità.

10.11. Indicatore di pressione. Il dispositivo in figura viene utilizzato per la misura di forze variabili, come quelle generate dalle pressioni istantanee $p = p(t)$ del vapore di un motore.

Detta S la superficie del disco, allora la forza agente sullo stesso ad opera della pressione è

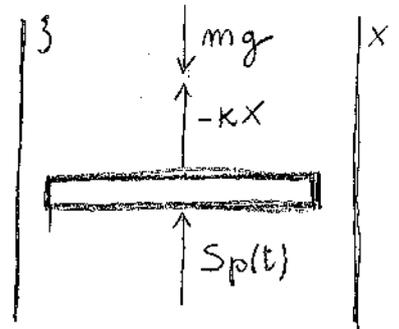
$$10.143 \quad F(t) = p(t) S$$



Il bilancino meccanico per il disco pinge allora

$$-m\ddot{x} - kx + S_p(t) - mg = 0 \Rightarrow$$

10.144 $m\ddot{x} + kx + mg = S_p(t)$



Traslando il sistema di riferimento si ha

10.145 $m\ddot{z} + kz = S_p(t)$

Assumiamo ora che le pressioni del fluido sia date da

10.146 $p(t) = P \sin(\Omega t)$

In tal caso si ha che l'integrale generale delle 10.145 è dato -

analogamente a quanto visto nel paragrafo 10.4 - de

$$(10.147) \quad z = z_0 \cos(\omega_m t) + \frac{\dot{z}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + \frac{SP}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} \left[\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega_m} \sin(\omega_m t) \right]$$

Assumendo poi $z_0 = \dot{z}_0 = 0$ abbiamo

$$(10.148) \quad z = \frac{SP}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} \left[\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega_m} \sin(\omega_m t) \right]$$

Lo scopo del dispositivo è quello di misurare la pressione massima, ovvero il valore P . Allora ammetti i dati

$$\begin{cases} f = \frac{10}{s} \Rightarrow \Omega = 2\pi f = 62,8 \frac{r}{s} \\ K = 18 \cdot 10^3 \text{ N/m} \end{cases}$$

si chiede di calcolare il valore delle m^{nm} del pistone affinché la pressione misurata dal dispositivo, attraverso le relazioni

$$(10.149) \quad P_m S = K z \Rightarrow P_m = \frac{K z}{S}$$

non si discosti da P più del 2%. Dovrei essere allora

$$(10.149.b) \quad P_m(t) \leq P + 2 \cdot 10^{-2} P \Leftrightarrow \frac{K z(t)}{S} \leq P(1 + 0,02) \Leftrightarrow$$

$$\frac{K S}{S m(\omega_m^2 - \Omega^2)} \left[\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega_m} \sin(\omega_m t) \right] \leq P(1,02) \Leftrightarrow$$

$$10.150) \frac{k S}{m S \left(\frac{k}{m} - \Omega^2 \right)} \left[\sin(\Omega t) - \Omega \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \right] \leq 1,02$$

Queste disuguaglianze trigonometriche pongono diverse difficoltà, dunque consideriamo al posto della 10.148 la seguente

$$10.151) z = \frac{P S}{m \left(\frac{k}{m} - \Omega^2 \right)} \sin(\Omega t)$$

la quale rappresenta la soluzione in presenza di smorzamento, e quindi è anche più aderente alle realtà. In tal caso la 10.148.b si scrive

$$\frac{k z(t)}{S} \leq P(1,02) \iff \frac{k \cancel{S} \sin(\Omega t)}{\cancel{S} m \left(\frac{k}{m} - \Omega^2 \right)} \leq P(1,02) \iff$$

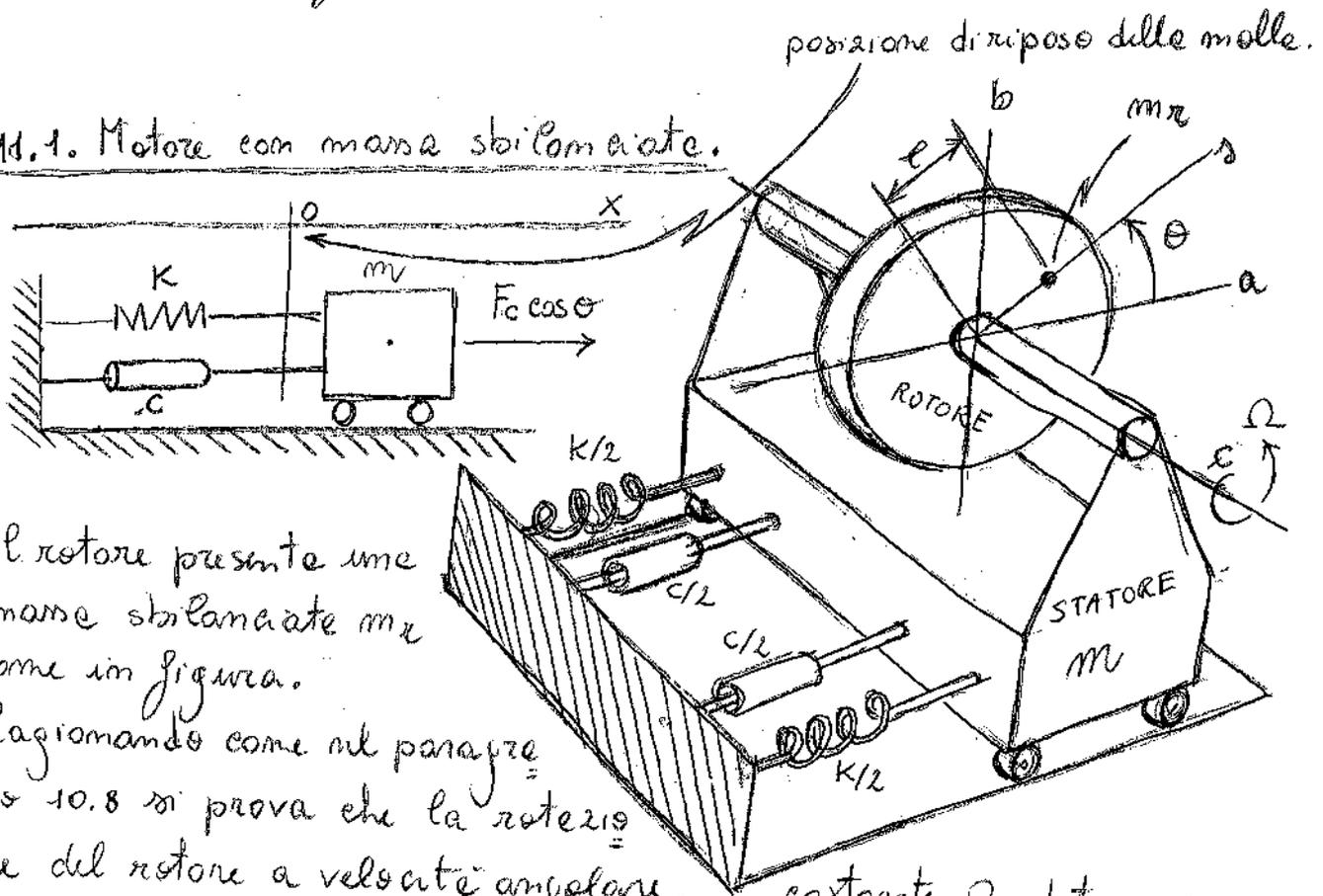
$$k \sin(\Omega t) \leq 1,02 \cdot (k - m \Omega^2) \iff k = 1,02 \cdot (k - m \Omega^2) \iff$$

$$k = 1,02 \cdot k - 1,02 m \Omega^2 \iff 1,02 m \Omega^2 = 1,02 (k - k) \iff$$

$$10.152) m = \frac{0,02 k}{1,02 \Omega^2} = 8,94 \cdot 10^{-2} \text{ kg} = 0,0894 \text{ kg} = 89,4 \text{ g}$$

Capitolo 11. Applicazioni sulle oscillazioni forzate e smorzate

11.1. Motore con massa sbilanciata.



Il rotore presenta una massa sbilanciata m_r come in figura.

Ragionando come nel paragrafo 10.8 si prova che la rotazione del rotore a velocità angolare costante Ω determina sullo statore una forza la cui proiezione sull'asse x è

$$(11.1) \quad F(t) = F_c \cos(\Omega t) = m_r e \Omega^2 \cos(\Omega t)$$

Dunque il bilancio meccanico della massa m perge

$$-m\ddot{x} - c\dot{x} - kx + F_c \cos(\Omega t) = 0 \Rightarrow$$

$$(11.2) \quad \boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_c \cos(\Omega t)}$$

Ricavo una soluzione particolare della 11.2:

$$x = X_2 \cos(\Omega t)^{-\varphi} \Rightarrow \dot{x} = -\Omega X_2 \sin(\Omega t)^{-\varphi} \Rightarrow \ddot{x} = -\Omega^2 X_2 \cos(\Omega t)^{-\varphi} \Rightarrow$$

$$-m\Omega^2 X_2 \cos(\Omega t)^{-\varphi} - c\Omega X_2 \sin(\Omega t)^{-\varphi} + \kappa X_2 \cos(\Omega t)^{-\varphi} = F_c \cos(\Omega t) \Leftrightarrow$$

$$-m\Omega^2 X_2 [\cos(\Omega t) \cos \varphi + \sin(\Omega t) \sin \varphi] - c\Omega X_2 [\sin(\Omega t) \cos \varphi - \cos(\Omega t) \sin \varphi] + \kappa X_2 [\cos(\Omega t) \cos \varphi + \sin(\Omega t) \sin \varphi] = F_c \cos(\Omega t) \Leftrightarrow$$

$$[-m\Omega^2 X_2 \cos(\Omega t) - c\Omega X_2 \sin(\Omega t) + \kappa X_2 \cos(\Omega t)] \cos \varphi +$$

$$+ [-m\Omega^2 X_2 \sin(\Omega t) + c\Omega X_2 \cos(\Omega t) + \kappa X_2 \sin(\Omega t)] \sin \varphi = F_c \cos(\Omega t)$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} (-m\Omega^2 X_2 \cos \varphi - c\Omega X_2 \sin \varphi + \kappa X_2 \cos \varphi) \cos(\Omega t) = F_c \cos(\Omega t) \\ (-m\Omega^2 X_2 \sin \varphi + c\Omega X_2 \cos \varphi + \kappa X_2 \sin \varphi) \sin(\Omega t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-m\Omega^2 X_2 \sin \varphi + c\Omega X_2 \cos \varphi + \kappa X_2 \sin \varphi) \sin(\Omega t) = 0 \end{cases}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} X_2 [(k - m\Omega^2) \cos \varphi - c\Omega \sin \varphi] = F_c \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 [(k - m\Omega^2) \sin \varphi - c\Omega \cos \varphi] = 0 * \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} X_2 [(\omega_m^2 - \Omega^2) \cos \varphi - \frac{c\Omega}{m} \sin \varphi] = \frac{F_c}{m} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} X_2 [(\omega_m^2 - \Omega^2) \sin \varphi - \frac{c\Omega}{m} \cos \varphi] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 [(1 - m^2) \cos \varphi - \frac{c\Omega}{m\omega_m^2} \sin \varphi] = \frac{F_c}{\omega_m^2 m} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} X_2 [(1 - m^2) \sin \varphi + \frac{c\Omega}{m\omega_m^2} \cos \varphi] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 \left[(1-m^2) \cos \varphi - \frac{2c \Omega}{2m\omega_m \omega_m} \sin \varphi \right] = \frac{F_c}{\omega_m^2 m} \\ X_2 \left[(1-m^2) \sin \varphi + \frac{2c \Omega}{2m\omega_m \omega_m} \cos \varphi \right] = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} X_2 \left[(1-m^2) \cos \varphi - 2\zeta m \sin \varphi \right] = \frac{F_c}{\omega_m^2 m} \\ X_2 \left[(1-m^2) \sin \varphi + 2\zeta m \cos \varphi \right] = 0 \end{cases} \iff$$

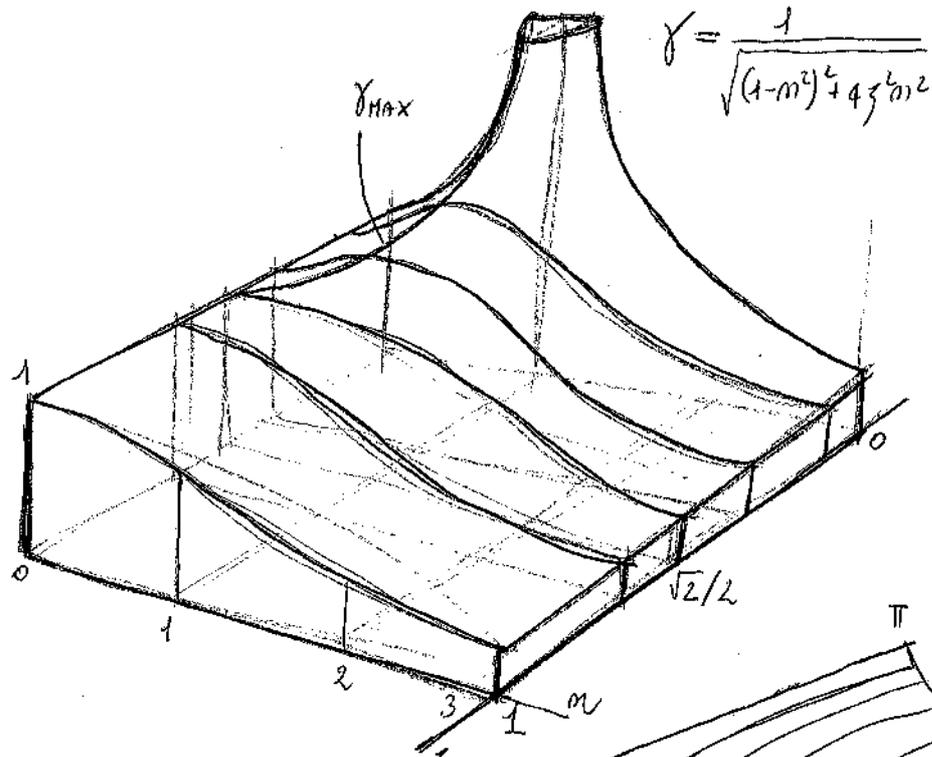
$$\begin{cases} X_2^2 \left[(1-m^2) \cos \varphi - 2\zeta m \sin \varphi \right]^2 = \frac{F_c^2}{\omega_m^4 m^2} \\ X_2^2 \left[(1-m^2) \sin \varphi + 2\zeta m \cos \varphi \right]^2 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} X_2^2 \left((1-m^2)^2 \cos^2 \varphi + 4\zeta^2 m^2 \sin^2 \varphi - 4\zeta m \sin \varphi \cos \varphi \right) = \frac{F_c^2}{\omega_m^4 m^2} \\ X_2^2 \left((1-m^2)^2 \sin^2 \varphi + 4\zeta^2 m^2 \cos^2 \varphi + 4\zeta m \sin \varphi \cos \varphi \right) = 0 \end{cases} \iff$$

$$X_2^2 \left[(1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2 \right] = \frac{F_c^2}{\omega_m^4 m^2} = \frac{F_c^2}{\frac{k^2}{m^2} m^2} = \frac{F_c^2}{k^2} \iff$$

$$\textcircled{11.3} \begin{cases} X_2 = \frac{F_c}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2}} = \frac{m_2 e \Omega^2}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2}} = \frac{m_2 e \Omega^2}{k} \gamma \\ * \tan \varphi = \frac{c \Omega}{(k - m \Omega^2)} = \frac{c \Omega}{m(\omega_m^2 - \Omega^2)} = \frac{c \Omega}{m \omega_m^2 (1-m^2)} = \frac{2\zeta \Omega}{\omega_m (1-m^2)} \\ = \frac{2\zeta m}{1-m^2} \end{cases}$$

Riporto i diagrammi di γ e di φ :



La curva γ_{\max} rappresenta il luogo dei massimi di γ per z fissato. Si ottiene nel seguente modo:

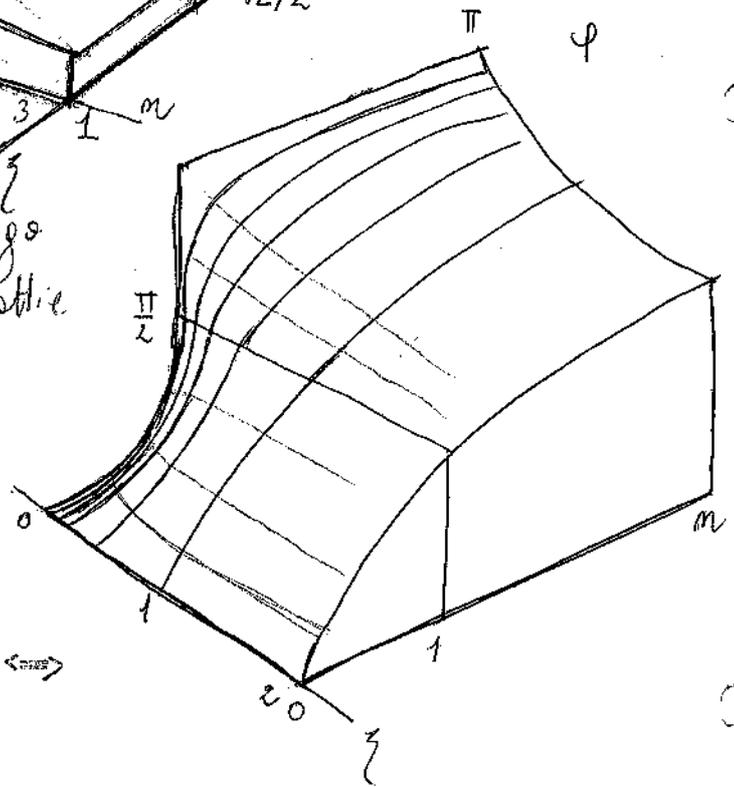
$$\frac{d\gamma}{dm} = -\frac{1}{2} \frac{2(1-m^2)2m + 4z^2 2m}{((1-m^2)^2 + 4z^2 m^2)^{3/2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$((1-m^2) + 2z^2)m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ 1-m^2 + 2z^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m=0 \\ m^2 + (2z^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m = \sqrt{1-2z^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \gamma_{\max} = 1 & \text{per } z > \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

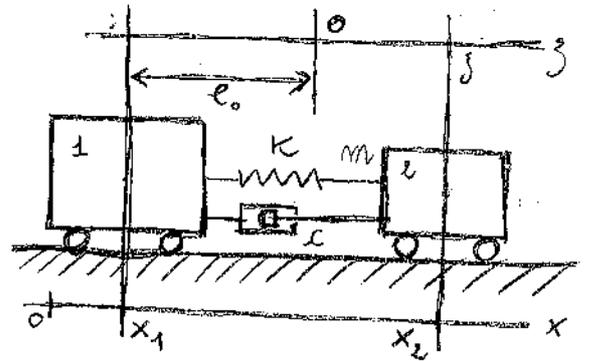
$$\gamma_{\max} = \frac{1}{\sqrt{(1-1+2z^2)^2 + 4z^2 m^2}} = \frac{1}{\sqrt{4z^4 + 4z^2(1-2z^2)}}$$



11.2. Massa-molla con telaio oscillante. Si chiede il moto relativo fra la massa ed il telaio. Si assume che

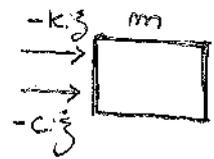
$$x_1 = X_1 \sin(\Omega t)$$

L'equilibrio per la massa è posto



$$(11.4) -m\ddot{x}_2 - c\dot{z} - kz = 0$$

D'altra parte si ha che



$$x_2 - x_1 = z + e_0 \Rightarrow x_2 = z + e_0 + x_1 = z + e_0 + X_1 \sin(\Omega t) \Rightarrow$$

$$\dot{x}_2 = \dot{z} + X_1 \Omega \cos(\Omega t) \Rightarrow \ddot{x}_2 = \ddot{z} - X_1 \Omega^2 \sin(\Omega t)$$

Da cui per la 11.4 si scrive

$$-m[\ddot{z} - X_1 \Omega^2 \sin(\Omega t)] - c\dot{z} - kz = 0 \Rightarrow$$

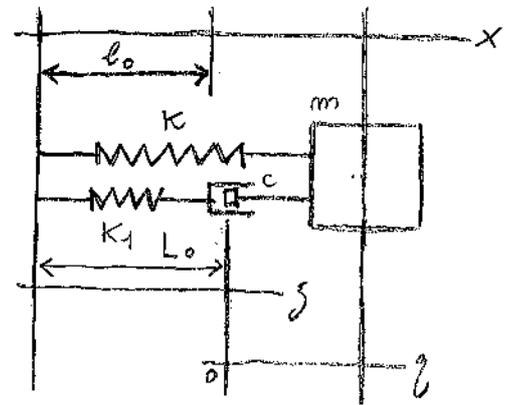
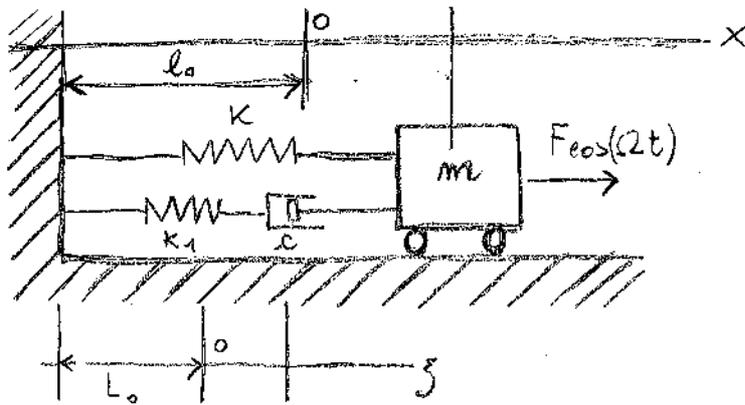
$$-m\ddot{z} + mX_1 \Omega^2 \sin(\Omega t) - c\dot{z} - kz = 0 \Rightarrow$$

$$(11.5) m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = mX_1 \Omega^2 \sin(\Omega t)$$

La soluzione a regime vale

$$(11.6) z = \frac{mX_1 \Omega}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2}} \sin\left[\Omega t - \arctan\left(\frac{2\zeta m}{1-m^2}\right)\right] = \gamma m^2 X_1 \sin[\Omega t - \varphi]$$

11.3. Massa-molla con smorzatore collegato elasticamente. Il bi



bilancio meccanico per la massa pinge

$$-kx - c\dot{\eta} - m\ddot{x} + F\cos(\Omega t) = 0 \implies$$

$$(11.7) \quad m\ddot{x} + c\dot{\eta} + kx = F\cos(\Omega t)$$

Sussiste per la relazione

$$(11.8) \quad x + l_0 - \zeta - L_0 = \eta \implies \dot{\eta} = \dot{x} - \dot{\zeta} \implies \dot{x} = \dot{\eta} + \dot{\zeta}$$

il bilancio meccanico dello smorzatore pinge

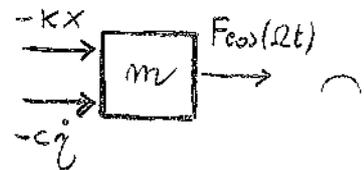
$$(11.9) \quad -k_1\zeta + c\dot{\eta} = 0 \iff k_1\zeta = c\dot{\eta}$$

Sostituendo la 11.9 nelle 11.7 abbiamo

$$m\ddot{x} + k_1\zeta + kx = F\cos(\Omega t) \implies k_1\zeta = F\cos(\Omega t) - kx - m\ddot{x} \implies$$

$$\zeta = \frac{F\cos(\Omega t) - kx - m\ddot{x}}{k_1} \implies$$

$$(11.10) \quad \dot{\zeta} = \frac{-\Omega F \sin(\Omega t) - k\dot{x} - m\ddot{\dot{x}}}{k_1}$$



Sostituendo le 11.10 nella 11.8 si ha

$$11.11 \quad \dot{x} = \dot{\eta} - \frac{\Omega F \sin(\Omega t) + \kappa \dot{x} + m \ddot{x}}{K_1}$$

La 11.9 si scrive

$$11.12 \quad \dot{\eta} = \frac{K_1}{c} \dot{z} = \frac{K_1}{c} \frac{F \cos(\Omega t) - \kappa x - m \ddot{x}}{K_1} = \frac{F \cos(\Omega t) - \kappa x - m \ddot{x}}{c}$$

Sostituendo le 11.12 nella 11.11 si ha

$$\dot{x} = \frac{F \cos(\Omega t) - \kappa x - m \ddot{x}}{c} - \frac{\Omega F \sin(\Omega t) + \kappa \dot{x} + m \ddot{x}}{K_1} \iff$$

$$c K_1 \dot{x} = F K_1 \cos(\Omega t) - \kappa K_1 x - K_1 m \ddot{x} - (c \Omega F \sin(\Omega t) + c \kappa \dot{x} + c m \ddot{x}) \iff$$

$$c K_1 \dot{x} = F K_1 \cos(\Omega t) - \kappa K_1 x - K_1 m \ddot{x} - c \Omega F \sin(\Omega t) - c \kappa \dot{x} - c m \ddot{x} \iff$$

$$11.13 \quad c m \ddot{x} + K_1 m \ddot{x} + (c K_1 + c \kappa) \dot{x} + \kappa K_1 x = F [K_1 \cos(\Omega t) - c \Omega \sin(\Omega t)]$$

L'integrale generale delle omogenee associate fornisce una parte delle soluzioni che si esaurisce con il tempo, a causa della presenza dello smorzamento. C'è ora una soluzione particolare del tipo

$$11.14 \quad \begin{cases} x = X \cos(\Omega t - \varphi) \\ \dot{x} = -\Omega X \sin(\Omega t - \varphi) \\ \ddot{x} = -\Omega^2 X \cos(\Omega t - \varphi) \\ \ddot{\dot{x}} = \Omega^2 X \sin(\Omega t - \varphi) \end{cases}$$

Sostituendo nelle 11.13 si ha

$$cm\Omega^3 X \sin(\Omega t - \varphi) - \kappa_1 m \Omega^2 X \cos(\Omega t - \varphi) + c(\kappa + \kappa_1) \Omega X \sin(\Omega t - \varphi) + \kappa \kappa_1 X \cos(\Omega t - \varphi) = F [\kappa_1 \cos(\Omega t) - c \Omega \sin(\Omega t)] \Rightarrow$$

$$cm\Omega^3 X [\sin(\Omega t) \cos \varphi - \cos(\Omega t) \sin \varphi] - \kappa_1 m \Omega^2 X [\cos(\Omega t) \cos \varphi + \sin(\Omega t) \sin \varphi] - c(\kappa + \kappa_1) \Omega X [\sin(\Omega t) \cos \varphi - \cos(\Omega t) \sin \varphi] + \kappa \kappa_1 X [\cos(\Omega t) \cos \varphi + \sin(\Omega t) \sin \varphi] = F [\kappa_1 \cos(\Omega t) - c \Omega \sin(\Omega t)] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} cm\Omega^3 X \cos \varphi - \kappa_1 m \Omega^2 X \sin \varphi - c(\kappa + \kappa_1) \Omega X \cos \varphi + \kappa \kappa_1 X \sin \varphi = \\ = -F c \Omega \dots \\ -cm\Omega^3 X \sin \varphi - \kappa_1 m \Omega^2 X \cos \varphi + c(\kappa + \kappa_1) \Omega X \sin \varphi + \kappa \kappa_1 X \cos \varphi = \\ = F \kappa_1 \end{cases}$$

↓

$$\begin{cases} [cm\Omega^3 X - c(\kappa + \kappa_1) \Omega X] \cos \varphi + [\kappa \kappa_1 X - \kappa_1 m \Omega^2 X] \sin \varphi = -c F \Omega \\ [\kappa \kappa_1 X - \kappa_1 m \Omega^2 X] \cos \varphi + [c(\kappa + \kappa_1) \Omega X - cm\Omega^3 X] \sin \varphi = F \kappa_1 \end{cases}$$

↓

$$\textcircled{11.15} \begin{cases} c \Omega X (m \Omega^2 - \kappa - \kappa_1) \cos \varphi + \kappa_1 X (\kappa - m \Omega^2) \sin \varphi = -c F \Omega \\ c \Omega X (\kappa + \kappa_1 - m \Omega^2) \sin \varphi + \kappa_1 X (\kappa - m \Omega^2) \cos \varphi = F \kappa_1 \end{cases}$$

Quadrando e sommando si ha

$$\left\{ \begin{aligned} c^2 \Omega^2 X^2 (m\Omega^2 - \kappa - \kappa_1)^2 \cos^2 \varphi + \kappa_1^2 X^2 (\kappa - m\Omega^2)^2 \sin^2 \varphi + \\ + 2c\Omega\kappa_1 X^2 (m\Omega^2 - \kappa - \kappa_1)(\kappa - m\Omega^2) &= c^2 F^2 \Omega^2 \\ c^2 \Omega^2 X^2 (\kappa + \kappa_1 - m\Omega^2)^2 \sin^2 \varphi + \kappa_1^2 X^2 (\kappa - m\Omega^2)^2 \cos^2 \varphi + \\ + 2c\Omega\kappa_1 X^2 (\kappa + \kappa_1 - m\Omega^2)(\kappa - m\Omega^2) &= F^2 \kappa_1^2 \end{aligned} \right.$$

$$c^2 \Omega^2 X^2 (m\Omega^2 - \kappa - \kappa_1)^2 + \kappa_1^2 X^2 (\kappa - m\Omega^2)^2 = (c^2 \Omega^2 + \kappa_1^2) F^2 \Rightarrow$$

$$\text{11.16 } X^2 = \frac{(c^2 \Omega^2 + \kappa_1^2) F^2}{c^2 \Omega^2 (m\Omega^2 - \kappa - \kappa_1)^2 + \kappa_1^2 (\kappa - m\Omega^2)^2}$$

Dalle 11.15 si ha ancora

$$\begin{cases} c\Omega (m\Omega^2 - \kappa - \kappa_1) \cos \varphi + \kappa_1 (\kappa - m\Omega^2) \sin \varphi = -cF\Omega/X \\ c\Omega (\kappa + \kappa_1 - m\Omega^2) \sin \varphi + \kappa_1 (\kappa - m\Omega^2) \cos \varphi = F\kappa_1/X \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \frac{c\Omega}{c\Omega} (m\Omega^2 - \kappa - \kappa_1) \cos \varphi + \frac{\kappa_1}{c\Omega} (\kappa - m\Omega^2) \sin \varphi = -F/X \\ \frac{c\Omega}{\kappa_1} (\kappa + \kappa_1 - m\Omega^2) \sin \varphi + \frac{\kappa_1}{\kappa_1} (\kappa - m\Omega^2) \cos \varphi = F/X \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (m\Omega^2 - \kappa - \kappa_1) \cos \varphi + \frac{\kappa_1}{c\Omega} (\kappa - m\Omega^2) \sin \varphi &= -\frac{c\Omega}{\kappa_1} (\kappa + \kappa_1 - m\Omega^2) \sin \varphi - \\ - (\kappa - m\Omega^2) \cos \varphi &\Rightarrow \end{aligned}$$

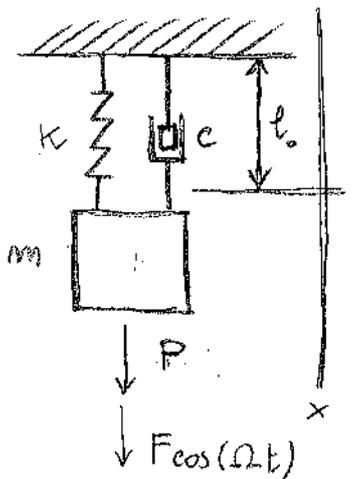
$$\left(m\Omega^2 - k - k_1 + k - m\Omega^2 \right) \cos \varphi + \left[\frac{k_1}{c\Omega} (k - m\Omega^2) + \frac{c\Omega}{k_1} (k + k_1 - m\Omega^2) \right] \sin \varphi = 0 \Rightarrow$$

$$11.17) \quad \tan \varphi = \frac{k_1^2 c \Omega}{k_1^2 (k - m\Omega^2) + c^2 \Omega^2 (k + k_1 - m\Omega^2)}$$

Le 11.16, 11.17 definiscono completamente la soluzione a regime 11.14.

11.4: È sempre numerico. Si assumano i dati seguenti:

$$\begin{cases} k = 10,5 \cdot 10^3 \text{ N/m} \\ P = 450 \text{ N} \\ F = 40 \text{ N} \\ c = 120 \text{ N}\cdot\text{s/m} \Rightarrow \zeta = \frac{c}{2\sqrt{m}k} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{g}{P}} \frac{1}{\sqrt{k}} = 8,64 \cdot 10^{-2} \end{cases}$$



Calcolo la frequenza di oscillazione propria:

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10,5 \cdot 10^3 \text{ N}}{450 \text{ N} \cdot \text{m}} g} = 4,83 \sqrt{\frac{9,81 \text{ m}}{\text{m} \cdot \text{s}^2}} = 15,12 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$f = \frac{2\pi}{\omega_m} \Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_m}{2\pi} = 2,40 \text{ Hz}}$$

Calcolo l'ampiezza della condizione di risonanza

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-m^2)^2 + (2\zeta m)^2}} \Rightarrow \gamma \Big|_{m=1} = \frac{1}{2\zeta} = \frac{1 \cdot \sqrt{k} m}{2c}$$

$$= \frac{\sqrt{10,5 \cdot 10^3 \text{ N/m} \cdot 450 \text{ N/g}}}{120 \text{ N}_0/\text{m}} = 5,78 \sqrt{\frac{\text{N}^2}{\text{N}_0^2}} = 5,78$$

$$11.18) X|_{m=1} = Y|_{m=1} \frac{F}{K} = 5,78 \cdot \frac{40 \text{ N m}}{10,5 \cdot 10^3 \text{ N}} = 0,022 \text{ m}$$

Facciamo notare che l'ampiezza di risonanza, avendo presente uno smorzamento, non è l'ampiezza massima, la quale (vedi le 5.58) si attinge per

$$11.19) \bar{m} = \sqrt{1 - 2\xi^2} = \sqrt{1 - 2(6,64 \cdot 10^{-2})^2} = 0,9925$$

e vale dunque

$$11.20) X_{\text{MAX}} = Y|_{\bar{m}} \frac{F}{K} = \frac{1}{\sqrt{(1-\bar{m}^2)^2 + (2\xi\bar{m})^2}} \frac{F}{K} = 5,808 \cdot \frac{40 \text{ N m}}{10,5 \cdot 10^3 \text{ N}} = 2,21 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Calcolo il ritardo di fase in condizioni di risonanza:

$$11.21) \varphi = \arctan \frac{2\xi m}{1-m^2} \Rightarrow \varphi|_{m=1} = \pi/2$$

Nelle condizioni di amplificazione dinamica massima - individuata dalle 5.58 - abbiamo che la forzante ha pulsazione data da

$$\Omega = \omega_m \bar{m} = 15,12 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0,9925 = 15,0066 \text{ rad/s}$$

da cui la frequenza

$$\Omega T = 2\pi \Rightarrow \Omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\Omega}{2\pi} = 2,38 \text{ Hz}$$

Ricavo il ritardo di fase corrispondente ad \bar{m} :

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\bar{m}}{1-\bar{m}^2} = \tan^{-1} \frac{0,17}{0,0499} = \tan^{-1} 11,8788 \approx 84,97^\circ$$

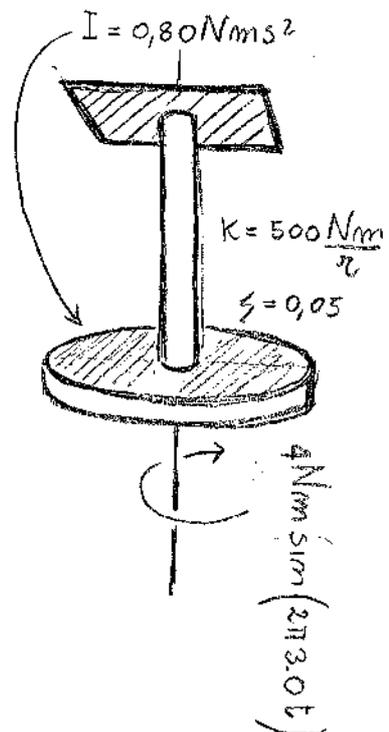
Ricavo gli scarti percentuali delle grandezze omologhe per le condizioni di risonanza $m=1$ e la condizione $m=\bar{m}$ di amplificazione dinamica massima:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{X(m=\bar{m}) - X(m=1)}{X(m=1)} 100 = 0,42\% \\ \frac{f(m=\bar{m}) - f(m=1)}{f(m=1)} 100 = \frac{2,38 \text{ Hz} - \omega_m/2\pi}{\omega_m/2\pi} 100 = -1,03\% \\ \frac{\varphi(m=\bar{m}) - \varphi(m=1)}{\varphi(m=1)} 100 = \frac{84,97^\circ - 90^\circ}{90^\circ} 100 = -5,58\% \end{array} \right.$$

11.5. Un pendolo torsionale smorzato. Si chiede di determinare l'ampiezza delle oscillazioni forzate e le frequenze proprie del sistema.

Per la FREQUENZA PROPRIA si ha

$$(11.22) \quad \omega_m \frac{1}{f} = 2\pi \Rightarrow f = \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{\sqrt{K/I}}{2\pi} = 3,97 \text{ Hz}$$



L'AMPIEZZA delle oscillazioni forzate è

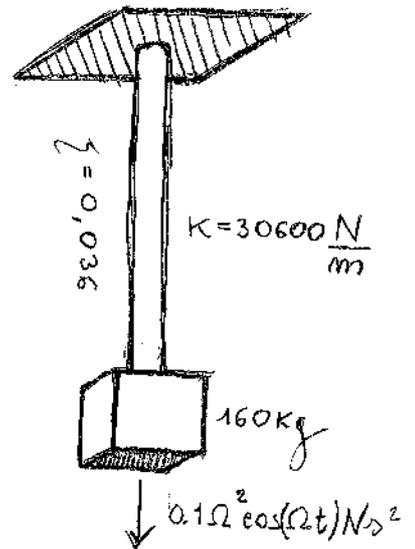
$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta = \gamma \frac{4 \text{ Nm}}{500 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}} = \frac{0,008 \text{ rad}}{\sqrt{(1-m^2)^2 + (2\zeta m)^2}} \\ m = \Omega/\omega_m = 2\pi \cdot 3 / 2\pi \cdot 3,97 = 3/3,97 = 0,75 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Theta = 1,80 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 1,032^\circ$$

11.6. Massa sospesa. La frequenza naturale del sistema indicato in figura è

$$f = \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{\sqrt{k/m}}{2\pi} = 2,20 \text{ Hz} \quad (\omega_m = 13,82 \frac{\text{rad}}{\text{s}})$$

Ricavo ora l'ampiezza delle oscillazioni forzate:



$$\begin{cases} X_s = \frac{0.1 \text{ N s}^2}{k} = \frac{0.1 \text{ m}^2 \omega_m^2 \text{ N s}^2}{k} = \frac{0.1 \text{ m}^2 \text{ N s}^2}{k \cdot \text{m}} = \frac{0.1 \text{ m}^2 \text{ N s}^2}{160 \text{ kg}} = 0,625 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-m^2)^2 + (2\zeta m)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 0,0051 \text{ m}^2}} \end{cases}$$

↓

$$(11.23) \quad X = \gamma X_s = \frac{\text{m}^2 0,625 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 0,0051 \text{ m}^2}}$$

L'ampiezza in condizioni di risonanza è dunque

$$(11.24) \quad X(m=1) = \frac{0,625 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{\sqrt{0,0051}} = 8,75 \text{ mm}$$

Il ritardo di fase vale

$$(11.25) \quad \varphi = \arctan \frac{2\zeta m}{1-m^2} = \arctan \frac{0,072 \text{ m}}{1-m^2}$$

Nel caso in cui le forzanti abbia frequenza $f = 1,5 \text{ Hz}$ si ha

$$\Omega = 2\pi f = \frac{9,42}{s} \Rightarrow m = \frac{\Omega}{\omega_n} = \frac{9,42}{13,82} = 0,68 \Rightarrow$$

$$X = \frac{0,625 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 0,462}{\sqrt{0,28 + 0,0051 \cdot 0,46}} = \frac{0,625 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{0,462}}{0,53} = 0,54 \text{ mm}$$

$$\varphi = \arctan \frac{0,072 \cdot 0,68}{0,53} = \tan^{-1}(0,092) = 5,27^\circ$$

11.7. Sistemi massa-molle. Se le forze ecatotrice in condizioni di risonanza ha ampiezza

$$11.23) F_1 = 420 \text{ N}$$

e provoca una oscillazione a regime di ampiezza

$$11.24) X_d = 45 \text{ mm}$$

ricavare $\omega_n, \zeta, X(m=1,5), \varphi(m=1,5)$ assumendo che

$m = 1300 \text{ kg}$	$k = 37600 \text{ N/m}$
-----------------------	-------------------------

Calcolo la PULSAZIONE NATURALE:

$$11.25) \omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{\frac{37600}{1300}} \frac{\pi}{s} = 5,37 \frac{\pi}{s} \quad (T = 1,169 \text{ s})$$

Ricavo A. Dalle 11.23 si ha

$$A \omega_n^2 = 420 \text{ N} \Rightarrow A = \frac{420 \text{ N} \cdot s^2}{28,92} = 14,52 \text{ N} \cdot s^2$$

Ricavo il fattore di smorzamento delle 11.24:

$$X_1 = X_S \gamma_1 = \frac{A \Omega^2}{K} \frac{1}{\sqrt{(1-m^2)^2 + (2\zeta m)^2}} \Big|_{m=1} = \frac{A \omega_m^2}{K} \frac{1}{2\zeta} = \frac{A}{2m\zeta} \Rightarrow$$

$$\textcircled{11.26} \quad \zeta = \frac{A}{2m X_1} = \frac{14,52 \text{ N s}^2}{2 \cdot 1300 \text{ kg} \cdot 45 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = \frac{0,1241 \text{ kg m}}{\text{kg m}} = 0,1241$$

Ricavo l'ampiezza per $m=1,5$.

$$\textcircled{11.27} \quad X(m=1,5) = X_S \gamma = \frac{A \cdot 1,5^2 \omega_m^2}{K} \cdot 0,76671 = 19,26 \text{ mm}$$

Ricavo la fase per $m=1,5$.

$$\textcircled{11.28} \quad \varphi(m=1,5) = \tan^{-1} \frac{2\zeta m}{1-m^2} = \tan^{-1} \frac{3 \cdot 0,1241}{1 - \frac{9}{4}} = \tan^{-1}(-0,2978) = 163,41$$

22/02/14

11.8. Pendolo di torsione. Datta Θ l'ampiezza delle oscillazioni forzate, sia $\Theta(m=1) = 1,07^\circ$ e $\Theta(f=50 \text{ Hz}) = 0,3^\circ$, essendo f la frequenza della coppia ecatetrice.

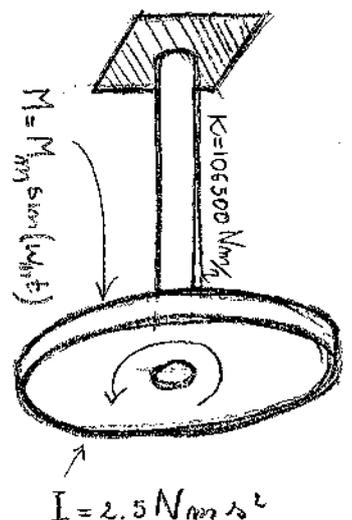
Calcolare allora ω_m , ζ , c , M_m per $f=50 \text{ Hz}$.

PULSAZIONE NATURALE:

$$\omega_m = \sqrt{K/I} = \sqrt{\frac{106500 \text{ Nm}}{2,5 \text{ Nm s}^2}} = 206,39 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

FATTORE DI SMORZAMENTO:

$$\begin{cases} m = \frac{\Omega}{\omega_m} \\ \Omega = 2\pi f = 314 \text{ rad/s} \end{cases} \Rightarrow \boxed{m = \frac{314}{206,39} = 1,52} \Rightarrow$$



$$\left\{ \begin{aligned} \Theta(m=1) &= \gamma \frac{M_m}{K} = \frac{M_m/K}{\sqrt{(1-m^2)^2 + (2\zeta m)^2}} = \boxed{\frac{M_m/K}{2\zeta} = 1,07 \frac{\pi}{180}} \\ \Theta(m=1,5) &= \gamma \frac{M_m}{K} = \frac{M_m/K}{\sqrt{(1-1,5^2)^2 + (2\zeta \cdot 1,5)^2}} = \frac{M_m/K}{\sqrt{1,31^2 + \zeta^2 \cdot 3,04^2}} = \frac{0,3 \pi}{180} \end{aligned} \right.$$

↓

$$\left\{ \begin{aligned} M_m/K &= 2\zeta \frac{1,07 \pi}{180} = 0,037\zeta \\ \frac{0,037\zeta}{\sqrt{1,716 + 9,24\zeta^2}} &= 0,0052 \Rightarrow \frac{0,0013\zeta}{1,716 + 9,24\zeta^2} = 0,0052 \Rightarrow \end{aligned} \right.$$

$$0,0013\zeta = 0,0089 + 0,048\zeta^2 \Rightarrow 0,048\zeta^2 - 0,0013\zeta - 0,0089 = 0 \Rightarrow$$

$$\zeta = \frac{-0,0013 \pm \sqrt{1,6 \cdot 10^{-6} + 0,0017}}{0,096} \Rightarrow \boxed{\zeta = 0,203}$$

MOMENTO MASSIMO DELLA COPPIA TORCENTE :

$$M_m = 0,037\zeta K = 0,037 \cdot 0,203 \cdot 106500 \frac{\text{Nm}}{\pi} = 798,92 \text{ Nm}$$

COEFFICIENTE DI SMORZAMENTO

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{2c}{\sqrt{K I}} \Rightarrow c = \frac{\zeta \sqrt{K I}}{2} = 52,37 \sqrt{\text{Nm Kg m}^2} = 52,37 \sqrt{\frac{\text{Kg m}^4 \text{ Kg m}^2}{\text{s}^2}} = \\ &= 52,37 \sqrt{\frac{\text{Kg}^2 \text{ m}^4}{\text{s}^2}} = 52,37 \frac{\text{Kg m}^2}{\text{s}} = 52,37 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ m s} = 52,37 \text{ Nm s} \end{aligned}$$

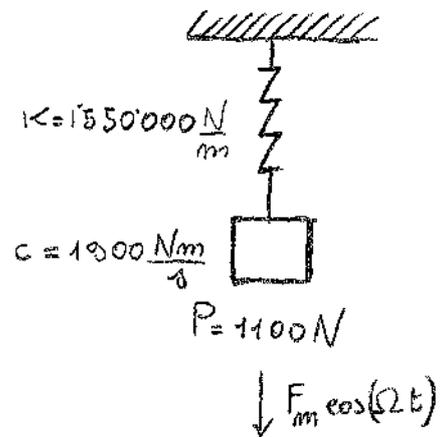
11.9. Sisteme masse-molle-smorzatore. Determinare f_m , ζ , F_m per $X = 0,003\text{ m}$. Determinare inoltre F_m in condizioni di risonanza.

FREQUENZA NATURALE:

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}} = 117,57 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$\omega_m T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_m} = 5,34 \cdot 10^{-2} \Rightarrow$$

$$f_m = \frac{1}{T} = 18,721 \text{ Hz}$$



FATTORE DI SMORZAMENTO

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{1900 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}}{2\sqrt{1550000 \frac{1100 \text{ N}}{9,81 \text{ m}} \text{ kg}}} = \frac{950 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}}{13183,4 \sqrt{\frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \frac{\text{kg}}{\text{m}}}} = 0,072 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}}{\text{kg}/\text{s}}$$

$$\Downarrow$$

$$\zeta = 0,072$$

FORZANTE MASSIMA

$$X = \frac{F_m}{k} \gamma \Rightarrow F_m = \frac{kX}{\gamma} = \frac{13950 \text{ N}}{\gamma}$$

Non avendo la pulsazione ω della forzante, non è possibile ricavare γ e dunque F_m . Consideriamo allora il valore massimo di γ per lo smorzamento ammortato. In base alle 5.53 tale valore si ha per

$$m = \sqrt{1 - 2\zeta^2} = \sqrt{1 - 2 \cdot 0,072^2} = 0,9974 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-m^2)^2 + (2\zeta m)^2}} = 6,96 \Rightarrow$$

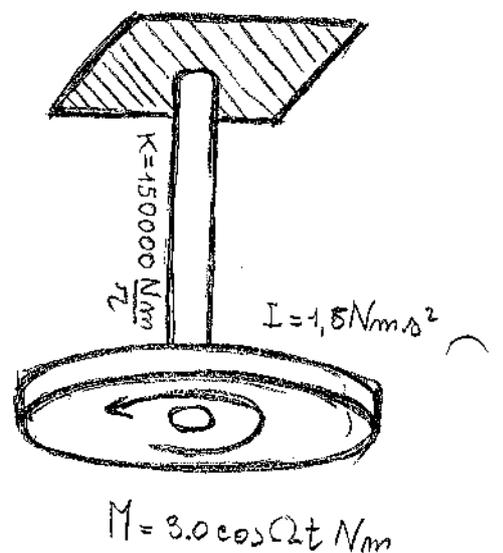
$$\Rightarrow F_m = \frac{13950 \text{ N}}{6.96} = 2004 \text{ N}$$

FORZANTE IN CONDIZIONI DI RISONANZA

$$X = \frac{F_m}{K} \gamma \Big|_{m=1} = \frac{F_m}{K} \frac{1}{2\zeta} \Rightarrow F_m = 2\zeta K X = 2008,8 \text{ N}$$

Si osserva che in condizioni di risonanza occorre una forza di ampiezza maggiore per produrre la stessa ampiezza, rispetto al caso in cui si abbia le pulsazioni delle forzanti pari a quelle di massimo della amplificazione dinamica.

11.10. Pendolo di torsione. Per il pendolo di torsione in figura si chiede la frequenza naturale f_m , la deformazione angolare statica Θ_0 , il fattore di smorzamento ζ e la deformazione angolare in condizioni di risonanza vale $\Theta(m=1) = 0.75^\circ$. Si chiede inoltre il coefficiente c di smorzamento torsionale.



FREQUENZA NATURALE:

$$\omega_m = \sqrt{K/I} = \sqrt{\frac{150000 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}}{1,5 \text{ Nm} \cdot \text{s}^2}} = 316,22 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$\omega_m T = 2\pi \Rightarrow \frac{\omega_m}{2\pi} = f_m \Rightarrow f_m \approx 50,32 \text{ Hz}$$

DEFORMAZIONE STATICA ;

$$\Theta_s = \frac{M_{im}}{K} = \frac{9 \text{ Nm} \pi}{150000 \text{ Nm}} = 0,00006 \pi = 0,0034^\circ$$

FATTORE DI SMORZAMENTO:

$$\Theta(m=1) = \Theta_s \gamma(m=1) = \frac{0,0034^\circ}{2\zeta} = 0,75^\circ \Rightarrow \zeta = 0,0023$$

COEFFICIENTE DI SMORZAMENTO

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{K \cdot I}} \Rightarrow c = 2\zeta\sqrt{K \cdot I} = 2,15 \sqrt{\text{Nm kg/m}^2} = 2,15 \frac{\text{Ns}^2}{\text{m}}$$

11.11. Massa-molla-smorzatore. Per il sistema in

figura calcolare X , e nei seguenti casi:

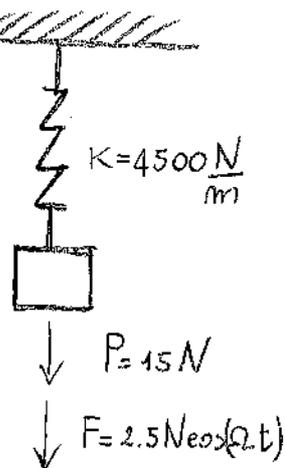
1) $f = 5 \text{ Hz}$;

2) f di risonanza;

3) $f = 12 \text{ Hz}$.

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{K \cdot m}} = 0,21$$

$$c = 35 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$$



Calcolo in primo luogo la PULSAZIONE NATURALE:

$$\omega_m = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{4500 \text{ N/m}}{15 \text{ kg}}} = 54,24 \frac{\pi}{\text{s}}$$

PRIMO CASO:

$$f = 5 \text{ Hz} \Rightarrow \frac{\Omega}{f} = 2\pi \Rightarrow \Omega = 2\pi f = 31,4 \frac{\pi}{\text{s}}$$

$$n = \Omega / \omega_m = 0,58$$

$$X_S = \frac{2.5 \text{ N}}{4500 \text{ N}} m = 0.55 \cdot 10^{-3} m \Rightarrow$$

$$X = X_S \gamma = \frac{0.55 \cdot 10^{-3} m}{\sqrt{(1-m^2)^2 + (2\zeta m)^2}} = 0.778 m \cdot 10^{-3}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta m}{1-m^2}\right) = \tan^{-1}(0.367) = 20.15^\circ$$

SECONDO CASO (RISONANZA):

$$X = X_S \gamma = \frac{0.55 \cdot 10^{-3} m}{2\zeta} = 1.30 \cdot 10^{-3} m$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

TERZO CASO:

$$\Omega \frac{1}{f} = 2\pi \Rightarrow \Omega = 2\pi f = 75.39 \text{ rad/s} \Rightarrow m = \frac{\Omega}{\omega_m} = 1.39 \Rightarrow$$

$$X = X_S \gamma = 0.5 \cdot 10^{-3} m$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta m}{1-m^2}\right) = 447.93^\circ$$

11.12. Prima espressione alternativa per γ . Dalla espressione di φ indicata in 5.61 si ha

$$\text{11.29) } \tan \varphi = \frac{2\zeta m}{1-m^2} \Leftrightarrow \boxed{2\zeta m = (1-m^2) \tan \varphi}$$

Sostituendo la 11.29 nella 5.56 abbiamo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-m^2)^2 + (1-m^2)^2 \tan^2 \varphi}} = \frac{1}{|1-m^2| \sqrt{1 + \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}}} = \frac{1}{|1-m^2|} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \varphi}} \Rightarrow$$

$$(11.30) \quad \gamma = \frac{|\cos \varphi|}{|1-m^2|}$$

Si consideri ora che

$$\left\{ \begin{array}{l} m < 1 \Rightarrow \begin{cases} 1-m^2 > 0 \Rightarrow |1-m^2| = 1-m^2 \\ \varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \varphi > 0 \Rightarrow |\cos \varphi| = \cos \varphi \end{cases} \\ m = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1-m^2 = 0 \Rightarrow |1-m^2| = 1-m^2 \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow |\cos \varphi| = \cos \varphi \end{cases} \\ m > 1 \Rightarrow \begin{cases} 1-m^2 < 0 \Rightarrow |1-m^2| = -(1-m^2) \\ \varphi > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \varphi < 0 \Rightarrow |\cos \varphi| = -\cos \varphi \end{cases} \end{array} \right.$$

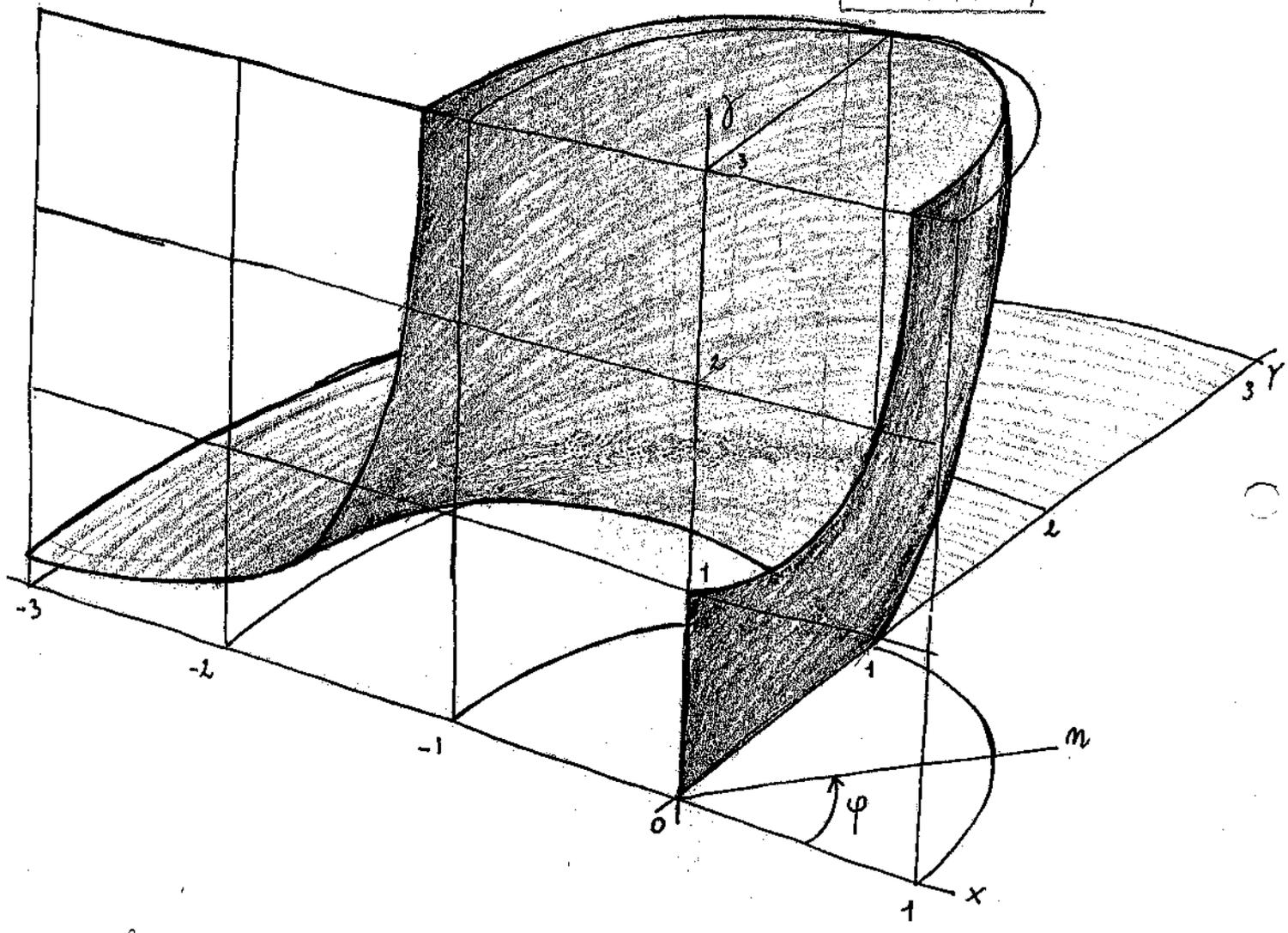
Dunque si conclude che

$$(11.31) \quad \boxed{\gamma = \frac{\cos \varphi}{1-m^2}}$$

Questo è una funzione che può essere rappresentata nelle coordinate polari (φ, m, γ) come nella figure seguente.

11.13. Seconda espressione alternativa per γ . Dalla 11.31 si deduce come le

$$\gamma = \frac{\cos \varphi}{1 - m^2}$$



11.32

$$\begin{cases} 1 - m^2 = \cos \varphi / \gamma \\ m^2 = 1 - \cos \varphi / \gamma \end{cases}$$

Sostituendo le 11.32 nella 5.56 si ha

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{\gamma^2} + 4\beta^2 \left(1 - \frac{\cos \varphi}{\gamma}\right)}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{\gamma^2} + 4\beta^2 \frac{\gamma - \cos \varphi}{\gamma}}} \Rightarrow$$

$$\gamma^2 = \frac{\gamma^2}{\cos^2 \varphi + 4\beta^2 (\gamma^2 - \gamma \cos \varphi)} \Rightarrow \cos^2 \varphi + 4\beta^2 \gamma^2 - 4\beta^2 \gamma \cos \varphi = 1 \Rightarrow$$

$$4\zeta^2\gamma^2 - 4\zeta^2\cos\varphi\gamma - 1 + \cos^2\varphi = 0 \Rightarrow$$

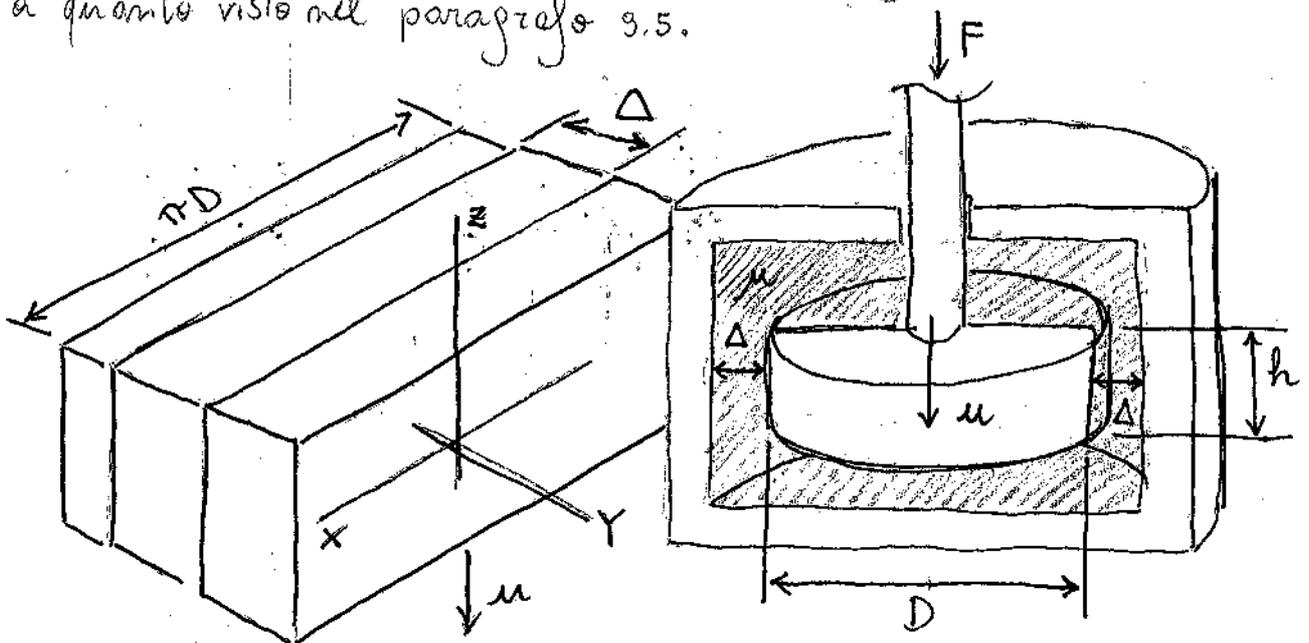
$$4\zeta^2\gamma^2 - 4\zeta^2\cos\varphi\gamma + \sin^2\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\gamma = \frac{4\zeta^2\cos\varphi \pm \sqrt{16\zeta^4\cos^2\varphi + 16\zeta^2\sin^2\varphi}}{8\zeta^2} = \frac{\zeta\cos\varphi \pm \sqrt{\zeta^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}}{2\zeta} \Rightarrow$$

$$11.33) \quad \gamma = \frac{\zeta\cos\varphi + \sqrt{\zeta^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}}{2\zeta}$$

Anche questa espressione di γ può essere rappresentata attraverso un sistema di coordinate cilindriche (φ, ζ, γ) .

11.14. Smorzatore viscoso semplice. In questo paragrafo pervengo ad una espressione del coefficiente di smorzamento nel caso in cui lo smorzatore sia del tipo in figura. Ragionerò in modo analogo a quanto visto nel paragrafo 9.5.



Rafforzando il sistema e applicando le proprietà del Flusso di

Couette, abbiamo che la tensione che il fluido esercita sul pistone è data da

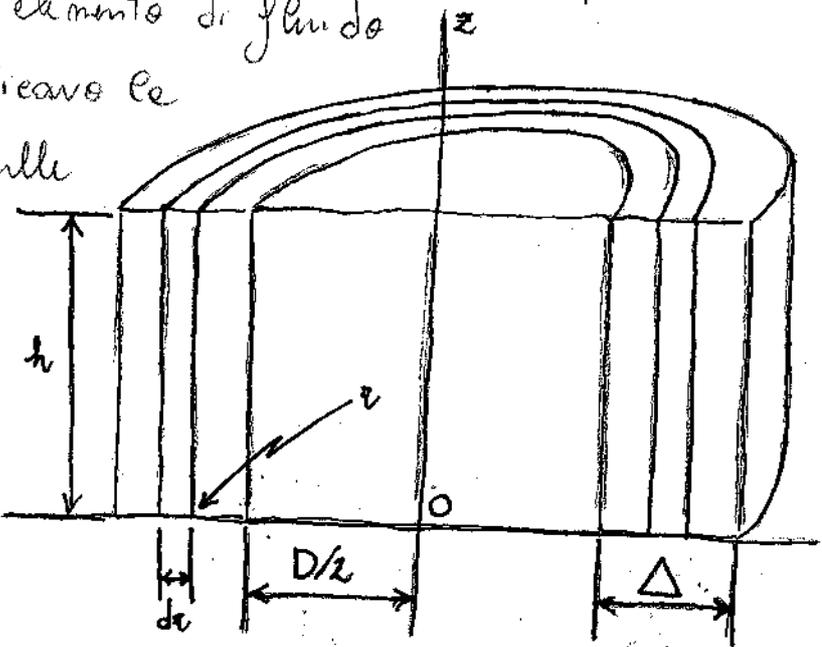
$$(11.34) \tau_{yz} = \frac{\mu u}{\Delta}$$

Dunque la forza resistente esercitata del fluido sul pistone è

$$(11.35) T = \frac{\mu u}{\Delta} h D \pi \Rightarrow \boxed{c = \frac{\mu h D \pi}{\Delta}}$$

Èppure questo procedimento è sbagliato, perché ad un esame più attento si vede che questo flusso non è assimilabile a quello di Couette. Consideriamo allora l'elemento di fluido

indicated in figure. Ricavo la forza viscosa agente sulle superfici laterali.



$$\begin{cases} \tau_{rz}(r) = -\mu \frac{du(r)}{dr} \\ \tau_{rz}(r+dr) = -\mu \frac{du(r+dr)}{dr} \end{cases}$$

↓

$$(11.36) dT = 2\pi r h \left[-\tau_{rz}(r) + \tau_{rz}(r+dr) \right] = 2\pi r h \mu \left[\frac{du(r)}{dr} - \frac{du(r+dr)}{dr} \right]$$

Si ricordi ora che in generale

$$f(x+dx) = f(x) + \frac{df}{dx} dx + o(dx)$$

e dunque in particolare nel nostro caso si ha

$$(11.37) \quad \frac{du}{dr}(r+dr) \cong \frac{du}{dr}(r) + \frac{d^2u}{dr^2}(r)dr$$

Sostituendo le 11.37 nelle 11.36 si ha

$$(11.38) \quad dT = 2\pi r h \mu \left[-\frac{d^2u}{dr^2}(r)dr \right] = -2\pi h \mu \frac{d^2u}{dr^2}(r)r dr$$

L'elemento fluido è spinto verso l'alto dalle pressioni del fluido:

$$p_0 = \frac{F}{\pi(D/2)^2} = \frac{4F}{\pi D^2} \Rightarrow$$

$$(11.39) \quad dN = p_0(2\pi r dr) = \frac{4F}{\pi D^2} 2\pi r dr = \frac{8F\pi r}{\pi D^2} dr = \frac{8Fr}{D^2} dr$$

Dunque il bilancio meccanico porge

$$dT = dN \Leftrightarrow -2\pi h \mu \frac{d^2u}{dr^2}(r)r dr = \frac{4F}{D^2} dr \Leftrightarrow$$

$$-\pi h \mu \frac{d^2u}{dr^2}(r) = \frac{4F}{D^2} \Leftrightarrow \frac{d^2u}{dr^2}(r) \pi h \mu + \frac{4F}{D^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(11.40) \quad \frac{d^2u}{dr^2}(r) = -\frac{4F}{\pi h \mu D^2}$$

Integrando la 11.40 abbiamo

$$(11.41) \quad \frac{du}{dr} = -\frac{4F}{\mu \pi h D^2} r + C_1 \Rightarrow \boxed{u = -\frac{2F}{\mu \pi h D^2} r^2 + C_1 r + C_2}$$

Le condizioni al contorno da imporre sono

$$(11.42) \quad \boxed{u(x=D/2) = -\bar{u} \quad \left| \quad u(x=D/2+\Delta) = 0 \right.}$$

Poiché si ha

$$\begin{cases} u(x=D/2) = -\frac{2F(D/2)^2}{\mu\pi h D^2} + C_1 \frac{D}{2} + C_2 = -\bar{u} \\ u(x=D/2+\Delta) = -\frac{2F(D/2+\Delta)^2}{\mu\pi h D^2} + C_1 \left(\frac{D}{2} + \Delta\right) + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\frac{2FD^2}{\mu\pi h D^2} + C_1 \frac{D}{2} + C_2 = -\bar{u} \\ -\frac{2F}{\mu\pi h D^2} \left(\frac{D^2}{4} + D\Delta + \Delta^2\right) + C_1 \frac{D}{2} + C_1 \Delta + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\frac{FD^2}{2\mu\pi h D^2} + C_1 \frac{D}{2} + C_2 = -\bar{u} \iff -\frac{F}{2\mu\pi h} + \frac{DC_1}{2} + C_2 = -\bar{u} \\ -\frac{2FD^2}{2\mu\pi h D^2} - \frac{2F}{\mu\pi h D^2} (D\Delta + \Delta^2) + \frac{C_1 D}{2} + C_1 \Delta + C_2 = 0 \end{cases}$$

↓

$$(11.42) \quad \begin{cases} -\frac{F}{2\mu\pi h} + \frac{DC_1}{2} + C_2 = -\bar{u} \\ -\frac{F}{\mu\pi h} + \frac{DC_1}{2} + C_2 = \frac{2F(D\Delta + \Delta^2)}{\mu\pi h D^2} - C_1 \Delta \end{cases}$$

Quota impostazione parte a dei calcoli difficoltosi.

Linearizzo la geometria del problema:

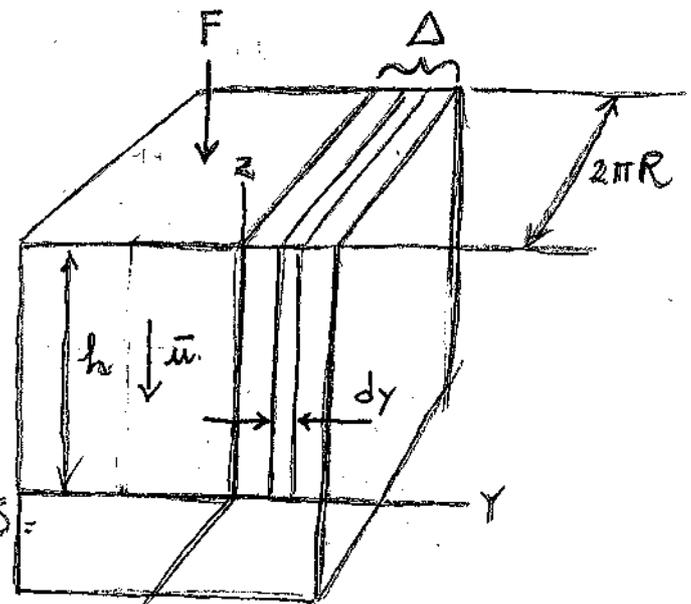
$$\begin{cases} \tau_{yz}(y) = -\mu \frac{du(y)}{dy} \\ \tau_{yz}(y+dy) = -\mu \frac{du(y+dy)}{dy} \end{cases}$$

↓

$$dT = (-\tau_{yz}(y) + \tau_{yz}(y+dy)) S =$$

$$= \left[\mu \frac{du(y)}{dy} - \mu \frac{du(y+dy)}{dy} \right] S =$$

$$= 2\pi R h \mu \left[\frac{du(y)}{dy} - \left(\frac{du(y)}{dy} + \frac{d^2u(y)}{dy^2} dy \right) \right] = 2\pi R h \mu \left(-\frac{d^2u(y)}{dy^2} dy \right) \Rightarrow$$



$$(11.43) \quad dT = -2\pi R h \mu \frac{d^2u(y)}{dy^2} dy$$

$$(11.44) \quad dN = p dy 2\pi R = \frac{F}{\pi R^2} dy 2\pi R = \frac{2 dy F}{R}$$

$$dT = dN \Leftrightarrow -2\pi R h \mu \frac{d^2u}{dy^2} dy = \frac{2 dy F}{R} \Leftrightarrow -\pi R h \mu \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{F}{R} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{F}{R^2 \pi h \mu} \Rightarrow \frac{du}{dy} = -\frac{F}{\pi h \mu R^2} y + C_1 \Rightarrow$$

$$(11.45) \quad \boxed{u = -\frac{F}{2\pi h \mu R^2} y^2 + y C_1 + C_2} \Rightarrow$$

$$u(y=0) = -\bar{u} \Rightarrow \boxed{C_2 = -\bar{u}}$$

$$u(y=\Delta) = -\frac{F \Delta^2}{2\pi h \mu R^2} + \Delta C_1 - \bar{u} = 0 \Rightarrow \Delta C_1 = \bar{u} + \frac{F \Delta^2}{2\pi h \mu R^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{C_1 = \frac{\bar{u}}{\Delta} + \frac{F \Delta}{2\pi h \mu R^2}}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta V}{\Delta t} &= \int_0^{\Delta} 2\pi R dy \mu(y) = 2\pi R \int_0^{\Delta} \left(-\frac{F}{2\pi h \mu R^2} y^2 + C_1 y + C_2 \right) dy = \\ &= 2\pi R \left[-\frac{F}{2\pi h \mu R^2} \frac{y^3}{3} + C_1 \frac{y^2}{2} + C_2 y \right]_0^{\Delta} = 2(\pi R) \left[-\frac{F \Delta^3}{6\pi h \mu R^2} + \frac{C_1 \Delta^2}{2} + C_2 \Delta \right] \end{aligned} \right.$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \bar{u} \pi R^2$$

↓

$$2 \left\{ -\frac{F \Delta^3}{6\pi h \mu R^2} + \frac{\Delta^2}{2} \left(\frac{\bar{u}}{\Delta} + \frac{F \Delta}{2\pi h \mu R^2} \right) - \bar{u} \Delta \right\} = \bar{u} R \Leftrightarrow$$

$$-\frac{F \Delta^3}{3\pi h \mu R^2} + \Delta^2 \left(\frac{\bar{u}}{\Delta} + \frac{F \Delta}{2\pi h \mu R^2} \right) - 2\bar{u} \Delta = \bar{u} R \Leftrightarrow$$

$$-\frac{F \Delta^3}{3\pi h \mu R^2} + \bar{u} \Delta + \frac{F \Delta^3}{2\pi h \mu R^2} - 2\bar{u} \Delta = \bar{u} R \Leftrightarrow$$

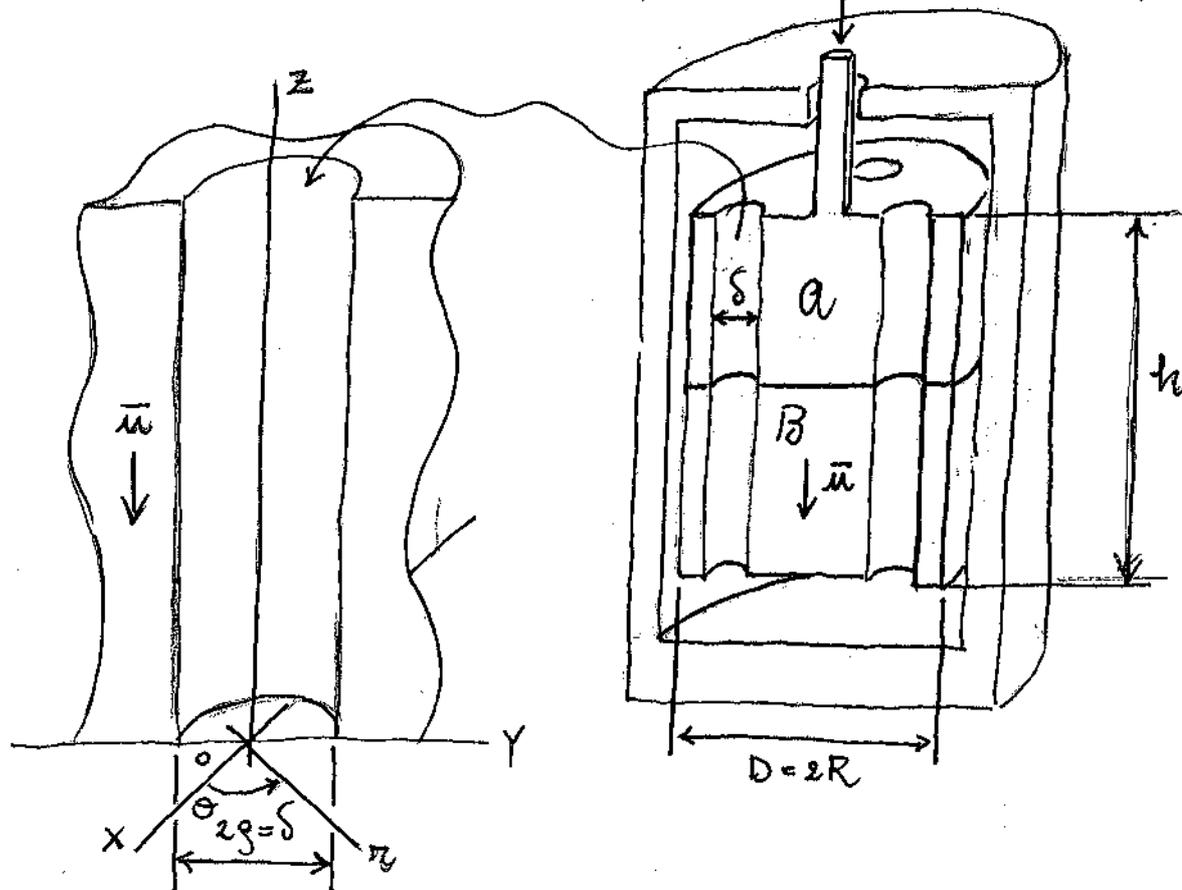
$$\frac{F \Delta^3}{\pi h \mu R^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \bar{u} (R + \Delta) \Leftrightarrow$$

$$F = \frac{6\bar{u} (R + \Delta) \pi h \mu R^2}{\Delta^3} = 3\pi \mu h \frac{R^3}{4} \frac{(2R + \Delta)}{R \Delta^3} \bar{u} \Rightarrow$$

$$\text{11.46} \quad F = \frac{3\pi \mu h D^3}{4\Delta^3} \left(1 + \frac{2\Delta}{D} \right) \bar{u} \Rightarrow$$

$$\text{11.47} \quad \boxed{c = \frac{3\pi \mu h D^3}{4\Delta^3} \left(1 + \frac{2\Delta}{D} \right)}$$

11.45. Smorzatore viscoso regolabile, con configurazione a condotti ad assi coincidenti. In questo caso il pistone presente



n condotti - disposti con simmetria assiale - attraverso i quali scorre il fluido. Si assume in questo caso che il fluido non scorre intorno al pistone, e comunque se ne trascuri l'effetto. Si dimostri che per il fluido all'interno del generico condotto la velocità è

$$11.48 \quad u_z(r) = \frac{r^2}{4\mu} \frac{dP}{dz} + C_1 \ln r + C_2$$

Affinché la 11.48 abbia significato fisico per $r=0$, segue che deve essere $C_1 = 0$.

Impongo poi le c.c. $u = -\bar{u} p^n$ $r = g$:

$$u(g) = \frac{g^2}{4\mu} \frac{dP}{dz} + C_2 = -\bar{u} \Rightarrow C_2 = -\bar{u} - \frac{g^2}{4\mu} \frac{dP}{dz} \Rightarrow$$

$$(11.49) \quad u(r) = \frac{r^2}{4\mu} \frac{dP}{dz} - \bar{u} - \frac{g^2}{4\mu} \frac{dP}{dz} = \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} (r^2 - g^2) - \bar{u}$$

Il volume di fluido che transita al secondo attraverso il generico condotto è

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v}{\Delta t} &= \int_0^{2\pi} \int_0^g u(r) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^g \left[\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} (r^2 - g^2) - \bar{u} \right] r dr d\theta = \\ &= 2\pi \int_0^g \left[\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} (r^2 - g^2) - \bar{u} \right] r dr = 2\pi \int_0^g \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} (r^2 - g^2) r dr - \\ &- \int_0^g 2\pi \bar{u} r dr = \frac{\pi}{2\mu} \frac{dP}{dz} \int_0^g (r^3 - r g^2) dr - 2\pi \bar{u} \int_0^g r dr = \\ &= \frac{\pi}{2\mu} \frac{dP}{dz} \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^2 g^2}{2} \right) \Big|_0^g - \frac{2\pi \bar{u} r^2}{2} \Big|_0^g = \frac{\pi}{2\mu} \frac{dP}{dz} \left(\frac{g^4}{4} - \frac{g^4}{2} \right) - \frac{2\pi \bar{u} g^2}{2} = \\ &= \frac{\pi}{2\mu} \frac{dP}{dz} \left(-\frac{g^4}{4} \right) - \frac{2\pi \bar{u} g^2}{2} = -\frac{\pi}{2\mu} \frac{dP}{dz} \frac{g^4}{4} - \pi \bar{u} g^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(11.50) \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} = - \left(\frac{\pi}{8\mu} \frac{dP}{dz} g^4 + \pi \bar{u} g^2 \right) = -\pi g^2 \left(\frac{1}{8\mu} \frac{dP}{dz} g^2 + \bar{u} \right)$$

Se i condotti sono n , allora il volume che li attraversa al secondo è pari a

$$11.51) \frac{\Delta V}{\Delta t} = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = -m \pi g^2 \left(\frac{1}{8\mu} \frac{dP}{dz} g^2 + \bar{u} \right)$$

D'altra parte deve anche avvenire

$$11.52) \frac{\Delta V}{\Delta t} = \bar{u} \pi R^2$$

Confrontando si ha

$$-m \pi g^2 \left(\frac{1}{8\mu} \frac{dP}{dz} g^2 + \bar{u} \right) = \bar{u} \pi R^2 \Rightarrow$$

$$-\frac{m \pi g^2}{8\mu} \frac{dP}{dz} g^2 - m \pi g^2 \bar{u} - \bar{u} \pi R^2 = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{m \pi g^4}{8\mu} \frac{dP}{dz} = (m g^2 + R^2) \pi \bar{u} \Rightarrow$$

$$11.53) \frac{dP}{dz} = - \frac{(m g^2 + R^2) \pi \bar{u} 8\mu}{m \pi g^4} = - \frac{(m g^2 + R^2) \bar{u} \mu 8}{m g^4}$$

Dunque per la pressione si ha

$$11.54) p = \int \frac{dP}{dz} dz = - \frac{(m g^2 + R^2) \bar{u} \mu 8}{m g^4} z + C_1$$

Imponendo $p(z=h) = 0$ abbiamo

$$11.55) C_1 = \frac{(m g^2 + R^2) \bar{u} \mu 8}{m g^4} h \Rightarrow$$

$$11.56) p = (h-z) \frac{(m g^2 + R^2) \bar{u} \mu 8}{m g^4}$$

Dovendo poi avere $p(z=0) = F/\pi R^2$, allora si ha

$$\frac{F}{\pi R^2} = \frac{(m\delta^2 + R^2) \bar{u} \mu \delta h}{m \delta^4} \Rightarrow F = \frac{8 \bar{u} \mu h \pi R^2 (m\delta^2 + R^2)}{m \delta^4} \Rightarrow$$

$$\text{11.57) } c = \frac{8 \pi \mu h R^2 (m\delta^2 + R^2)}{m \delta^4}$$

In realtà questo valore non risulta esatto. Questo perché le portate 11.50 e valutate rispetto il sistema di riferimento solidale al telaio, ma rispetto al pistone si deve aggiungere $\bar{u} \pi \delta^2$, dunque si ha

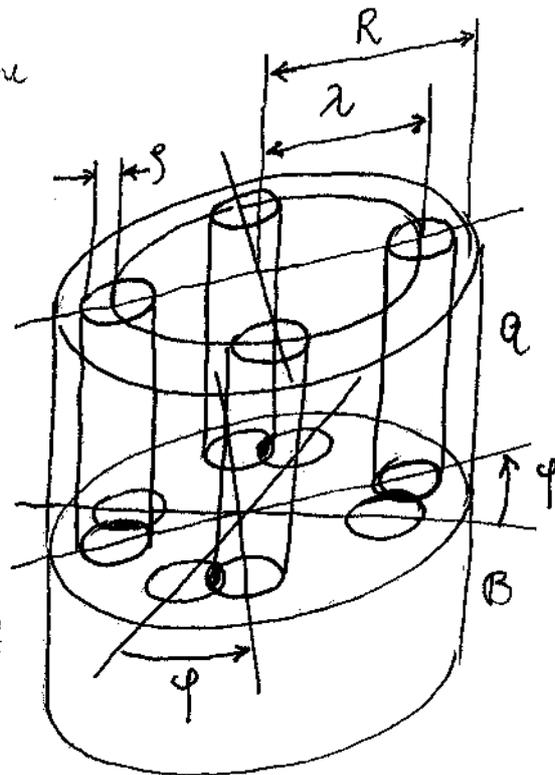
$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\pi \delta^4 \frac{1}{8\mu} \frac{dp}{dz} \Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta t} = -\frac{m \pi \delta^4}{8\mu} \frac{dp}{dz} \Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\frac{8 \bar{u} \mu R^2}{m \delta^4} \Rightarrow$$

$$p = \frac{(h-z) R^2 \bar{u} \mu \delta}{m \delta^4} \Rightarrow F = \frac{8 \bar{u} \mu h \pi R^4}{m \delta^4} \Rightarrow$$

$$\text{11.58) } c = \frac{8 \pi \mu h R^4}{m \delta^4} = \frac{8 \pi \mu h D^4}{m \delta^4}$$

11.16. Smorzatore viscoso regolabile, configurazione e condotti disassati. Si suppone ora di imporre una rotazione relative ai cilindri A, B intorno al comune asse di simmetria, di un angolo φ .

In questo caso si assume che il fluido transiti attraverso dei condotti di sezione circolare le cui aree sono pari a quella dei fusi circolari indicati in figura.



Per quanto visto nell'appendice VII l'area dei fusi è

$$11.59) A = 2r^2 \left[\arccos\left(\frac{\lambda\varphi}{2r}\right) - \frac{R\varphi}{r^2} \sqrt{r^2 - \frac{R^2\varphi^2}{4}} \right]$$

avendo usato le formule 11 delle appendice suddette. Dunque per il raggio r_e del cerchio con area A si ha $\pi r_e^2 = A$, ovvero

$$11.60) r_e = r \sqrt{\frac{2}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{\lambda\varphi}{2r}\right) - \frac{R\varphi}{r^2} \sqrt{r^2 - \frac{R^2\varphi^2}{4}} \right]}$$

Il coefficiente di smorzamento è dunque - in base alla 11.58 - dato da

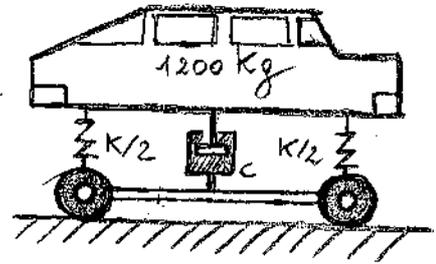
$$11.61) c = \frac{8\pi\mu h R^4}{m r_e^4} \iff$$

$$11.62) c = \frac{2\pi^3 \mu h R^4}{m r_e^4 \left[\arccos\left(\frac{\lambda\varphi}{2r}\right) - \frac{R\varphi}{r^2} \sqrt{r^2 - \frac{R^2\varphi^2}{4}} \right]^2}, \quad \boxed{R\varphi < 2r}$$

Capitolo 12. Applicazioni sull'isolamento delle vibrazioni

12.1. Ammortizzatore. Si ha un veicolo di massa $m = 1200 \text{ kg}$ la cui vibrazione smorzata abbia un periodo $T_s = 2 \text{ s}$. Si vuole un ammortizzatore tale che l'ampiezza delle oscillazioni si riduca di $1/20$ al 2° ciclo.

Perché si parla di oscillazioni smorzate periodiche, allora deve essere $\zeta < 1$, dunque per quanto visto nel paragrafo 3.6 si ha la legge oraria



$$(12.1) \quad x = e^{-\omega_m \zeta t} C \sin(\omega_d t + \varphi)$$

e dunque le curve di estinzione è data da

$$(12.2) \quad \begin{cases} x = \bar{\Gamma} e^{-\omega_m \zeta t} C \\ C = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + \omega_m \zeta x_0)^2}{\omega_d^2}} \end{cases}$$

Impongo che l'ampiezza delle oscillazioni si riduca di $1/20$ al 2° ciclo:

$$\frac{x(2T_s)}{x(0)} = \frac{x(4 \text{ s})}{x(0)} = \frac{e^{-\omega_m \zeta 4 \text{ s}}}{1} = \frac{1}{20} \Rightarrow \boxed{e^{-\omega_m \zeta 4 \text{ s}} = 20} \quad (12.3)$$

Si consideri poi che

$$\begin{cases} \omega_D = \omega_m \sqrt{1 - \zeta^2} \\ \omega_D T_D = 2\pi \Rightarrow \omega_D = 2\pi / T_D \end{cases} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_D} = \omega_m \sqrt{1 - \zeta^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_m \sqrt{1 - \zeta^2} = \frac{2\pi}{2s} \Rightarrow \boxed{\omega_m \sqrt{1 - \zeta^2} = \pi / s} \quad (12.4)$$

Dunque abbiamo trovato le condizioni

$$(12.5) \begin{cases} e^{\omega_m \zeta 4s} = 20 \\ \omega_m \sqrt{1 - \zeta^2} = \pi / s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_m \zeta 4s = \ln 20 \\ \omega_m = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2} s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_m \zeta = \frac{\ln 20}{4s} \\ \omega_m = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2} s} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \omega_m \zeta = 0,748 / s \\ \omega_m = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2} s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_m = 0,748 / \zeta s \\ \omega_m = \frac{\pi}{s \sqrt{1 - \zeta^2}} \end{cases} \Rightarrow \frac{0,748}{\zeta s} = \frac{\pi}{s \sqrt{1 - \zeta^2}} \Rightarrow$$

$$0,748 \sqrt{1 - \zeta^2} = \pi \zeta \Rightarrow \frac{0,748}{\pi} \sqrt{1 - \zeta^2} = \zeta \Rightarrow 5,66 \cdot 10^{-2} (1 - \zeta^2) = \zeta^2 \Rightarrow$$

$$\zeta^2 (1 + 5,66 \cdot 10^{-2}) = 5,66 \cdot 10^{-2} \Rightarrow 1,056 \zeta^2 = 5,66 \cdot 10^{-2} \Rightarrow \zeta^2 = \frac{5,66 \cdot 10^{-2}}{1,056} \Rightarrow$$

$$(12.6) \quad \zeta = 0,23$$

Ricavo ora la pulsazione naturale, e dunque la rigidità, utilizzando la 12.4:

$$(12.7) \quad \omega_m = \frac{\pi}{s \sqrt{1 - \zeta^2}} = 3,22 \frac{\text{rad}}{s} \Rightarrow$$

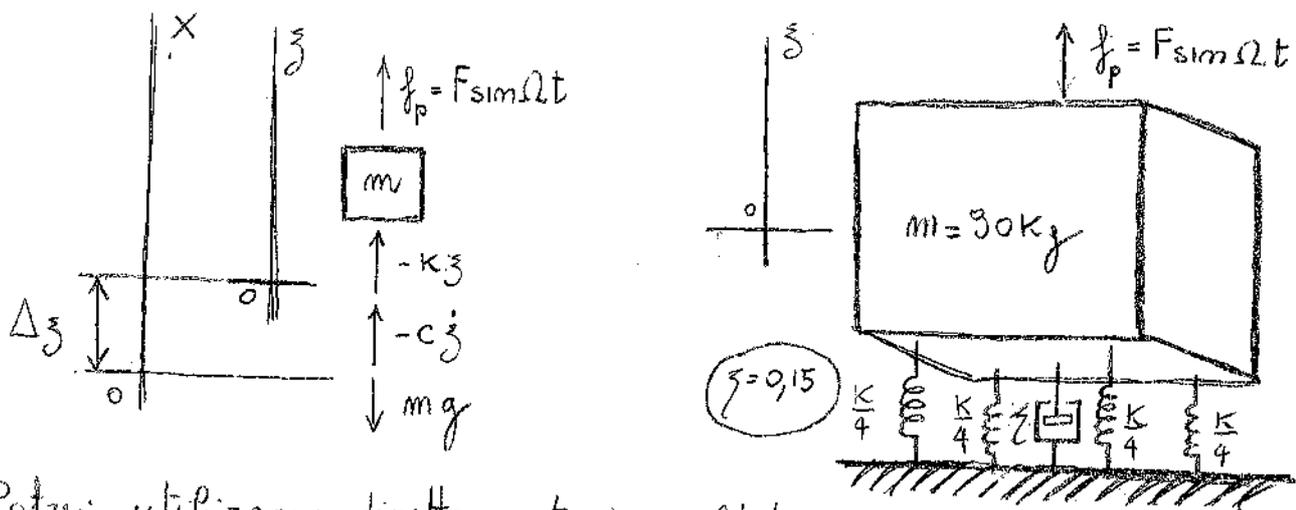
$$(12.8) \quad k = m \omega_m^2 = 1200 \text{ kg} \frac{10,42}{s^2} = 12505 \text{ Kg} \frac{m}{s^2 m} = 12,505 \cdot 10^3 \frac{N}{m}$$

Ricavo anche il coefficiente di smorzamento e il coefficiente di smorzamento critico:

$$12.9) \quad c = \zeta 2\sqrt{km} = 0,23 \cdot 2 \cdot \sqrt{12,505 \cdot 10^3 \frac{N}{m} \cdot 1200 \text{ kg}} = 1781,92 \sqrt{\text{Kg}^2/\text{s}^2} \approx \\ = 1782 \frac{\text{Kg}}{\text{s}} = 1782 \frac{\text{Kg m}}{\text{s m}} = 1782 \text{ N/m/s}$$

$$12.10) \quad c_0 = c/\zeta = 1782 \frac{\text{N s}}{\text{m}} / 0,23 = 7747,51 \frac{\text{N s}}{\text{m}}$$

12.2. Impianto frigorifero. Quattro molle uguali di rigidità complessiva k collegano al basamento un frigorifero di massa $m = 90 \text{ kg}$. Il motore presenta una velocità di 500 g/m . Sia $\zeta = 0,15$. Si chiede la rigidità delle molle affinché al basamento venga trasmessa una forza pari a $1/10$ di quella forzante.



Potrei utilizzare direttamente i risultati del paragrafo 6.2, ma provo a ripercorrere le teorie. L'equilibrio delle forze poggia:

$$f_p - kz - c\dot{z} - mg - m\ddot{z} = 0 \Rightarrow$$

$$12.11) \quad m\ddot{z} + c\dot{z} + \kappa z - mg = f_p$$

Lo spostamento dovuto alla sola forza peso è dato da

$$\Delta z \kappa = -mg \Rightarrow \Delta z = -mg/\kappa$$

Introdotta allora una ascisse x tale che $x = z + \Delta z$, allora

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa(x - \Delta z) - mg = f_p \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa(x + \frac{mg}{\kappa}) - mg = f_p \Rightarrow$$

$$12.12) \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = f_p$$

Essendo $\zeta < 1$ sappiamo che la soluzione a regime è

$$12.13) \quad \begin{cases} x = X \sin(\Omega t - \varphi) \\ \dot{x} = X \Omega \cos(\Omega t - \varphi) = X \Omega \sin(\Omega t - \varphi + \pi/2) \\ \ddot{x} = -X \Omega^2 \sin(\Omega t - \varphi) \end{cases}$$

Restano definite poi le forze agenti sul sistema

$$12.14) \quad \begin{cases} f_p = F \sin \Omega t & \longleftarrow \text{forzante} \\ f_{el} = -\kappa x = -\kappa X \sin(\Omega t - \varphi) & \longleftarrow \text{forza elastica} \\ f_{vis} = -c\dot{x} = -cX \Omega \sin(\Omega t - \varphi + \pi/2) & \longleftarrow \text{forze viscoso} \\ f_{in} = -m\ddot{x} = mX \Omega^2 \sin(\Omega t - \varphi) & \longleftarrow \text{forze d'inerzia} \end{cases}$$

Associamo ora alle grandezze qui discusse dei numeri complessi in cui rappresentiamo la parte immaginaria, come discusso nel par. 5.3. Usiamo le seguenti regole

$$x = X \sin(\Omega t - \varphi) \longleftrightarrow \bar{X} = X [\cos(\Omega t - \varphi) + j \sin(\Omega t - \varphi)] = X e^{j(\Omega t - \varphi)}$$

Derivando si ha anche

$$\begin{aligned} \dot{x} &\longleftrightarrow D\bar{X} = X j\Omega e^{j(\Omega t - \varphi)} = X\Omega [j \cos(\Omega t - \varphi) - \sin(\Omega t - \varphi)] = \\ &= -X\Omega [\sin(\Omega t - \varphi) - j \cos(\Omega t - \varphi)] = -X\Omega [-\cos(\Omega t - \varphi + \pi/2) - \\ &- j \sin(\Omega t - \varphi + \pi/2)] = X\Omega [\cos(\Omega t - \varphi + \pi/2) - j \sin(\Omega t - \varphi + \pi/2)] \end{aligned}$$

Dunque la derivazione comporta una moltiplicazione del numero complesso associato per $(j\Omega)$, la quale a sua volta coincide con una rotazione antioraria di $\pi/2$ del vettore sul piano complesso e una moltiplicazione della sua lunghezza per Ω .
Si ha dunque per le grandezze cinematiche 12.13:

$$\textcircled{12.15} \begin{cases} x = X \sin(\Omega t - \varphi) \longleftrightarrow \bar{X} = X e^{j(\Omega t - \varphi)} = X [\cos(\Omega t - \varphi) + j \sin(\Omega t - \varphi)] \\ \dot{x} = \Omega X \cos(\Omega t - \varphi) \longleftrightarrow \bar{X} j\Omega = X\Omega e^{j(\Omega t - \varphi + \pi/2)} \\ \ddot{x} = -\Omega^2 X \sin(\Omega t - \varphi) \longleftrightarrow \bar{X} j\Omega j\Omega = X\Omega^2 e^{j(\Omega t - \varphi + \pi)} \end{cases}$$

Per le grandezze dinamiche 12.14 si ha allora

$$12.16 \quad \begin{cases} f_p = F \sin \Omega t & \longleftrightarrow \bar{F}_p = F e^{j\Omega t} = F [\cos(\Omega t) + j \sin(\Omega t)] \\ f_e = -\kappa X & \longleftrightarrow -\kappa \bar{X} = -\kappa X e^{j(\Omega t - \varphi)} \\ f_d = -c \dot{X} & \longleftrightarrow -c \bar{X} j \Omega = -c X \Omega e^{j(\Omega t - \varphi + \pi/2)} \\ f_{im} = -m \ddot{X} & \longleftrightarrow -m \bar{X} j \Omega j \Omega = -m \Omega^2 X e^{j(\Omega t - \varphi + \pi)} \end{cases}$$

La proiezione ^{su X} delle forze trasmesse si scrive

$$12.17 \quad f_t = -f_e - f_d = \kappa X + c \dot{X} = \kappa X \sin(\Omega t - \varphi) + c X \Omega \sin(\Omega t - \varphi + \pi/2)$$

Il suo minimo complesso associato ha modulo

$$12.18 \quad F_t = F C_t = F \frac{\sqrt{1 + (2\zeta m)^2}}{\sqrt{(1 - m^2)^2 + (2\zeta m)^2}}$$

Si deve imporre che sia $F_t / F = 1/10$ ovvero

$$C_t = 0,1 \iff \frac{\sqrt{1 + (2\zeta m)^2}}{\sqrt{(1 - m^2)^2 + (2\zeta m)^2}} = 0,1 \iff$$

$$12.19 \quad m = 4,1$$

Ricavo allora la rigidità

$$\begin{aligned} m = \frac{\Omega}{\omega_m} = 4,1 & \iff \frac{500 \cdot 2\pi/60}{\omega_m} = 4,1 \iff \omega_m = \frac{500 \cdot 2\pi/60}{4,1} = \\ & = \frac{12,77}{s} \iff \kappa = \frac{m}{s^2} (12,77)^2 = \frac{30 \text{ kg}}{s^2} \cdot 163,09 = 14,67 \cdot 10^3 \text{ kg} \frac{m}{s^2} \frac{1}{m} \end{aligned}$$

Dunque ho trovato

$$12.20) \quad K = 14,678 \cdot 10^3 \frac{N}{m}$$

Provo ora a tracciare il diagramma sul piano complesso il quale descrive l'equilibrio delle forze. Ricavo a tale scopo il valore di X :

$$12.21) \quad X = \frac{F}{K \sqrt{(1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2}} = F \frac{4,29 \cdot 10^{-6} m}{N}$$

Assegnando ad F il valore di $1000 N$ si ha

$$12.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{4,29 \cdot 10^{-3} m N}{N} \\ X K = 4,29 \cdot 10^{-3} \cdot 14,678 \cdot 10^3 \frac{N}{m} = 62,96 N \\ m X \Omega^2 = 4,29 \cdot 10^{-3} m \left(\frac{52,35}{s} \right)^2 90 \cdot Kg = 1058,11 \frac{Kg \cdot m}{s^2} = 1058,11 N \\ c X \Omega = \zeta 2 \sqrt{K m} X \Omega = 77,43 \sqrt{\frac{N \cdot Kg}{m}} \frac{m}{s} = 77,43 \sqrt{\frac{N \cdot N}{m^2}} \frac{m}{s} = 77,43 N \\ \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{2 \zeta m}{1-m^2} \right) = \tan^{-1} \left(-3,7 \cdot 10^2 \right) \approx 85,5 \end{array} \right.$$

Si ha inoltre

$$12.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega = 52,35 \text{ r/s} \\ c = 172,4 \text{ N s/m} \end{array} \right.$$

Traccio il diagramma introducendo una opportuna scala di rappresentazione σ_F . Non riesco...

12.3. Decremento logaritmico. Si riprenda il problema del paragrafo 12.1. Esso può essere agevolmente risolto utilizzando quanto esposto nel paragrafo 3.7 a proposito del DECREMENTO LOGARITMICO. Utilizzando le 3.39, 3.40 e 3.42

$$12.24 \quad \begin{cases} \vartheta = \left(\ln \frac{x(t)}{x(t+mT_0)} \right) \frac{1}{m} \\ \vartheta = \omega_m \zeta T_0 \\ \vartheta = 2\pi \zeta / \sqrt{1-\zeta^2} \end{cases}$$

Nel nostro caso si ha $m=2$ e $x(t)/x(t+2T_0) = 1/20$; dunque

$$12.25 \quad \vartheta = \frac{\ln 20}{2} = 1,49$$

Ricavo ζ sostituendo le 12.25 nelle 3^e delle 12.24:

$$1,49 = \frac{2\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \implies \frac{1,49}{2\pi} = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \implies$$

$$12.26 \quad \zeta = 0,23$$

Ricavo ora le pulsazioni e le rigidità usando le 2^e delle 12.24:

$$1,49 = \omega_m \cdot 0,23 \cdot 2 \implies \boxed{\omega_m = 1,49 / 0,46 = 3,23 / s} \implies$$

$$12.27 \quad k = m \omega_m^2 = 12519 \text{ N/m}$$

12.4. Ameore sull'impianto frigorifero. Per il sistema del paragrafo 12.2 si calcoli F_t e X se $X_s = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

Si ha - come noto - che la deformazione dinamica vale

$$12.28) X = X_s \gamma = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \frac{1}{\sqrt{(1-m^2)^2 + (2\zeta m)^2}} = 3,153 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Sappiamo poi che $F = k X_s$ e dunque

$$12.29) F = 14,678 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 73,39 \text{ N}$$

Il coefficiente di trasmissibilità vale poi (vedi 6.15):

$$12.30) C_t = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta m)^2}}{\sqrt{(1-m^2)^2 + (2\zeta m)^2}} = 0,099 \approx 0,1$$

Dunque l'ampiezza delle forze trasmesse è

$$12.31) F_t = F C_t = 7,339 \text{ N}$$

12.5. Molle per l'impianto frigorifero. Si discute in queste sedi il dimensionamento delle molle per il sistema dei paragrafi 12.2, 12.4.

Avendosi 4 molle in parallelo, la rigidità di ciascuna è $k/4$, ovvio

$$12.32) \tilde{K} = \frac{K}{4} = \frac{14678 \text{ N}}{4 \text{ m}} = 3669,5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Utilizzando per le rigidezze l'espressione ricavate nel paragrafo 7.8, si ha il vincolo

$$12.33) \frac{\tau^4}{4R^3 \left[m \left(\frac{2 \sin^2 \alpha}{E} + \frac{\cos^2 \alpha}{G} \right) \right]} = 3669,5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

dove si è trascurate le presenze del 2° addendo al denominatore, che è dovuto al tratto rettilineo finale eventuale. Si ammetta che

$$12.34) \begin{cases} G = 81400 \text{ N/mm}^2 = 81,4 \cdot 10^9 \text{ Pa} \\ E = 2(m+1)G/m = \frac{2(10/3+1)G}{10/3} = 2,6G = 211640 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{cases}$$

$(211,64 \cdot 10^9 \text{ Pa})$

Se poi - per ragioni di ingombro - deve essere

$$12.35) R = 25 \text{ mm} = 0,025 \text{ m}$$

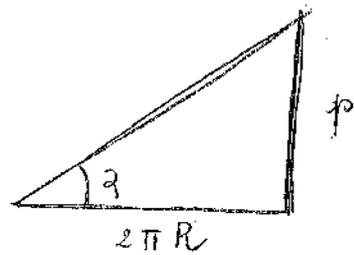
allora si ha

$$3669,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} = \frac{\tau^4 \text{ N/mm}^2}{4 \cdot (0,025)^3 \text{ m}^3 \left[m \left(\frac{2 \sin^2 \alpha}{211,64 \cdot 10^9} + \frac{\cos^2 \alpha}{81,4 \cdot 10^9} \right) \right]} \iff$$

$$12.36) \tau^4 = 0,2293 \text{ m}^3 \text{ m} \left(\frac{2 \sin^2 \alpha}{211,64 \cdot 10^9} + \frac{\cos^2 \alpha}{81,4 \cdot 10^9} \right)$$

Calcolo l'altezza delle molle indeformate:

$$\begin{cases} H = m p \\ p = \tan \alpha \cdot 2\pi R \end{cases} \Rightarrow H = 2\pi R m \tan \alpha \Rightarrow$$



$$12.37) H = 0,157 m \tan \alpha \text{ m}$$

La deformazione dovuta al peso è data da

$$12.38) \tilde{K} \Delta H = \frac{m}{4} g \Rightarrow \Delta H = \frac{882,9 \text{ N}}{4 \tilde{K}} \approx 6 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 60 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Considerando anche la deformazione dinamica in 12.28 si ha

$$H > \Delta H + X = 60 \cdot 10^{-3} \text{ m} + 0,31 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 60,31 \cdot 10^{-3} \text{ m} \iff$$

$$12.39) 0,157 m \tan \alpha \stackrel{\text{m}}{>} 60,31 \cdot 10^{-3} \text{ m} \iff \boxed{m \tan \alpha > 0,38 \text{ m}}$$

Altre condizione da imporre è quella sulla tensione tangenziale ammissibile. Per questo fine si recuperi la simbologia del paragrafo 7.8. L'equilibrio alle traslazioni porge

$$\begin{aligned} 12.40) -f \hat{e}_3 + T_x \hat{e}_1 + T_y \hat{e}_2 + N \hat{e}_3 &= 0 \iff -f \hat{e}_3 + \frac{T_x p \sin \theta}{2\pi \sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \hat{e}_1 - \\ & - \frac{p \cos \theta T_x}{2\pi \sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \hat{e}_2 + \frac{R T_x}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \hat{e}_3 + T_y \cos \theta \hat{e}_1 + T_y \sin \theta \hat{e}_2 - \\ & - \frac{NR \sin \theta}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \hat{e}_1 + \frac{NR \cos \theta}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \hat{e}_2 + \frac{Np}{2\pi \sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} \hat{e}_3 = 0 \end{aligned}$$

Si considero ora che

$$p = \tan \alpha \cdot 2\pi R \Rightarrow \sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2} = \sqrt{R^2 + \frac{\tan^2 \alpha \cdot 4\pi^2 R^2}{4\pi^2}} = R \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} =$$

$$= R \sqrt{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{R}{\cos \alpha}$$

Dunque si ha

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{p \sin \theta}{2\pi \sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} &= \frac{p \sin \theta \cos \alpha}{2\pi R} = \frac{\tan \alpha \cdot 2\pi R \sin \theta \cos \alpha}{2\pi R} = \sin \theta \sin \alpha \\ \frac{p \cos \theta}{2\pi \sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} &= \frac{p \cos \theta \cos \alpha}{2\pi R} = \frac{2\pi R \tan \alpha \cos \theta \cos \alpha}{2\pi R} = \cos \theta \sin \alpha \\ \frac{R}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} &= \frac{R \cos \alpha}{R} = \cos \alpha \\ \frac{R \sin \theta}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} &= \sin \theta \cos \alpha \\ \frac{R \cos \theta}{\sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} &= \frac{R \cos \theta \cos \alpha}{R} = \cos \theta \cos \alpha \\ \frac{p}{2\pi \sqrt{R^2 + p^2/4\pi^2}} &= \frac{2\pi R \tan \alpha \cos \alpha}{2\pi R} = \sin \alpha \end{aligned} \right.$$

Allora le 12.40 si scrive

$$\begin{aligned}
 & -f \hat{E}_3 + T_x \sin \theta \sin \alpha \hat{E}_1 - T_x \cos \theta \sin \alpha \hat{E}_2 + \cos \alpha T_x \hat{E}_3 + \\
 & + T_y \cos \theta \hat{E}_1 + T_y \sin \theta \hat{E}_2 - \sin \theta \cos \alpha N \hat{E}_1 + \cos \theta \cos \alpha N \hat{E}_2 + \\
 & + N \sin \alpha \hat{E}_3 = 0 \implies
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (T_x \sin \theta \sin \alpha + T_y \cos \theta - \sin \theta \cos \alpha N) \hat{E}_1 + (-T_x \cos \theta \sin \alpha + T_y \sin \theta + \\
 & + \cos \theta \cos \alpha N) \hat{E}_2 + (\cos \alpha T_x + \sin \alpha N - f) \hat{E}_3 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 T_x \sin \theta \sin \alpha + T_y \cos \theta - \sin \theta \cos \alpha N = 0 \\
 -T_x \cos \theta \sin \alpha + T_y \sin \theta + \cos \theta \cos \alpha N = 0 \\
 T_x \cos \alpha + \sin \alpha N = f
 \end{cases}$$

$$T_x = -\frac{\sin \alpha N}{\cos \alpha} + \frac{f}{\cos \alpha}$$

$$\left(-\frac{\sin \alpha N}{\cos \alpha} + \frac{f}{\cos \alpha} \right) \sin \theta \sin \alpha + T_y \cos \theta - \sin \theta \cos \alpha N = 0 \implies$$

$$-\frac{\sin \alpha \sin \theta \sin \alpha N}{\cos \alpha} + \frac{f \sin \theta \sin \alpha}{\cos \alpha} + T_y \cos \theta - \sin \theta \cos \alpha N = 0 \implies$$

$$\left(-\frac{\sin^2 \alpha \sin \theta}{\cos \alpha} - \sin \theta \cos \alpha \right) N + \frac{f \sin \theta \sin \alpha}{\cos \alpha} + T_y \cos \theta = 0 \implies$$

$$-\frac{\sin^2 \alpha \sin \theta - \sin \theta \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} N + \frac{f \sin \theta \sin \alpha}{\cos \alpha} + T_y \cos \theta = 0 \implies$$

$$-\frac{\sin \theta N}{\cos \alpha} + \frac{f \sin \theta \sin \alpha}{\cos \alpha} + T_y \cos \theta = 0 \implies$$

$$\frac{\sin \theta N}{\cos \alpha} = \frac{f \sin \theta \sin \alpha}{\cos \alpha} + T_y \cos \theta \implies$$

$$N = f \frac{\sin \theta \sin \alpha}{\sin \theta} + T_y \frac{\cos \theta \cos \alpha}{\sin \theta} = f \sin \alpha + T_y \frac{\cos \theta \cos \alpha}{\sin \theta} \Rightarrow$$

$$T_x = - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \left(f \sin \alpha + T_y \frac{\cos \theta \cos \alpha}{\sin \theta} \right) + \frac{f}{\cos \alpha} =$$

$$= - \frac{f \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} T_y \frac{\cos \theta \cos \alpha}{\sin \theta} + \frac{f}{\cos \alpha} = f \left(- \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} \right) -$$

$$- \frac{\sin \alpha \cos \theta}{\sin \theta} T_y = f \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha \cos \theta}{\sin \theta} T_y = f \cos \alpha - \frac{\sin \alpha \cos \theta}{\sin \theta} T_y \Rightarrow$$

$$- \left(f \cos \alpha - \frac{\sin \alpha \cos \theta}{\sin \theta} T_y \right) \cos \theta \sin \alpha + T_y \sin \theta + \cos \theta \cos \alpha \left(f \sin \alpha + \right.$$

$$\left. + T_y \frac{\cos \theta \cos \alpha}{\sin \theta} \right) = 0 \Rightarrow - f \sin \alpha \cos \alpha \cos \theta + \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \theta}{\sin \theta} T_y + T_y \sin \theta +$$

$$+ f \sin \alpha \cos \alpha \cos \theta + T_y \frac{\cos^2 \theta \cos^2 \alpha}{\sin \theta} = 0 \Rightarrow T_y \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + T_y \sin \theta = 0 \Rightarrow$$

$$(12.41) \begin{cases} T_y = 0 \\ T_x = f \cos \alpha \Rightarrow r = \frac{f \cos \alpha}{\pi r^2} \\ N = f \sin \alpha \end{cases}$$

Nel caso in esame si ha $f = f_e - mg = -\tilde{k}x - mg$ o v n e

$$f = -\tilde{k}x \sin(\Omega t - \varphi) - 882,9 \text{ N} = -3669,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} 3,153 \cdot 10^{-4} \text{ m} \sin(\Omega t -$$

$$- \varphi) - 882,9 \text{ N} = -11569,93 \cdot 10^{-4} \text{ N} \sin(\Omega t - \varphi) - 882,9 \text{ N} =$$

$$= -1,1569 \text{ N} \sin(\Omega t - \varphi) - 882,9 \text{ N}$$

Sostituendo nelle 12.41 si ha:

$$12.42 \quad \begin{cases} T_y = 0 \\ T_x = [-1,15 N \sin(\Omega t - \varphi) - 882,9 N] \cos \alpha \\ N = [-1,15 N \sin(\Omega t - \varphi) - 882,9 N] \sin \alpha \end{cases} \quad \text{Newton}$$

Dunque la massima tensione tangenziale agente sulle sezioni del fondello delle molle è

$$12.43 \quad \tau_{\text{MAX}} = \frac{(-1,15 + 882,9) \cos \alpha}{\pi r^2} N = \frac{281,4 \cos \alpha}{r^2} N$$

Dunque assunto un valore di tensione ammissibile

$$12.44 \quad \tau_{\text{am}} = \frac{450 N}{\text{mm}^2} = \frac{450 N}{10^{-6} \text{m}^2} = 450 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

e considerando le 12.39, 12.43 si hanno le condizioni

$$12.45 \quad \begin{cases} m \tan \alpha > 0,38 \text{ m} \\ \frac{281,4 \cos \alpha}{r^2} N < 450 \cdot 10^6 \text{ Pa} \end{cases}$$

Se prendiamo un fondello - fra quelli unificati - di diametro

$$12.46 \quad d = 4,2 \text{ mm} \Rightarrow r = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

allora le 2° delle 12.45 page

12.47) $63,8 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cos \alpha < 450 \cdot 10^6 \text{ Pa} \leftarrow \text{verificata } \forall \alpha$

Assumendo allora $\alpha = 5^\circ \approx 8,72 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$ si ha che le 1° delle 12.45 porge per m il valore

12.48) $m > \frac{10,38 \text{ m}}{\tan \alpha} = 4,35$

Dunque le quattro molle utili a smorzare le vibrazioni dell'impianto pignone potranno essere ad esempio definite dai parametri seguenti:

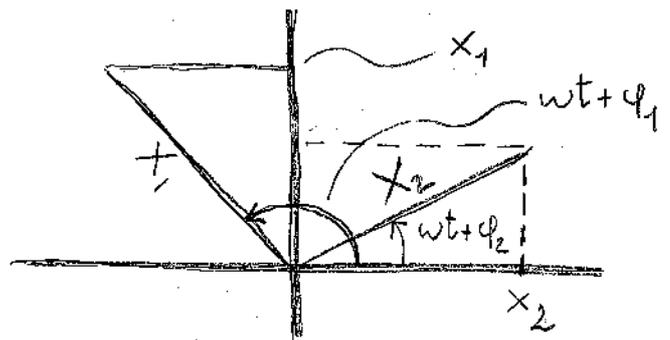
12.49) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 5^\circ \\ m = 5 \\ R = 0,025 \text{ m} = 25 \text{ mm} \\ r = 2,1 \text{ mm} \end{array} \right.$

Capitolo 13. Composizione di moti armonici

In questo capitolo mi occupo di discutere alcuni esempi di somma di funzioni sinusoidali, essendo questo aspetto di interesse per lo studio delle funzioni orarie di sistemi forzati, con o senza smorzamento.

13.1. Differenza di fase. Ricavare la differenza di fase fra i moti armonici

$$13.1 \quad \begin{cases} x_1 = X_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = X_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$



Avendosi

$$\begin{aligned} \cos(\omega t + \varphi_2) &= \cos(\omega t + \varphi_2) \sin \frac{\pi}{2} + \sin(\omega t + \varphi_2) \cos \frac{\pi}{2} = \\ &= \sin(\omega t + \varphi_2 + \pi/2) \end{aligned}$$

segue che

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = X_2 \sin(\omega t + \varphi_2 + \pi/2) \end{cases} \Rightarrow \Delta \varphi = \varphi_2 + \frac{\pi}{2} - \varphi_1$$

13.2. Somma di moti armonici. Ricavare ampiezza e fase del risultante dei seguenti moti armonici:

$$13.2 \quad \begin{cases} x_1 = 6 \sin(\omega t + \pi/6) \\ x_2 = 3 \cos(\omega t + \pi/4) \end{cases}$$

Si consideri che

$$\begin{aligned} \cos(\omega t + \pi/4) &= \cos(\omega t + \pi/4) \sin(\pi/2) + \sin(\omega t + \pi/4) \cos(\pi/2) = \\ &= \sin(\omega t + \pi/4 + \pi/2) = \sin(\omega t + 3\pi/4) \end{aligned}$$

Dunque abbiamo

$$13.3 \quad x_1 + x_2 = 6 \sin(\omega t + \pi/6) + 3 \sin(\omega t + 3\pi/4)$$

Si ponga per

$$13.4 \quad x_1 + x_2 = X \sin(\omega t + \varphi) = X(\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi)$$

Confronto le 13.3, 13.4 ottenendo X, φ :

$$\begin{aligned} &6 \left(\sin \omega t \cos \frac{\pi}{6} + \cos \omega t \sin \frac{\pi}{6} \right) + 3 \left(\sin \omega t \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \omega t \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \\ &= \left(6 \cos \frac{\pi}{6} + 3 \cos \frac{3\pi}{4} \right) \sin \omega t + \left(6 \sin \frac{\pi}{6} + 3 \sin \frac{3\pi}{4} \right) \cos \omega t = \\ &= 3,074 \sin(\omega t) + 5,12 \cos(\omega t) = X \cos \varphi \sin(\omega t) + X \sin \varphi \cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} X \cos \varphi = 3,074 \\ X \sin \varphi = 5,12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{5,12}{3,074} \\ X^2 \cos^2 \varphi + X^2 \sin^2 \varphi = 3,074^2 + 5,12^2 \end{cases} \Rightarrow$$

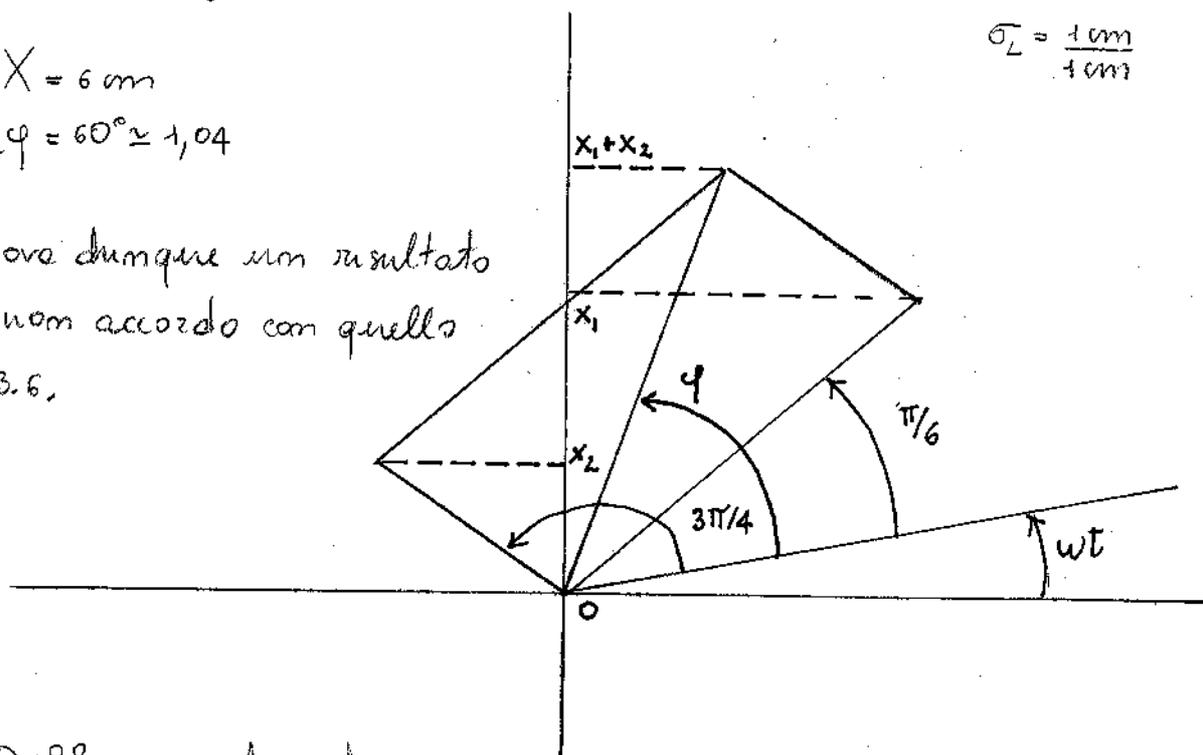
$$13.5 \quad \begin{cases} \tan \varphi = 1,66 \Rightarrow \varphi = 1,038 \text{ rad} \approx 1,03 \text{ rad} \\ X = 5,96 \end{cases} \Rightarrow$$

$$13.6 \quad x_1 + x_2 = 5,96 \sin(\omega t + 1,03 \text{ rad})$$

Provo ora a risolvere graficamente questo problema. Dalle letture del grafico si ha

$$13.7 \quad \begin{cases} X = 6 \text{ cm} \\ \varphi = 60^\circ \approx 1,04 \end{cases}$$

Si trova dunque un risultato in buon accordo con quello in 13.6.



13.3. Differenze di moti armonici. Ricavare l'ampiezza e la fase del moto risultante dalle differenze tra i moti armonici

$$13.8 \quad \begin{cases} x_1 = 9 \sin(\omega t + \pi/4) \\ x_2 = 5 \cos(\omega t) \end{cases}$$

Si ha

$$X_2 = 5 \left(\cos(\omega t) \sin \frac{\pi}{2} + \sin(\omega t) \cos \frac{\pi}{2} \right) = 5 \sin(\omega t + \pi/2) \Rightarrow$$

$$13.9) \quad X_1 - X_2 = 9 \sin(\omega t + \pi/4) - 5 \sin(\omega t + \pi/2)$$

Posto pari

$$13.10) \quad X_1 - X_2 = X \sin(\omega t + \varphi)$$

e confrontando le 13.9 e 13.10 si ha

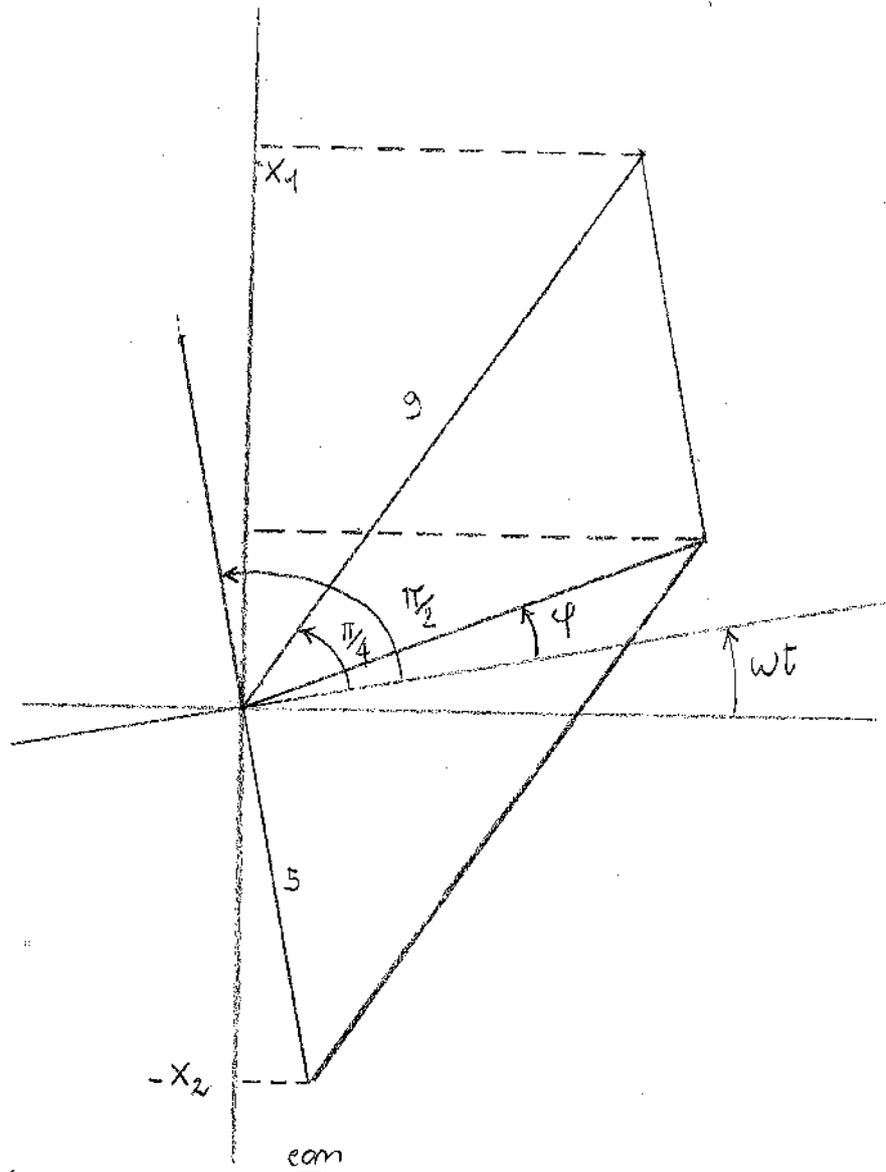
$$\begin{aligned} & \frac{9 \sin(\omega t) \cos \frac{\pi}{4} + 9 \cos(\omega t) \sin \frac{\pi}{4}}{4} - \frac{5 \sin(\omega t) \cos \frac{\pi}{2}}{2} - \\ & - 5 \cos(\omega t) \sin \frac{\pi}{2} = \left(9 \cos \frac{\pi}{4} - 5 \cos \frac{\pi}{2} \right) \sin(\omega t) + \left(9 \sin \frac{\pi}{4} - \right. \\ & \left. - 5 \sin \frac{\pi}{2} \right) \cos(\omega t) = 6,36 \sin(\omega t) + 1,36 \cos(\omega t) = X \left(\sin(\omega t) \cos \varphi + \right. \\ & \left. + \cos(\omega t) \sin \varphi \right) = X \cos \varphi \sin(\omega t) + X \sin \varphi \cos(\omega t) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$13.11) \quad \begin{cases} X \cos \varphi = 6,36 \\ X \sin \varphi = 1,36 \end{cases} \Rightarrow$$

$$13.12) \quad \begin{cases} \tan \varphi = 1,36/6,36 \\ X = \sqrt{6,36^2 + 1,36^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi \cong 0,21\pi \cong 12,02^\circ \\ X = 6,50 \end{cases}$$

Procedo con la soluzione grafica: si trova $X = 6,5$ e $\varphi \cong 11^\circ$, in accordo con le 13.12.

$$\sigma_L = \frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}$$



13.4. Somma di moti armonici diverse pulsazione. Assegnati i moti armonici:

$$(13.13) \begin{cases} x_1 = 2,5 \cos(10\pi t) \\ x_2 = 2 \cos(8\pi t) \end{cases}$$

si chiede di tracciare il loro grafico e del moto risultante, dato da

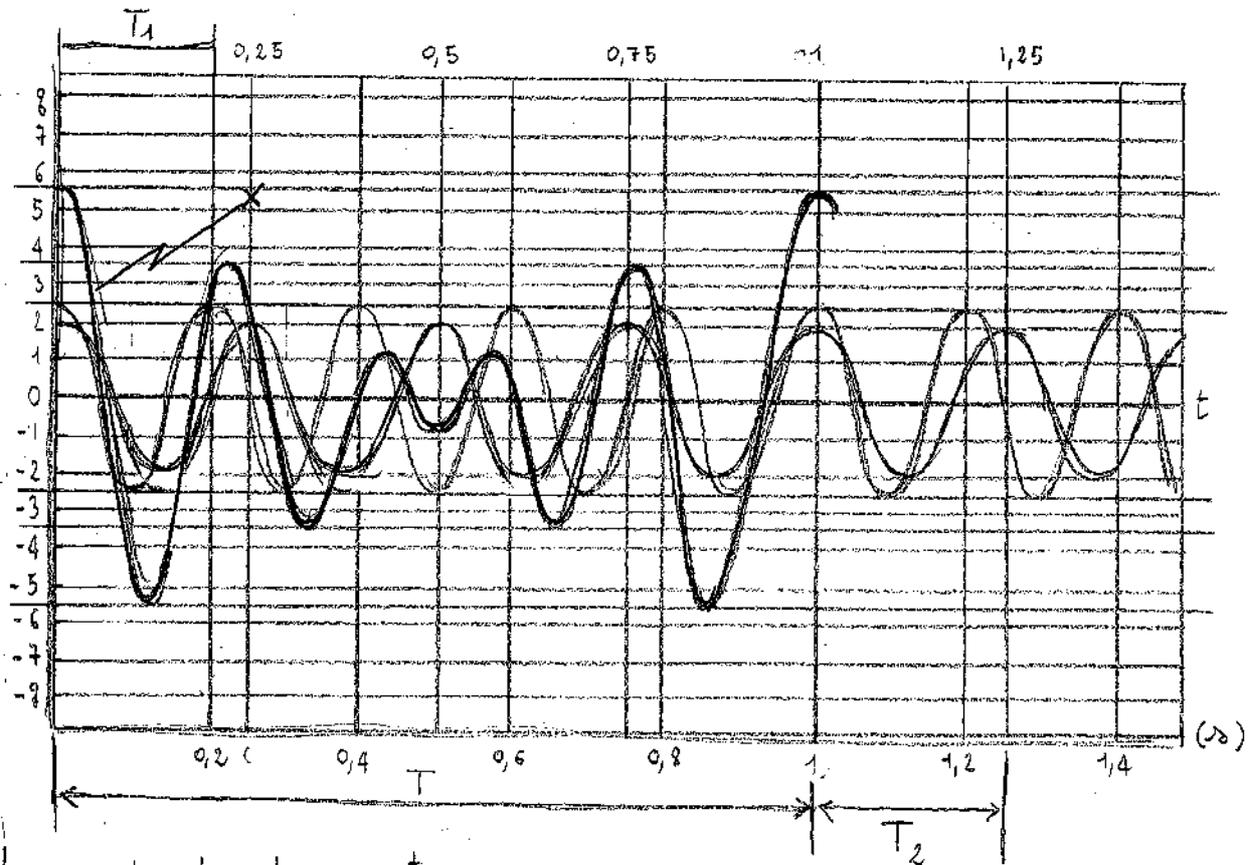
$$(13.14) \quad x = x_1 + x_2 = 2,5 \cos(10\pi t) + 2 \cos(8\pi t) = X \cos(a(t))$$

Utilizzando i risultati del paragrafo 1.3 abbiamo per le 1.22 che

$$3,53 \leq X \leq 5,7$$

↑

$$13.15) X = \sqrt{2,5^2 + 4^2 + 2 \cdot 2,5 \cdot 2 \cos[(10\pi - 8\pi)t]} = \sqrt{22,5 + 10 \cos(6,28t)}$$



I periodi dei due moti sono

$$13.16) \begin{cases} 10\pi T_1 = 2\pi \Rightarrow T_1 = 1/5 = 0,2 \text{ s} \\ 4\pi T_2 = 2\pi \Rightarrow T_2 = 1/4 = 0,25 \text{ s} \end{cases}$$

Il periodo del moto somma è dato dal minimo comune multiplo fra T_1 e T_2 :

$$\text{mcm di } 0,25 : 2^2 \cdot 5, 5^2 \Rightarrow \text{mcm} = 4 \cdot 25 = 100 \Rightarrow$$

$$13.17) T = 1 \text{ s}$$

* → vai a pag 447

13.5. Somma di moti armonici con stessa pulsazione, Si considerino i due moti armonici

$$13.18 \quad \begin{cases} \mu_1 = 4 \cos(40t) \\ \mu_2 = 3 \sin(40t) \end{cases}$$

Si consideri che

$$\sin(40t) = \sin(40t) \sin(\pi/2) + \cos(40t) \cos(\pi/2) \Rightarrow$$

$$13.19 \quad \sin(40t) = \cos(40t - \pi/2)$$

Dunque il moto somma è

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_1 + \mu_2 = 4 \cos(40t) + 3 \sin(40t) = 4 \cos(40t) + 3 \cos(40t - \pi/2) = \\ &= X \cos(40t + \varphi) = X \cos(40t) \cos \varphi - X \sin(40t) \sin \varphi \Rightarrow \end{aligned}$$

$$13.20 \quad \begin{cases} X \cos \varphi = 4 \\ X \sin \varphi = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \tan^{-1}(-3/4) = -0,64 \text{ rad} = -36,86^\circ \\ X = \sqrt{16+9} = 5 \end{cases}$$

Dunque i moti armonici sono

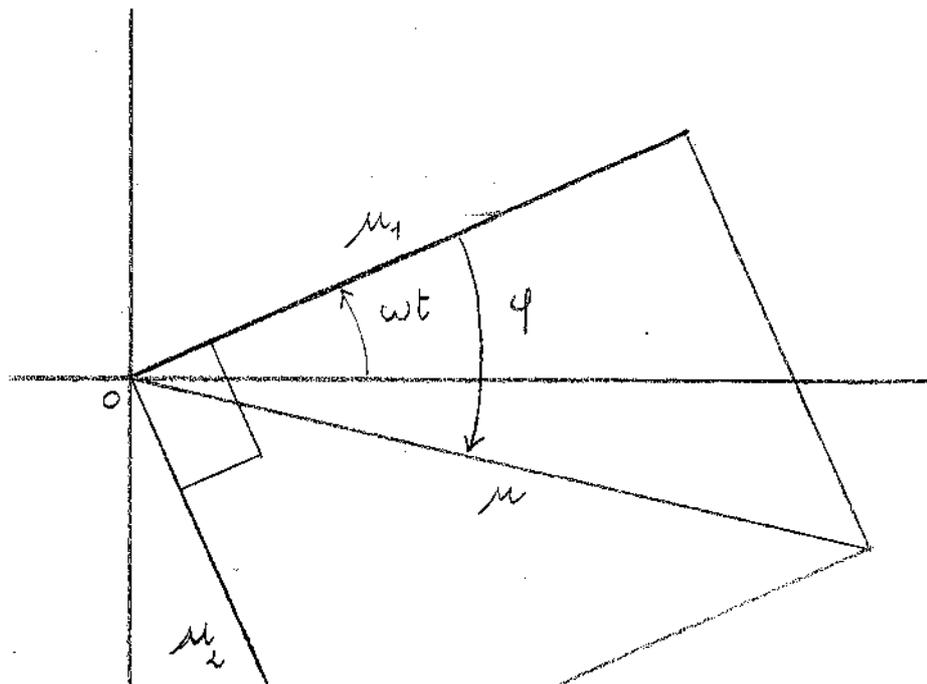
$$13.21 \quad \begin{cases} \mu_1 = 4 \cos(40t) \\ \mu_2 = 3 \cos(40t - \pi/2) \\ \mu = \mu_1 + \mu_2 = 5 \cos(40t - 0,64 \text{ rad}) \end{cases}$$

Indico anche la soluzione grafica, che fornisce risultati conformi a quelli in 13.20.

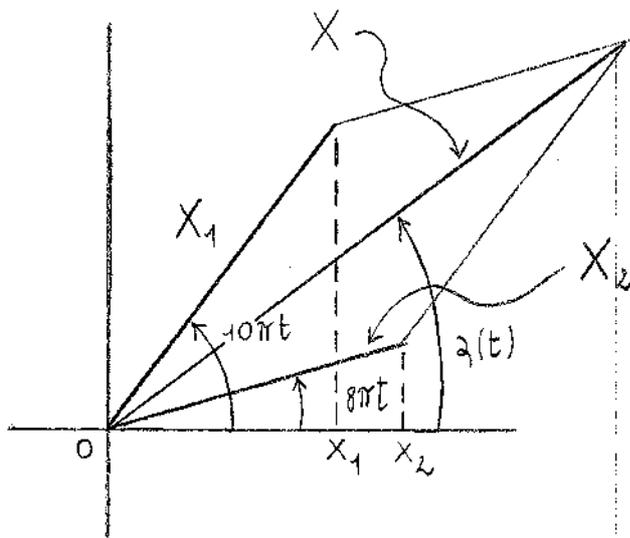
$$\sigma_L = \frac{1}{2} \frac{\text{cm}}{\text{cm}}$$

$$\mu = 10 \text{ cm} \sigma_L = 5 \text{ cm}$$

$$\varphi = -37^\circ$$



* Riporto una discussione grafica anche per il problema 13,4. Si ha



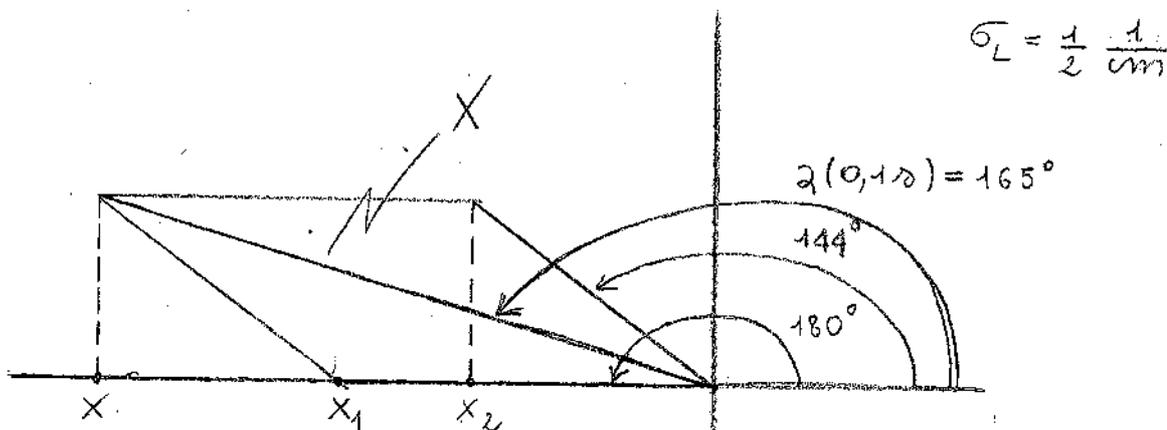
ISTANTE
GENERICO

$$\tan a(t) = \frac{X_1 \sin(10\pi t) + X_2 \sin(8\pi t)}{X_1 \cos(10\pi t) + X_2 \cos(8\pi t)} = \frac{2,5 \sin(10\pi t) + 2 \sin(8\pi t)}{2,5 \cos(10\pi t) + 2 \cos(8\pi t)} \Rightarrow$$

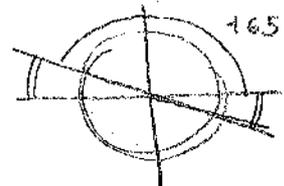
$$13.22 \quad \alpha(t) = \tan^{-1} \left[\frac{2,5 \sin(10\pi t) + 2 \sin(8\pi t)}{2,5 \cos(10\pi t) + 2 \cos(8\pi t)} \right]$$

Procedo ora alle soluzioni grafiche per un istante assegnato:
sia $t = 0,1s$, allora si ha

$$13.23 \quad \begin{cases} 10\pi \cdot 0,1 = \pi = 180^\circ \\ 8\pi \cdot 0,1 = 2,51 \text{ rad} = 144^\circ \end{cases}$$



La lettura del grafico porge dunque



$$13.24 \quad \begin{cases} \alpha(0,1s) = 165^\circ \Rightarrow \tan \alpha(0,1s) = -0,26 \\ X(0,1s) = 8,5 \text{ cm } \sigma_L = 4,25 \end{cases}$$

La soluzione analitica (equaz. 13.15, 13.22) porge:

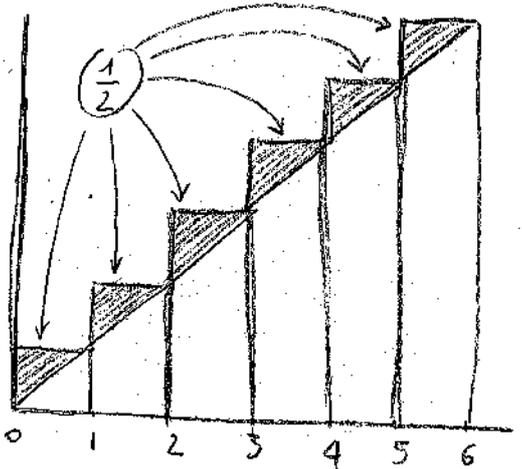
$$13.25 \quad \begin{cases} X = \sqrt{22,5 + 10 \cos(6,28 \cdot 0,1)} = 5,53 \\ \alpha(t) = \tan^{-1} \left(\frac{2,5 \sin \pi + 2 \sin(2,51)}{2,5 \cos \pi + 2 \cos(2,51)} \right) = \tan^{-1}(-0,287) \Rightarrow \tan \alpha(t) = -0,28 \end{cases}$$

Si vede che le 13.24, 13.25 sono in discreto accordo.

Appendice I. Sommatorie di potenze

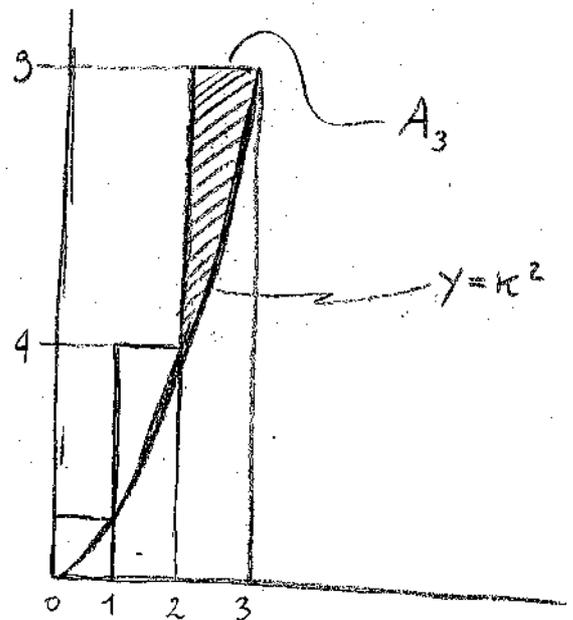
Somma di potenze nulle. Voglio calcolare $\sum_1^m k$. Si considera allora la figura. Si ricava immediatamente

$$1) \quad \sum_1^m k = \frac{m^2}{2} + \frac{1}{2}m = \frac{1+m}{2}m$$



Somma di quadrati. Voglio calcolare $\sum_1^m k^2$. Voglio calcolare la generica area tratteggiata in figura

$$\begin{aligned} A_k &= k^2 - \int_{k-1}^k x^2 dx = k^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_{k-1}^k = \\ &= k^2 - \left(\frac{k^3}{3} - \frac{(k-1)^3}{3} \right) = k^2 - \frac{k^3}{3} + \frac{(k-1)^3}{3} = \\ &= k^2 - \frac{k^3}{3} + \frac{k^3 - 3k^2 + 3k - 1}{3} = \\ &= \frac{3k^2 - k^3 + k^3 - 3k^2 + 3k - 1}{3} = \frac{3k - 1}{3} \end{aligned}$$



Dunque si ha

$$\begin{aligned} \sum_1^m k^2 &= \frac{m^3}{3} + \sum_1^m \frac{3k-1}{3} = \frac{m^3}{3} + \sum_1^m k - \sum_1^m \frac{1}{3} = \frac{m^3}{3} + \frac{1+m}{2}m - \frac{m}{3} = \\ &= \frac{m^3}{3} + \frac{m}{2} + \frac{m^2}{2} - \frac{m}{3} = \frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{3-2}{6}m = \frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6} \end{aligned}$$

$$2) \quad \boxed{\sum_1^m k^2 = \frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6}} = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Verifichiamo per $m=3$:

$$\frac{27}{3} + \frac{9}{2} + \frac{3}{6} = \frac{54+27+3}{6} = \frac{84+3}{6} = \frac{87}{6} = 14.5$$

$$1+4+9 = 14$$

Verifichiamo per $m=4$:

$$\frac{64}{3} + \frac{16}{2} + \frac{4}{6} = \frac{128+48+4}{6} = \frac{176+4}{6} = \frac{180}{6} = 30$$

$$1+4+9+16 = 14+16 = 30$$

Somma di cubi, Procedo come nel caso precedente.

$$A_k = k^3 - \int_{k-1}^k x^3 dx = k^3 - \frac{x^4}{4} \Big|_{k-1}^k = k^3 - \left(\frac{k^4}{4} - \frac{(k-1)^4}{4} \right) = k^3 - \frac{k^4}{4} +$$

$$+ \frac{k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 4k + 1}{4} = \frac{\cancel{4k^3} - \cancel{k^4} + \cancel{k^4} - 4k^3 + 6k^2 - 4k + 1}{4} = \frac{6k^2 - 4k + 1}{4}$$

Dunque si ha

$$\sum_1^m k^3 = \frac{m^4}{4} + \sum_1^m \frac{6k^2 - 4k + 1}{4} = \frac{m^4}{4} + \frac{6}{4} \sum_1^m k^2 - \sum_1^m k + \frac{1}{4} m =$$

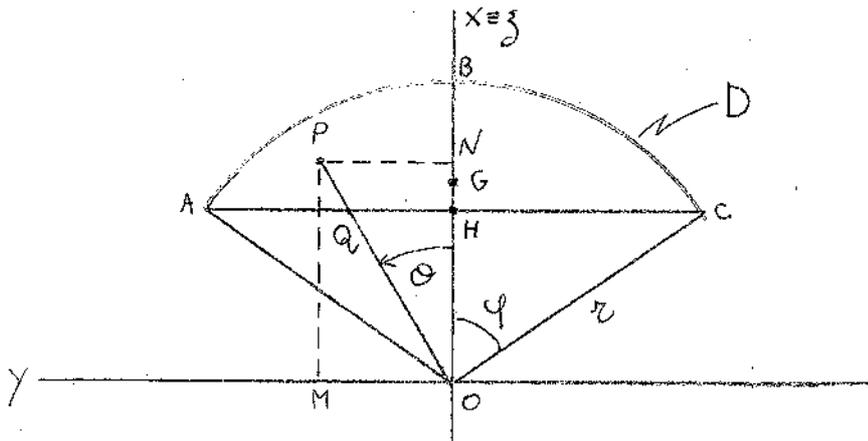
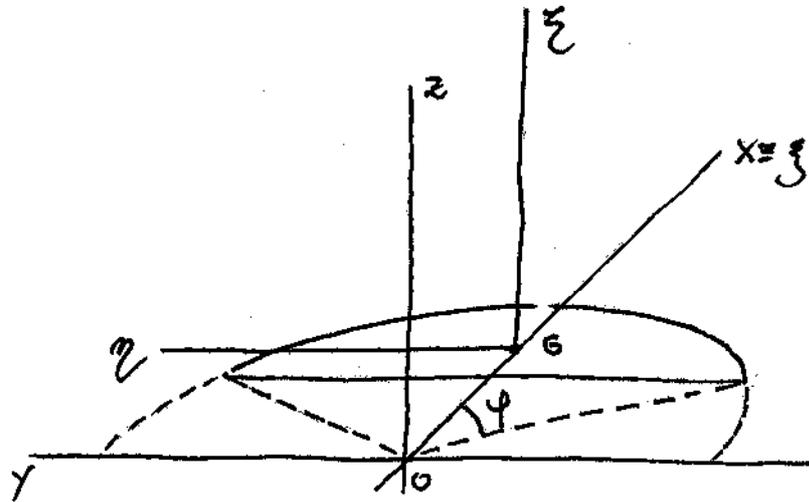
$$= \frac{m^4}{4} + \frac{6}{4} \left(\frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6} \right) - \frac{m^2}{2} - \frac{1}{2} m + \frac{1}{4} m =$$

$$= \frac{m^4}{4} + \frac{m^3}{2} + \frac{3m^2}{4} + \frac{m}{4} - \frac{2m^2}{4} - \frac{2m}{4} + \frac{m}{4} = \frac{m^4}{4} + \frac{m^3}{2} + \frac{m^2}{4} \Rightarrow$$

$$3) \quad \sum_1^m k^3 = \frac{m^4}{4} + \frac{m^3}{2} + \frac{m^2}{4} = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$$

Appendice II. Calcolo di un momento d'inerzia

Momenti del segmento circolare. Ricavo l'insieme D:



$$\overline{OH} = r \cos \varphi \Rightarrow \overline{OQ} \cos \theta = \overline{OH} \Rightarrow \overline{OQ} = \frac{\overline{OH}}{\cos \theta} = \frac{r \cos \varphi}{\cos \theta} \Rightarrow$$

$$D = \left\{ (\theta, \rho) \mid (\theta, \rho) \in [\varphi, \varphi] \times \left[\frac{r \cos \varphi}{\cos \theta}, r \right] \right\}$$

Ricavo J_z :

$$J_z = \int_{-\varphi}^{\varphi} \int_{\frac{r \cos \varphi}{\cos \theta}}^r \rho^2 \rho \, d\rho \, d\theta = \int_{-\varphi}^{\varphi} \int_{\frac{r \cos \varphi}{\cos \theta}}^r \rho^3 \, d\rho \, d\theta = \int_{-\varphi}^{\varphi} \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_{\frac{r \cos \varphi}{\cos \theta}}^r \, d\theta =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\varphi}^{\varphi} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^4 \cos^4 \vartheta}{4 \cos^4 \vartheta} \right) d\vartheta = \frac{x^4}{4} \int_{-\varphi}^{\varphi} \left(1 - \frac{\cos^4 \vartheta}{\cos^4 \vartheta} \right) d\vartheta = \frac{x^4}{4} \left(\vartheta \Big|_{-\varphi}^{\varphi} - \cos^4 \vartheta \int \frac{d\vartheta}{\cos^4 \vartheta} \right) \\
 &= \frac{x^4}{4} \left(2\varphi - \cos^4 \vartheta \int \frac{d\vartheta}{\cos^4 \vartheta} \right)
 \end{aligned}$$

Calcolo l'integrale improprio attraverso la sostituzione seguente

$$t = \tan \frac{\vartheta}{2} \Rightarrow \cos \vartheta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad d\vartheta = \frac{2}{1+t^2} dt \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d\vartheta}{\cos^4 \vartheta} &= \int \frac{(1+t^2)^4}{(1-t^2)^4} \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{(1+t^2)^3}{(1-t^2)^4} dt = 2 I \\
 &= \int \frac{(1+t^2)^4}{(1-t^2)^4} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{(1+t^2)^3}{(1-t^2)^4} 2 dt = 2 \int \frac{(1+t^2)^3}{(1-t^2)^4} dt = 2 I
 \end{aligned}$$

$$\frac{(1+t^2)^3}{(1-t^2)^4} = \frac{(1+t^2)^3}{(1-t)^4(1+t)^4} = \frac{A_1}{(1-t)} + \frac{A_2}{(1-t)^2} + \frac{A_3}{(1-t)^3} + \frac{A_4}{(1-t)^4} =$$

$$= \frac{A_1(1-t)^3 + A_2(1-t)^2 + A_3(1-t) + A_4}{(1-t)^4} =$$

$$= \frac{A_1(1-3t^2+3t^4-t^6) + A_2(1-2t^2+t^4) + A_3(1-t) + A_4}{(1-t)^4} =$$

$$= \frac{-A_1 t^6 + 3A_1 t^4 + A_2 t^4 - 3A_1 t^2 - 2A_2 t^2 - A_3 t^2 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{(1-t)^4} =$$

$$= \frac{-A_1 t^6 + (3A_1 + A_2) t^4 + (-3A_1 - 2A_2 - A_3) t^2 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{(1-t^2)^4}$$

$$(1+t^2)^3 = 1 + 3t^2 + 3t^4 + t^6$$

$$\begin{cases} -A_1 = 1 \\ 3A_1 + A_2 = 3 \\ -3A_1 - 2A_2 - A_3 = 3 \\ A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -1 \\ A_2 = 3 - 3A_1 = 3 + 3 = 6 \\ A_3 = -3A_1 - 2A_2 - 3 = 3 - 12 - 3 = -12 \\ A_4 = 1 - A_1 - A_2 - A_3 = 1 + 1 - 6 + 12 = 8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int \frac{(1+t^2)^3}{(1-t^2)^4} dt = A_1 \int \frac{dt}{1-t^2} + A_2 \int \frac{dt}{(1-t)^2} + A_3 \int \frac{dt}{(1-t)^3} + A_4 \int \frac{dt}{(1-t)^4}$$

Questo procedimento non è adatto. Applico le formule di Heaviside

$$\begin{aligned} \frac{(1+t^2)^3}{(1-t^2)^4} &= \frac{(1+t^2)^3}{(1-t)^4(1+t)^4} = \frac{A_1}{1-t} + \frac{A_2}{(1-t)^2} + \frac{A_3}{(1-t)^3} + \frac{A_4}{(1-t)^4} + \frac{B_1}{1+t} + \\ &+ \frac{B_2}{(1+t)^2} + \frac{B_3}{(1+t)^3} + \frac{B_4}{(1+t)^4} = \frac{A_1(1-t)^3(1+t)^4 +}{(1-t)^4(1+t)^4} \\ &+ A_2(1-t)^2(1+t)^4 + A_3(1-t)(1+t)^4 + A_4(1+t)^4 + B_1(1-t)^4(1+t)^3 + \\ &+ B_2(1-t)^4(1+t)^2 + B_3(1-t)^4(1+t) + B_4(1-t)^4. \end{aligned}$$

$$(1-t)^3(1+t)^4 = \underbrace{(-t^7)}_{A_1} - \underbrace{t^6}_{A_1} + \underbrace{(3t^5)}_{A_1} + \underbrace{3t^4}_{A_1} - \underbrace{3t^3}_{A_1} - \underbrace{3t^2}_{A_1} + \underbrace{t}_{A_1} + 1$$

$$(1-t)^2(1+t)^4 = \underbrace{t^6}_{A_2} + \underbrace{(2t^5)}_{A_2} - \underbrace{t^4}_{A_2} + \underbrace{(4t^3)}_{A_2} - \underbrace{t^2}_{A_2} + \underbrace{2t}_{A_2} + 1$$

$$(1-t)(1+t)^4 = \underbrace{(-t^5)}_{A_3} - \underbrace{3t^4}_{A_3} + \underbrace{(2t^3)}_{A_3} + \underbrace{2t^2}_{A_3} + \underbrace{3t}_{A_3} + 1$$

$$(1+t)^4 = \underbrace{1}_{A_4} + \underbrace{4t}_{A_4} + \underbrace{6t^2}_{A_4} + \underbrace{4t^3}_{A_4} + \underbrace{t^4}_{A_4}$$

$$(1-t)^4(1+t)^3 = \underbrace{t^7}_{B_1} - \underbrace{t^6}_{B_1} + \underbrace{(3t^5)}_{B_1} + \underbrace{3t^4}_{B_1} - \underbrace{3t^3}_{B_1} - \underbrace{3t^2}_{B_1} - \underbrace{t}_{B_1} + 1$$

$$(1-t)^4(1+t)^2 = \underbrace{t^6}_{B_2} - \underbrace{2t^5}_{B_2} - \underbrace{t^4}_{B_2} + \underbrace{(4t^3)}_{B_2} + \underbrace{t^2}_{B_2} - \underbrace{2t}_{B_2} + 1$$

$$(1-t)^4(1+t) = \underbrace{t^5}_{B_3} - \underbrace{3t^4}_{B_3} + \underbrace{2t^3}_{B_3} + \underbrace{2t^2}_{B_3} - \underbrace{3t}_{B_3} + 1$$

$$(1-t)^4 = \underbrace{1}_{B_4} - \underbrace{t}_{B_4} + \underbrace{t^2}_{B_4} - \underbrace{t^3}_{B_4} + \underbrace{t^4}_{B_4}$$

$$\begin{aligned}
 & (-A_1 + B_1)t^7 + (-A_1 + A_2 - B_1 + B_2)t^6 + (3A_1 + 2A_2 - A_3 - 3B_1 - 2B_2)t^5 + \\
 & + (3A_1 - A_2 - 3A_3 + A_4 + 3B_1 - B_2 - 3B_3 + B_4)t^4 + (-3A_1 - 4A_2 - 2A_3 + \\
 & + 4A_4 + 3B_1 + 4B_2 + 2B_3 - B_4)t^3 + (-3A_1 - A_2 + 2A_3 + 6A_4 - 3B_1 - B_2 + \\
 & + 2B_3 + B_4)t^2 + (A_1 + 2A_2 + 3A_3 + 4A_4 - B_1 - 2B_2 - 3B_3 - B_4)t + A_1 + A_2 + \\
 & + A_3 + A_4 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 1 + 3t^2 + 3t^4 + t^6 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 -A_1 + B_1 = 0 \\
 -A_1 + A_2 - B_1 + B_2 = 1 \\
 3A_1 + 2A_2 - A_3 - 3B_1 - 2B_2 = 0 \\
 3A_1 - A_2 - 3A_3 + A_4 + 3B_1 - B_2 - 3B_3 + B_4 = 3 \\
 -3A_1 - 4A_2 - 2A_3 + 4A_4 + 3B_1 + 4B_2 + 2B_3 - B_4 = 0 \\
 -3A_1 - A_2 + 2A_3 + 6A_4 - 3B_1 - B_2 + 2B_3 + B_4 = 0 \\
 A_1 + 2A_2 + 3A_3 + 4A_4 - B_1 - 2B_2 - 3B_3 - B_4 = 0 \\
 A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 0
 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases}
 A_1 = -11/52 \\
 A_2 = 35/208 \\
 A_3 = -25/52 \\
 A_4 = 37/260 \\
 B_1 = -11/52 \\
 B_2 = 85/208 \\
 B_3 = -10/13 \\
 B_4 = 62/65
 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
 \int \frac{1}{1-t} dt = - \int \frac{d(1-t)}{1-t} = -\ln(1-t) + c \quad \left| \quad \int \frac{dt}{1+t} = \ln(1+t) + c \right. \\
 \int \frac{1}{(1-t)^2} dt = - \int \frac{d(1-t)}{(1-t)^2} = \frac{1}{1-t} + c \quad \left| \quad \int \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{1}{1+t} + c \right. \\
 \int \frac{1}{(1-t)^3} dt = - \int \frac{d(1-t)}{(1-t)^3} = \frac{1}{2(1-t)^2} + c \quad \left| \quad \int \frac{dt}{(1+t)^3} = -\frac{1}{2(1+t)^2} + c \right. \\
 \int \frac{1}{(1-t)^4} dt = - \int \frac{d(1-t)}{(1-t)^4} = \frac{1}{3(1-t)^3} + c \quad \left| \quad \int \frac{dt}{(1+t)^4} = -\frac{1}{3(1+t)^3} + c \right.
 \end{array}$$

Pertanto avanti il calcolo si dimostra che

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d\theta}{\cos^4 \theta} &= \frac{1}{3} \tan^3 \theta + \tan \theta \Rightarrow \int_{-\varphi}^{\varphi} \frac{d\theta}{\cos^4 \theta} = \frac{1}{3} \tan^3 \varphi + \tan \varphi + \frac{1}{3} \tan^3 \varphi + \tan \varphi = \\
 &= \frac{2}{3} \tan^3 \varphi + 2 \tan \varphi \Rightarrow J_2 = \frac{\pi^4}{4} \left(2\varphi - \cos^4 \varphi \left(\frac{2}{3} \tan^3 \varphi + 2 \tan \varphi \right) \right) = \\
 &= \frac{\pi^4}{4} \left(2\varphi - \frac{2}{3} \sin^3 \varphi \cos \varphi - 2 \sin \varphi \cos^3 \varphi \right) = \frac{\pi^4}{12} \left(3\varphi - 2 \sin^3 \varphi \cos \varphi - \right. \\
 &\left. - 2 \sin \varphi \cos^3 \varphi \right) = \frac{\pi^4}{12} \left(3\varphi - \sin^3 \varphi \cos \varphi - 3 \sin \varphi \cos \varphi (1 - \sin^2 \varphi) \right) = \\
 &= \frac{\pi^4}{6} \left(3\varphi - \sin^3 \varphi \cos \varphi - 3 \sin \varphi \cos \varphi + 3 \sin^3 \varphi \cos \varphi \right) = \\
 &= \frac{\pi^4}{6} \left(3\varphi + 2 \sin^3 \varphi \cos \varphi - 3 \sin \varphi \cos \varphi \right) \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$J_2 = \frac{\pi^4}{6} \left(3\varphi + 2 \sin^3 \varphi \cos \varphi - 3 \sin \varphi \cos \varphi \right)$$

Ricavo J_x :

$$\begin{aligned}
 J_x &= \int_{-\varphi}^{\varphi} \int_{\frac{\pi \cos \varphi}{\cos \theta}}^{\pi} \rho N^2 g \, dg \, d\theta = \int_{-\varphi}^{\varphi} \int_{\frac{\pi \cos \varphi}{\cos \theta}}^{\pi} g^2 \sin^2 \theta \, g \, dg \, d\theta = \int_{-\varphi}^{\varphi} \int_{\frac{\pi \cos \varphi}{\cos \theta}}^{\pi} g^3 \sin^2 \theta \, dg \, d\theta = \\
 &= \int_{-\varphi}^{\varphi} \sin^2 \theta \int_{\frac{\pi \cos \varphi}{\cos \theta}}^{\pi} g^3 \, dg \, d\theta = \int_{-\varphi}^{\varphi} \sin^2 \theta \left. \frac{g^4}{4} \right|_{\frac{\pi \cos \varphi}{\cos \theta}}^{\pi} d\theta = \frac{1}{4} \int_{-\varphi}^{\varphi} \sin^2 \theta \left(\pi^4 - \frac{\pi^4 \cos^4 \varphi}{\cos^4 \theta} \right) d\theta = \\
 &= \frac{\pi^4}{4} \int_{-\varphi}^{\varphi} \left(\sin^2 \theta - \frac{\cos^4 \varphi \sin^2 \theta}{\cos^4 \theta} \right) d\theta = \frac{\pi^4}{4} \left(\int_{-\varphi}^{\varphi} \sin^2 \theta \, d\theta - \cos^4 \varphi \int_{-\varphi}^{\varphi} \frac{\sin^2 \theta}{\cos^4 \theta} \, d\theta \right) =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi^4}{4} (I_1 - \cos^4 \varphi I_2)$$

$$I_2 = \frac{1}{3} \tan^3 \theta \Big|_{-\varphi}^{\varphi} = \frac{2}{3} \tan^3 \varphi$$

$$I_1 = \left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\theta) \right) \Big|_{-\varphi}^{\varphi} = \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) - \left(-\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right) =$$

$$= \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) + \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) = \varphi - \frac{1}{2} \sin(2\varphi)$$

$$j_x = \frac{\pi^4}{4} \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin(2\varphi) - \frac{2}{3} \tan^3 \varphi \cos^4 \varphi \right) = \frac{\pi^4}{4} \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin(2\varphi) - \frac{2}{3} \sin^3 \varphi \cos \varphi \right)$$

Ricavo j_y :

$$j_z = j_x + j_y \Rightarrow j_y = j_z - j_x = \frac{\pi^4}{6} (3\varphi + 2 \sin^3 \varphi \cos \varphi - 3 \sin \varphi \cos \varphi) -$$

$$- \frac{\pi^4}{24} (6\varphi - 3 \sin(2\varphi) - 4 \sin^3 \varphi \cos \varphi) = \frac{\pi^4}{24} (12\varphi + 8 \sin^3 \varphi \cos \varphi - 12 \sin \varphi \cos \varphi -$$

$$- 6\varphi + 3 \sin(2\varphi) + 4 \sin^3 \varphi \cos \varphi) = \frac{\pi^4}{24} (6\varphi + 12 \sin^3 \varphi \cos \varphi - 6 \sin \varphi \cos \varphi) =$$

$$= \frac{\pi^4}{24} (6\varphi + 12 \sin \varphi \cos \varphi (1 - \cos^2 \varphi) - 6 \sin \varphi \cos \varphi) = \frac{\pi^4}{24} (8\varphi +$$

$$+ 8 \sin^3 \varphi \cos \varphi - 12 \sin \varphi \cos^3 \varphi) \Rightarrow$$

$$j_y = \frac{\pi^4}{24} (8\varphi + 8 \sin^3 \varphi \cos \varphi - 12 \sin \varphi \cos^3 \varphi)$$

Come verifica complessiva procedo al calcolo diretto di j_y .

$$\begin{aligned}
 j_y &= \int_{-\varphi}^{\varphi} \int_{\frac{r \cos \varphi}{\cos \theta}}^r \rho^2 \cos^2 \theta \rho \, d\rho \, d\theta = \int_{-\varphi}^{\varphi} \cos^2 \theta \int_{\frac{r \cos \varphi}{\cos \theta}}^r \rho^3 \, d\rho \, d\theta = \int_{-\varphi}^{\varphi} \left. \frac{\cos^2 \theta \rho^4}{4} \right|_{\frac{r \cos \varphi}{\cos \theta}}^r d\theta = \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-\varphi}^{\varphi} \cos^2 \theta \left(r^4 - \frac{r^4 \cos^4 \varphi}{\cos^4 \theta} \right) d\theta = \frac{r^4}{4} \int_{-\varphi}^{\varphi} \left(\cos^2 \theta - \frac{\cos^4 \varphi}{\cos^2 \theta} \right) d\theta = \\
 &= \frac{r^4}{4} \left(\int_{-\varphi}^{\varphi} \cos^2 \theta \, d\theta - \cos^4 \varphi \int_{-\varphi}^{\varphi} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \right) = \frac{r^4}{4} \left(I_1 - \cos^4 \varphi I_2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \left. \frac{\theta + \sin \theta \cos \theta}{2} \right|_{-\varphi}^{\varphi} = \frac{\varphi + \sin \varphi \cos \varphi}{2} + \frac{\varphi + \sin \varphi \cos \varphi}{2} = \\
 &= \varphi + \sin \varphi \cos \varphi
 \end{aligned}$$

$$I_2 = \left. \tan \theta \right|_{-\varphi}^{\varphi} = 2 \tan \varphi$$

$$j_y = \frac{r^4}{4} \left(\varphi + \sin \varphi \cos \varphi - 2 \cos^4 \varphi \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right) \Rightarrow$$

$$\boxed{j_y = \frac{r^4}{4} \left(\varphi + \sin \varphi \cos \varphi - 2 \sin \varphi \cos^3 \varphi \right)}$$

Calculo j_z :

$$j_z = j_3 + A \bar{OG}^2 = j_3 + r^2 (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) \left[\frac{2r \sin^3 \varphi}{3(\varphi - \sin \varphi \cos \varphi)} \right]^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 j_z &= j_z - \frac{\pi^4 (\varphi - \sin\varphi \cos\varphi) (4\pi^2) \sin^6\varphi}{9(\varphi - \sin\varphi \cos\varphi)^2} = j_z - \frac{4\pi^4}{9} \frac{\sin^6\varphi}{\varphi - \sin\varphi \cos\varphi} \\
 &= \frac{\pi^4}{6} (3\varphi + 2\sin^3\varphi \cos\varphi - 3\sin\varphi \cos\varphi) - \frac{4\pi^4}{9} \left(\frac{\sin^6\varphi}{\varphi - \sin\varphi \cos\varphi} \right) = \\
 &= \frac{\pi^4}{3} \left(\frac{3\varphi + 2\sin^3\varphi \cos\varphi - 3\sin\varphi \cos\varphi}{2} - \frac{4\sin^6\varphi}{3\varphi - 3\sin\varphi \cos\varphi} \right) \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$j_z = \frac{\pi^4}{3} \left(\frac{3\varphi + 2\sin^3\varphi \cos\varphi - 3\sin\varphi \cos\varphi}{2} - \frac{4\sin^6\varphi}{3(\varphi - \sin\varphi \cos\varphi)} \right)$$

Ricavo j_y :

$$j_y = j_z + \overline{OG}^2 A \Rightarrow j_y = j_z - \frac{4\pi^4}{9} \left(\frac{\sin^6\varphi}{\varphi - \sin\varphi \cos\varphi} \right)$$

Riepilogo i momenti di inerzia:

$$\begin{aligned}
 j_z &= \frac{\pi^4}{6} (3\varphi + 2\sin^3\varphi \cos\varphi - 3\sin\varphi \cos\varphi) \\
 j_x &= \frac{\pi^4}{6} \left(\varphi - \frac{2}{3}\sin^3\varphi \cos\varphi - \sin\varphi \cos\varphi \right) \\
 j_y &= \frac{\pi^4}{4} (\varphi - 2\sin\varphi \cos^3\varphi + \sin\varphi \cos\varphi) \\
 j_z &= j_x \\
 j_z &= j_y - \frac{4\pi^4}{9} \left(\frac{\sin^6\varphi}{\varphi - \sin\varphi \cos\varphi} \right)
 \end{aligned}$$

$$j_5 = j_2 - \frac{4z^4}{9} \frac{\sin^6 \varphi}{\varphi - \sin \varphi \cos \varphi}$$

Primo integrale trigonometrico. Procedo al calcolo di alcuni integrali trigonometrici incontrati nel calcolo dei momenti del segmento circolare. Nel calcolo di j_2 troviamo:

$$I = \int \frac{d\theta}{\cos^4 \theta} = \int \frac{(1+t^2)^4 \cdot 2}{(1-t^2)^4 \cdot 1+t^2} dt = 2 \int \frac{(1+t^2)^3}{(1-t^2)^4} dt$$

$$t = \tan \frac{\theta}{2} \quad d\theta = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Procedo con lo sviluppo secondo Heaviside:

$$\frac{(1+t^2)^3}{(1-t)^4(1+t)^4} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 \frac{P_{ij}}{(t-t_i)^j} = \sum_{j=1}^4 \frac{P_{1j}}{(t-1)^j} + \sum_{j=1}^4 \frac{P_{2j}}{(t+1)^j}$$

$$P_{11} = \frac{1}{(4-1)!} \frac{d^3}{dt^3} \frac{\cancel{(t-1)^4} (1+t^2)^3}{\cancel{(t-1)^4} (1+t)^4} \Big|_{t=1} = \frac{1}{6} \frac{d^3}{dt^3} \frac{(1+t^2)^3}{(1+t)^4} \Big|_{t=1} = 0$$

$$P_{12} = \frac{1}{(4-2)!} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\cancel{(t-1)^4} (1+t^2)^3}{\cancel{(t-1)^4} (1+t)^4} \Big|_{t=1} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \frac{(1+t^2)^3}{(1+t)^4} \Big|_{t=1} = \frac{1}{2}$$

$$P_{13} = \frac{1}{(4-3)!} \frac{d}{dt} \frac{(1+t^2)^3}{(1+t)^4} \Big|_{t=1} = \frac{1}{2}$$

$$P_{14} = \frac{1}{(4-4)!} \frac{(1+t^2)^3}{(1+t)^4} \Big|_{t=1} = \frac{1}{2}$$

$$P_{21} = \frac{1}{(4-1)!} \frac{d^3}{dt^3} \frac{\cancel{(t+1)^4} (1+t^2)^3}{\cancel{(t+1)^4} (1-t)^4} \Big|_{t=-1} = \frac{1}{6} \frac{d^3}{dt^3} \frac{(1+t^2)^3}{(1-t)^4} \Big|_{t=-1} = 0$$

$$P_{22} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \frac{(1+t^2)^3}{(1-t)^4} \Big|_{t=-1} = \frac{1}{2}$$

$$P_{23} = \frac{d}{dt} \frac{(1+t^2)^3}{(1-t)^4} \Big|_{t=-1} = -\frac{1}{2}$$

$$P_{24} = \frac{(1+t^2)^3}{(1-t)^4} \Big|_{t=-1} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} I &= 2 \left(\int \frac{P_{11}}{(t-1)} dt + \int \frac{P_{12}}{(t-1)^2} dt + \int \frac{P_{13}}{(t-1)^3} dt + \int \frac{P_{14}}{(t-1)^4} dt + \right. \\ &\quad \left. + \int \frac{P_{21}}{(t+1)} dt + \int \frac{P_{22}}{(t+1)^2} dt + \int \frac{P_{23}}{(t+1)^3} dt + \int \frac{P_{24}}{(t+1)^4} dt \right) = \\ &= \int \frac{dt}{(t-1)^2} + \int \frac{dt}{(t-1)^3} + \int \frac{dt}{(t-1)^4} + \int \frac{dt}{(t+1)^2} - \int \frac{dt}{(t+1)^3} + \int \frac{dt}{(t+1)^4} = \\ &= \frac{(t-1)^{-1}}{-1} + \frac{(t-1)^{-2}}{-2} + \frac{(t-1)^{-3}}{-3} + \frac{(t+1)^{-1}}{-1} - \frac{(t+1)^{-2}}{-2} + \frac{(t+1)^{-3}}{-3} = \\ &= -\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2(t-1)^2} - \frac{1}{3(t-1)^3} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2(t+1)^2} - \frac{1}{3(t+1)^3} = \\ &= \frac{-6(t-1)^2(t+1)^3 - 3(t-1)(t+1)^3 - 2(t+1)^3 - 6(t-1)^3(t+1)^2 + 3(t-1)^3(t+1) -}{6(t-1)^3(t+1)^3} \\ &\quad - 2(t-1)^3 = \frac{-(t+1)^3 [6(t-1)^2 + 3(t-1) + 2] + (t-1)^3 [-6(t+1)^2 +}{6(t-1)^3(t+1)^3} \\ &\quad + 3(t+1) - 2] = \frac{-(t+1)^3(6t^2 - 12t + 6 + 3t - 3 + 2) + (t-1)^3(-6t^2 -}{6(t-1)^3(t+1)^3} \\ &\quad - 12t - 6 + 3t + 3 - 2) = \frac{-(t+1)^3(6t^2 - 9t + 5) + (t-1)^3(-6t^2 - 9t - 5)}{6(t-1)^3(t+1)^3} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{6 \frac{\sin^5 \theta/2}{\cos^5 \theta/2} - 4 \frac{\sin^3 \theta/2}{\cos^3 \theta/2} + 6 \frac{\sin \theta/2}{\cos \theta/2}}{3 \frac{\sin^6 \theta/2}{\cos^6 \theta/2} - 9 \frac{\sin^4 \theta/2}{\cos^4 \theta/2} + 9 \frac{\sin^2 \theta/2}{\cos^2 \theta/2} - 3} \\
&= - \frac{\textcircled{2} \left(\frac{\sin \theta/2}{\cos \theta/2} \right) \frac{3 \frac{\sin^4 \theta/2}{\cos^4 \theta/2} - 2 \frac{\sin^2 \theta/2}{\cos^2 \theta/2} + 3}{\textcircled{3} \left(\frac{\sin \theta/2}{\cos \theta/2} + 1 \right)^3 \left(\frac{\sin \theta/2}{\cos \theta/2} - 1 \right)^3}}{\frac{2 \frac{\sin \theta/2}{\cos \theta/2}}{3 \cos \theta/2} \frac{3 \sin^4 \theta/2 - 2 \sin^2 \theta/2 \cos^2 \theta/2 + 3 \cos^4 \theta/2}{\left(\frac{\sin \theta/2 + \cos \theta/2}{\cos \theta/2} \right)^3 \left(\frac{\sin \theta/2 - \cos \theta/2}{\cos \theta/2} \right)^3} \frac{1}{\cos^4 \theta/2}} \\
&= \frac{1 + 2 \cos^2 \theta}{3 \cos^3 \theta} \sin \theta = \frac{\tan \theta}{3 \cos^3 \theta} (1 + 2 \cos^2 \theta) = \frac{\tan \theta}{3} \frac{1 + 2 - 2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \\
&= \frac{\tan \theta}{3} \frac{3 - 2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\tan \theta}{3} \frac{3 - 3 \sin^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\tan \theta}{3} \frac{3 - 3 + 3 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\
&= \frac{\tan \theta}{3} (3 + \tan^2 \theta) = \tan \theta + \frac{\tan^3 \theta}{3}
\end{aligned}$$

Si conclude dunque che

$$\boxed{\int \frac{d\theta}{\cos^4 \theta} = \tan \theta + \frac{\tan^3 \theta}{3}}$$

Secondo integrali trigonometrici. Nel calcolo di \int_x ci siamo imbattuti nell'integrale seguente:

$$\int \frac{\sin^2 \theta}{\cos^4 \theta} d\theta = \int \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^4 \theta} d\theta = \int \frac{d\theta}{\cos^4 \theta} - \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

Utilizzando il risultato del paragrafo precedente e ricordando poi che $d \tan \theta = 1/\cos^2 \theta$, allora si ha

$$\int \frac{\sin^2 \theta}{\cos^4 \theta} d\theta = \frac{1}{3} \tan^3 \theta + \tan \theta - \tan \theta = \frac{\tan^3 \theta}{3}$$

Appendice III. Integrali ellittici.

Integrale ellittico di prima specie. Si definisce tale l'integrale

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

Questo non può essere risolto in forma esatta e deve dunque essere integrato per serie. Si ricordi allora lo sviluppo

$$(1+x)^a = \sum_0^{\infty} \binom{a}{k} x^k = \sum_0^{\infty} \frac{a!}{k!(a-k)!} x^k = 1 + \frac{a!}{(a-1)!} x + \frac{a!}{2!(a-2)!} x^2 +$$

$$+ \frac{a!}{3!(a-3)!} x^3 + \frac{a!}{4!(a-4)!} x^4 + \dots$$

Ponendo dunque $a = -1/2$ e $x = -k^2 \sin^2 \theta$ si ha

$$(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) (-k^2 \sin^2 \theta) + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} - 1\right) (-k^2 \sin^2 \theta)^2 \frac{1}{2} +$$

$$+ \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \left(-\frac{1}{2} - 2\right) (-k^2 \sin^2 \theta)^3 \frac{1}{3!} + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \left(-\frac{1}{2} - 2\right) \left(-\frac{1}{2} -$$

$$- 3\right) (-k^2 \sin^2 \theta)^4 \frac{1}{4!} + \dots$$

Fermandosi al quinto addendo si ha dunque

$$\begin{aligned}
 (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} &\cong 1 + \frac{k^2 \sin^2 \theta}{2} + \frac{1}{4} \frac{3}{2} k^4 \sin^4 \theta + \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{k^6 \sin^6 \theta}{6} + \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{7}{2} \frac{k^8 \sin^8 \theta}{24} = 1 + \frac{k^2 \sin^2 \theta}{2} + \frac{3}{8} k^4 \sin^4 \theta + \frac{15}{48} k^6 \sin^6 \theta + \\
 &+ \frac{105}{384} k^8 \sin^8 \theta
 \end{aligned}$$

Dunque l'integrale si scrive

$$\begin{aligned}
 K &\cong \int_0^{\pi/2} 1 d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{k^2}{2} \sin^2 \theta d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{3}{8} k^4 \sin^4 \theta d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{15}{48} k^6 \sin^6 \theta d\theta + \\
 &+ \int_0^{\pi/2} \frac{105}{384} k^8 \sin^8 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{k^2}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta + \frac{3}{8} k^4 \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta + \\
 &+ \frac{15}{48} k^6 \int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta d\theta + \frac{105}{384} k^8 \int_0^{\pi/2} \sin^8 \theta d\theta
 \end{aligned}$$

Calcolo ora gli integrali trigonometrici:

$$\begin{aligned}
 \int \sin^2 \theta d\theta &= - \int \sin \theta d \cos \theta = - (\sin \theta \cos \theta - \int \cos \theta d \sin \theta) = \\
 &= - \sin \theta \cos \theta + \int \cos^2 \theta d\theta = - \sin \theta \cos \theta + \int (1 - \sin^2 \theta) d\theta = \\
 &= - \sin \theta \cos \theta + \theta - \int \sin^2 \theta d\theta \Rightarrow 2 \int \sin^2 \theta d\theta = \theta - \sin \theta \cos \theta \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\int \sin^2 \theta d\theta = \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{2} + C}$$

$$\int \sin^4 \theta \, d\theta = -\int \sin^3 \theta \, d \cos \theta = -\sin^3 \theta \cos \theta + \int \cos \theta \, d \sin^3 \theta =$$

$$= -\sin^3 \theta \cos \theta + \int \cos \theta \, 3 \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta = -\sin^3 \theta \cos \theta +$$

$$+ 3 \int \sin^2 \theta \cos^2 \theta \, d\theta = -\sin^3 \theta \cos \theta + 3 \int \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) \, d\theta =$$

$$= -\sin^3 \theta \cos \theta + 3 \int \sin^2 \theta \, d\theta - 3 \int \sin^4 \theta \, d\theta = -\sin^3 \theta \cos \theta +$$

$$+ 3 \int \sin^2 \theta \, d\theta - 3 \int \sin^4 \theta \, d\theta \Rightarrow 4 \int \sin^4 \theta \, d\theta = -\sin^3 \theta \cos \theta +$$

$$+ 3 \int \sin^2 \theta \, d\theta = -\sin^3 \theta \cos \theta + 3 \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{2} = \frac{-2 \sin^3 \theta \cos \theta +$$

$$+ 3(\theta - \sin \theta \cos \theta) \Rightarrow$$

$$\int \sin^4 \theta \, d\theta = \frac{3\theta - 3 \sin \theta \cos \theta - 2 \sin^3 \theta \cos \theta}{8} + C$$

$$\int \sin^6 \theta \, d\theta = -\int \sin^5 \theta \, d \cos \theta = -\sin^5 \theta \cos \theta + \int \cos \theta \, d \sin^5 \theta =$$

$$-\sin^5 \theta \cos \theta + \int \cos \theta \, 5 \sin^4 \theta \cos \theta \, d\theta = -\sin^5 \theta \cos \theta + 5 \int \cos^2 \theta \sin^4 \theta \, d\theta =$$

$$= -\sin^5 \theta \cos \theta + 5 \int (1 - \sin^2 \theta) \sin^4 \theta \, d\theta = -\sin^5 \theta \cos \theta + 5 \int \sin^4 \theta \, d\theta -$$

$$- 5 \int \sin^6 \theta \, d\theta \Rightarrow 6 \int \sin^6 \theta \, d\theta = -\sin^5 \theta \cos \theta + 5 \int \sin^4 \theta \, d\theta \Rightarrow$$

$$\int \sin^6 \theta d\theta = -\frac{\sin^5 \theta \cos \theta}{6} + \frac{5}{6} \frac{3\theta - 3\sin \theta \cos \theta - 2\sin^3 \theta \cos \theta}{8} \Rightarrow$$

$$\int \sin^6 \theta d\theta = -\frac{\sin^5 \theta \cos \theta}{6} + \frac{15}{48} (\theta - \sin \theta \cos \theta) - \frac{5 \sin^3 \theta \cos \theta}{24} + C$$

Per gli integrali definiti si ha dunque

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi/2 - \sin \pi/2 \cos \pi/2}{2} - \frac{0 - \sin 0 \cos 0}{2} = \frac{\pi}{4} \approx 0,7853$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta = \frac{3\pi/2 - 3\sin \pi/2 \cos \pi/2 - 2\sin^3 \pi/2 \cos \pi/2}{8} -$$

$$- \frac{3 \cdot 0 - 3 \sin 0 \cos 0 - 2 \sin^3 0 \cos 0}{8} = \frac{3\pi}{16} \approx 0,5890$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta d\theta = -\frac{\sin^5 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}}{6} + \frac{15}{48} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}}{2} \right) - \frac{5 \sin^3 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}}{24} =$$

$$= \frac{15\pi}{96} \approx 0,4908 \quad \frac{5\pi}{32}$$

Ma anche ancora un integrale indefinito:

$$\int \sin^8 \theta d\theta = -\int \sin^7 \theta \cdot d \cos \theta = -\sin^7 \theta \cos \theta + \int \cos \theta \cdot 7 \sin^6 \theta \cos \theta d\theta =$$

$$= -\sin^7 \theta \cos \theta + 7 \int \sin^6 \theta \cos^2 \theta d\theta = -\sin^7 \theta \cos \theta + 7 \int \sin^6 \theta d\theta -$$

$$- 7 \int \sin^8 \theta d\theta \Rightarrow 8 \int \sin^8 \theta d\theta = 7 \int \sin^6 \theta d\theta - \sin^7 \theta \cos \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \sin^8 \theta d\theta = \frac{7}{8} \int \sin^6 \theta d\theta - \frac{\sin^7 \theta \cos \theta}{8}$$

Il relativo integrale definito vale

$$\int_0^{\pi/2} \sin^8 \theta d\theta = \frac{7}{8} \int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta d\theta - \frac{\sin^7 \theta \cos \theta}{8} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{7}{8} \frac{15\pi}{96} = \frac{105\pi}{768} = \frac{35\pi}{256} \approx 0,429$$

Riassumo gli integrali trigonometrici calcolati:

$$\int \sin^2 \theta d\theta = \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{2} + c \quad \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4} \approx 0,7853$$

$$\int \sin^4 \theta d\theta = -\frac{\sin^3 \theta \cos \theta}{4} + \frac{3}{4} \int \sin^2 \theta d\theta \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta = \frac{3\pi}{16} \approx 0,5890$$

$$\int \sin^6 \theta d\theta = -\frac{\sin^5 \theta \cos \theta}{6} + \frac{5}{6} \int \sin^4 \theta d\theta \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta d\theta = \frac{5\pi}{32} \approx 0,4908$$

$$\int \sin^8 \theta d\theta = -\frac{\sin^7 \theta \cos \theta}{8} + \frac{7}{8} \int \sin^6 \theta d\theta \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^8 \theta d\theta = \frac{35\pi}{256} \approx 0,429$$

Tramando all'integrale ellittico di prima specie si ha

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \approx \frac{\pi}{2} + \frac{k^2 \pi}{2 \cdot 4} + \frac{3}{8} k^4 \frac{3\pi}{16} + \frac{15}{48} k^6 \frac{5\pi}{32} + \frac{105}{384} k^8 \frac{35\pi}{256} \Rightarrow$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \cong \frac{\pi}{2} + \frac{k^2 \pi}{8} + \frac{k^4 9\pi}{128} + \frac{k^6 75\pi}{1536} + \frac{k^8 3675\pi}{38304} \iff$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \cong 1,5707 + 0,3926 k^2 + 0,2208 k^4 + 0,1533 k^6 + 0,1174 k^8$$

Integrali riconducibili ad integrali ellittici di prima specie. Nello studio di sistemi oscillanti si incontra l'integrale

$$\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

Si ponga ora

$$\begin{cases} \sin \frac{\theta_0}{2} = k \\ \sin \frac{\theta}{2} = k \sin \varphi \end{cases}$$

Si ha allora

$$\begin{cases} \cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ \cos \theta_0 = \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \end{cases} \implies$$

$$\cos \theta - \cos \theta_0 = \sqrt{1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} - \sqrt{1 + 2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2}} = -2k^2 \sin^2 \varphi + 2k^2$$

$$d \sin \frac{\theta}{2} = k \cos \varphi d\varphi \implies \cos \frac{\theta}{2} \frac{1}{2} d\theta = k \cos \varphi d\varphi \implies$$

$$d\theta = \frac{2k \cos \varphi d\varphi}{\cos \frac{\theta}{2}}$$

Sostituendo nell'integrale originale si ha

$$\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \int_0^{\theta_0} \frac{2k \cos \varphi d\varphi}{\cos \frac{\theta}{2} \sqrt{2k^2(1 - \sin^2 \varphi)}} = \int_0^{\theta_0} \frac{\sqrt{2} k \cos \varphi d\varphi}{\cos \frac{\theta}{2} \sqrt{2} k \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\theta_0} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\cos \frac{\theta}{2} |\cos \varphi|}$$

Ricavo gli estremi di integrazione

$$\begin{cases} \theta = 0 \Rightarrow \sin \frac{\theta}{2} = 0 \Rightarrow k \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \\ \theta = \theta_0 \Rightarrow \sin \frac{\theta_0}{2} = k \sin \varphi = \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\cos \frac{\theta}{2} \cos \varphi} = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos \frac{\theta}{2}}$$

Si consideri ancora che

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}}$$

$$\boxed{k = \frac{\sin \theta_0}{2}}$$

Un altro integrale che si incontra nello studio delle oscillazioni è il seguente:

$$\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{h^4 - x^4}}$$

Si considerino allora le seguenti sostituzioni:

$$\begin{aligned} \frac{x}{h} = \xi &\Rightarrow \int_0^h \frac{dx}{\sqrt{h^4 - x^4}} = \int_0^h \frac{dx}{h^2 \sqrt{1 - \frac{x^4}{h^4}}} = \int_0^h \frac{dx/h}{h \sqrt{1 - \frac{x^4}{h^4}}} = \\ &= \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^4}} \end{aligned}$$

$$\xi = \cos \theta \Rightarrow d\xi = -\sin \theta d\theta \Rightarrow \begin{cases} \xi = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2 \\ \xi = 1 \Rightarrow \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{h^4 - x^4}} = \frac{1}{h} \int_{\pi/2}^0 \frac{-\sin \theta d\theta}{\sqrt{1 - \cos^4 \theta}} = \frac{1}{h} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{(1 - \cos^2 \theta)(1 + \cos^2 \theta)}} =$$

$$= \frac{1}{h} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{\sin \theta \sqrt{1 + \cos^2 \theta}} = \frac{1}{h} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{2 - \sin^2 \theta}} = \frac{1}{h} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}} \Rightarrow$$

$$\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{h^4 - x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2} h} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}}$$

Riassumo quanto trovato in questo paragrafo:

$$\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{e \cos \theta - e \cos \theta_0}} \approx 2,2213 + 0,5552 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + 0,3122 \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + 0,2167 \sin^6 \frac{\theta_0}{2} + 0,1660 \sin^8 \frac{\theta_0}{2}$$

$$\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{h^4 - x^4}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}h} \left(\frac{\pi}{2} + 0,3926 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0,2208 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + 0,1533 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6 + 0,1174 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8 \right) =$$

$$\approx \frac{1}{h\sqrt{2}} \cdot 1,8487 = \frac{1,3072}{h}$$

Integrali ellittici di seconda specie. Si definisce l'integrale

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

che non può essere risolto in forma esatta e viene integrato per serie, utilizzando lo sviluppo

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a!}{k!(a-k)!} x^k = 1 + \frac{a!}{(a-1)!} x + \frac{a!}{2!(a-2)!} x^2 + \frac{a!}{3!(a-3)!} x^3 + \frac{a!}{4!(a-4)!} x^4$$

Ponendo $a = 1/2$, $x = -k^2 \sin^2 \theta$ si ha

$$(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{1}{2!} k^4 \sin^4 \theta - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{2} - 2\right) \frac{1}{3!} k^6 \sin^6 \theta + \frac{1}{24} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{2} - 2\right) \left(\frac{1}{2} - 3\right) k^8 \sin^8 \theta = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \theta +$$

$$+ \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2}\right) k^4 \sin^4 \theta - \frac{1}{12} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) k^6 \sin^6 \theta + \frac{1}{48} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) k^8 \sin^8 \theta =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{8} k^4 \sin^4 \theta + \frac{1}{16} k^6 \sin^6 \theta - \frac{5}{128} k^8 \sin^8 \theta$$

Sostituendo nell'integrale dato si ha

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \cong \int_0^{\pi/2} d\theta - \frac{1}{2} k^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta - \frac{1}{8} k^4 \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta -$$

$$- \frac{1}{16} k^6 \int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta d\theta - \frac{5}{128} k^8 \int_0^{\pi/2} \sin^8 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{k^2 \pi}{4} - \frac{k^4 3\pi}{16} -$$

$$- \frac{1}{16} k^6 \frac{5\pi}{32} - \frac{5}{128} k^8 \frac{35\pi}{256} = 1,5707 - k^2 0,3926 - k^4 7,3631 \cdot 10^{-2} -$$

$$- 3,0679 \cdot 10^{-2} k^6 - 1,6777 \cdot 10^{-2} k^8 \Rightarrow$$

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \cong 1,5707 - k^2 0,3926 - k^4 7,3631 \cdot 10^{-2} -$$

$$- 3,0679 \cdot 10^{-2} k^6 - 1,6777 \cdot 10^{-2} k^8$$

Per verificare quanto ottenuto calcolo E per $k = 1/\sqrt{2}$ e confronto con quanto riportato in letteratura:

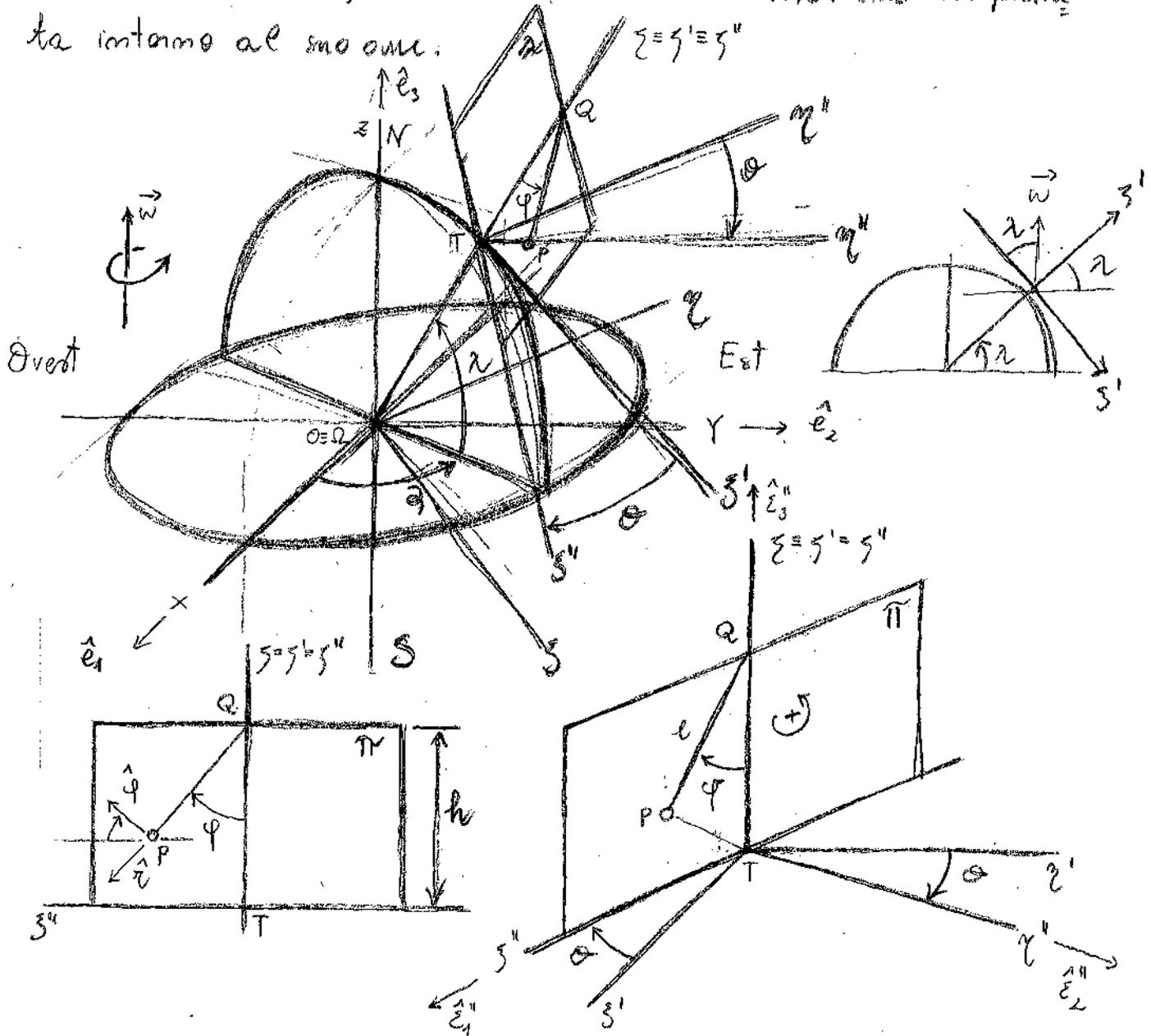
$$E(k = 1/\sqrt{2}) \cong 1,5707 - \frac{1}{2} 0,3926 - \frac{1}{4} 7,3631 \cdot 10^{-2} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6 3,0679 \cdot 10^{-2} -$$

$$- 1,6777 \cdot 10^{-2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8 = 1,3511$$

Si ottiene con buona approssimazione il risultato corretto,

Appendice IV. Pendolo di Foucault

Sistema di riferimento. Il centro delle Terre sia O , il sistema $Oxyz$ sia iniziale, $\dot{\alpha} = \omega$ sia la velocità di rotazione del pianeta intorno al suo asse.



Il sistema $T\xi'\eta'\zeta'$ è non invariabile, così come il sistema $T\xi''\eta''\zeta''$ e il sistema $O\xi\eta\xi$.

Metodo energetico. L'energia potenziale del campo gravitazionale è data da

$$U = -mgl \cos \varphi + c \Rightarrow \frac{dU}{dt} = mgl \dot{\varphi} \sin \varphi$$

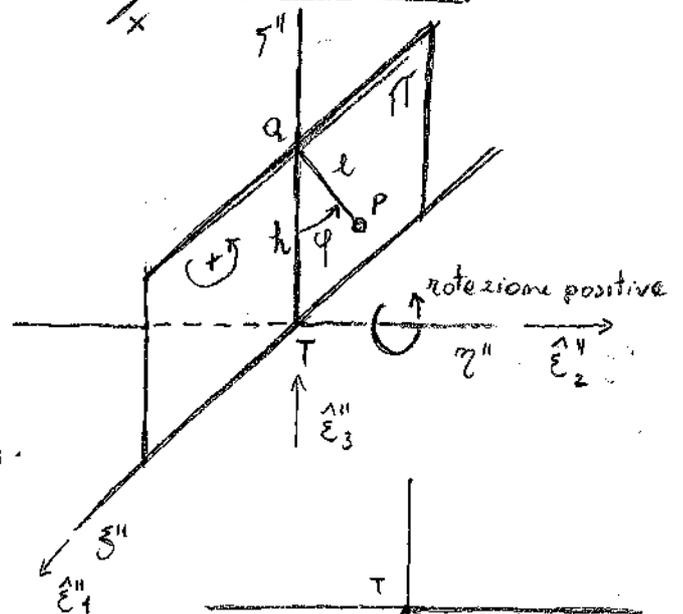
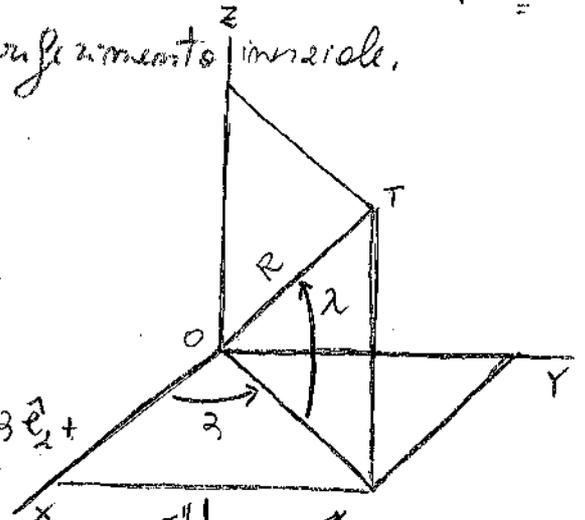
Il calcolo delle energie cinematiche richiede il calcolo delle posizioni delle masse nel sistema di riferimento \hat{e}_i inerziale.

$$\vec{OP} = \vec{OT} + \vec{TP} = \vec{OT} + \vec{TQ} + \vec{QP}$$

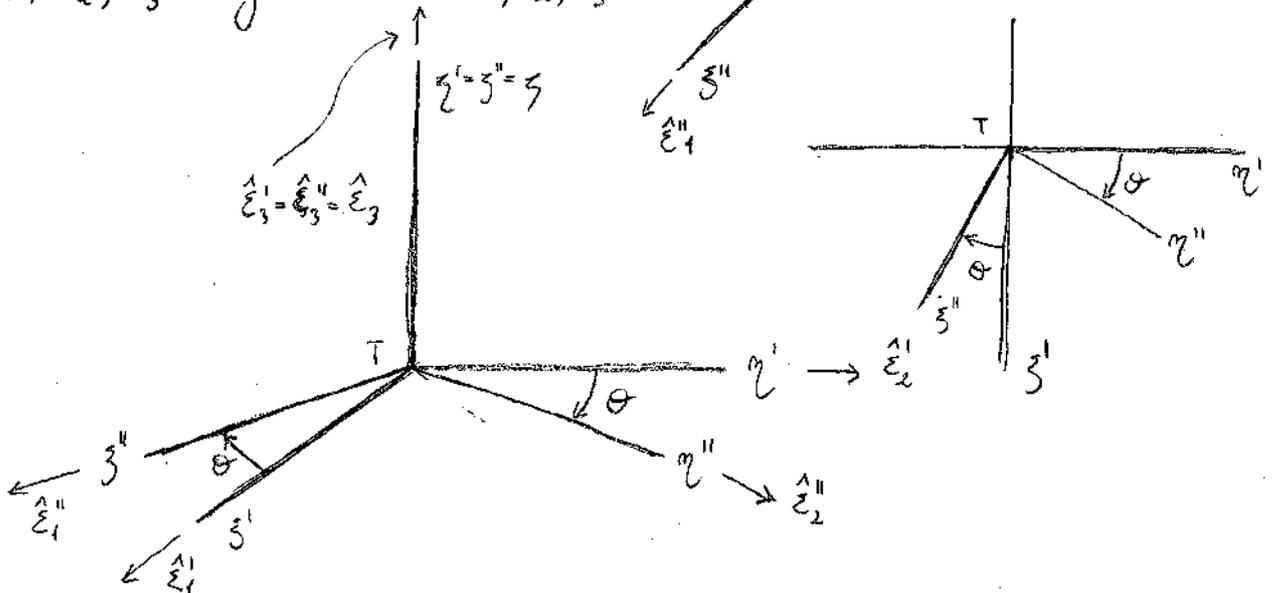
$$\vec{OT} = R \cos \lambda \cos \alpha \hat{e}_1 + R \cos \lambda \sin \alpha \hat{e}_2 + R \sin \lambda \hat{e}_3$$

$$\vec{TQ} = \frac{\vec{OT}}{|\vec{OT}|} h = h \cos \lambda \cos \alpha \hat{e}_1 + h \cos \lambda \sin \alpha \hat{e}_2 + h \sin \lambda \hat{e}_3$$

$$\vec{QP} = -l \sin \varphi \hat{e}_1'' - l \cos \varphi \hat{e}_3''$$



Ricordo ora le relazioni fra i vettori in modo da esprimere $\hat{e}_1'', \hat{e}_2'', \hat{e}_3''$ in funzione di $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$.



$$\begin{cases} \hat{E}_1'' = \cos\theta \hat{E}_1' - \sin\theta \hat{E}_2' \\ \hat{E}_2'' = \sin\theta \hat{E}_1' + \cos\theta \hat{E}_2' \\ \hat{E}_3'' = \hat{E}_3' \\ \hat{E}_1' = \hat{E}_1, \hat{E}_2' = \hat{E}_2, \hat{E}_3' = \hat{E}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{E}_1'' = \cos\theta \hat{E}_1' - \sin\theta \hat{E}_2' \\ \hat{E}_2'' = \sin\theta \hat{E}_1' + \cos\theta \hat{E}_2' \\ \hat{E}_3'' = \hat{E}_3' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{E}_1' = \sin\lambda \cos\alpha \hat{e}_1 + \sin\lambda \sin\alpha \hat{e}_2 - \cos\lambda \hat{e}_3 \\ \hat{E}_2' = -\sin\alpha \hat{e}_1 + \cos\alpha \hat{e}_2 \\ \hat{E}_3' = \cos\lambda \cos\alpha \hat{e}_1 + \cos\lambda \sin\alpha \hat{e}_2 + \sin\lambda \hat{e}_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \hat{E}_1'' = \cos\theta (\sin\lambda \cos\alpha \hat{e}_1 + \sin\lambda \sin\alpha \hat{e}_2 - \cos\lambda \hat{e}_3) - \sin\theta (-\sin\alpha \hat{e}_1 + \cos\alpha \hat{e}_2) = (\cos\theta \sin\lambda \cos\alpha + \sin\theta \sin\alpha) \hat{e}_1 + (\cos\theta \sin\lambda \sin\alpha - \sin\theta \cos\alpha) \hat{e}_2 - \cos\theta \cos\lambda \hat{e}_3 \\ \hat{E}_2'' = \sin\theta (\sin\lambda \cos\alpha \hat{e}_1 + \sin\lambda \sin\alpha \hat{e}_2 - \cos\lambda \hat{e}_3) + \cos\theta (-\sin\alpha \hat{e}_1 + \cos\alpha \hat{e}_2) = (\sin\theta \sin\lambda \cos\alpha - \cos\theta \sin\alpha) \hat{e}_1 + (\sin\theta \sin\lambda \sin\alpha + \cos\theta \cos\alpha) \hat{e}_2 - \sin\theta \cos\lambda \hat{e}_3 \\ \hat{E}_3'' = \cos\lambda \cos\alpha \hat{e}_1 + \cos\lambda \sin\alpha \hat{e}_2 + \sin\lambda \hat{e}_3 \end{cases}$$

Pertanto abbiamo che

$$\begin{cases} QP_x = -l \sin\varphi (\cos\theta \sin\lambda \cos\alpha + \sin\theta \sin\alpha) - l \cos\varphi \cos\lambda \cos\alpha \\ QP_y = -l \sin\varphi (\cos\theta \sin\lambda \sin\alpha - \sin\theta \cos\alpha) - l \cos\varphi \cos\lambda \sin\alpha \\ QP_z = +l \sin\varphi \cos\theta \cos\lambda - l \cos\varphi \sin\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 QP_x &= -l \left[\sin\varphi (\cos\theta \sin\lambda \cos\alpha + \sin\theta \sin\alpha) - \cos\varphi \cos\lambda \cos\alpha \right] = \\
 &= -l \left[\cos\alpha (\sin\varphi \cos\theta \sin\lambda - \cos\varphi \cos\lambda) + \sin\alpha \sin\varphi \sin\theta \right] \\
 QP_y &= -l \left[\sin\varphi (\cos\theta \sin\lambda \sin\alpha - \sin\theta \cos\alpha) - \cos\varphi \cos\lambda \sin\alpha \right] = \\
 &= -l \left[-\cos\alpha \sin\varphi \sin\theta + \sin\alpha (\sin\varphi \cos\theta \sin\lambda - \cos\varphi \cos\lambda) \right] \\
 QP_z &= l (\sin\varphi \cos\theta \cos\lambda - \cos\varphi \sin\lambda)
 \end{aligned}$$

Verifico che il vettore \vec{QP} abbia lunghezza l :

$$\begin{aligned}
 \frac{QP_x^2}{l^2} &= \sin^2\varphi (\cos\theta \sin\lambda \cos\alpha + \sin\theta \sin\alpha)^2 + \cos^2\varphi \cos^2\lambda \cos^2\alpha - \\
 &\quad - 2 \sin\varphi \cos\varphi \cos\lambda \cos\alpha (\cos\theta \sin\lambda \cos\alpha + \sin\theta \sin\alpha) \\
 \frac{QP_y^2}{l^2} &= \sin^2\varphi (\cos\theta \sin\lambda \sin\alpha - \sin\theta \cos\alpha)^2 + \cos^2\varphi \cos^2\lambda \sin^2\alpha - \\
 &\quad - 2 \sin\varphi \cos\varphi \cos\lambda \sin\alpha (\cos\theta \sin\lambda \sin\alpha - \sin\theta \cos\alpha) \\
 \frac{QP_z^2}{l^2} &= \sin^2\varphi \cos^2\theta \cos^2\lambda + \cos^2\varphi \sin^2\lambda + 2 \sin\varphi \cos\varphi \cos\theta \sin\lambda \cos\lambda \\
 \Downarrow \\
 \frac{QP^2}{l^2} &= \sin^2\varphi \left[(\cos\theta \sin\lambda \cos\alpha + \sin\theta \sin\alpha)^2 + (\cos\theta \sin\lambda \sin\alpha - \sin\theta \cos\alpha)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \cos^2\theta \cos^2\lambda \right] + \cos^2\varphi (\cos^2\lambda \cos^2\alpha + \cos^2\lambda \sin^2\alpha + \sin^2\lambda) - \\
 &\quad - 2 \sin\varphi \cos\varphi (\cos\lambda \sin\alpha - \cos\theta \sin\lambda \cos\lambda + \cos\lambda \cos^2\alpha \cos\theta \sin\lambda +
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} QP_x = -l (\cos\alpha \sin\lambda \cos\theta \sin\varphi + \sin\alpha \sin\theta \sin\varphi + \cos\alpha \cos\lambda \cos\varphi) \\ QP_y = -l (\sin\alpha \sin\lambda \cos\theta \sin\varphi - \cos\alpha \sin\theta \sin\varphi + \sin\alpha \cos\lambda \cos\varphi) \\ QP_z = l (\cos\lambda \cos\theta \sin\varphi - \sin\lambda \cos\varphi) \end{cases}$$

Verifico che \vec{QP} abbia modulo l :

$$\begin{aligned} \frac{QP_x^2}{l^2} &= \cos^2\alpha \sin^2\lambda \cos^2\theta \sin^2\varphi + \sin^2\alpha \sin^2\theta \sin^2\varphi + \cos^2\alpha \cos^2\lambda \cos^2\varphi + \\ &+ 2 \cos\alpha \sin\alpha \sin\lambda \cos\theta \sin\theta \sin^2\varphi + 2 \cos^2\alpha \sin\lambda \cos\lambda \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi + \\ &+ 2 \sin\alpha \cos\alpha \cos\lambda \sin\theta \sin\varphi \cos\varphi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{QP_y^2}{l^2} &= \sin^2\alpha \sin^2\lambda \cos^2\theta \sin^2\varphi + \cos^2\alpha \sin^2\theta \sin^2\varphi + \sin^2\alpha \cos^2\lambda \cos^2\varphi - \\ &+ 2 \sin\alpha \cos\alpha \sin\lambda \cos\theta \sin\theta \sin^2\varphi + 2 \sin^2\alpha \sin\lambda \cos\lambda \sin\varphi \cos\varphi \cos\theta + \\ &- 2 \sin\alpha \cos\alpha \cos\lambda \cos\varphi \sin\varphi \sin\theta \end{aligned}$$

$$\frac{QP_z^2}{l^2} = \cos^2\lambda \cos^2\theta \sin^2\varphi + \sin^2\lambda \cos^2\varphi - 2 \sin\lambda \cos\lambda \sin\varphi \cos\varphi \cos\theta$$

$$\frac{|\vec{QP}|^2}{l^2} = \sin^2\lambda \cos^2\theta \sin^2\varphi + \sin^2\varphi \sin^2\theta + \cos^2\lambda \cos^2\varphi +$$

$$+ 2 \sin\lambda \cos\lambda \sin\varphi \cos\varphi \cos\theta + \cos^2\lambda \cos^2\theta \sin^2\varphi + \sin^2\lambda \cos^2\varphi -$$

$$- 2 \sin\lambda \cos\lambda \sin\varphi \cos\varphi \cos\theta = \cos^2\theta \sin^2\varphi + \sin^2\varphi \sin^2\theta +$$

$$+ \cos^2\lambda \cos^2\varphi + \sin^2\lambda \cos^2\varphi = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

abbiamo dunque che le coordinate delle masse sono:

$$\begin{cases} x = (R+h) \cos \alpha \cos \lambda + QP_x \\ y = (R+h) \sin \alpha \cos \lambda + QP_y \\ z = (R+h) \sin \lambda + QP_z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (R+h) (-\sin \alpha) \dot{\alpha} \cos \lambda + \dot{Q}P_x = -(R+h) \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \lambda + \dot{Q}P_x \\ \dot{y} = (R+h) \cos \alpha \dot{\alpha} \cos \lambda + \dot{Q}P_y = (R+h) \dot{\alpha} \cos \alpha \cos \lambda + \dot{Q}P_y \\ \dot{z} = \dot{Q}P_z \end{cases} \Rightarrow$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = (R+h)^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda + \dot{Q}P_x^2$$

$$- 2(R+h) \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \lambda \dot{Q}P_x + (R+h)^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \lambda + \dot{Q}P_y^2$$

$$+ 2(R+h) \dot{\alpha} \cos \alpha \cos \lambda \dot{Q}P_y + \dot{Q}P_z^2 = (R+h)^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2 \lambda + \dot{Q}P_x^2 + \dot{Q}P_y^2 + \dot{Q}P_z^2$$

$$+ 2(R+h) \dot{\alpha} \cos \lambda (-\sin \alpha \dot{Q}P_x + \cos \alpha \dot{Q}P_y)$$

$$\dot{Q}P_x = -l \left[\dot{\alpha} \sin \alpha (\sin \lambda \cos \theta \sin \varphi) + \cos \alpha \sin \lambda (-\dot{\theta} \sin \theta \sin \varphi + \right.$$

$$\left. + \cos \theta \dot{\varphi} \cos \varphi) + \dot{\alpha} \cos \alpha (\sin \theta \sin \varphi) + \sin \alpha (\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \dot{\varphi} \cos \varphi) - \right.$$

$$\left. + \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \lambda \cos \varphi - \cos \alpha \cos \lambda \dot{\varphi} \sin \varphi \right] =$$

$$= -l \left[\sin \lambda (-\dot{\alpha} \sin \alpha \cos \theta \sin \varphi - \cos \alpha \dot{\theta} \sin \theta \sin \varphi + \cos \alpha \cos \theta \dot{\varphi} \cos \varphi) + \right.$$

$$\left. + \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \theta \sin \varphi + \sin \alpha \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \sin \alpha \sin \theta \dot{\varphi} \cos \varphi - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \dot{z} \sin \alpha \cos \lambda \cos \varphi - \cos \alpha \cos \lambda \dot{\varphi} \sin \varphi] = \\
 & = -l \left[\dot{z} (-\sin \alpha \sin \lambda \cos \theta \sin \varphi + \cos \alpha \sin \theta \sin \varphi - \sin \alpha \cos \lambda \cos \varphi) + \right. \\
 & + \dot{\theta} (-\cos \alpha \sin \lambda \sin \theta \sin \varphi + \sin \alpha \cos \theta \sin \varphi) + \dot{\varphi} (\cos \alpha \sin \lambda \cos \theta \cos \varphi + \\
 & \left. + \sin \alpha \sin \theta \cos \varphi - \cos \alpha \cos \lambda \sin \varphi) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_y = -l \left[\dot{z} \cos \alpha (\sin \lambda \cos \theta \sin \varphi) + \sin \alpha \sin \lambda (-\dot{\theta} \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta \dot{\varphi} \cos \varphi) + \right. \\
 + \dot{z} \sin \alpha \sin \theta \sin \varphi - \cos \alpha (\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \dot{\varphi} \cos \varphi) + \dot{z} \cos \alpha \cos \lambda \cos \varphi - \\
 \left. + \sin \alpha \cos \lambda \dot{\varphi} \sin \varphi \right] = -l \left[\dot{z} (\cos \alpha \sin \lambda \cos \theta \sin \varphi + \sin \alpha \sin \theta \sin \varphi + \right. \\
 + \cos \alpha \cos \lambda \cos \varphi) + \dot{\theta} (-\sin \alpha \sin \lambda \sin \theta \sin \varphi - \cos \alpha \cos \theta \sin \varphi) + \\
 \left. + \dot{\varphi} (\sin \alpha \sin \lambda \cos \theta \cos \varphi - \cos \alpha \sin \theta \cos \varphi - \sin \alpha \cos \lambda \sin \varphi) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_z = l (\cos \lambda (-\sin \theta \dot{\theta} \sin \varphi + \cos \theta \dot{\varphi} \cos \varphi) + \sin \lambda \dot{\varphi} \sin \varphi) = \\
 = l \left[-\dot{\theta} \cos \lambda \sin \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} (\cos \lambda \cos \theta \cos \varphi + \sin \lambda \sin \varphi) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\sin \alpha \dot{Q}_x + \cos \alpha \dot{Q}_y = l \left[\dot{z} (-\sin^2 \alpha \sin \lambda \cos \theta \sin \varphi + \sin \alpha \cos \alpha \sin \theta \sin \varphi - \right. \\
 \left. - \sin^2 \alpha \cos \lambda \cos \varphi) + \dot{\theta} (-\sin \alpha \cos \alpha \sin \lambda \sin \theta \sin \varphi + \sin^2 \alpha \cos \theta \sin \varphi) + \right. \\
 \left. + \dot{\varphi} (\sin \alpha \cos \alpha \sin \lambda \cos \theta \cos \varphi + \sin^2 \alpha \sin \theta \cos \varphi - \sin \alpha \cos \alpha \cos \lambda \sin \varphi) \right] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \dot{\alpha} (\cos^2 \alpha \sin \lambda \cos \theta \sin \varphi + \sin \alpha \cos \alpha \sin \theta \sin \varphi + \cos^2 \alpha \cos \lambda \cos \varphi) - \\
& - \dot{\theta} (-\sin \alpha \cos \alpha \sin \lambda \sin \theta \sin \varphi - \cos^2 \alpha \cos \theta \sin \varphi) - \\
& - \dot{\varphi} (\sin \alpha \cos \alpha \sin \lambda \cos \theta \cos \varphi - \cos^2 \alpha \sin \theta \cos \varphi - \sin \alpha \cos \alpha \cos \lambda \sin \varphi) = \\
& = -l \left[\dot{\alpha} (-\sin \lambda \cos \theta \sin \varphi - \cos \lambda \cos \varphi) + \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_x^2 = l^2 \left\{ \dot{\alpha}^2 \left[\sin \varphi (-\sin \alpha \sin \lambda \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) - \sin \alpha \cos \lambda \cos \varphi \right]^2 + \right. \\
+ \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi (-\cos \alpha \sin \lambda \sin \theta + \sin \alpha \cos \theta)^2 + \dot{\varphi}^2 \left[\cos \varphi (\cos \alpha \sin \lambda \cos \theta + \right. \\
+ \sin \alpha \sin \theta) - \cos \alpha \sin \lambda \sin \varphi \left. \right]^2 + 2 \dot{\alpha} \dot{\theta} \sin \varphi \left[\sin \varphi (-\sin \alpha \sin \lambda \cos \theta + \right. \\
+ \cos \alpha \sin \theta) - \sin \alpha \cos \lambda \cos \varphi \left. \right] (-\cos \alpha \sin \lambda \sin \theta + \sin \alpha \cos \theta) + \\
+ 2 \dot{\alpha} \dot{\varphi} \left[\sin \varphi (-\sin \alpha \sin \lambda \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) - \sin \alpha \cos \lambda \cos \varphi \right] \left[\right. \\
\left. \cos \varphi (\cos \alpha \sin \lambda \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) - \sin \alpha \cos \lambda \cos \varphi \right] + \\
+ 2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi (-\cos \alpha \sin \lambda \sin \theta + \sin \alpha \cos \theta) \left[\cos \varphi (\cos \alpha \sin \lambda \cos \theta + \right. \\
\left. + \sin \alpha \sin \theta) - \cos \alpha \sin \lambda \sin \varphi \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_y^2 = l^2 \left\{ \dot{\alpha}^2 \left[\sin \varphi (\cos \alpha \sin \lambda \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) + \cos \alpha \cos \lambda \cos \varphi \right]^2 + \right. \\
+ \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi (-\sin \alpha \sin \lambda \sin \theta - \cos \alpha \cos \theta)^2 + \dot{\varphi}^2 \left[\cos \varphi (\sin \alpha \sin \lambda \cos \theta - \right. \\
\left. - \cos \alpha \sin \theta) - \sin \alpha \cos \lambda \sin \varphi \right]^2 + 2 \dot{\alpha} \dot{\theta} \sin \varphi \left[\sin \varphi (\cos \alpha \sin \lambda \cos \theta + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sin \alpha \sin \theta) + \cos \alpha \cos \lambda \cos \varphi] (-\sin \alpha \sin \lambda \sin \theta - \cos \alpha \cos \theta) + \\
 & + 2 \dot{\alpha} \dot{\varphi} [\sin \varphi (\cos \alpha \sin \lambda \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) + \cos \alpha \cos \lambda \cos \varphi] [\cos \alpha \\
 & \cos \varphi (\sin \alpha \sin \lambda \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta) - \sin \alpha \cos \lambda \sin \varphi] + \\
 & + 2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi (-\sin \alpha \sin \lambda \sin \theta - \cos \alpha \cos \theta) [\cos \varphi (\sin \alpha \sin \lambda \cos \theta - \\
 & - \cos \alpha \sin \theta) - \sin \alpha \cos \lambda \sin \varphi] \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_2^2 = l^2 & \left[\dot{\theta}^2 \cos^2 \lambda \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \dot{\varphi}^2 (\cos \lambda \cos \theta \cos \varphi + \sin \lambda \sin \varphi)^2 + \right. \\
 & \left. - 2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \lambda \sin \theta \sin \varphi (\cos \lambda \cos \theta \cos \varphi + \sin \lambda \sin \varphi) \right]
 \end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned}
 & \sin^2 \varphi (-\sin \alpha \sin \lambda \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta)^2 + \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda \cos^2 \varphi - \\
 & - 2 \sin \alpha \cos \lambda \sin \varphi \cos \varphi (-\sin \alpha \sin \lambda \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) + \\
 & + \sin^2 \varphi (\cos \alpha \sin \lambda \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta)^2 + \cos^2 \alpha \cos^2 \lambda \cos^2 \varphi + \\
 & + 2 \cos \alpha \cos \lambda \sin \varphi \cos \varphi (\cos \alpha \sin \lambda \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) = \\
 & \sin^2 \varphi (\sin^2 \alpha \sin^2 \lambda \cos^2 \theta + \cos^2 \alpha \sin^2 \theta) - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \lambda \sin \theta \cos \theta + \\
 & + \cos^2 \alpha \sin^2 \lambda \cos^2 \theta + \sin^2 \alpha \sin^2 \theta + 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \lambda \sin \theta \cos \theta + \\
 & + \cos^2 \lambda \cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \alpha \sin \lambda \cos \lambda \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta - \\
 & - 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \lambda \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta + 2 \cos^2 \alpha \sin \lambda \cos \lambda \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta + \\
 & + 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \lambda \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta =
 \end{aligned}$$

$$= \sin^2 \varphi (\sin^2 \lambda \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \cos^2 \lambda \cos^2 \varphi + 2 \sin \lambda \cos \lambda \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta$$

(6²)

$$\begin{aligned} & \sin^2 \varphi (\cos^2 \lambda \sin^2 \lambda \sin^2 \theta + \sin^2 \lambda \cos^2 \theta - 2 \sin \lambda \cos \lambda \sin \lambda \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \lambda \sin^2 \theta) \\ & + \sin^2 \lambda \sin^2 \lambda \sin^2 \theta + \cos^2 \lambda \cos^2 \theta + 2 \sin \lambda \cos \lambda \sin \lambda \sin \theta \cos \theta = \\ & = \sin^2 \varphi (\sin^2 \lambda \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \cos^2 \lambda \sin^2 \theta = \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

(7²)

$$\begin{aligned} & \cos^2 \varphi (\cos^2 \lambda \sin^2 \lambda \cos^2 \theta + \sin^2 \lambda \sin^2 \theta)^2 + \cos^2 \lambda \sin^2 \lambda \sin^2 \varphi - \\ & - 2 \cos^2 \lambda \cos \lambda \sin \varphi \cos \varphi (\cos^2 \lambda \sin^2 \lambda \cos^2 \theta + \sin^2 \lambda \sin^2 \theta) + \\ & + \cos^2 \varphi (\sin^2 \lambda \sin^2 \lambda \cos^2 \theta - \cos^2 \lambda \sin^2 \theta)^2 + \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda \sin^2 \varphi - \\ & - 2 \sin \lambda \cos \lambda \sin \varphi \cos \varphi (\sin^2 \lambda \sin^2 \lambda \cos^2 \theta - \cos^2 \lambda \sin^2 \theta) = \\ & = \cos^2 \varphi (\cos^2 \lambda \sin^2 \lambda \cos^2 \theta + \sin^2 \lambda \sin^2 \theta + 2 \sin \lambda \cos \lambda \sin \lambda \sin \theta \cos \theta + \\ & + \sin^2 \lambda \sin^2 \lambda \cos^2 \theta + \cos^2 \lambda \sin^2 \theta - 2 \sin \lambda \cos \lambda \sin \lambda \sin \theta \cos \theta) + \\ & + \sin^2 \varphi (\cos^2 \lambda \sin^2 \lambda + \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda) - 2 \cos \lambda \sin \varphi \cos \varphi (\cos^2 \lambda \sin^2 \lambda \cos^2 \theta + \\ & + \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda \sin^2 \theta + \sin^2 \lambda \sin^2 \lambda \cos^2 \theta - \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda \sin^2 \theta) = \\ & = \cos^2 \varphi (\sin^2 \lambda \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \sin^2 \varphi (\cos^2 \lambda \sin^2 \lambda + \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda) - \\ & - 2 \cos \lambda \sin \varphi \cos \varphi \sin \lambda \cos \theta + \cos^2 \lambda \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \lambda \sin^2 \varphi + \\ & + 2 \cos \lambda \sin \varphi \cos \varphi \sin \lambda \cos \theta = \cos^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \sin^2 \varphi (\cos^2 \lambda \sin^2 \lambda + \\ & + \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi (\cos^2 \lambda \sin^2 \lambda + \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) \end{aligned}$$

(20)

$$2 \sin \varphi \left[\sin \varphi (-\sin \alpha \sin \lambda \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) - \sin \alpha \cos \lambda \cos \varphi \right] \left(-\cos \alpha \sin \lambda \sin \theta + \sin \alpha \cos \theta \right) + 2 \sin \varphi \left[\sin \varphi (\cos \alpha \sin \lambda \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) + \cos \alpha \cos \lambda \cos \varphi \right] \left(-\sin \alpha \sin \lambda \sin \theta - \cos \alpha \cos \theta \right) =$$

$$= 2 \sin \varphi \left\{ (-\sin \varphi \sin \alpha \sin \lambda \cos \theta + \sin \varphi \cos \alpha \sin \theta - \sin \alpha \cos \lambda \cos \varphi) \left(-\cos \alpha \sin \lambda \sin \theta + \sin \alpha \cos \theta \right) + (\sin \varphi \cos \alpha \sin \lambda \cos \theta + \sin \varphi \sin \alpha \sin \theta + \cos \alpha \cos \lambda \cos \varphi) \left(-\sin \alpha \sin \lambda \sin \theta - \cos \alpha \cos \theta \right) \right\} =$$

$$= 2 \sin \varphi \left[\sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \lambda \sin \theta \cos \theta \sin \varphi - \sin^2 \alpha \sin \lambda \cos^2 \theta \sin \varphi + \right.$$

$$\left. - \cos^2 \alpha \sin \lambda \sin^2 \theta \sin \varphi + \sin \alpha \cos \alpha \sin \varphi \sin \theta \cos \theta + \right.$$

$$\left. + \sin \alpha \cos \alpha \sin \lambda \cos \lambda \cos \varphi \sin \theta - \sin^2 \alpha \cos \lambda \cos \theta \cos \varphi - \right.$$

$$\left. + \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \lambda \sin \theta \cos \theta \sin \varphi - \cos^2 \alpha \sin \lambda \cos^2 \theta \sin \varphi - \right.$$

$$\left. - \sin^2 \alpha \sin \lambda \sin^2 \theta \sin \varphi - \sin \alpha \cos \alpha \sin \theta \cos \theta \sin \varphi - \sin \alpha \cos \alpha \sin \lambda \cos \lambda \sin \theta \cos \varphi - \right.$$

$$\left. - \cos^2 \alpha \cos \lambda \cos \theta \cos \varphi \right] = 2 \sin \varphi \left[-\sin \lambda \cos^2 \theta \sin \varphi - \sin \lambda \sin^2 \theta \sin \varphi - \right.$$

$$\left. - \cos \lambda \cos \theta \cos \varphi \right] = 2 \sin \varphi \left(-\sin \lambda \sin \varphi - \cos \lambda \cos \theta \cos \varphi \right)$$

(21)

$$\begin{aligned}
& 2 \sin \varphi \left\{ \left[\sin \varphi (-\sin \alpha \sin \lambda \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) - \sin \alpha \cos \lambda \cos \varphi \right] \left[\cos \varphi (\cos \alpha \sin \lambda \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) - \sin \alpha \cos \lambda \cos \varphi \right] + \left[\sin \varphi (\cos \alpha \sin \lambda \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) + \cos \alpha \cos \lambda \cos \varphi \right] \left[\cos \varphi (\sin \alpha \sin \lambda \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta) - \sin \alpha \cos \lambda \sin \varphi \right] \right\} \\
&= 2 \sin \varphi \left\{ \sin \varphi \cos \varphi \left(-\sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \lambda \cos^2 \theta - \sin^2 \alpha \sin \lambda \sin \theta \cos \varphi + \cos^2 \alpha \sin \lambda \sin \theta \cos \theta + \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \theta \right) - \sin \alpha \cos \lambda \sin \varphi \cos \varphi \left(-\sin \alpha \sin \lambda \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta \right) - \sin \alpha \cos \lambda \cos^2 \varphi \left(\cos \alpha \sin \lambda \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta \right) + \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda \cos^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi \left(\sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \lambda \cos^2 \theta - \cos^2 \alpha \sin \lambda \sin \theta \cos \varphi + \sin^2 \alpha \sin \lambda \sin \theta \cos \theta - \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \theta \right) - \sin \alpha \cos \lambda \sin^2 \varphi \left(\cos \alpha \sin \lambda \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta \right) + \cos \alpha \cos \lambda \cos^2 \varphi \left(\sin \alpha \sin \lambda \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta \right) - \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \lambda \sin \varphi \cos \varphi \left(-\sin \lambda \sin \theta \cos \theta + \sin \lambda \sin \theta \cos \theta \right) - \sin \alpha \cos \lambda \left(-\sin \alpha \sin \lambda \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi + \cos \alpha \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi + \cos \alpha \sin \lambda \cos \theta \sin^2 \varphi + \sin \alpha \sin \theta \sin^2 \varphi \right) + \cos \lambda \cos^2 \varphi \left(-\sin \alpha \cos \alpha \sin \lambda \cos \theta - \sin^2 \alpha \sin \theta + \sin \alpha \cos \alpha \sin \lambda \cos \theta - \cos^2 \alpha \sin \theta \right) + \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda \cos^2 \varphi - \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \lambda \sin \varphi \cos \varphi \right\} \\
&= 2 \sin \varphi \left[\sin^2 \alpha \sin \lambda \cos \lambda \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi - \sin \alpha \cos \alpha \cos \lambda \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sin \alpha \cos \alpha \sin \lambda \cos \lambda \cos \theta \sin^2 \varphi - \sin^2 \alpha \cos \lambda \sin \theta \sin^2 \varphi + \\
 & + \sin \alpha \cos \alpha \sin \lambda \cos \lambda \cos \theta \cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha \cos \lambda \sin \theta \cos^2 \varphi + \\
 & + \sin \alpha \cos \alpha \sin \lambda \cos \lambda \cos \theta \cos^2 \varphi - \cos^2 \alpha \cos \lambda \sin \theta \cos^2 \varphi] = \\
 & = 2 \sin \varphi \left(-\sin^2 \alpha \cos \lambda \sin \theta \dots \text{Rifacciamo il calcolo} \right)
 \end{aligned}$$

$$= 2 \left[(-\sin \alpha \sin \lambda \cos \theta \sin \varphi + \cos \alpha \sin \theta \sin \varphi - \sin \alpha \cos \lambda \cos \varphi) \right]$$

$$\left(\cos \alpha \sin \lambda \cos \theta \cos \varphi + \sin \alpha \sin \theta \cos \varphi - \sin \alpha \cos \lambda \cos \varphi \right) +$$

$$+ \left(\cos \alpha \sin \lambda \cos \theta \sin \varphi + \sin \alpha \sin \theta \sin \varphi + \cos \alpha \cos \lambda \cos \varphi \right) \left(
 \right.$$

$$\left. \left(\sin \alpha \sin \lambda \cos \theta \cos \varphi - \cos \alpha \sin \theta \cos \varphi - \sin \alpha \cos \lambda \sin \varphi \right) \right] =$$

$$= 2 \left[(-\sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \lambda \cos^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \alpha \sin \lambda \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi) +
 \right.$$

$$+ \sin^2 \alpha \sin \lambda \cos \lambda \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \alpha \sin \lambda \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi +$$

$$+ \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi - \sin \alpha \cos \alpha \sin \theta \cos \lambda \sin \varphi \cos \varphi -$$

$$- \left(\sin \alpha \cos \alpha \sin \lambda \cos \lambda \cos \theta \cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha \cos \lambda \sin \theta \cos^2 \varphi \right) +$$

$$+ \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda \cos^2 \varphi + \left(\sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \lambda \cos^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi -
 \right.$$

$$- \left. \cos^2 \alpha \sin \lambda \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \right) - \left(\sin \alpha \cos \alpha \sin \lambda \cos \lambda \cos \theta \sin^2 \varphi \right) +$$

$$+ \left(\sin^2 \alpha \sin \lambda \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi - \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi -
 \right.$$

$$- \left. \sin^2 \alpha \cos \lambda \sin \theta \sin^2 \varphi \right) + \sin \alpha \cos \alpha \sin \lambda \cos \lambda \cos \theta \cos^2 \varphi -$$

$$\begin{aligned}
& - \cos^2 \alpha \cos \lambda \sin \theta \cos^2 \varphi - \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \lambda \sin \varphi \cos \varphi \Big] = \\
& = 2 \left(- \cancel{\sin \lambda \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi} - \sin \alpha \cos \alpha \sin \lambda \cos \lambda \cos \theta + \right. \\
& \quad + \cancel{\sin \lambda \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi} - \sin^2 \alpha \cos \lambda \sin \theta + \\
& \quad + \sin^2 \alpha \sin \lambda \cos \lambda \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi - \sin \alpha \cos \alpha \sin \theta \cos \lambda \sin \varphi \cos \varphi + \\
& \quad + \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda \cos^2 \varphi + \sin \alpha \cos \alpha \sin \lambda \cos \lambda \cos \theta \cos^2 \varphi - \\
& \quad \left. - \cos^2 \alpha \cos \lambda \sin \theta \cos^2 \varphi - \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \lambda \sin \varphi \cos \varphi \right)
\end{aligned}$$

Questa espressione non si semplifica, dunque è possibile che vi siano degli errori. Provo a calcolare l'energia cinetica in modo diverso.

L'energia cinetica dovuta alle rotazioni terrestri è in buona approssimazione

$$T_1 \approx \frac{1}{2} m \left\{ \dot{\theta} [R + (h - l \cos \varphi)] \cos \lambda \right\}^2$$

Quelle dovute alle rotazioni del primo π vale

$$T_2 = \frac{1}{2} m (l \sin \varphi \dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} m l^2 \sin^2 \varphi \dot{\theta}^2$$

Quelle dovuta all'oscillazione del pendolo in π si calcola come segue:

$$\begin{cases} \ddot{z}'' = -l \sin \varphi \\ \ddot{\varphi}'' = -l \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}'' = -l \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{\varphi}'' = +l \dot{\varphi} \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow v^2 = l^2 \dot{\varphi}^2 \Rightarrow$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$$

Calcolo ora le derivate di T_1, T_2, T_3 :

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dt} &= \frac{1}{2} m \dot{\lambda} \left[\dot{\lambda} (R+h-l \cos \varphi) \cos \lambda \right] \left[\dot{\lambda} \cos \lambda l \sin \varphi \dot{\varphi} \right] = \\ &= m \dot{\lambda}^2 \cos^2 \lambda l \sin \varphi \dot{\varphi} (R+h-l \cos \varphi) \approx \\ &\approx m R l \dot{\lambda}^2 \cos^2 \lambda \sin \varphi \dot{\varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_2}{dt} &= \frac{1}{2} m l^2 \left(\dot{\lambda} \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi} \dot{\theta}^2 + \sin^2 \varphi \dot{\lambda} \dot{\theta} \ddot{\theta} \right) = \\ &= m l^2 \left(\sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi} \dot{\theta}^2 + \sin^2 \varphi \dot{\theta} \dot{\theta} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{dT_3}{dt} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi}$$

Assumiamo ora $\dot{\theta} \approx 0$ e inoltre adottiamo l'approssimazione delle piccole oscillazioni ($\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$):

$$\begin{cases} \frac{dT_1}{dt} = m R l \dot{\lambda}^2 \cos^2 \lambda \varphi \dot{\varphi} \\ \frac{dT_2}{dt} = m l^2 \varphi \dot{\varphi} \dot{\theta}^2 \\ \frac{dT_3}{dt} = m l^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} \end{cases}$$

Pomunque le conservazioni dell'energia meccanica porta

$$mg \dot{\varphi} + mR \dot{\alpha}^2 \cos^2 \lambda \varphi \dot{\varphi} + ml \dot{\varphi} \dot{\theta}^2 + ml \dot{\varphi} \ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow g \varphi + R \dot{\alpha}^2 \cos^2 \lambda \varphi + l \varphi \dot{\theta}^2 + l \ddot{\varphi} = 0$$

Assumo ora che il moto del pendolo in θ sia armonico, ovvero che

$$\begin{cases} \varphi = A \cos(\omega_m t + \varphi) \\ \dot{\varphi} = -A \omega_m \sin(\omega_m t + \varphi) \\ \ddot{\varphi} = -A \omega_m^2 \cos(\omega_m t + \varphi) \\ \omega_m = \sqrt{g/l} \end{cases} \Rightarrow$$

$$g A \cos(\omega_m t + \varphi) + R \dot{\alpha}^2 \cos^2 \lambda A \cos(\omega_m t + \varphi) + l \dot{\theta}^2 A \cos(\omega_m t + \varphi) - l A \omega_m^2 \cos(\omega_m t + \varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$g + R \dot{\alpha}^2 \cos^2 \lambda + l \dot{\theta}^2 - \frac{l}{l} g = 0 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = -\frac{R \dot{\alpha}^2 \cos^2 \lambda}{l}$$

Questo metodo è sbagliato perché in generale (e in questo caso) l'energia cinetica non gode delle proprietà additive.

Perché la soluzione esatta è macchinosa e suscettibile di errori di calcolo, semplifichiamo le derivate qP_x, qP_y, qP_z ponendo $\sin \varphi = \varphi$ e $\cos \varphi = 1$;

$$\dot{Q}_{P_x} = -l \left[\dot{\alpha} (-\sin \alpha \sin \lambda \cos \theta \varphi + \cos \alpha \sin \theta \varphi - \sin \alpha \cos \lambda) + \right. \\ \left. + \dot{\theta} (-\cos \alpha \sin \lambda \sin \theta \varphi + \sin \alpha \cos \theta \varphi) + \dot{\varphi} (\cos \alpha \sin \lambda \cos \theta + \right. \\ \left. + \sin \alpha \sin \theta - \cos \alpha \cos \lambda \varphi) \right]$$

$$\dot{Q}_{P_y} = -l \left[\dot{\alpha} (\cos \alpha \sin \lambda \cos \theta \varphi + \sin \alpha \sin \theta \varphi + \cos \alpha \cos \lambda) + \right. \\ \left. + \dot{\theta} (-\sin \alpha \sin \lambda \sin \theta \varphi - \cos \alpha \cos \theta \varphi) + \dot{\varphi} (\sin \alpha \sin \lambda \cos \theta - \right. \\ \left. - \cos \alpha \sin \theta - \sin \alpha \cos \lambda \varphi) \right]$$

$$\dot{Q}_{P_z} = l \left[-\dot{\theta} \cos \lambda \sin \theta \varphi + \dot{\varphi} (\cos \lambda \cos \theta + \sin \lambda \varphi) \right]$$

Anche così il metodo energetico appare troppo macchinoso.

Teorema dei moti relativi. Si assume $\tau z' \eta' \zeta'$ come sistema di riferimento mobile e $oxyz$ come sistema di riferimento fisso. Il teorema dei moti relativi perge in generale

$$\vec{a}_a = \vec{a}_o + \vec{a}_r + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{OP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP})$$

Nel nostro caso $\dot{\vec{\omega}} = 0$ e $\vec{a}_o = 0$, dunque

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP})$$

Per l'accelerazione assoluta si ha

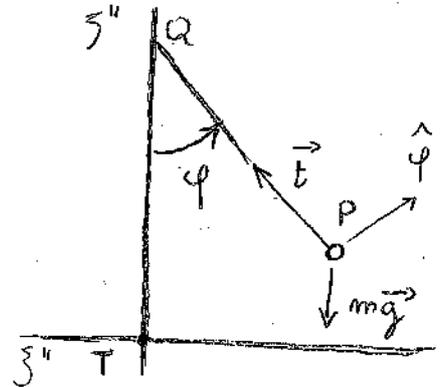
$$\vec{a}_a m v = m \vec{g} + \vec{T} = -m g \hat{E}_3'' - t \frac{\vec{QP}}{|\vec{QP}|} = -m g \hat{E}_3'' - t \frac{\vec{QP}}{l}$$

Per la tensione t del cavo si consideri che:

$$t - m g \cos \varphi = m \dot{\varphi}^2 l \Rightarrow$$

$$t = m g \cos \varphi + m l \dot{\varphi}^2$$

Dunque l'accelerazione si scrive



$$\begin{aligned} \vec{a}_a &= -g \hat{E}_3'' - \frac{t \vec{QP}}{m l} = -g \hat{E}_3'' - \frac{g \cos \varphi + l \dot{\varphi}^2}{l} \vec{QP} = \\ &= -g \hat{E}_3' - \frac{g \cos \varphi + l \dot{\varphi}^2}{l} (-l \sin \varphi \hat{E}_1'' - l \cos \varphi \hat{E}_3'') = \\ &= -g \hat{E}_3' + (g \cos \varphi + l \dot{\varphi}^2) (\sin \varphi \hat{E}_1'' + \cos \varphi \hat{E}_3'') = \\ &= -g \hat{E}_3' + (g \cos \varphi + l \dot{\varphi}^2) (\sin \varphi \cos \vartheta \hat{E}_1' - \sin \varphi \sin \vartheta \hat{E}_2' + \cos \varphi \hat{E}_3') = \\ &= (g \cos \varphi + l \dot{\varphi}^2) \sin \varphi \cos \vartheta \hat{E}_1' - (g \cos \varphi + l \dot{\varphi}^2) \sin \varphi \sin \vartheta \hat{E}_2' + \\ &+ (-g + (g \cos \varphi + l \dot{\varphi}^2) \cos \varphi) \hat{E}_3' \end{aligned}$$

Calcolo ora velocità e accelerazione relative

$$\begin{aligned} \vec{TP} &= \vec{TA} + \vec{AP} = h \hat{E}_3' - l (\sin \varphi \hat{E}_1'' + \cos \varphi \hat{E}_3'') = \\ &= h \hat{E}_3' - l \sin \varphi (\cos \vartheta \hat{E}_1' - \sin \vartheta \hat{E}_2') - l \cos \varphi \hat{E}_3' = \\ &= (h - l \cos \varphi) \hat{E}_3' - l \sin \varphi \cos \vartheta \hat{E}_1' + l \sin \varphi \sin \vartheta \hat{E}_2' \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{\xi}' = -l \sin \varphi \cos \theta \\ \dot{\eta}' = l \sin \varphi \sin \theta \\ \dot{\zeta}' = h - l \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\xi}' = -l (\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \dot{\theta} \sin \theta) \\ \ddot{\eta}' = l (\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \dot{\theta} \cos \theta) \\ \ddot{\zeta}' = -l \dot{\varphi} \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}' &= -l (\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta + \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \theta - \dot{\varphi} \cos \varphi \dot{\theta} \sin \theta - \\ &\quad - \sin \varphi \dot{\theta} \sin \theta) = -l (\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \theta - \dot{\varphi} \cos \varphi \dot{\theta} \sin \theta - \\ &\quad - \dot{\varphi} \cos \varphi \dot{\theta} \sin \theta - \sin \varphi \dot{\theta}^2 \cos \theta) = \\ &= -l (\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \theta - 2 \dot{\varphi} \cos \varphi \dot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \sin \varphi \sin \theta - \\ &\quad - \dot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}' &= l (\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta + \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\varphi} \cos \varphi \dot{\theta} \cos \theta + \\ &\quad + \sin \varphi \dot{\theta} \cos \theta) = l (\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \sin \theta + \\ &\quad + \dot{\varphi} \cos \varphi \dot{\theta} \cos \theta + \dot{\varphi} \cos \varphi \dot{\theta} \cos \theta + \sin \varphi \dot{\theta}^2 \cos \theta - \sin \varphi \dot{\theta}^2 \sin \theta) = \\ &= l (\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \sin \theta + 2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \varphi \cos \theta + \\ &\quad + \dot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \varphi \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\ddot{\zeta}' = l (\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)$$

Calcolo le forze di Coriolis:

$$\vec{\omega} = (-\cos \lambda \hat{e}_1' + \sin \lambda \hat{e}_3')$$

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_R = \dot{\lambda} l \begin{vmatrix} \hat{e}_1^1 & \hat{e}_2^1 & \hat{e}_3^1 \\ -\cos\lambda & 0 & \sin\lambda \\ -\dot{\varphi} \cos\varphi \cos\theta + \sin\varphi \dot{\theta} \sin\theta & \dot{\varphi} \cos\varphi \sin\theta + \sin\varphi \dot{\theta} \cos\theta & \dot{\varphi} \sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$\begin{cases} -\dot{\lambda} \sin\lambda (-\dot{\varphi} \cos\varphi \sin\theta + \sin\varphi \dot{\theta} \cos\theta) \\ \dot{\lambda} \sin\lambda (-\dot{\varphi} \cos\varphi \cos\theta + \sin\varphi \dot{\theta} \sin\theta) + \dot{\varphi} \cos\lambda \sin\varphi \\ -\dot{\lambda} \cos\lambda (-\dot{\varphi} \cos\varphi \sin\theta + \sin\varphi \dot{\theta} \cos\theta) \end{cases}$$

$$2 \vec{\omega} \times \vec{v}_R = 2 \dot{\lambda} l \left\{ -\dot{\lambda} \sin\lambda (-\dot{\varphi} \cos\varphi \sin\theta + \sin\varphi \dot{\theta} \cos\theta) \hat{e}_1^1 + [\dot{\lambda} \sin\lambda (-\dot{\varphi} \cos\varphi \cos\theta + \sin\varphi \dot{\theta} \sin\theta) + \dot{\varphi} \cos\lambda \sin\varphi] \hat{e}_2^1 - \dot{\lambda} \cos\lambda (-\dot{\varphi} \cos\varphi \sin\theta + \sin\varphi \dot{\theta} \cos\theta) \hat{e}_3^1 \right\}$$

Calcolo la forza centrifuga.

$$\vec{\omega} \times \vec{OP} \cong \vec{\omega} \times \vec{OT} = \dot{\lambda} (-\cos\lambda \hat{e}_1^1 + \sin\lambda \hat{e}_3^1) \times R \hat{e}_3^1 =$$

$$= \dot{\lambda} R \begin{vmatrix} \hat{e}_1^1 & \hat{e}_2^1 & \hat{e}_3^1 \\ -\cos\lambda & 0 & \sin\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \dot{\lambda} R \cos\lambda \hat{e}_2^1$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP}) = \dot{\lambda}^2 (-\cos\lambda \hat{e}_1^1 + \sin\lambda \hat{e}_3^1) \times (\dot{\lambda} R \cos\lambda \hat{e}_2^1) =$$

$$= \dot{\lambda}^2 R \begin{vmatrix} \hat{e}_1^1 & \hat{e}_2^1 & \hat{e}_3^1 \\ -\cos\lambda & 0 & \sin\lambda \\ 0 & \cos\lambda & 0 \end{vmatrix} = \dot{\lambda}^2 R (-\sin\lambda \cos\lambda \hat{e}_1^1 + \cos^2\lambda \hat{e}_3^1)$$

La equazione del teorema dei moti rotativi si scrive dunque

$$\textcircled{1} -l(\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta - \cancel{\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \theta} - 2\dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \varphi \sin \theta - \ddot{\theta} \sin \varphi \sin \theta - \ddot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \theta) + 2\dot{\lambda} l \sin \lambda (\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \dot{\theta} \cos \theta) - \dot{\lambda}^2 R \sin \lambda \cos \lambda = (g \cos \varphi + \cancel{l \dot{\varphi}^2}) \sin \varphi \cos \theta$$

$$\textcircled{2} l(\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta - \cancel{\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \sin \theta} + 2\dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \varphi \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \varphi \cos \theta - \ddot{\theta}^2 \sin \varphi \sin \theta) + 2\dot{\lambda} l \sin \lambda (-\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \dot{\theta} \sin \theta) + 2\dot{\lambda} l \dot{\varphi} \cos \lambda \sin \varphi = -(g \cos \varphi + \cancel{l \dot{\varphi}^2}) \sin \varphi \sin \theta$$

$$\textcircled{3} l(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \cancel{\dot{\varphi}^2 \cos \varphi}) - 2\dot{\lambda} l \cos \lambda (\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \dot{\theta} \cos \theta) - \dot{\lambda}^2 R \cos^2 \lambda = -g + (g \cos \varphi + \cancel{l \dot{\varphi}^2}) \cos \varphi$$

~~Verifico che il sistema ottenuto fornisca la soluzione cercata al polo Nord ($\cos \lambda = 0$, $\sin \lambda = 1$). Le tre equazioni danno~~

~~$$l(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) = -g + (g \cos^2 \varphi + l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \Rightarrow$$~~

~~$$l \ddot{\varphi} \sin \varphi + l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi = -g + g - g \sin^2 \varphi + l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \Rightarrow$$~~

~~$$\cancel{\ddot{\varphi} \sin \varphi} = -\frac{g}{l} \sin^2 \varphi \Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} = -\frac{g \sin \varphi}{l}} \Rightarrow \ddot{\varphi} l = -g \sin \varphi$$~~

~~Si ritrova in questo caso le 2.61 per il moto sul piano~~

di oscillazione, la quale si scrive anche

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g \cos \varphi}{l} \Rightarrow \dot{\varphi}^2 l = 2g \cos \varphi$$

La prima equazione si scrive

$$\begin{aligned} & \overset{-g \sin \varphi}{-l \ddot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta + l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \theta + 2l \dot{\varphi} \cos \varphi \dot{\theta} \sin \theta + l \ddot{\theta} \sin \varphi \sin \theta +} \\ & + l \ddot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \theta - 2\dot{\alpha} l (\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \dot{\theta} \cos \theta) = \\ & = g \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta + l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \theta \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2l \dot{\varphi} \cos \varphi \dot{\theta} \sin \theta + l \ddot{\theta} \sin \varphi \sin \theta + l \ddot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \theta - \\ & - 2\dot{\alpha} l \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta - 2\dot{\alpha} l \sin \varphi \dot{\theta} \cos \theta = 0 \end{aligned}$$

La seconda equazione si scrive

$$\begin{aligned} & \overset{-g \sin \varphi}{l \ddot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \sin \theta + 2l \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \varphi \cos \theta +} \\ & + l \ddot{\theta} \sin \varphi \cos \theta - l \ddot{\theta}^2 \sin \varphi \sin \theta + 2\dot{\alpha} l \dot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta + \\ & + 2\dot{\alpha} l \sin \varphi \dot{\theta} \sin \theta = -g \cos \varphi \sin \varphi \sin \theta - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \sin \theta \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2l \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \varphi \cos \theta + l \ddot{\theta} \sin \varphi \cos \theta - l \ddot{\theta}^2 \sin \varphi \sin \theta - \\ & - 2\dot{\alpha} l \dot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta + 2\dot{\alpha} l \sin \varphi \dot{\theta} \sin \theta = 0 \end{aligned}$$

Operando sulle prime due equazioni è possibile eliminare il termine in $\dot{\theta}^2$ ottenendo in fine il sistema risolvibile;

$$\begin{cases}
 l \sin \varphi \ddot{\theta} + 2l \dot{\varphi} \cos \varphi \dot{\theta} - 2\dot{\lambda} l \sin \lambda \dot{\varphi} \cos \varphi + 2\dot{\lambda} l \cos \lambda \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \theta - \\
 - \dot{\lambda}^2 R \cos \lambda \sin \lambda \sin \theta = 0 \\
 l \ddot{\varphi} \sin \varphi - 2\dot{\lambda} l \cos \lambda \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta - 2\dot{\lambda} l \cos \lambda \sin \varphi \dot{\theta} \cos \theta + g \sin^2 \varphi - \\
 - \dot{\lambda}^2 R \cos^2 \lambda = 0
 \end{cases}$$

Appendice V. Snellezza

Definizione di snellezza. Si definisce snellezza di una trave il rapporto

$$1) \quad \lambda = \frac{l_e}{\rho}$$

essendo ρ il raggio d'inerzia della sezione della trave ed assumendo l_e i seguenti valori:

$$2) \quad \begin{cases} l_e = 2l \leftarrow \text{trave incastrate} \\ l_e = l \leftarrow \text{trave appoggiate} \\ l_e = l\sqrt{2} \leftarrow \text{trave fra incastro e cavalletto} \\ l_e = l/2 \leftarrow \text{trave fra incastro e incastro} \end{cases}$$

Snellezza e carico critico. Per le travi con carico di punta si dimostra che per

$$3) \quad \lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_S}} \triangleq \lambda_{\text{MIN}}$$

allora l'instabilità si verifica nell'ambito delle deformazioni elastiche, essendo σ_S la tensione di snervamento. Per gli acciai si ha ad esempio

$$4) \quad \begin{cases} \sigma_S = \frac{210 \text{ N}}{\text{mm}^2} \\ E = \frac{206 \text{ N}}{\text{mm}^2} \end{cases} \Rightarrow \lambda_{\text{MIN}} \cong 100$$

trave incastrata. La Meccanica dei Solidi dimostra in questo caso che

$$5) P_c = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

Detta S la sezione della trave si ha allora $I = S \rho^2$ e dunque

$$6) P_c = \frac{\pi^2 E S \rho^2}{4l^2}$$



Sostituendo la 1 nella 3 si ha poi

$$\frac{l}{\rho} \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_s}} \iff \frac{2l}{\rho} \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_s}} \iff \frac{4l^2}{\rho^2} \geq \frac{\pi^2 E}{\sigma_s} \iff$$

$$\frac{\sigma_s}{\pi^2 E} \geq \frac{\rho^2}{4l^2} \iff \sigma_s \geq \frac{\pi^2 E \rho^2}{4l^2}$$

$$7) \sigma_s S \geq \frac{\pi E S \rho^2}{4l^2}$$

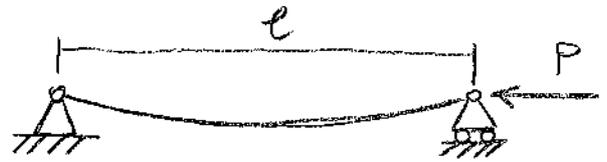
Confrontando le 6, 7 si deduce che

$$8) \lambda \geq \lambda_{\min} \iff \sigma_s S \geq P_c$$

Ovvero appunto la condizione $\lambda \geq \lambda_{\min}$ garantisce che la biforcazione dell'equilibrio avviene nell'ambito del comportamento elastico.

Trave appoggiata. Si dimostra in questo caso che il carico critico vale

$$9) P_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 ESS^2}{l^2}$$



La condizione 3 porge in questo caso

$$\frac{l}{\rho} \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_s}} \iff \frac{l^2}{\rho^2} \geq \frac{\pi^2 E}{\sigma_s} \iff \frac{\sigma_s}{E \pi^2} \geq \frac{\rho^2}{l^2} \iff \sigma_s = \frac{E \pi^2 \rho^2}{l^2} \iff$$

$$10) \sigma_s S = \frac{\pi^2 ESS^2}{l^2} = P_c$$

Dunque anche in questo si verifica che la condizione 3 è necessaria e sufficiente affinché la biforcazione avvenga nell'ambito delle deformazioni elastiche.

Trave fissa incastrata e carrellata. Il carico critico vale

$$11) P_c = \frac{2\pi^2 EI}{l^2} = \frac{2\pi^2 ESS^2}{l^2}$$



La condizione 3 porge

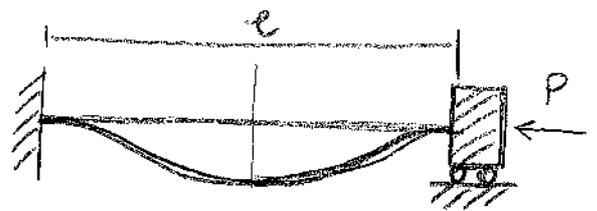
$$\frac{l}{\sqrt{2}\rho} \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_s}} \iff \frac{l^2}{2\rho^2} \geq \frac{\pi^2 E}{\sigma_s} \iff \frac{\sigma_s}{E \pi^2} \geq \frac{2\rho^2}{l^2} \iff \sigma_s \geq \frac{2\rho^2 E \pi^2}{l^2} \iff$$

$$12) \sigma_s S \geq \frac{2\rho^2 E \pi^2 S}{l^2} = P_c$$

Dunque anche in questo caso $\lambda \geq \lambda_{MIN} \iff$ la biforcazione avviene in campo elastico.

Trave tra incastro e incastro. Il carico critico vale

$$13) P_c = \frac{\pi^2 EI}{(l/2)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} = \frac{4\pi^2 ES\beta^2}{l^2}$$



Le relazioni 3 in questo caso pongono

$$\frac{l}{2\beta} \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_s}} \iff \frac{l^2}{4\beta^2} \geq \frac{\pi^2 E}{\sigma_s} \iff \sigma_s \geq \frac{4\beta^2 \pi^2 E}{l^2} \iff \sigma_s \geq \frac{4\pi^2 ES\beta^2}{l^2}$$

Dunque si ha

$$14) \lambda \geq \lambda_{MIN} \iff \sigma_s \geq P_c$$

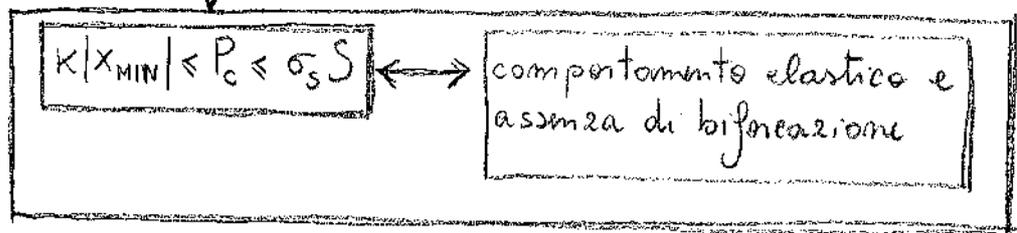
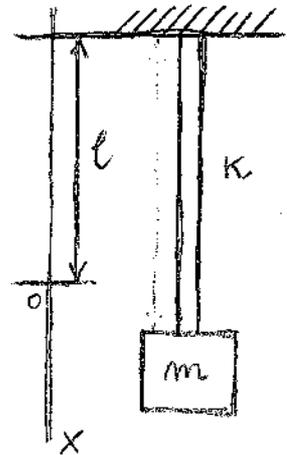
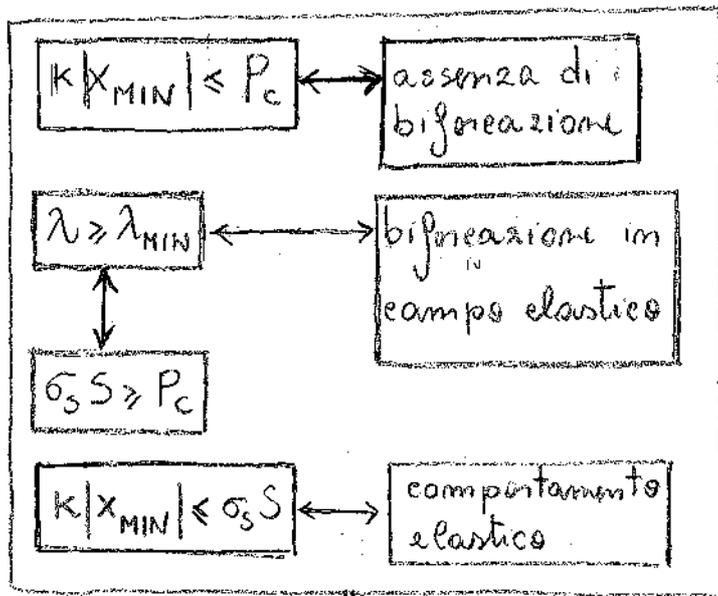
Anche qui dunque se $\lambda \geq \lambda_{MIN}$ allora la biforcazione avviene in campo elastico.

Carico critico e vibrazioni. Nel caso di aste vibranti secondo il loro asse è necessario verificare che in fase di contrazione il carico di compressione non superi il carico critico, perché in questo caso - essendo possibile la configurazione biforcata - il modello matematico proposto in questo volume perde di applicabilità. Si veda in merito il paragrafo 10.10.

Conclusione. La teoria del carico critico di Eulero presuppone che il solido sia nell'ambito del suo comportamento elastico. In questa appendice abbiamo verificato che la condizione 3

garantisce che il solido in questione raggiunge il carico critico in ambito elastico.

Di seguito per la trave caricata di punta vale il seguente schema riassuntivo:



Si intende in quanto sopra che

- S è la sezione della trave
- P_c è il carico critico della trave
- σ_s è lo sforzo di snervamento
- K è la costante elastica
- $\lambda = l_c / S$
- $\lambda_{MIN} = \pi \sqrt{E / \sigma_s}$

Appendice VI. La matematica delle vibrazioni forzate smorzate

Il modello matematico. L'equazione differenziale della
vibrazione meccanica di sistemi a un grado di libertà sot-
toposta a forzante sinusoidale si scrive

$$① \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_m \sin(\Omega t + \phi)$$

dove i parametri m, c, k, F_m assumono significato diverso
a seconda del sistema fisico. Analogamente x può rappresen-
tare una ascisse oppure un'angolo a seconda del sistema
fisico.

Una soluzione particolare. C'è sempre una soluzione del tipo

$$② \quad \begin{cases} x_2 = X_2 \sin(\Omega t + \phi - \varphi) \\ \dot{x}_2 = \Omega X_2 \cos(\Omega t + \phi - \varphi) \\ \ddot{x}_2 = -\Omega^2 X_2 \sin(\Omega t + \phi - \varphi) \end{cases}$$

Sostituendo nella ① si ha

$$m[-\Omega^2 X_2 \sin(\Omega t + \phi - \varphi)] + c[\Omega X_2 \cos(\Omega t + \phi - \varphi)] + \\ + k X_2 \sin(\Omega t + \phi - \varphi) = F_m \sin(\Omega t + \phi) \iff$$

$$\begin{aligned}
 & -m\Omega^2 X_2 \left[\sin(\Omega t + \phi) \cos \varphi - \cos(\Omega t + \phi) \sin \varphi \right] + \\
 & + c\Omega X_2 \left[\cos(\Omega t + \phi) \cos \varphi + \sin(\Omega t + \phi) \sin \varphi \right] + \\
 & + kX_2 \left[\sin(\Omega t + \phi) \cos \varphi - \cos(\Omega t + \phi) \sin \varphi \right] = \underline{F_m \sin(\Omega t + \phi)} \iff
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 (-m\Omega^2 \cos \varphi + c\Omega \sin \varphi + k \cos \varphi) X_2 \sin(\Omega t + \phi) = F_m \sin(\Omega t + \phi) \\
 (m\Omega^2 \sin \varphi + c\Omega \cos \varphi - k \sin \varphi) X_2 \cos(\Omega t + \phi) = 0
 \end{cases}$$

Devendo queste condizioni valere $\forall t$, allora si deduce

$$2.b) \begin{cases}
 (-m\Omega^2 \cos \varphi + c\Omega \sin \varphi + k \cos \varphi) X_2 = F_m \\
 (k - m\Omega^2) \sin \varphi = c\Omega \cos \varphi
 \end{cases} \iff$$

$$3) \begin{cases}
 X_2 = \frac{F_m}{(k - m\Omega^2) \cos \varphi + c\Omega \sin \varphi} \\
 \tan \varphi = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}
 \end{cases}$$

Con alcuni passaggi è possibile riscrivere le 3 come

$$4) \begin{cases}
 X_2 = \frac{F_m/k}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2}} \\
 \tan \varphi = \frac{2\zeta m}{1-m^2}
 \end{cases}$$

essendo $\zeta = c/(2\sqrt{km})$ e $m = \Omega/\omega_m$. Definisco per il COEFFICIENTE DI AMPLIFICAZIONE DINAMICA come

$$5) \quad \gamma \triangleq \frac{X_2 k}{F_m} = \frac{1}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2}} \iff X_2 = \gamma \frac{F_m}{k}$$

Dunque la soluzione particolare x della 1 si scrive

$$6) \quad x_2 = \gamma \frac{F_m}{k} \sin[\Omega t + \phi - \varphi]$$

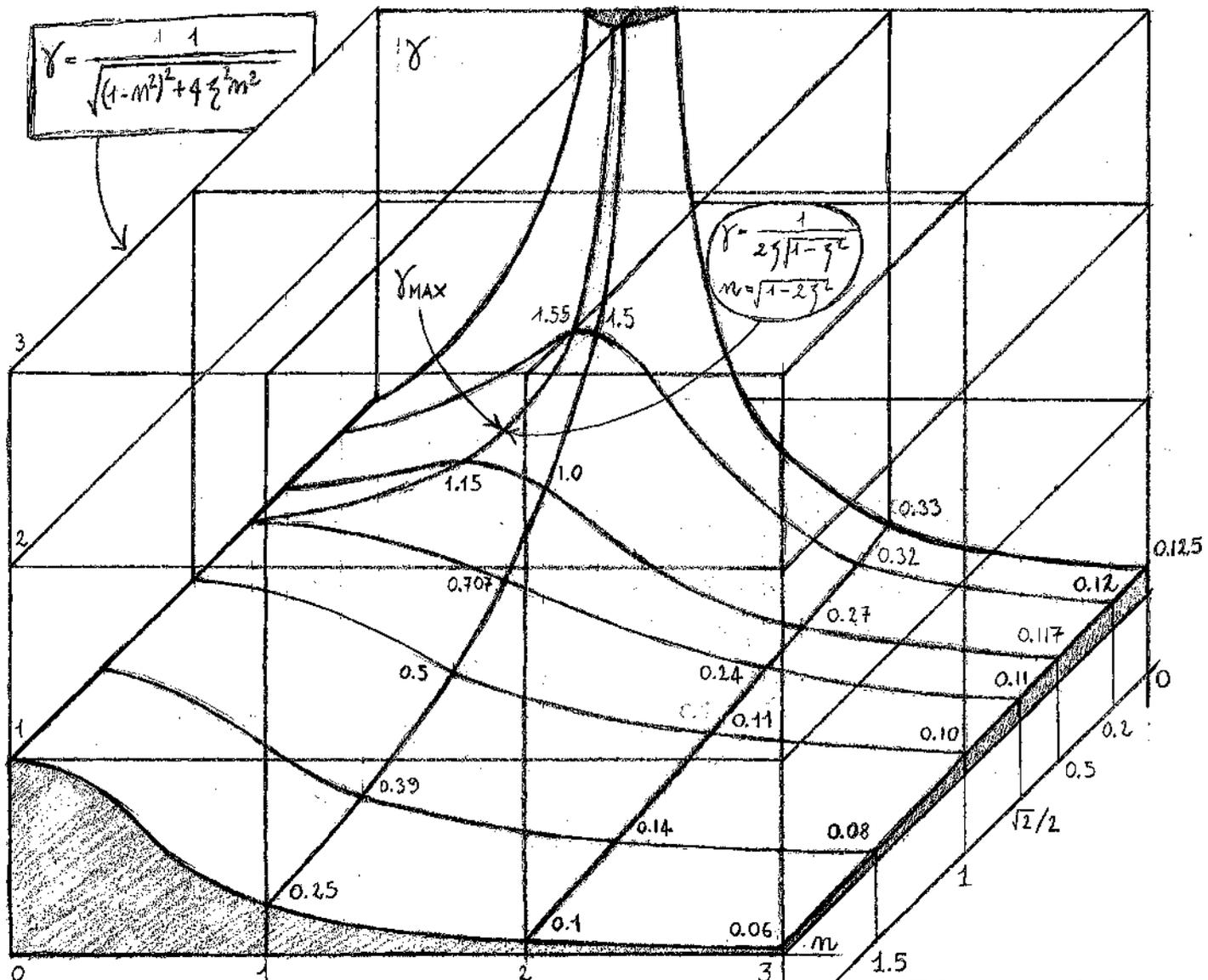
avendo

$$7) \quad x_2 = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2}}}_{\gamma} \underbrace{\left[\frac{F_m}{k} \right]}_{X_s} \sin \left[\Omega t + \phi - \underbrace{\arctan\left(\frac{2\zeta m}{1-m^2}\right)}_{\varphi} \right]$$

Si osserva che F_m/k è la deformazione che il sistema subisce in corrispondenza di una forza costante F_m - detta DEFORMAZIONE STATICA X_s :

$$8) \quad X_s \triangleq F_m/k$$

Per le funzioni $\gamma = \gamma(m, \zeta)$ e $\varphi = \varphi(m, \zeta)$ si tracciano i diagrammi riportati nella tabella seguente.



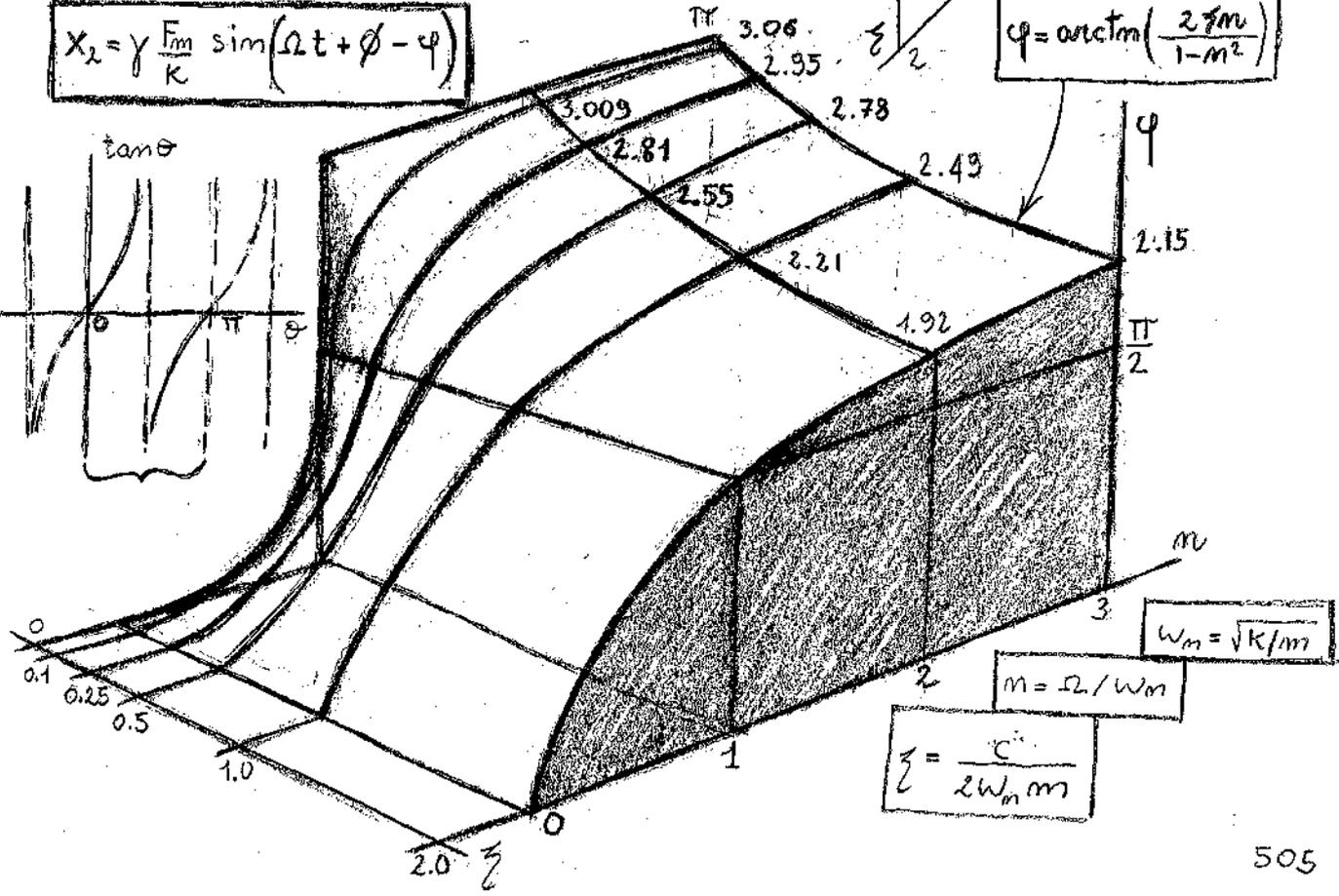
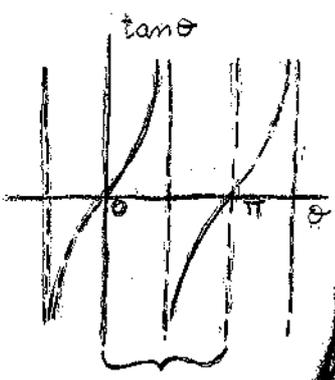
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4zeta^2 m^2}}$$

$$\gamma = \frac{1}{2zeta\sqrt{1-zeta^2}}$$

$$m = \sqrt{1-2zeta^2}$$

$$x_2 = \gamma \frac{F_m}{K} \sin(\Omega t + \phi - \psi)$$

$$\psi = \arctan\left(\frac{2zeta m}{1-m^2}\right)$$



$$w_m = \sqrt{K/m}$$

$$m = \Omega / w_m$$

$$zeta = \frac{c}{2w_m m}$$

Coefficiente di amplificazione dinamica. Ricavo la curva γ_{MAX} la quale rappresenta il luogo dei massimi delle curve $\gamma = \gamma(m)$.

$$\frac{\partial \gamma}{\partial m} = -\frac{1}{2} \left((1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2 \right)^{-\frac{3}{2}} (-4(1-m^2)m + 8\zeta^2 m) = 0 \iff$$

$$-1+m^2+2\zeta^2=0 \iff m^2=1-2\zeta^2 \implies \boxed{m=\sqrt{1-2\zeta^2}} \implies$$

$$\begin{aligned} \gamma \Big|_{m=\sqrt{1-2\zeta^2}} &= \frac{1}{\sqrt{4\zeta^4+4\zeta^2m^2}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{\zeta^2+m^2}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{\zeta^2+1-2\zeta^2}} = \\ &= \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \end{aligned}$$

Dunque la rappresentazione parametrica della curva è

$$\gamma_{\text{MAX}} : \begin{cases} \zeta = t \\ m = \sqrt{1-2t^2} \\ \gamma = \frac{1}{2t\sqrt{1-t^2}} \end{cases} \quad t \in [0, \sqrt{2}/2]$$

Sossiva dunque che

② il valore massimo della amplificazione dinamica si raggiunge - in presenza di smorzamento - per una pulsazione $\Omega < \omega_n$.

Sfasamento. In assenza di smorzamento le z.b. si snivono

$$\begin{cases} -m\Omega^2 \cos\varphi + k \cos\varphi = \frac{F_m}{X_2} \\ (k - m\Omega^2) \sin\varphi = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (k - m\Omega^2) \cos\varphi = \frac{F_m}{X_2} \\ (k - m\Omega^2) \sin\varphi = 0 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} (\omega_m^2 - \Omega^2) \cos\varphi = \frac{F_m}{mX_2} \\ (\omega_m^2 - \Omega^2) \sin\varphi = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (1 - m^2) \cos\varphi = \frac{F_m}{mX_2\omega_m^2} \\ (1 - m^2) \sin\varphi = 0 \end{cases}$$

D'altra parte le prime delle 4 porge $X_2 = (F_m/k)/|1 - m^2|$, dunque

$$11) \begin{cases} \cos\varphi = \frac{F_m |1 - m^2| k}{m F_m (1 - m^2) \omega_m^2} = \frac{\omega_m^2 F_m |1 - m^2|}{\omega_m^2 F_m (1 - m^2)} = \frac{|1 - m^2|}{1 - m^2} \\ (1 - m^2) \sin\varphi = 0 \end{cases}$$

Si consideri ora il comportamento di φ per $m < 1$:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{|1 - (1 - \varepsilon)^2|}{(1 - (1 - \varepsilon)^2)} = \frac{|1 - 1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon|}{(1 - 1 - \varepsilon^2 + 2\varepsilon)} = \frac{|-\varepsilon^2 + 2\varepsilon|}{(-\varepsilon^2 + 2\varepsilon)} = \frac{|2 - \varepsilon|}{(2 - \varepsilon)} = 1 \\ (2\varepsilon - \varepsilon^2) \sin\varphi = 0 \end{cases}$$

Dunque per $m < 1$ si ha $\cos\varphi = 1$ e $\sin\varphi = 0$ ovvero $\varphi = 0$.

Consideriamo ora φ per $m > 1$:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{|1 - (\varepsilon + 1)^2|}{1 - (\varepsilon + 1)^2} = \frac{|1 - \varepsilon^2 - 1 - 2\varepsilon|}{1 - \varepsilon^2 - 1 - 2\varepsilon} = \frac{|-\varepsilon^2 - 2\varepsilon|}{-\varepsilon^2 - 2\varepsilon} = -\frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}{\varepsilon^2 + 2\varepsilon} = -1 \\ (-\varepsilon^2 - 2\varepsilon) \sin\varphi = 0 \end{cases}$$

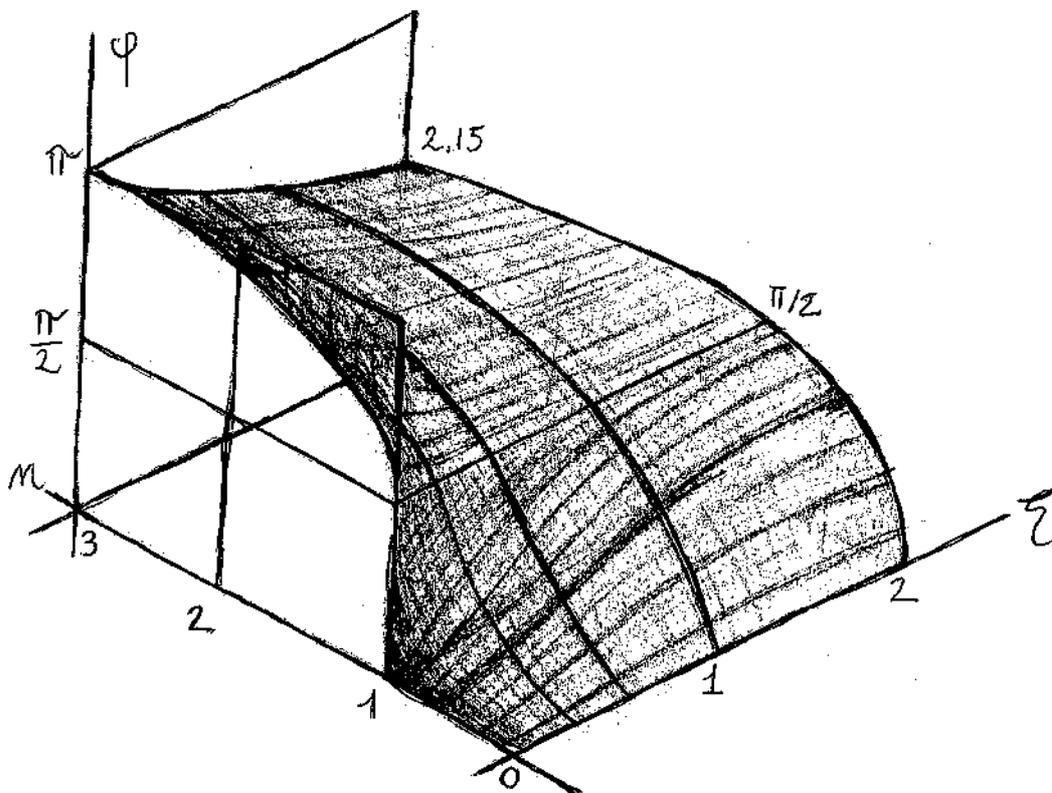
Dunque per $m > 1$ si ha $\cos\varphi = -1$ e $\sin\varphi = 0$ ovvero $\varphi = \pi$.

In $m=1$ la funzione $\cos \varphi$ salta da -1 a 1 mentre la funzione $\sin \varphi$ vale zero. Convenzionalmente si pone $\varphi = \pi/2$ per $m=1$. Dunque si conclude che

$$12) \quad \zeta = 0 \rightarrow \begin{cases} m < 1 \rightarrow \varphi = 0 \\ m = 1 \rightarrow \varphi = \pi/2 \\ m > 1 \rightarrow \varphi = \pi \end{cases}$$

$$13) \quad \zeta > 0 \rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{2\zeta m}{1-m^2}\right)$$

Rappresentando il grafico del ritardo di fase da un altro punto di vista si ha il diagramma seguente.



1) L'integrale generale: L'equazione algebrica associata alle
1 parte

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-c \mp \sqrt{c^2 - 4mk}}{2} \Rightarrow$$

$$14) \begin{cases} \lambda_1 = -\omega_m \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) = -\omega_m \zeta + \omega_m \sqrt{\zeta^2 - 1} \\ \lambda_2 = -\omega_m \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) = -\omega_m \zeta - \omega_m \sqrt{\zeta^2 - 1} \end{cases}$$

Si hanno dunque i tre integrali generali seguenti

$$15) \begin{cases} x = A \cos(\omega_m t) + B \sin(\omega_m t) + X_2 \sin(\Omega t + \phi - \varphi) \\ \zeta = 0, \Omega \neq \omega_m \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} x = e^{-\omega_m \zeta t} \left[C_1 \cos(\omega_m \sqrt{1 - \zeta^2} t) + C_2 \sin(\omega_m \sqrt{1 - \zeta^2} t) \right] + X_2 \sin(\Omega t + \phi - \varphi) \\ \zeta \in]0, 1[\end{cases}$$

$$17) \begin{cases} x = e^{-\omega_m \zeta t} (C_3 + t C_4) + X_2 \sin(\Omega t + \phi - \varphi) \\ \zeta = 1 \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} x = e^{-\omega_m \zeta t} (C_5 e^{-\omega_m \sqrt{\zeta^2 - 1} t} + C_6 e^{+\omega_m \sqrt{\zeta^2 - 1} t}) + X_2 \sin(\Omega t + \phi - \varphi) \\ \zeta > 1 \end{cases}$$

È sommo separatamente i vari casi e ricavo le costanti.

Integrale generale per $\gamma=0$ e $\Omega \neq \omega_m$. La 15 unitamente alle
4 paragono

$$19) \quad x = A \cos(\omega_m t) + B \sin(\omega_m t) + \frac{1}{|1-m^2|} \frac{F_m}{K} \sin(\Omega t + \phi - \varphi)$$

Distinguendo per i casi $m < 1$ e $m > 1$ si ha

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega_m t) + B \sin(\omega_m t) + \frac{1}{1-m^2} \frac{F_m}{K} \sin(\Omega t + \phi) \\ m < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega_m t) + B \sin(\omega_m t) + \frac{1}{1-m^2} \frac{F_m}{K} \sin(\Omega t + \phi - \pi) \\ m > 1 \end{cases}$$

Ma essendo per $-\sin(\Omega t + \phi - \pi) = \sin(\Omega t + \phi)$, allora segue che i due casi si riconducono al medesimo caso:

$$20) \quad \begin{cases} x = A \cos(\omega_m t) + B \sin(\omega_m t) + \frac{1}{1-m^2} \frac{F_m}{K} \sin(\Omega t + \phi) \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Ricavo le costanti A, B imponendo le c.i.:

$$x_0 = A + \frac{1}{1-m^2} \frac{F_m}{K} \sin \phi \Rightarrow A = x_0 - \frac{1}{1-m^2} \frac{F_m}{K} \sin \phi$$

$$\dot{x} = -A \omega_m \sin(\omega_m t) + B \omega_m \cos(\omega_m t) + \frac{1}{1-m^2} \frac{F_m}{K} \Omega \cos(\Omega t + \phi) \Rightarrow$$

$$\dot{x}_0 = B\omega_m + \frac{1}{1-m^2} \frac{F_m}{k} \Omega \cos \phi \Rightarrow B = \frac{\dot{x}_0}{\omega_m} - \frac{1}{1-m^2} \frac{F_m}{k\omega_m} \Omega \cos \phi$$

Dunque abbiamo la soluzione

$$\textcircled{21} \quad x = \left(x_0 - \frac{1}{1-m^2} \frac{F_m}{k} \sin \phi \right) \cos(\omega_m t) + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_m} - \frac{1}{1-m^2} \frac{F_m}{k\omega_m} \Omega \cos \phi \right) \sin(\omega_m t) + \frac{1}{1-m^2} \frac{F_m}{k} \sin(\Omega t + \phi)$$

Con la simbologia introdotta si ha più brevemente

$$\textcircled{22} \quad x = (x_0 - \gamma X_s \sin \phi) \cos(\omega_m t) + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_m} - \gamma X_s \frac{\Omega}{\omega_m} \cos \phi \right) \sin(\omega_m t) + \gamma X_s \sin(\Omega t + \phi)$$

Integrale generale per $\zeta=0$ e $\Omega=\omega_m$. Questo caso si ottiene mandando al limite - per $\Omega \rightarrow \omega_m$ - la 22, la quale si scrive

$$\begin{aligned} x &= (x_0 - \gamma X_s \sin \phi) \cos(\omega_m t) + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_m} - \gamma X_s \frac{\Omega}{\omega_m} \cos \phi \right) \sin(\omega_m t) + \\ &+ \gamma X_s \left[\sin(\Omega t) \cos \phi + \cos(\Omega t) \sin \phi \right] = x_0 \cos(\omega_m t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) - \\ &- \gamma X_s \sin \phi \cos(\omega_m t) - \gamma X_s \frac{\Omega}{\omega_m} \cos \phi \sin(\omega_m t) + \gamma X_s \sin(\Omega t) \cos \phi + \\ &+ \gamma X_s \cos(\Omega t) \sin \phi \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\textcircled{23} \quad \boxed{ x = x_0 \cos(\omega_m t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + \gamma X_s \sin \phi \left[\cos(\Omega t) - \cos(\omega_m t) \right] + \gamma X_s \cos \phi \left[\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega_m} \sin(\omega_m t) \right] }$$

Opero il limite per $\Omega \rightarrow \omega_m$:

$$\begin{aligned} \lim_{\Omega \rightarrow \omega_m} \gamma [\cos(\Omega t) - \cos(\omega_m t)] &= \lim_{\Omega \rightarrow \omega_m} \frac{\cos(\Omega t) - \cos(\omega_m t)}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_m^2}} = \\ &= \lim_{\Omega \rightarrow \omega_m} \frac{\frac{d}{d\Omega} (\cos(\Omega t) - \cos(\omega_m t))}{\frac{d}{d\Omega} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_m^2}\right)} = \lim_{\Omega \rightarrow \omega_m} \frac{-t \sin(\Omega t)}{-2\Omega/\omega_m^2} = \frac{\omega_m^2 t \sin(\omega_m t)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Omega \rightarrow \omega_m} \gamma \left[\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega_m} \sin(\omega_m t) \right] &= \lim_{\Omega \rightarrow \omega_m} \frac{\frac{d}{d\Omega} \left(\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega_m} \sin(\omega_m t) \right)}{\frac{d}{d\Omega} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_m^2} \right)} = \\ &= \lim_{\Omega \rightarrow \omega_m} \frac{t \cos(\Omega t) - \frac{\sin(\omega_m t)}{\omega_m}}{-2\Omega/\omega_m^2} = \frac{t \cos(\omega_m t) - \frac{\sin(\omega_m t)}{\omega_m}}{-2} \omega_m \end{aligned}$$

Perunque si ha

$$\begin{aligned} \textcircled{24} \quad x &= x_0 \cos(\omega_m t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + \frac{X_S \sin \phi}{2} \omega_m t \sin(\omega_m t) + \\ &- \frac{\omega_m X_S \cos \phi}{2} \left(t \cos(\omega_m t) - \frac{\sin(\omega_m t)}{\omega_m} \right) \end{aligned}$$

Integrale generale per $\zeta \in]0, 1[$. Derivando le 16 si ha

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega_m \zeta e^{-\omega_m \zeta t} [C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)] + e^{-\omega_m \zeta t} [-C_1 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + \\ &+ C_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t)] + X_2 \Omega \cos(\Omega t + \phi - \varphi) \end{aligned}$$

Impongo la condizione iniziale

$$\begin{cases} x_0 = C_1 + X_2 \sin(\phi - \varphi) \\ \dot{x}_0 = -\omega_m \zeta C_1 + C_2 \omega_D + X_2 \Omega \cos(\phi - \varphi) \end{cases} \Rightarrow$$

$$25) \quad C_1 = x_0 - X_2 \sin(\phi - \varphi)$$

$$\dot{x}_0 = -\omega_m \zeta [x_0 - X_2 \sin(\phi - \varphi)] + C_2 \omega_D + X_2 \Omega \cos(\phi - \varphi) \Rightarrow$$

$$\dot{x}_0 + \omega_m \zeta x_0 = \omega_m \zeta X_2 \sin(\phi - \varphi) + X_2 \Omega \cos(\phi - \varphi) + C_2 \omega_D \Rightarrow$$

$$26) \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 + X_0 \omega_m \zeta - \omega_m \zeta X_2 \sin(\phi - \varphi) - X_2 \Omega \cos(\phi - \varphi)}{\omega_D}$$

*

Integrale generale per $\zeta = 1$. Derivando Eq. 17 abbiamo

$$\dot{x} = -\omega_m \zeta e^{-\omega_m \zeta t} (C_3 + t C_4) + e^{-\omega_m \zeta t} C_4 + X_2 \Omega \cos(\Omega t + \phi - \varphi)$$

Impongo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x_0 = C_3 + X_2 \sin(\phi - \varphi) \\ \dot{x}_0 = -\omega_m \zeta C_3 + C_4 + X_2 \Omega \cos(\phi - \varphi) \end{cases} \Rightarrow$$

$$27) \quad C_3 = x_0 - X_2 \sin(\phi - \varphi)$$

$$C_4 = \dot{x}_0 + \omega_m \zeta (x_0 - X_2 \sin(\phi - \varphi)) - X_2 \Omega \cos(\phi - \varphi) \Rightarrow$$

$$C_4 = \dot{x}_0 + X_0 \omega_m \zeta - X_2 \omega_m \zeta \sin(\phi - \varphi) - X_2 \Omega \cos(\phi - \varphi) \Rightarrow$$

$$28) \quad C_4 = \dot{x}_0 + X_0 \omega_m \zeta - X_2 [\omega_m \zeta \sin(\phi - \varphi) + \Omega \cos(\phi - \varphi)]$$

Dunque le 17 si scrive

$$x = e^{-\omega_m \zeta t} \left\{ x_0 - X_2 \sin(\phi - \varphi) + t(\dot{x}_0 + x_0 \omega_m \zeta) - \right. \\ \left. - t X_2 [\omega_m \zeta \sin(\phi - \varphi) + \Omega \cos(\phi - \varphi)] \right\} + X_2 \sin(\Omega t + \phi - \varphi) =$$

$$\textcircled{29} \quad x = e^{-\omega_m \zeta t} \left[x_0 + (\dot{x}_0 + x_0 \omega_m \zeta) t \right] + X_2 e^{-\omega_m \zeta t} \left[\sin(\phi - \varphi) + \right. \\ \left. + t [\omega_m \zeta \sin(\phi - \varphi) + \Omega \cos(\phi - \varphi)] \right] + X_2 \sin(\Omega t + \phi - \varphi)$$

* Dunque le 16 si scrive

$$x = e^{-\omega_m \zeta t} \left\{ [x_0 - X_2 \sin(\phi - \varphi)] \cos(\omega_0 t) + \left[\frac{\dot{x}_0 + x_0 \omega_m \zeta}{\omega_0} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{X_2}{\omega_0} [\omega_m \zeta \sin(\phi - \varphi) + \Omega \cos(\phi - \varphi)] \right] \sin(\omega_0 t) \right\} + \\ + X_2 \sin(\Omega t + \phi - \varphi) \Rightarrow$$

$$\textcircled{30} \quad x = e^{-\omega_m \zeta t} \left[x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_0 + x_0 \omega_m \zeta}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right] - \\ - X_2 e^{-\omega_m \zeta t} \left[\sin(\phi - \varphi) \cos(\omega_0 t) + \frac{\omega_m \zeta \sin(\phi - \varphi) + \Omega \cos(\phi - \varphi)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right] + \\ + X_2 \sin(\Omega t + \phi - \varphi)$$

Integrale generale per $\gamma > 1$. Derivando la 18 si ha

$$\dot{x} = -w_m \gamma e^{-w_m \gamma t} (C_5 e^{-w_0 t} + C_6 e^{w_0 t}) + e^{-w_m \gamma t} (-w_0 C_5 e^{-w_0 t} + w_0 C_6 e^{w_0 t}) + X_2 \Omega \cos(\Omega t + \phi - \varphi)$$

Impongo le c.i.:

$$\begin{cases} x_0 = C_5 + C_6 + X_2 \sin(\phi - \varphi) \\ \dot{x}_0 = -w_m \gamma (C_5 + C_6) - w_0 (C_5 - C_6) + X_2 \Omega \cos(\phi - \varphi) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_0 - X_2 \sin(\phi - \varphi) = C_5 + C_6 \\ \dot{x}_0 = (-w_m \gamma - w_0) C_5 + (-w_m \gamma + w_0) C_6 + X_2 \Omega \cos(\phi - \varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_5 = -C_6 + x_0 - X_2 \sin(\phi - \varphi) \\ \dot{x}_0 = (-w_m \gamma - w_0) [-C_6 + x_0 - X_2 \sin(\phi - \varphi)] + (-w_m \gamma + w_0) C_6 + X_2 \Omega \cos(\phi - \varphi) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= + (w_m \gamma + w_0) C_6 - (w_m \gamma + w_0) [x_0 - X_2 \sin(\phi - \varphi)] + (-w_m \gamma + w_0) C_6 + \\ &+ X_2 \Omega \cos(\phi - \varphi) = (w_m \gamma + w_0 - w_m \gamma + w_0) C_6 - (w_m \gamma + w_0) [x_0 - \\ &- X_2 \sin(\phi - \varphi)] + X_2 \Omega \cos(\phi - \varphi) = 2w_0 C_6 - (w_m \gamma + w_0) [x_0 - \\ &- X_2 \sin(\phi - \varphi)] + X_2 \Omega \cos(\phi - \varphi) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\textcircled{31} \quad C_6 = \frac{\dot{x}_0 + (w_m \gamma + w_0) [x_0 - X_2 \sin(\phi - \varphi)] + X_2 \Omega \cos(\phi - \varphi)}{2w_0} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
C_5 &= -C_6 + 2X_0\omega_D - 2\omega_D X_2 \sin(\phi - \varphi) = \\
&= -\frac{\dot{x}_0}{2\omega_D} - \frac{(\omega_m \zeta + \omega_D)}{2\omega_D} [x_0 - X_2 \sin(\phi - \varphi)] + \frac{X_2 \Omega \cos(\phi - \varphi)}{2\omega_D} + \\
&+ \frac{2X_0\omega_D - 2\omega_D X_2 \sin(\phi - \varphi)}{2\omega_D} = \frac{-\dot{x}_0 - (\omega_m \zeta + \omega_D) [x_0 - X_2 \sin(\phi - \varphi)] +}{2\omega_D} + \\
&+ \frac{X_2 \Omega \cos(\phi - \varphi) + 2X_0\omega_D - 2\omega_D X_2 \sin(\phi - \varphi)}{2\omega_D} = \\
&= \frac{-\dot{x}_0 - (\omega_m \zeta + \omega_D) [x_0 - X_2 \sin(\phi - \varphi)] + X_2 \Omega \cos(\phi - \varphi) +}{2\omega_D} + \\
&+ \frac{2\omega_D [x_0 - X_2 \sin(\phi - \varphi)]}{2\omega_D} = \frac{-\dot{x}_0 - (\omega_m \zeta - \omega_D) [x_0 - X_2 \sin(\phi - \varphi)] +}{2\omega_D} + \\
&+ \frac{X_2 \Omega \cos(\phi - \varphi)}{2\omega_D} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$32) C_5 = \frac{-\dot{x}_0 - (\omega_m \zeta - \omega_D) [x_0 - X_2 \sin(\phi - \varphi)] + X_2 \Omega \cos(\phi - \varphi)}{2\omega_D}$$

Donque la soluzione generale è

$$\begin{aligned}
33) x &= \frac{e^{-\omega_m \zeta t}}{2\omega_D} \left\{ -[\dot{x}_0 + (\omega_m \zeta - \omega_D)x_0] e^{-\omega_D t} + [\dot{x}_0 + (\omega_m \zeta + \omega_D)x_0] e^{\omega_D t} \right\} + \\
&+ e^{-\omega_m \zeta t} \frac{X_2}{2\omega_D} \left\{ [(\omega_m \zeta - \omega_D) \sin(\phi - \varphi) + \Omega \cos(\phi - \varphi)] e^{-\omega_D t} + \right. \\
&+ \left. [-(\omega_m \zeta + \omega_D) \sin(\phi - \varphi) - \Omega \cos(\phi - \varphi)] e^{\omega_D t} \right\} + X_2 \sin(\Omega t + \\
&+ \phi - \varphi)
\end{aligned}$$

Tabella riassuntiva. Le soluzioni della 1 el variare di ζ ;

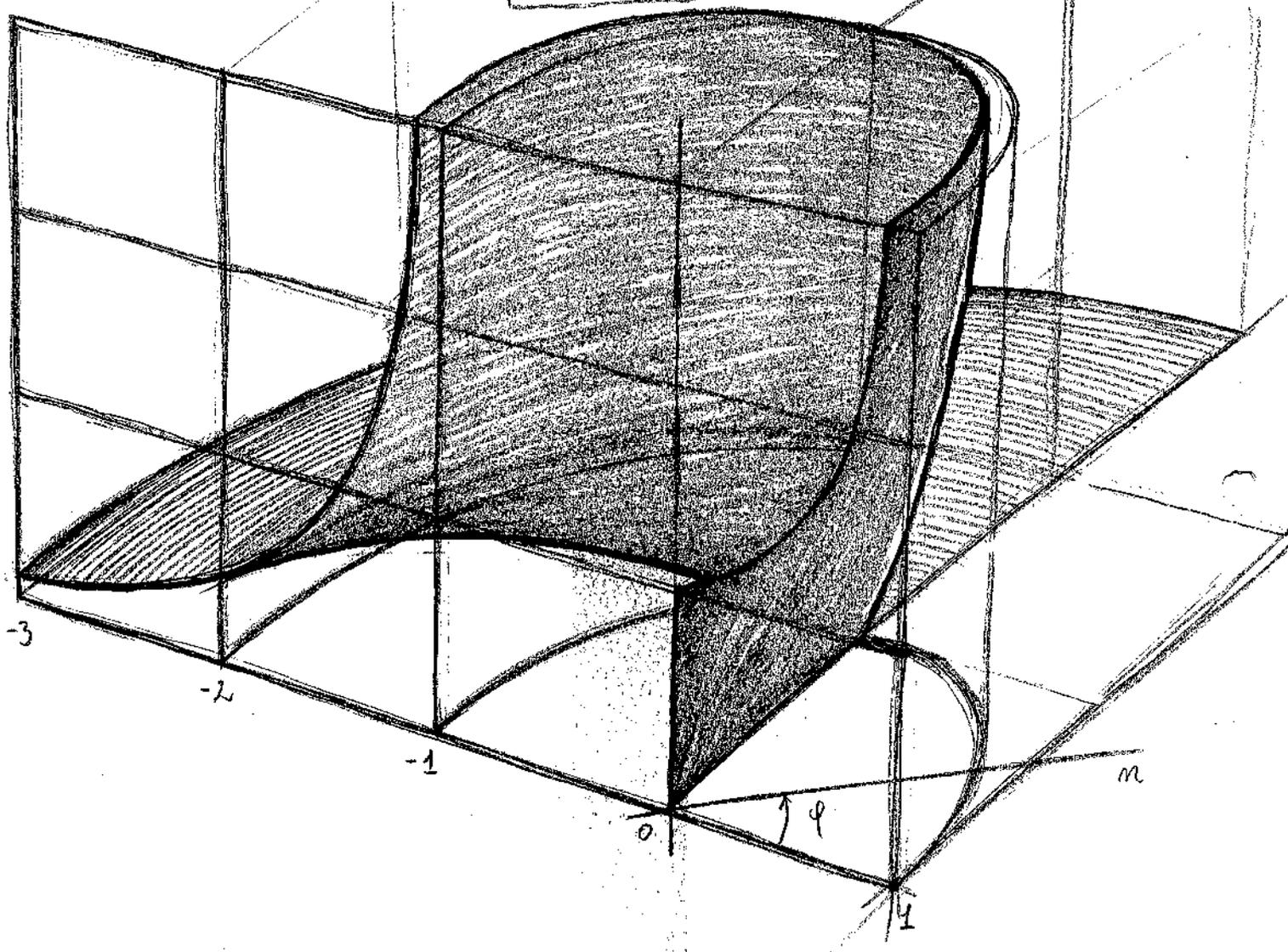
$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = F_m \sin(\Omega t + \phi)$$

$\zeta = 0$	$X = X_0 \cos(\omega_m t) + \frac{\dot{X}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t)$ ①	$\gamma X_s \left\{ \sin \phi [\cos(\Omega t) - \cos(\omega_m t)] + \cos \phi [\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega_m} \sin(\omega_m t)] \right\}$ ②	$\Omega \neq \omega_m$
	$X = X_0 \cos(\omega_m t) + \frac{\dot{X}_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t)$ ①	$\frac{\omega_m}{2} X_s \left\{ t [\sin \phi \sin(\omega_m t) - \cos \phi \cos(\omega_m t)] + \frac{\cos \phi}{\omega_m} \sin(\omega_m t) \right\}$ ②	$\Omega = \omega_m$
$\zeta \in]0, 1[$	$X = e^{-\omega_m \zeta t} \left[X_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{X}_0 + X_0 \omega_0 \zeta}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right]$ ③	$-X_2 e^{-\omega_m \zeta t} \left[\sin(\phi - \varphi) \cos(\omega_0 t) + \frac{\omega_m \zeta \sin(\phi - \varphi) + \Omega \cos(\phi - \varphi)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right] + X_2 \sin(\Omega t + \phi - \varphi)$ ④ ⑤	
$\zeta = 1$	$X = e^{-\omega_m \zeta t} \left[X_0 + (\dot{X}_0 + X_0 \omega_m \zeta) t \right]$ ③	$-X_2 e^{-\omega_m \zeta t} \left\{ \sin(\phi - \varphi) + [\omega_m \zeta \sin(\phi - \varphi) + \Omega \cos(\phi - \varphi)] t \right\}$ ④	$+ X_2 \sin(\Omega t + \phi - \varphi)$ ⑤
$\zeta > 1$	$X = \frac{e^{-\omega_m \zeta t}}{2\omega_0} \left\{ -\left[X_0 + (\omega_m \zeta - \omega_0) X_0 \right] e^{-\omega_0 t} + \left[X_0 + (\omega_m \zeta + \omega_0) X_0 \right] e^{\omega_0 t} \right\} + \frac{X_2}{2\omega_0} e^{-\omega_m \zeta t} \left\{ [\omega_m \zeta - \omega_0] \sin(\phi - \varphi) + \Omega \cos(\phi - \varphi) \right\} e^{-\omega_0 t} - [\omega_m \zeta + \omega_0] \sin(\phi - \varphi) + \Omega \cos(\phi - \varphi) \right\} e^{\omega_0 t} + X_2 \sin(\Omega t + \phi - \varphi)$ ⑤	$\zeta > 1$	

- 1: OSCILLAZIONE LIBERA
- 1+2: OSCILLAZIONE FORZATA NON SMORZATA
- 3: OSCILLAZIONE SMORZATA
- 3+4+5: OSCILLAZIONE FORZATA SMORZATA
- 3+4: TRANSITORIO
- 5: REGIME

$\omega_m = \sqrt{k/m}$	$X_2 = X_s \gamma$
$\zeta = c / (2\sqrt{k m})$	$X_s = F_m / k$
$m = \Omega / \omega_m$	$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2}}$
$\omega_0 = \omega_m \sqrt{\zeta^2 - 1}$	$\varphi = \arctan\left(\frac{2\zeta m}{1-m^2}\right)$

$$\gamma = \frac{e \cos \varphi}{1 - m^2}$$



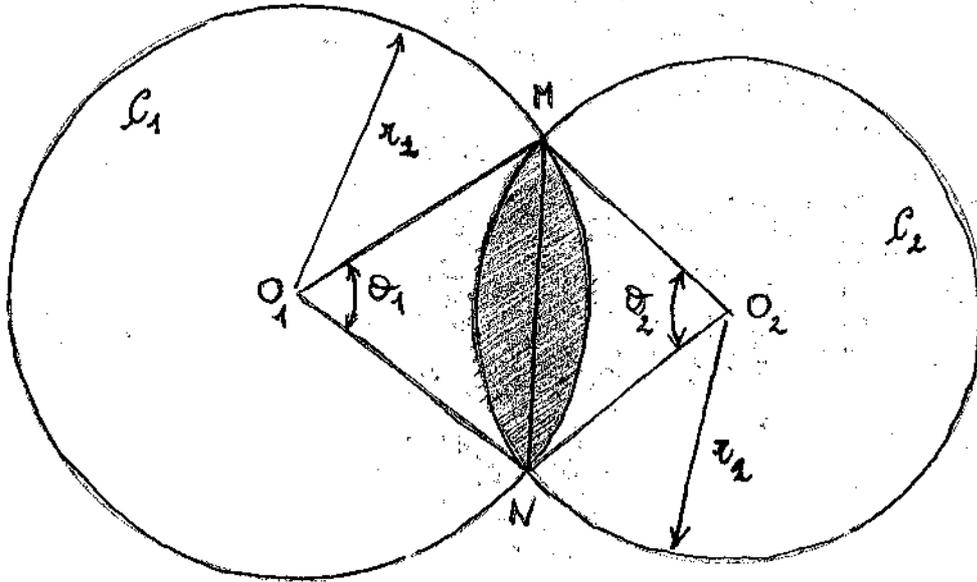
Espressioni alternative di γ . Si trova - con alcuni passaggi - che γ può anche essere espresso anche come

$$34) \gamma = \frac{\cos \varphi}{1 - m^2}$$

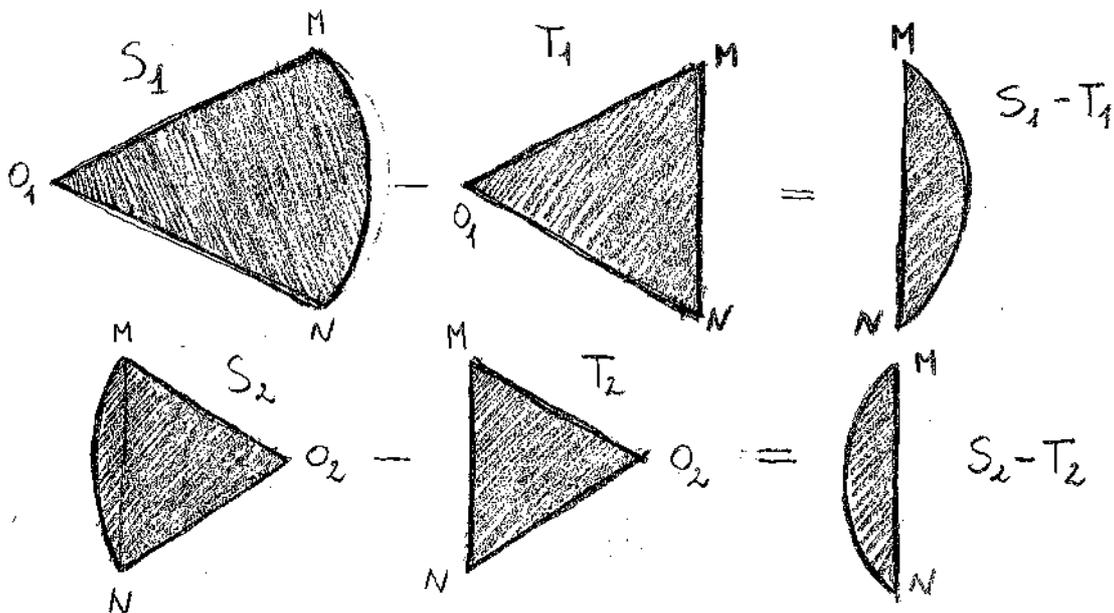
Le rappresentazioni nelle coordinate cilindriche (m, φ, γ) è riportate in figura.

Appendice VII. Fusso circolare

Definizione. È la figura descritta dalla intersezione fra due cerchi complanari, di raggio r_1, r_2 .



Area del fusso circolare. È data dalla differenza fra la somma delle aree dei due settori circolari e l'area del quadrilatero O_1MO_2N . Infatti:



Si consideri ora che

$$1) \quad S_1 = \frac{\theta_1 \pi_1^2}{2}, \quad S_2 = \frac{\theta_2 \pi_2^2}{2}$$

$$\begin{cases} \overline{MN} = 2\pi_1 \sin \frac{\theta_1}{2} = 2\pi_2 \sin \frac{\theta_2}{2} \\ h_1 = \pi_1 \cos \frac{\theta_1}{2} \\ h_2 = \pi_2 \cos \frac{\theta_2}{2} \end{cases}$$

⇓

$$\begin{cases} T_1 = \frac{\overline{MN} h_1}{2} = \frac{2\pi_1 \sin \frac{\theta_1}{2} h_1}{2} = \pi_1 h_1 \sin \frac{\theta_1}{2} = \pi_1^2 \sin \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_1}{2} \\ T_2 = \frac{\overline{MN} h_2}{2} = \frac{2\pi_2 \sin \frac{\theta_2}{2} h_2}{2} = \pi_2 h_2 \sin \frac{\theta_2}{2} = \pi_2^2 \sin \frac{\theta_2}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} \end{cases}$$

⇓

$$2) \quad \begin{cases} T_1 = \pi_1^2 \sin \theta_1 / 2 \\ T_2 = \pi_2^2 \sin \theta_2 / 2 \end{cases}$$

$$3) \quad \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{\sin(\theta_2/2)}{\sin(\theta_1/2)}$$

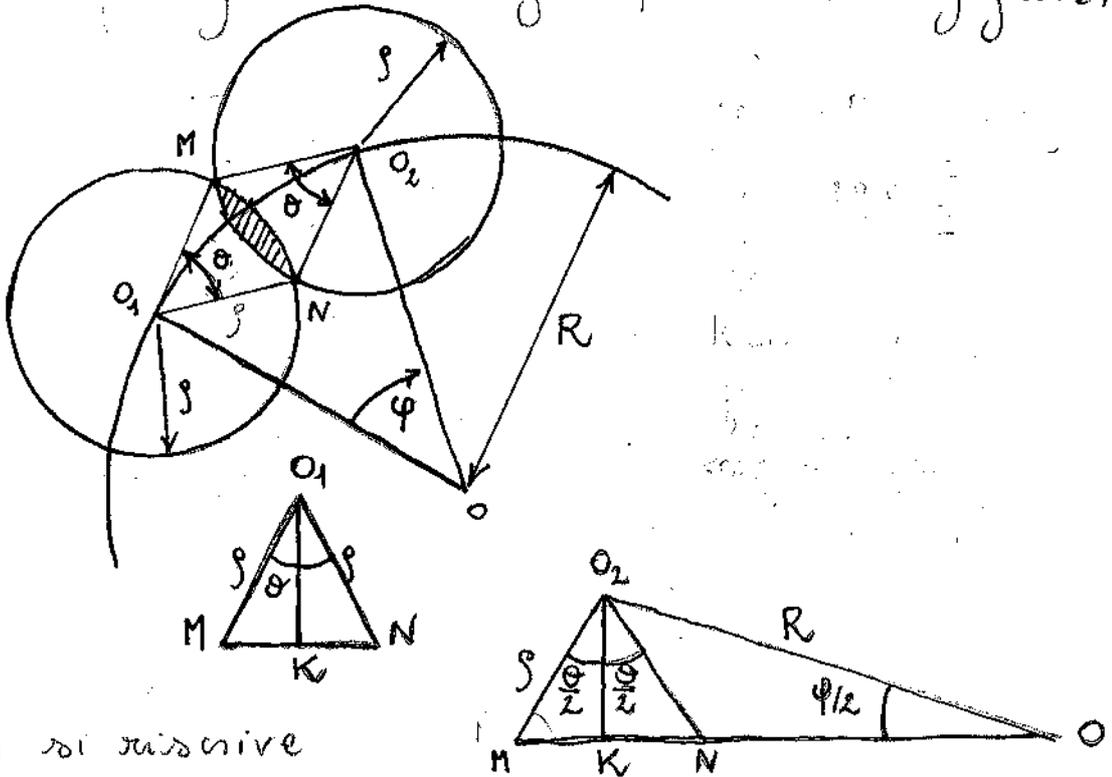
Dunque si ha che l'area del fuso circolare vale

$$A = S_1 + S_2 - T_1 - T_2 = \frac{\theta_1 \pi_1^2}{2} + \frac{\theta_2 \pi_2^2}{2} - \frac{\pi_1^2 \sin \theta_1}{2} - \frac{\pi_2^2 \sin \theta_2}{2} \Rightarrow$$

$$4) \quad A = \frac{(\theta_1 - \sin \theta_1) \pi_1^2 + (\theta_2 - \sin \theta_2) \pi_2^2}{2}$$

Cerchi con stesso raggio. Si consideri ora il caso in cui i due

cerchi abbiano stesso raggio e che le loro posizioni reciproche sia definite dall'angolo φ indicato in figure.



La 4 si scrive

$$5) A = (2 - \sin \theta) r^2$$

D'altra parte si ha

$$\begin{cases} O_1O_2 = 2R \sin \frac{\varphi}{2} \\ O_1O_2 = 2r \cos \frac{\theta}{2} \end{cases} \Rightarrow R \sin \frac{\varphi}{2} = r \cos \frac{\theta}{2} \Rightarrow \cos \frac{\theta}{2} = \frac{R}{r} \sin \frac{\varphi}{2} \Rightarrow$$

$$6) \theta = 2 \arccos \left(\frac{R}{r} \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$MK = \sqrt{r^2 - O_1K^2} = \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \Rightarrow$$

$$7) r \sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$\overline{O_1K} = \frac{O_1O_2}{2} \Rightarrow$$

$$8) \quad g \cos \frac{\theta}{2} = R \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$9) \quad \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{2}{g} \sqrt{g^2 - R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \frac{R}{g} \sin \frac{\varphi}{2}$$

Sostituendo e e g nella 5 abbiamo

$$10) \quad \begin{cases} A = \left[2 \arccos \left(\frac{R}{g} \sin \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{2R \sin \varphi}{g^2} \sqrt{g^2 - R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \right] g^2 \\ R \sin \frac{\varphi}{2} < g \quad (\text{affinché vi sia intersezione fra le circonferenze}) \end{cases}$$

Nel caso in cui $\sin \varphi$ piuttosto modesto si può porre $\sin \varphi = \varphi$:

$$11) \quad \begin{cases} A = 2g^2 \left[\arccos \left(\frac{R\varphi}{g^2} \right) - \frac{R\varphi}{g^2} \sqrt{g^2 - \frac{R^2\varphi^2}{4}} \right] \\ R\varphi < g \end{cases}$$

\Downarrow ← ponendo $\delta = 2g$

$$12) \quad \begin{cases} A = \frac{\delta^2}{2} \left[\arccos \left(\frac{R\varphi}{\delta} \right) - \frac{R\varphi}{\delta} \sqrt{\delta^2 - R^2\varphi^2} \right] \\ R\varphi < \delta \end{cases}$$

Appendice VIII. Curve di estinzione

1. Considerazioni sullo spostamento. Si abbia una oscillazione libera smorzata con $\zeta < 1$ e $\varphi = 0$. Si vuole dimostrare che per i massimi e minimi relativi della funzione $x = x(t)$ descritti nel paragrafo 3.6 - detti rispettivamente x_H e x_m - si ha

$$\textcircled{1} \begin{cases} x_m = x(t_{\text{term}}) \text{ con } t_{\text{term}} \mid \sin(\omega_s t_{\text{term}}) = -\sqrt{1-\zeta^2} \\ x_H = x(t_{\text{ext}}) \text{ con } t_{\text{ext}} \mid \sin(\omega_s t_{\text{ext}}) = \sqrt{1-\zeta^2} \end{cases} *$$

Nel paragrafo 3.6 abbiamo dimostrato che

$$\textcircled{2} \begin{cases} x_m = x(t_{\text{term}}) \text{ con } t_{\text{term}} = \frac{T_s}{2\pi} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) - \varphi \right] + \frac{k T_s}{2}, \quad k = 1, 3, 5, \dots \\ x_H = x(t_{\text{ext}}) \text{ con } t_{\text{ext}} = \frac{T_s}{2\pi} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) - \varphi \right] + \frac{k T_s}{2}, \quad k = 0, 2, 4, \dots \end{cases}$$

Si ha poi $\omega_s = 2\pi/T_s \iff T_s = 2\pi/\omega_s$ da cui, sostituendo in 2. segue

$$\textcircled{3} \begin{cases} t_{\text{term}} = \frac{1}{\omega_s} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) - \varphi \right] + \frac{k\pi}{\omega_s}, \quad k = 1, 3, 5, \dots \\ t_{\text{ext}} = \frac{1}{\omega_s} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) - \varphi \right] + \frac{k\pi}{\omega_s}, \quad k = 0, 2, 4, \dots \end{cases}$$

Essendo per - per ipotesi - $\varphi = 0$, allora si ha

$$4) \begin{cases} t_{\text{erM}} = \frac{1}{\omega_0} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) + \frac{k\pi}{\omega_0}, & k=1,3,5,\dots \\ t_{\text{erM}} = \frac{1}{\omega_0} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) + \frac{k\pi}{\omega_0}, & k=0,2,4,\dots \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \omega_0 t_{\text{erM}} - k\pi = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right), & k=1,3,5,\dots \\ \omega_0 t_{\text{erM}} - k\pi = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right), & k=0,2,4,\dots \end{cases} \Rightarrow$$

$$5) \begin{cases} \tan(\omega_0 t_{\text{erM}} - k\pi) = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}, & k=1,3,5,\dots \\ \tan(\omega_0 t_{\text{erM}} - k\pi) = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}, & k=0,2,4,\dots \end{cases}$$

* Si precisa che ho indicato con t_{erM} gli istanti in cui x assume i valori dell'estremo relativo di minimo e ho indicato con t_{erM} gli istanti in cui x assume i valori dell'estremo relativo di massimo. Si consideri ora che

$$\begin{aligned} \sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t) &= 1 \Rightarrow \sin^2(\omega_0 t) = 1 - \cos^2(\omega_0 t) = \frac{1 - \cos^2(\omega_0 t)}{\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)} = \\ &= \frac{1 - \cos^2(\omega_0 t)}{\cos^2(\omega_0 t) (1 + \tan^2(\omega_0 t))} = \frac{\tan^2(\omega_0 t)}{1 + \tan^2(\omega_0 t)} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$6) \sin(\omega_0 t) = \frac{\tan(\omega_0 t)}{\sqrt{1 + \tan^2(\omega_0 t)}}$$

Si consideri ancora che

$$7) \tan(\omega_0 t - k\pi) = \frac{\sin(\omega_0 t - k\pi)}{\cos(\omega_0 t - k\pi)} = \frac{\sin(\omega_0 t)\cos(k\pi) + \sin(k\pi)\cos(\omega_0 t)}{\cos(\omega_0 t)\cos(k\pi) + \sin(\omega_0 t)\sin(k\pi)}$$

Si consideri ora che

$$\textcircled{10.8} \begin{cases} k=1, 3, 5, \dots \Rightarrow \tan(\omega_0 t - k\pi) = \tan(\omega_0 t) \\ k=0, 2, 4, \dots \Rightarrow \tan(\omega_0 t - k\pi) = \tan(\omega_0 t) \end{cases}$$

Sostituendo le 10.8 nelle 10.6 abbiamo

$$\textcircled{10.9} \quad \sin(\omega_0 t) = \frac{\tan(\omega_0 t - k\pi)}{\sqrt{1 + \tan^2(\omega_0 t - k\pi)}}$$

Sostituendo le 10.5 nelle 10.9 si ha

$$\textcircled{10.10} \quad \sin(\omega_0 t) = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \sqrt{\frac{1}{1 + (1-\zeta^2)/\zeta^2}} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \sqrt{\frac{\zeta^2}{\zeta^2 + 1 - \zeta^2}} = \sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow$$

$$\textcircled{10.11} \quad \boxed{\sin(\omega_0 t_{\text{orm}}) = \sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow$$

$$\sin(\omega_0 t_{\text{orm}}) = \sin\left[\omega_0\left(t_{\text{orm}} + \frac{\pi}{\omega_0}\right)\right] = \sin(\omega_0 t_{\text{orm}} + \pi) = \sin(\omega_0 t_{\text{orm}}) \cos \pi +$$

$$+ \cos(\omega_0 t_{\text{orm}}) \sin \pi = -\sin(\omega_0 t_{\text{orm}}) \Rightarrow$$

$$\textcircled{10.12} \quad \boxed{\sin(\omega_0 t_{\text{orm}}) = -\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Da 11, 12 verificano le tesi, anche se queste dimostrazioni ha dei punti oscuri e ondrubbe riviste.

2. Curve di estinzione: Si consideri una oscillazione libera (in cui sia $\varphi=0$) smorzata periodica (cioè con $\zeta < 1$). Si ricavi l'espressione delle curve di estinzione.

A tale scopo si ricordi che lo spostamento - per il caso $\zeta < 0$ - si scrive (vedi paragrafo 3.6)

$$\textcircled{13} \begin{cases} x = e^{-w_m \zeta t} C \sin(w_d t + \varphi) \\ C = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + w_m \zeta x_0)^2}{w_d^2}} \\ \tan \varphi = \frac{x_0 w_d}{\dot{x}_0 + w_m \zeta x_0} \end{cases}$$

Per $\varphi=0$ si ha anche $x_0=0$ e viceversa, dunque si ha

$$\textcircled{14} \begin{cases} x = e^{-w_m \zeta t} C \sin(w_d t) \\ C = \sqrt{\dot{x}_0^2 / w_d^2} = |\dot{x}_0| / w_d \end{cases}$$

Assumiamo ora per le curve di estinzione una forma del tipo

$$\textcircled{15} x = \pm B e^{-w_m \zeta t}$$

Impongo ora che lo spostamento incontrate curve di estinzione in punti in cui coincide con esse le tangenti.

$$\textcircled{16} \begin{cases} x = e^{-w_m \zeta t} C \sin(w_d t) \\ x = B e^{-w_m \zeta t} \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = C \sin(w_d t)}$$

$$\textcircled{17} \begin{cases} x = e^{-w_m \zeta t} C \sin(w_d t) \\ x = -B e^{-w_m \zeta t} \end{cases} \Rightarrow \boxed{C \sin(w_d t) = -B}$$

Quindi abbiamo che i punti di intersezione fra lo spostamento e le curve di estinzione sono dati da

$$\textcircled{18} \begin{cases} \sin(w_d t_i) = +B/C \\ \sin(w_d t_i) = -B/C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_i = +\frac{1}{w_d} \arcsin\left(\frac{B}{C}\right) \\ t_i = -\frac{1}{w_d} \arcsin\left(\frac{B}{C}\right) \end{cases}$$

Impongo ora che in questi punti le curve di estinzione abbiano la stessa tangente dello spostamento.

$$\begin{cases} \dot{x} = -w_m \zeta e^{-w_m \zeta t} C \sin(w_d t) + e^{-w_m \zeta t} C w_d \cos(w_d t) \\ \dot{x} = B(-w_m \zeta) e^{-w_m \zeta t} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{-w_m \zeta t} C [-w_m \zeta \sin(w_d t) + w_d \cos(w_d t)] \\ \dot{x} = -w_m \zeta B e^{-w_m \zeta t} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{-w_m \zeta t_i} C [-w_m \zeta \sin(w_d t_i) + w_d \cos(w_d t_i)] \\ \dot{x} = -w_m \zeta B e^{-w_m \zeta t_i} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\cancel{e^{-w_m \zeta t_i}} C [-w_m \zeta \sin(w_d t_i) + w_d \cos(w_d t_i)] = -w_m \zeta B \cancel{e^{-w_m \zeta t_i}} \Rightarrow$$

$$[-w_m \zeta \sin(w_d t_i) + w_d \cos(w_d t_i)] = -w_m \zeta \frac{B}{C} \Rightarrow$$

$$\textcircled{19} -w_m \zeta \frac{B}{C} + w_0 \cos(w_0 t_i) = -w_m \zeta \frac{B}{C}$$

Si consideri ora che $\cos(w_0 t_i) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(w_0 t_i)}$, dunque si ha

$$-w_m \zeta \frac{B}{C} + w_0 \sqrt{1 - \sin^2(w_0 t_i)} = -w_m \zeta \frac{B}{C} \Rightarrow \sqrt{1 - \sin^2(w_0 t_i)} = 0 \Rightarrow$$

$$\textcircled{20} \sin(w_0 t_i) = 1 \leftarrow \text{curve di estinzione superiore}$$

⊕ Ragionando analogamente per la curva di estinzione inferiore si ha:

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{-w_m \zeta t_i} C [-w_m \zeta \sin(w_0 t_i) + w_0 \cos(w_0 t_i)] \\ \dot{x} = +w_m \zeta B e^{-w_m \zeta t_i} \end{cases} \Rightarrow$$

$$e^{-w_m \zeta t_i} C [-w_m \zeta \sin(w_0 t_i) + w_0 \cos(w_0 t_i)] = w_m \zeta B e^{-w_m \zeta t_i} \Rightarrow$$

$$-w_m \zeta \sin(w_0 t_i) + w_0 \cos(w_0 t_i) = w_m \zeta \frac{B}{C} \Rightarrow$$

$$-w_m \zeta \left(-\frac{B}{C}\right) + w_0 \cos(w_0 t_i) = w_m \zeta \frac{B}{C} \Rightarrow$$

$$w_m \zeta \frac{B}{C} + w_0 \cos(w_0 t_i) = w_m \zeta \frac{B}{C} \Rightarrow$$

$$\textcircled{21} \sin(w_0 t_i) = 1 \leftarrow \text{curve di estinzione inferiore}$$

Sostituendo le $\textcircled{20}$, $\textcircled{21}$ nelle $\textcircled{18}$ si ricava

$$\textcircled{22} B = C$$

Dunque abbiamo per le curve di estinzione

$$23) x = \pm \frac{|\dot{x}_0|}{\omega_D} e^{-\omega_m \zeta t}$$

3. Esempio numerico. Dato un oscillatore libero smorzato caratterizzato dai seguenti parametri:

$$24) \begin{cases} \varphi = 0 \\ T_D = 1 \text{ s} \\ \zeta = 0,5 \\ x(t = 0,25 T_D) = 10 \text{ mm} \end{cases}$$

si vuole ricavare il ramo superiore della curva di estinzione. Essendo allora $\varphi = 0$ per ipotesi, si ha che

$$25) \begin{cases} x = e^{-\omega_m \zeta t} C \sin(\omega_D t) \\ C = |\dot{x}_0| / \omega_D \end{cases}$$

Ricavo allora ω_D dalla 2^a delle 24:

$$\omega_D T_D = 2\pi \Rightarrow \boxed{\omega_D = \frac{2\pi}{T_D} = \frac{6,283}{\text{s}}}$$

Ricavo C usando la 4^a delle 24:

$$x(t = 0,25 \text{ s}) = e^{-\omega_m 0,5 \cdot 0,25 \text{ s}} C \sin(6,283 \cdot 0,25) = 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow$$

$$e^{-\omega_m 0,125 \text{ s}} C \cdot 0,99 = 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow$$

$$26) C = \frac{10^{-2} m}{0.99} e^{w_m \cdot 0.125}$$

Ricavo w_m a partire da ζ e w_0 :

$$w_0 = w_m \sqrt{1 - \zeta^2} \Rightarrow w_m = \frac{w_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{6,283}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - 0,25}} = 7,254 \frac{\pi}{2}$$

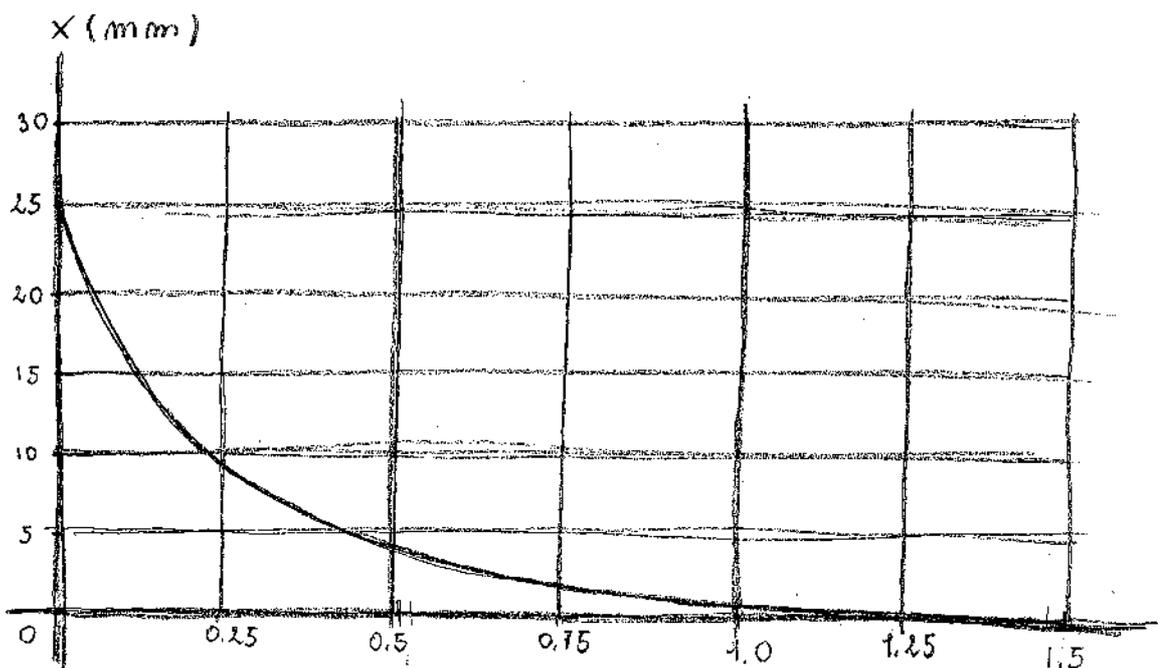
Sostituisco w_m nelle 26:

$$C = \frac{10^{-2} m}{0.99} e^{7,254 \cdot 0.125} = 2,5 \cdot 10^{-2} m$$

In conclusione le curve di estinzione sono

$$27) X = \pm 2,5 \cdot 10^{-2} m e^{-3,627 t}$$

Traccio il grafico del ramo superiore, con l'aiuto di una calcolatrice grafica,



Appendice IX. Piano complesso e vibrazioni

In queste sedi espongo in maniera più concisa quanto già esposto nei paragrafi 5.9, 5.11, 5.12, 5.13, 5.14, 6.2 a proposito dell'utilizzo del piano complesso nello studio delle vibrazioni meccaniche.

Numero complesso associato. Data una funzione sinusoidale del tipo:

$$① x(t) = X \sin(\Omega t - \varphi)$$

definisco suo NUMERO COMPLESSO ASSOCIATO il numero complesso

$$② \bar{X}(t) = X [\cos(\Omega t - \varphi) + j \sin(\Omega t - \varphi)] = X e^{j(\Omega t - \varphi)}$$

Se si avesse una funzione del tipo

$$③ x(t) = X \cos(\Omega t - \varphi)$$

si osserva che

$$\begin{cases} \cos(\Omega t - \varphi) \sin \frac{\pi}{2} + \sin(\Omega t - \varphi) \cos \frac{\pi}{2} = \cos(\Omega t - \varphi) \\ \cos(\Omega t - \varphi) \sin \frac{\pi}{2} + \sin(\Omega t - \varphi) \cos \frac{\pi}{2} = \sin(\Omega t + \frac{\pi}{2} - \varphi) \end{cases} \Rightarrow$$

$$④ \cos(\Omega t - \varphi) = \sin(\Omega t + \frac{\pi}{2} - \varphi)$$

† Sarebbe più intuitivo associare a $x(t)$ il numero complesso del quale esse rappresenta le parti reali, e per quello che segue andrebbe altrettanto bene. Tuttavia mi attengo alle esposizioni del libro di Belfiore.

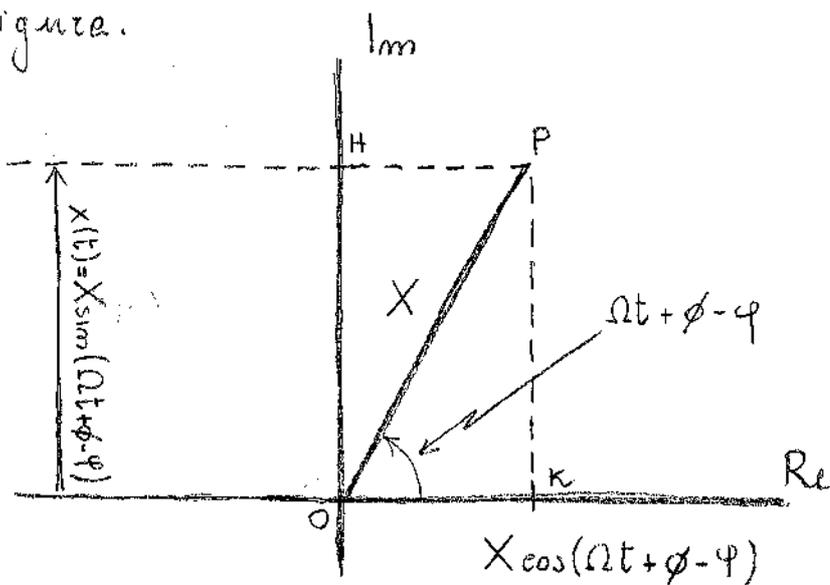
Quindi per il numero complesso associato si ha

$$5) \bar{X}(t) = X [\cos(\Omega t + \pi/2 - \varphi) + j \sin(\Omega t + \pi/2 - \varphi)] = \bar{X} e^{j(\Omega t + \pi/2 - \varphi)}$$

Dunque qualunque sia la funzione trigonometrica $x(t)$ è sempre possibile ricondurle a una sinusoidale. Vale la regola generale

$$6) x = X \sin(\Omega t + \phi - \varphi) \longleftrightarrow \bar{X} = X [\cos(\Omega t + \phi - \varphi) + j \sin(\Omega t + \phi - \varphi)] = \bar{X} e^{j(\Omega t + \frac{\pi}{2} - \varphi)}$$

Rappresentazione sul piano complesso. Il numero complesso associato secondo la regola 6 alla funzione sinusoidale $x = X \sin(\Omega t + \phi - \varphi)$ è suscettibile - come moto - di rappresentazione sul piano complesso, come in figura.



Si osserva che il vettore \vec{OP} ruota nel piano complesso con velocità angolare Ωt e con un periodo T dato da

$$7) \quad \Omega T = 2\pi \iff T = 2\pi/\Omega$$

Derivazione. Derivo la funzione sinusoidale $x = X \sin(\Omega t + \phi - \varphi)$ e mi ricavo il numero complesso associato:

$$8) \quad \dot{x}(t) = X\Omega \cos(\Omega t + \phi - \varphi)$$

utilizzando poi le 4 abbiamo

$$9) \quad \dot{x}(t) = X\Omega \sin(\Omega t + \phi - \varphi + \pi/2)$$

Dunque la regola 6 porge

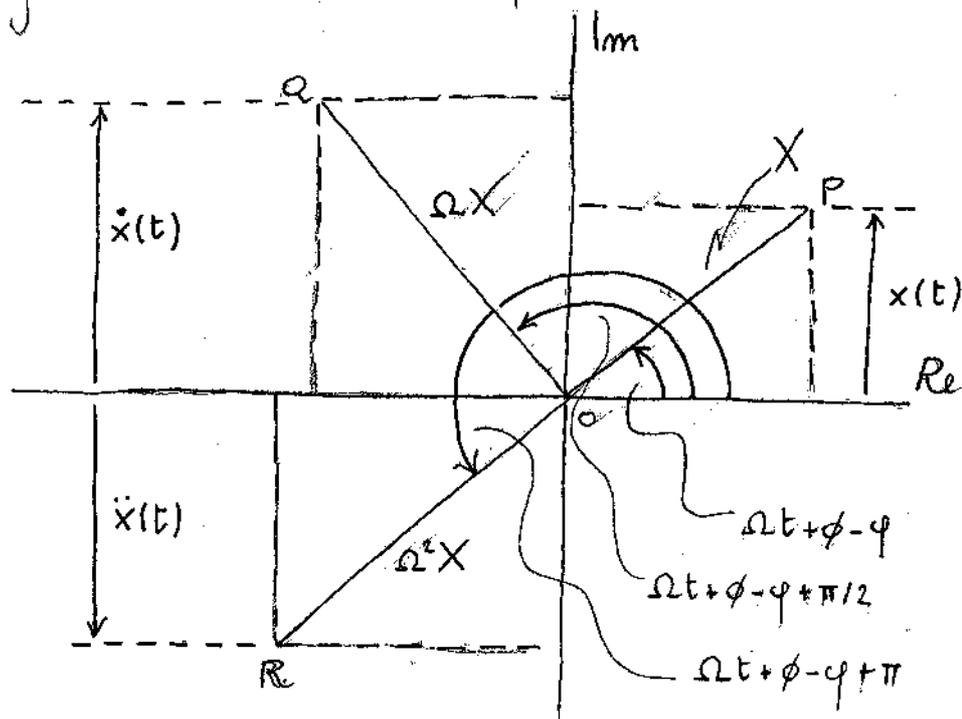
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= X\Omega \sin(\Omega t + \phi - \varphi + \pi/2) \iff X\Omega \left[\cos(\Omega t + \phi - \varphi + \pi/2) + \right. \\ &\quad \left. + j \sin(\Omega t + \phi - \varphi + \pi/2) \right] = X\Omega e^{j(\Omega t + \phi - \varphi + \pi/2)} = \Omega e^{j\pi/2} X e^{j(\Omega t + \phi - \varphi)} = \\ &= \Omega e^{j\pi/2} \bar{X} = \Omega \left(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} \right) \bar{X} = \Omega j \bar{X} \iff \end{aligned}$$

$$10) \quad \boxed{\dot{x}(t) = \Omega \left[X \sin(\Omega t + \phi - \varphi) \right] \iff \Omega j \bar{X} = \Omega j X e^{j(\Omega t + \phi - \varphi)}}$$

In definitiva la derivazione si traduce - in campo complesso - nella moltiplicazione per Ωj . Derivando due volte $x(t)$ abbiamo allora:

$$11) \quad \begin{cases} x(t) = X \sin(\Omega t + \phi - \varphi) \iff \bar{X} = X e^{j(\Omega t + \phi - \varphi)} \\ \dot{x}(t) = X\Omega \cos(\Omega t + \phi - \varphi) \iff j\Omega \bar{X} \\ \ddot{x}(t) = -X\Omega^2 \sin(\Omega t + \phi - \varphi) \iff j\Omega j\Omega \bar{X} = -\Omega^2 \bar{X} \end{cases}$$

Rappresento graficamente i numeri complessi associati in 11.



Applicazioni alle vibrazioni forzate smorzate. Sappiamo che l'equazione delle vibrazioni forzate e smorzate data da

$$(12) \quad -m\ddot{x} - c\dot{x} - kx + F\sin(\Omega t + \phi) = 0$$

ammette come soluzione a regime - per qualunque valore di ζ - la

$$(13) \quad \begin{cases} x(t) = X \sin(\Omega t + \phi - \psi) \\ \dot{x}(t) = X\Omega \cos(\Omega t + \phi - \psi) \\ \ddot{x}(t) = -X\Omega^2 \sin(\Omega t + \phi - \psi) \end{cases}$$

Le forze agenti - proiettate sull'asse x - si scrivono allora

$$(14) \quad \begin{cases} f_p = F \sin(\Omega t + \phi) & \text{FORZANTE} \\ f_{im} = -m\ddot{x} = +mX\Omega^2 \sin(\Omega t + \phi - \psi) & \text{FORZA D'INERZIA} \\ f_s = -c\dot{x} = -cX\Omega \cos(\Omega t + \phi - \psi) & \text{FORZA DI SMORZAMENTO} \\ f_e = -kx = -kX \sin(\Omega t + \phi - \psi) & \text{FORZA ELASTICA} \end{cases}$$

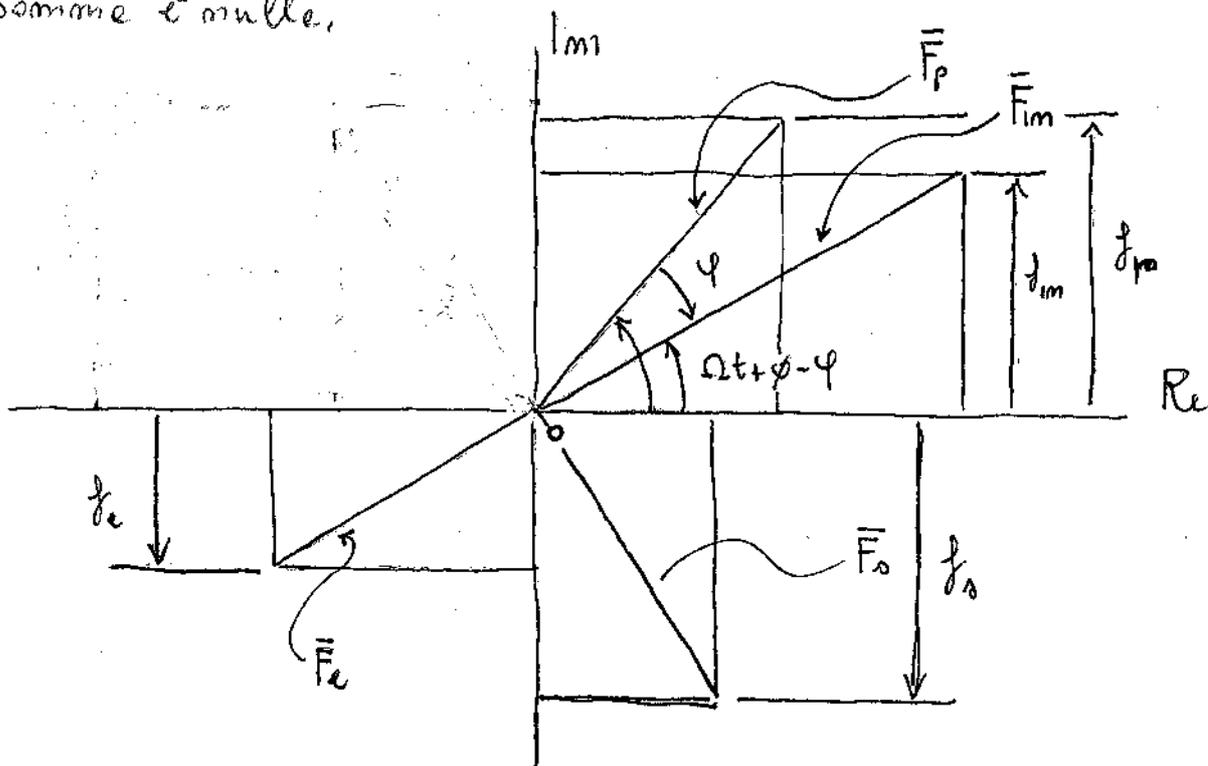
Ricavo allora i numeri complessi associati alle grandezze cinematiche 13:

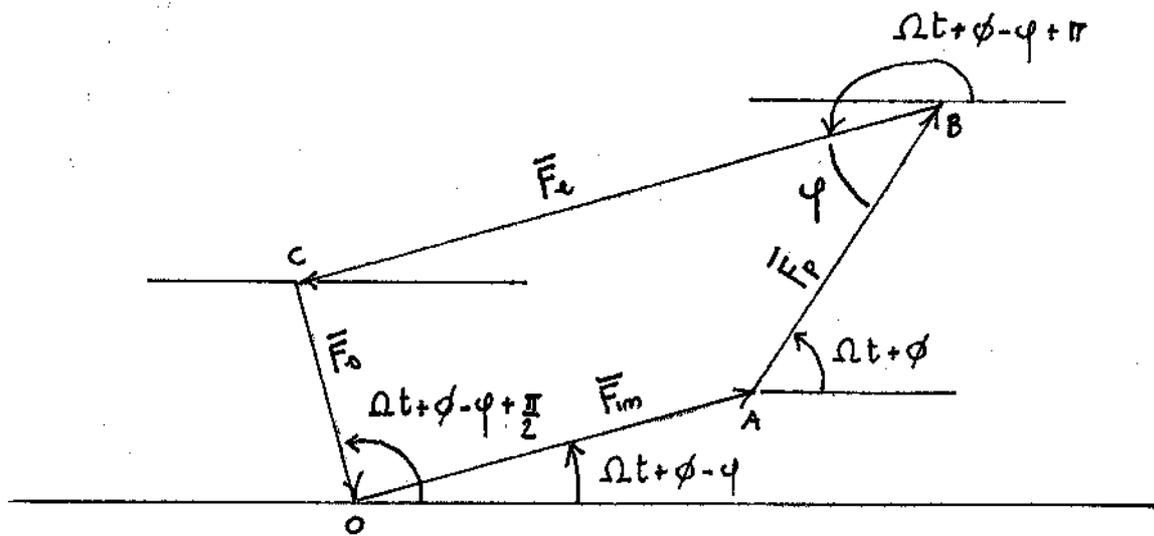
$$\begin{aligned}
 & x(t) \longleftrightarrow \bar{X} = X e^{j(\Omega t + \phi - \varphi)} \\
 15) \quad & \dot{x}(t) \longleftrightarrow j\Omega \bar{X} = j\Omega X e^{j(\Omega t + \phi - \varphi)} = \Omega X e^{j(\Omega t + \phi - \varphi + \pi/2)} \\
 & \ddot{x}(t) \longleftrightarrow j\Omega j\Omega \bar{X} = -\Omega^2 X e^{j(\Omega t + \phi - \varphi)}
 \end{aligned}$$

Ricavo ora i numeri complessi associati alle grandezze dinamiche 14

$$\begin{aligned}
 16) \quad & f_p(t) \longleftrightarrow \bar{F} = F e^{j(\Omega t + \phi)} \\
 & f_{im}(t) \longleftrightarrow -m\Omega^2 X e^{j(\Omega t + \phi - \varphi + \pi)} = \bar{F}_{im} = +m\Omega^2 \bar{X} \\
 & f_s(t) \longleftrightarrow -c\Omega X e^{j(\Omega t + \phi - \varphi + \pi/2)} = \bar{F}_s = -c\Omega \bar{X} j \\
 & f_e(t) \longleftrightarrow -k X e^{j(\Omega t + \phi - \varphi)} = \bar{F}_e = -k \bar{X}
 \end{aligned}$$

Rappresento le forze nel piano complesso considerando che la loro somma è nulla.





Le lunghezze dei vettori sono

$$17) \begin{cases} \overline{OA} = m\Omega^2 X \\ \overline{AB} = F \\ \overline{BC} = kX \\ \overline{OC} = c\Omega X \end{cases}$$

Volemmo ricavare X dalle figure si deduce

$$\begin{cases} \overline{AB} \cos \varphi + \overline{OA} = \overline{BC} \\ \overline{AB} \sin \varphi = \overline{OC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F \cos \varphi + m\Omega^2 X = kX \\ F \sin \varphi = c\Omega X \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = (kX - m\Omega^2 X) / F = X(k - m\Omega^2) / F \\ \sin \varphi = c\Omega X / F \end{cases} \Rightarrow$$

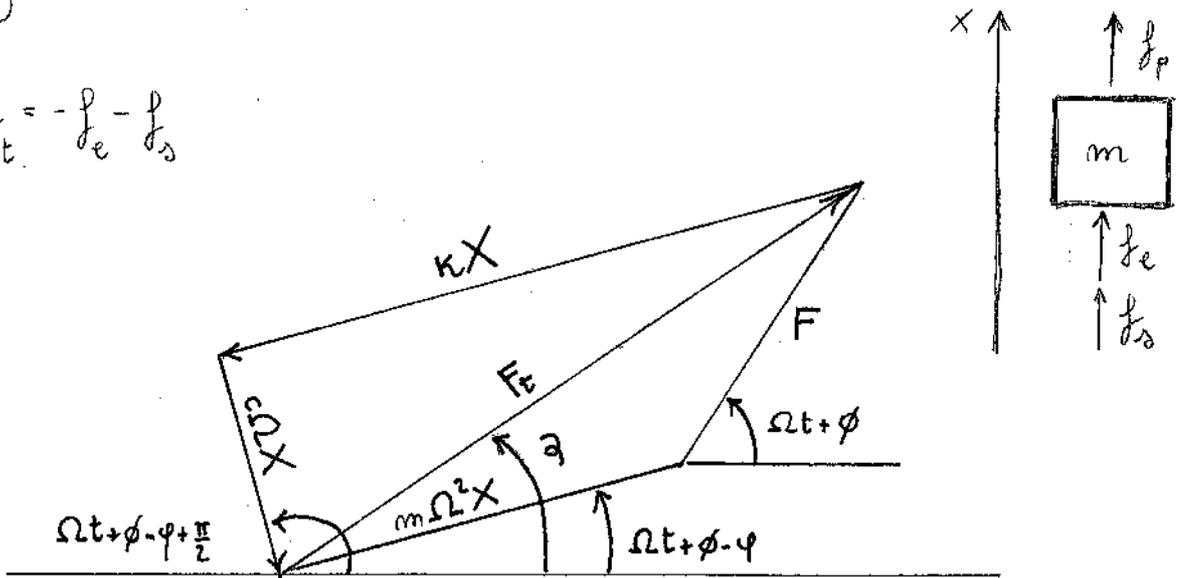
$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = \frac{X^2 (k - m\Omega^2)^2}{F^2} + \frac{c^2 \Omega^2 X^2}{F^2} = \frac{X^2 (k^2 + m^2 \Omega^4 - 2mk\Omega^2 + c^2 \Omega^2)}{F^2} \\ \tan \varphi = \frac{c\Omega X}{X(k - m\Omega^2)} = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2} \end{cases}$$

↓

$$18) \begin{cases} X = \frac{F}{k\sqrt{(1-m^2)^2 + 4\zeta^2 m^2}} \\ \tan \varphi = \frac{2\zeta m}{1-m^2} \end{cases}$$

Applicazione all'isolamento dalle vibrazioni. Nello studio dell'isolamento dalle vibrazioni interessa le forze trasmesse al telaio attraverso le molle e l'organo di smorzamento. La sua proiezione lungo l'asse x vale

$$19) f_t = -f_e - f_s$$



Dalla figura si deduce che

$$20) F_t = \sqrt{k^2 X^2 + c^2 \Omega^2 X^2} = X \sqrt{k^2 + c^2 \Omega^2} = F \frac{\sqrt{1 + (2\zeta m)^2}}{\sqrt{(1-m^2)^2 + (2\zeta m)^2}}$$

$$\begin{cases} F_t \sin \psi = \Omega^2 X \sin(\Omega t + \phi - \psi) + F \sin(\Omega t + \phi) \\ F_t \cos \psi = \Omega^2 X \cos(\Omega t + \phi - \psi) + F \cos(\Omega t + \phi) \end{cases} \Rightarrow$$

$$21) \tan \psi = \frac{\Omega^2 X \sin(\Omega t + \phi - \psi) + F \sin(\Omega t + \phi)}{\Omega^2 X \cos(\Omega t + \phi - \psi) + F \cos(\Omega t + \phi)}$$

La forza trasmessa si scrive allora

$$22) \quad f_t = \frac{F \sqrt{1 + (2\zeta m)^2}}{\sqrt{(1-m^2)^2 + (2\zeta m)^2}} \sin \omega t$$

Reste definito per il COEFFICIENTE DI TRASMISSIBILITÀ

$$23) \quad C_t = \frac{f_t}{F} = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta m)^2}}{\sqrt{(1-m^2)^2 + (2\zeta m)^2}}$$

Per gli sviluppi sulle teorie dell'isolamento delle vibrazioni si rimanda al paragrafo 6.2.